УДК 528.852

ФИЛЬТРАЦИЯ И СЖАТИЕ ГЕОИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ

А. С. ЯРМОЛЕНКО

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Россия

О. В. СКОБЕНКО

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», г. Горки, Беларусь, 213407 e-mail: olga-skobenko@mail.ru

(Поступила в редакцию 23.03.2018)

Построены ортонормированные базисы вейвлет-преобразований и фильтрации информации. Рассмотрен порядок создания вейвлет-фильтров последовательностью сверток, применением КМА-анализа для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. Разработана методика определения значения фильтра в зависимости от точности исходной геоинформации. Реализована практическая возможность вейвлет-фильтрации на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геинформации и изображений, сжатия данных и их фильтрации.

Фильтрация геоинформации необходима при определении отклонений показателей определенного явления от их средних или заданных (нормативных) значений при мониторинге измерений различных явлений. Сжатие геоинформации и ее фильтрация является актуальной проблемой теории математической обработки как геодезической информации (измерений), так и изображений. При этом необходимо максимально использовать полученную информацию и получать конечные результаты с достаточной точностью и минимальными затратами при ее хранении, что связано со сжатием информации. Это важно при работе с геоинформацией в геодезии, землеустройстве, природообустройстве, мониторинге земель, при ведении точного сельского хозяйства [1]. При этом алгоритмы должны обладать простотой и точностью вычислений.

***Ключевые слова:** базис вейвлет-преобразования, свертка, КМ- анализ, фильтрация, сжатие, точность, программа, изображение, поле данных.*

We have constructed orthonormal bases of wavelet transforms and information filtration. We have examined the order of creation of wavelet filters by convolutional sequence, application of MRA-analysis for construction of orthonormal basis of wavelet transform. We have developed a technique for determining the filter value depending on the accuracy of the initial geo-information. We have realized the practical possibility of wavelet filtration on the basis of compiled specific programs for modeling the geoinformation data fields and images, data compression and their filtering.

The filtration of geo-information is necessary for determining the deviations of indicators of a certain phenomenon from their mean or specified (normative) values when monitoring the measurements of various phenomena. Compression of geo-information and its filtration is an actual problem in the theory of mathematical processing of both geodetic information (measurements) and images. At the same time, it is necessary to make maximum use of the obtained information and to get final results with sufficient accuracy and minimum costs when storing it, which is associated with information compression. This is important when working with geo-information in geodesy, land management, environmental monitoring, land monitoring, and while maintaining accurate agriculture. In this case, algorithms must have the simplicity and accuracy of calculations.

***Key words:** basis of wavelet transform, convolution, MRA analysis, filtration, compression, accuracy, program, image, data field.*

Введение

К настоящему времени для моделирования объектов, сжатия и фильтрации информации широко применяются преобразования Фурье [2–7]. Однако даже в своем быстром варианте (быстрое преобразование Фурье - БПФ) оно сопряжено с большим количеством вычислений. В свою очередь в работах [6], [2] отмечается, что в отличие от преобразований Фурье возможны преобразования с другими базисами, восстанавливающие дискретные и непрерывные функции, но значительно сокращающие вычисления. Одним из таких базисов является вейвлетный. И к настоящему времени он постепенно находит практическое применение [8–19]. Следует при этом отметить, что работы [8, 10,11,15,16] носят лишь ознакомительный характер, в основательной работе [9] речь о применении вейвлетов не ведется, но детально описывается большинство фильтров подавления шумов, которые могут применяться при моделировании процессов на основе вейвлетного базиса. В трудах [12–14] приводятся основные теоретические положения по теории вейвлетов, базирующиеся на основе зарубежных исследований. И для создания технологий обработки геоинформации на основе этих работ необходимы дополнительные исследования. Работами [17–19] выполнены значительные исследования по описанию вейвлетами гравитационного поля Земли. В [20] вейвлет-преобразовании используются зарубежные пакеты при неизвестном алгоритме. Перечисленные труды имеют практическое и теоретическое значение при обработке геоинформации, но в них теория вейвлетов не доведена до инженерного уровня их применения. На основе отмеченного в данной статье с целью разработки детальной и доступной технологии применения вейвлетов в обработке геоинформации ставятся следующие задачи; 1) построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация; 2) порядок создания вейвлет-фильтров; 3) построение фильтров последовательностью сверток; 4) применение КМА-анализа для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования; 5) показать практическую возможность вейвлет-фильтрации на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геоинформации, сжатия данных и их фильтрации.

Основная часть

В соответствии с [2] дадим следующие определения.

Оператором циклического сдвига последовательности Z [2, стр. 125] на k позиций вправо является оператор R_k, осуществляющий создание новой последовательности $R_k Z$ по формуле:

$$(R_k Z)(n) = Z(n-k), \tag{1}$$

где n – номер элемента в создаваемой последовательности.

Согласно определения 3.7 и теоремы 3.8 [2] при некоторых заданных векторах U и V, принадлежащих тому же пространству элементов, что и вектор Z, возможно построение ортонормированного базиса вида:

$$B = \{R_{2k}V\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}U\}_{k=0}^{M-1} = \{V, R_2V, R_4V, ..., R_{N-2}V, U, R_2U, R_4U, ..., R_{N-2}U\},$$

(2)

где U, согласно [2] можно назвать **отцовским** вейвлетом, а V-**материнским**, символ $\cup$ логического объединения множеств, $M = N/2$. В данной статье составляющие базиса, построенные по вектору U будем называть отцовскими, а по вектору V-материнскими.

Ортонормированность (2) возможна тогда лишь [2], когда система:

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{U}(n) & \hat{V}(n) \\ \hat{U}(n+M) & \hat{V}(n+M) \end{pmatrix} \tag{3}$$

для $n=0,1,2,\ldots,M-1$ – унитарна.

Под унитарной понимается такая матрица [2], для которой

$$A^{-1} = A^{*} \tag{4}$$

где A^{-1} обратная к A матрица, а A^{*} – сопряженная к A матрица, получаемая взятием комплексно-сопряженных значений от всех элементов матрицы A^T, транспонированной к A.

Построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация. В качестве примера построения ортонормированного базиса примем векторы Хаара [2, 6].

$$U = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, ..., 0)^T \tag{5}$$

$$V = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, ..., 0)^T \tag{6}$$

Поскольку в [2] установлено, что матрицы $A(n)$ (3) для векторов U и V унитарны, то пользуясь правилом (2) построим ортонормированный базис для вейвлет-преобразования вектора Z. Здесь $N=4$ и $M=N/2=2$. Тогда в соответствии с (2),(1) на основании (5),(6) можно составить ортонормированный вейвлет-базис

$$B = (V, R_2V, U, R_2U) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7)

Тогда вейвлет-преобразование на данном этапе будет

$$\hat{Z} = B^{*} Z, \tag{8}$$

а обратное преобразование, следуя (8), имеет вид

$$Z = B^{-1}\hat{Z} = B^{*}\hat{Z} = B^{T}\hat{Z}. \tag{9}$$

Теперь осуществим фильтрацию сигнала, то есть его разложение по отцовским и материнским составляющим вейвлет базиса. Согласно [2, 6] в пространстве с комплексным скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ и ортонормированным базисом $R = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ для любого v этого пространства справедливо:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j \ . \qquad (10)$$

Здесь v соответствует вектору данных *Z*, а базисные векторы u_j – всем столбцам матрицы (7). После подстановки их в (10) получим:

$$Z = Q(Z) + P(Z). \qquad (11)$$

Следуя [2] составляющую высоких частот сигнала представим в виде формулы:

$$Q(Z) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \langle Z, R_{2k}V \rangle R_{2k}V = \langle Z, R_0V \rangle R_0V + \langle Z, R_2V \rangle R_2V + \ldots + \langle Z, R_{N/2-1}V \rangle R_{N/2-1}V \ ,$$

(12)

а составляющую низких частот в виде следующей формулы.

$$P(Z) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \langle Z, R_{2k}U \rangle R_{2k}U = \langle Z, R_0U \rangle R_0U + \langle Z, R_2U \rangle R_2U + \ldots + \langle Z, R_{N/2-1}U \rangle R_{N/2-1}U \ .$$

(13)

Примеры фильтров на основе базисов Шеннона с вещественными и коммплексными числами. Если воспользоваться составляющими векторов $\hat{U}$ и $\hat{V}$ (преобразований Фурье) в [2] то при *N=4* с использованием обратных преобразований Фурье можно по аналогии с (10) - (13) определить высоко – и низкочастотные составляющие для данных примеров и в этих базисах (табл.1).

Таблица 1. **Разложение вектора *Z* по отцовскому и материнскому вейвлетам в различных базисах**

Исходный вектор *Z*	Базисы		
	Хаара	Шеннона 1	Шеннона 2
	P(Z)		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$	1
	Q(Z)		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$	0
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$	0

Из сравнения базисов, приведенных в табл. 1, а также базисов Мейера, Баттла-Лемарье, Добеши [6, стр. 207] преимущество следует отдавать базису Хаара по следующим причинам: базис Хаара прост в вычислении; понятна на его основании и фильтрация сигнала; так низкочастотная часть на первом этапе равна нулевому коэффициенту преобразования Фурье, высокочастотная – соответствует отклонениям сигнала от его середины; в базисах, отличных от Хаара, задаются дополнительные требования к числу *N*. Например в базисах Шеннона оно должно быть кратным 4, а в базисе Хаара достаточно лишь его четности; числом *N* определяется и вид базиса Добеши [2].

Построение фильтров последовательностью сверток. В вейвлет-разложениях (12),(13) замечено, что коэффициенты при $R_{2k}V$, $R_{2k}U$ являются соответствующими скалярными произведениями, которые в виде сверток можно записать так [2,6,7]: $\langle Z, R_{2k}V \rangle = z*\tilde{V}(2k)$, $\langle Z, R_{2k}U \rangle = z*\tilde{U}(2k)$. Настоящие выражения являются теоретической основой **быстрого** вейвлет-преобразования. Тогда фильтр на основе такой свертки строится следующим образом [2], [6]:

1) образуются векторы $\tilde{U}, \tilde{V}$; 2) осуществляются свертки $Z*\tilde{U}, Z*\tilde{V}$; 3) вводится оператор децимации – удаления составляющих с нечетными номерами $D(Z*\tilde{U}), D(Z*\tilde{V})$; 4) реализуется оператор разрежающей выборки - удваивания размера вектора вставкой нуля между двумя смежными значениями $U(D(Z*\tilde{U})), U(D(Z*\tilde{V}))$; 5) Осуществляется фильтрация – строится вектор низкочастотной составляющей в виде свертки. $P(Z) = U*U(D(Z*\tilde{U}))$, и высокочастотной $Q(Z) = V*U(D(Z*\tilde{V}))$; 6) восстанавливается сигнал $Z = P(Z) + Q(Z)$.

На этом заканчивается первый этап разложения сигнала на высоко- и низкочастотные составляющие. Число всех этапов определяется по формуле $p = \log_2 N$. Каждый последующий этап состоит из фазы анализа и фазы синтеза. В **фазе анализа** на этапе *n* осуществляется: 1) ввод вектора $Z_{n-1}^T * \tilde{U}_{n-1}$ и его децимация $Z_n = D\left(Z_{n-1}^T * \tilde{U}_{n-1}\right)$; 2) ввод векторов U_n, V_n нормированного базиса размерности $N_1 = N/2^{n-1}$; 3) осуществляются децимация и разреживание сверток $Z_n^T * \tilde{U}_n, Z_n^T * \tilde{V}_n$. $UDU_n = UD\left(Z_n^T \tilde{U}_n\right), UDV_n = UD\left(Z_n^T \tilde{V}_n\right)$; 4) вычисляются высокочастотная и низкочастотная составляющие вектора Z_n: $Z_n \quad Q\left(Z_n\right) = V_n * U\left(D\left(Z_n * \tilde{V}_n\right)\right) \quad P\left(Z_n\right) = U_n * U\left(D\left(Z_n * \tilde{U}_n\right)\right)$. В фазе **синтеза** осуществляется: 1) разреживание векторов $Q\left(Z_n\right), P\left(Z_n\right)$ (при этом разреживание выполняется числом *n-1* раз до достижения размерности исходного сигнала). $U\left(Q\left(Z_n\right)\right), U\left(P\left(Z_n\right)\right)$; 2) операциями свертки получают высокочастотную и низкочастотную составляющие сигнала на этапе *n* : $Q_n\left(Z\right) = U\left(Q\left(Z_n\right)\right) * U_1$, $P_n\left(Z\right) = U\left(P\left(Z_n\right)\right) * U_1$. Окончательный результат анализа синтеза будет: $Z = P_1\left(Z\right) + \sum_{i=0}^{P-1} Q_{P-i}\left(Z\right)$. Настоящий алгоритм реализован в специально составленной авторами программе ***Sub Вейвлет Анализ Синтез ()***. Сигнал Z можно представить в виде разложения:

$$Z = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \ldots + c_{N-1} b_{N-1} \tag{14}$$

по базису *B* , который представляет собой совокупность ортонормированных базисов [2] $B = \left\{b_i\right\}_{i=0}^{N-1}$. Очевидно, что в этом случае будет $c_i = \left(Z b_i^T\right)$. Задача заключается в том, чтобы определить ортонормированные векторы в разложении (14). В теории вейвлетов [2] вместо (14) принимается следующая запись:

$$Z = \sum_{k=0}^{\left(N/2^{P-1}\right)} c_{1,k}\varphi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{\left(N/2^{P-1}\right)} c_{2,k}\psi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{\left(N/2^{P-1}-1\right)} c_{3,k}\psi_{-p,k} + \ldots + \sum_{k=0}^{\left(N/2^{P-(P-1)}-1\right)} c_{N/2,k}\psi_{-p,k}$$

(15)

Если принять что $p = \log_2 N$, то (15) перепишется в виде:

$$Z = c_{1,0}\varphi_{-p,0} + c_{2,0}\psi_{-p,0} + c_{2,0}\psi_{-p,1} + \ldots + c_{N/2,0}\psi_{-1,0} + c_{N/2,1}\psi_{-1,1} + \ldots + c_{N/2,N/2-1}\psi_{-1,N/2-1} .$$

(16)

Здесь все векторы базиса *B* $\psi_{-j,k}$ записаны слева на право по степени детализации вектора *Z*. В [2] они записаны наоборот справа налево. Построение базисных векторов $\psi_{-j,k}$ осуществляется в следующем порядке [2]: 1) применяется последовательность вейвлет-фильтров U_1, V_1; U_2, V_2; … U_p, V_p; при этом $U_l, V_l \in l^2\left(Z_{N/2}\right)$, например исходя из (5), (6), при *l=2*, будет $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) Каждый из базисов $\psi_{-j,k}$ строится по формуле [2] $\psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j$, где $f_l = g_{l-1} U^{l-1}\left(V_l\right)$, а $g_l = g_{l-1} U^{l-1}\left(U_l\right)$ при начальных значениях, равных $f_1 = V_1$, $g_1 = U_1$. В приведенных выражениях оператор $U^{l-1}\left(\cdot\right)$ означает l-1 – кратное разреживание вектора V_l или U_l . Элементы сверток $f_l\left(n\right)$, $g_l\left(n\right)$ для $n = 0,1,\ldots, N-1$ вычисляются по формулам:

$$f_l\left(n\right) = \sum_{m=0}^{N-1} g_{l-1}\left(m\right) U^{l-1}\left(V_l\right)\left(n-m\right), \qquad g_l\left(n\right) = \sum_{m=0}^{N-1} g_{l-1}\left(m\right) U^{l-1}\left(U_l\right)\left(n-m\right).$$

(17)

КМА – анализ для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. В фундаментальных работах [2,6,7] вейвлет - разложение предполагает наличие масштабирующей и уточняющей функций. В [2] масштабирующая функция еще называется отцовским вейвлетом. В [6, 7], термин «отцовский вейвлет» в определении масштабирующей функции не применяется. В тех же работах [2, 7] уточняющая функция (материнский вейвлет) просто названа вейвлетом.

В системе Хаара в соответствии с [2] отцовскиv вейвлет записан в виде:

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 1, 0 \le x < 1 \\ 0, иначе \end{cases} , \tag{18}$$

материнский вейвлет строится по формуле [2]

$$\psi\left(x\right) = \varphi\left(2x - 1\right) - \varphi\left(2x\right) \tag{19}$$

и, что легко показать, имеет вид

$$\psi\left(x\right) = \begin{cases} -1, 0 \le x < 1/2 \\ 1, 1/2 \le x < 1 \\ 0, иначе \end{cases} . \tag{20}$$

Отцовский и материнский вейвлеты позволяют построить ортонормированный базис вейвлет-преобразования для представления дискретно заданной геоинформации с целью ее обработки. Для этого в вейвлет – теории разработан так называемый кратномасштабный анализ (КМА – анализ). На его основе создается удобный в использовании алгоритм построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. КМА-анализ базируется на функциях:

$$\varphi_{j,k} = 2^{-j/2}\varphi\left(2^{-j}x-k\right); \tag{21}$$

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi\left(2^{-j}x-k\right). \tag{22}$$

Эти формулы приведены в [2, 6, 7, 10]. При этом в приведенных работах показателям степени в (20), (21) приписывается как положительный знак, так и отрицательный, как в нашем случае. В случае отрицательной степени график функции растягивается по оси x, а в случае положительной – сжимается. В работе нас интересует растяжение по оси x, поэтому принята запись степени с отрицательным знаком. При такой записи осуществляется уточнение значений функций в зависимости от числа ортонормированных векторов базиса вейвлет-разложения, т. е. осуществляется увеличение деталей анализируемой информации или увеличение разрешения. поэтому в зарубежной литературе [10] КМА-анализ справедливо называется многоразрешающим анализом (multiresolution analysis). Построение вейвлет–базисов в системе Хаара будем вести на основе (18) – (22) в следующем порядке:

1) построение базисного вектора нулевого приближения φ;

2) построение последующих уточняющих базисных векторов.

1. Построение базисного вектора нулевого приближения

В основу построения всех базисных векторов положим вейвлет - базис вида [3], применяемый нами в разложении (16). Хотя в теории вейвлетов [2–5] допускается возможность построения нескольких базисных векторов нулевого приближения, в данной работе мы ограничимся лишь одним в соответствии с данным разложением. При этом такое разложение наиболее часто применимо в различных рядах, в том числе и при разложении в ряд Фурье.

В соответствии **с разложением (16), принятым здесь за основу**, базисный вектор $\varphi_{-p,k}$, единствен, так как k пробегает значения от *0* до $\left(\left(\frac{N}{2^p}\right)-1\right)$ [2]. Поскольку $N=2^p$, то $k=0$. Следовательно в (21) $j=p$, $k=0$. В соответствии с (18) $0\le 2^{-p}x-k<1$, или $k\le x<(1+k)2^{-p}$. При $k=0$, будет $0\le x<1/2^{-p}$ и составляющие этого вектора определятся по формуле:

$$\varphi_{j,k} = 2^{-p/2}\begin{cases}1, 0\le x<2^p\\ 0, иначе\end{cases}. \tag{23}$$

Таким образом на основе (23) получится вектор:

$$\varphi_{p,0} = 2^{-p/2}\,(1,1,\ldots,1) \tag{24}$$

с количеством одинаковых членов 2^p.

2. Построение последующих уточняющих базисных векторов

Последующие уточняющие базисные векторы вычисляются по (22) с учетом (20). Порядок множества непересекающихся базисных векторов [2] $U\,\psi_{-j,k}\,\Big|_{k=0}^{(N/2^j-1)}$ определяется значением j. Это значение изменяется от *p-1* до *0* с шагом *-1*. Тогда число базисных уточняющих векторов порядка j составит величину $N/2^j$. А значение k будет изменяться от *0* до $N/2^j-1$. Например для $j=p$ будем иметь следующий уточняющий вектор (единственный) $\psi_{-p,0}$. Для $j=l$ уточняющими векторами порядка l будут $\psi_{-l,0}$; $\psi_{-l,1}$; …; $\psi_{-l,(N/2^l-1)}$. Так, при $N=8$ $p=3$ уточняющими векторами порядка $l=1$ при верхнем пределе k равном $N/2^j-1=2^p/2-1=3$ будут $\psi_{-1,0}$; $\psi_{-1,1}$; $\psi_{-1,2}$; $\psi_{-1,3}$. Каждый из этих векторов при определенном k также определяется по (22) с учетом материнского вейвлета (20). Тогда можно записать, что

$$\psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}}\begin{cases}-1, 0\le 2^{-l}x-k<1/2\\ 1, 1/2\le 2^{-l}x-k<1\\ 0, иначе\end{cases}, \quad \text{или} \quad \psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}}\begin{cases}-1, k2^l\le x<(1/2+k)2^l\\ 1, (1/2+k)2^l\le x<(1+k)2^l\\ 0, иначе\end{cases}.$$

(25)

В качестве примера возьмем *p=3, l=1, k=2*. Тогда $\psi_{1,2} = \frac{1}{2}\begin{cases} -1, 4 \le x < 5 \\ 1, 5 \le x < 6 \\ 0, иначе \end{cases}$.

В табл. 2 дан пример вейвлет разложения как методом сверток, так и КМА-методом.

Можно отметить, что каждая составляющая вычислялась по формуле: для низкочастотной части

$P_{i.,j} = 1/2^{p-j} \sum_{i=1}^{N/2^{p-J}} P_{i,j-1}$ и высокочастотной $Q_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i,j}$.

Таблица 2. **Разложение вектора Z по составляющим φ и ψ**

Исходный вектор	Составляющие							
	$c_{1,0}\cdot\varphi_{-3,0}$	$c_{2,0}\cdot\psi_{-3,0}$	$c_{3,0}\cdot\psi_{-3,0}$	$c_{3,1}\cdot\psi_{-2,1}$	$c_{4,0}\cdot\psi_{-1,0}$	$c_{4,1}\cdot\psi_{-1,1}$	$c_{4,2}\cdot\psi_{-1,2}$	$c_{4,3}\cdot\psi_{-1,3}$
4	7,25	-3,25	-1	0	1	0	0	0
2	7,25	-3,25	-1	0	-1	0	0	0
3	7,25	-3,25	1	0	0	-2	0	0
7	7,25	-3,25	1	0	0	2	0	0
10	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	1	0
8	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	-1	0
10	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	-2
14	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	2

Здесь j – номер этапа, i–номер составляющей сигнала в группе (группа состоит соответственно из 2, 4,…2^p, элементов в зависимости от порядкового номера этапа), p-число этапов. Окончательный результат будет $Z = P_1 + \sum_{i=0}^{p-1} Q_{p-i}$, где P_1 - составляющая нулевой частоты (вектор $\psi_{-3.0}$ в примере табл.1), Q_{p-i} – уточняющие составляющие. В приведенных преобразованиях на каждом этапе при нецелом *p* возможен остаток элементов, число которых меньше числа 2^{ip} при ip=1, 2,…,2^p. По этому остатку находится также среднее значение *TZ*, которое записывается в старшей строке p_{ip} на место этого остатка элементов. В последней строке, следующей сразу после строки с номером целой части *p*, обозначаемой через *pf,* находится среднее по всем элементам предыдущей строки P_{pf}. Это среднее является одним и тем же для строки P_{pf+1}. Подстрока q_{pf+1} вычисляется в общем порядке $q_{pf+1} = P_{pf} - P_{pf+1}$.

Исследование эффективности сжатия геоинформации и фильтрации шумов помощью вейвлетов. В основу исследований положены специально составленные авторами программы на языках VISUAL BASIC Excel (VBE) и IDL системы ENVI по сжатию и фильтрации геоинформации. В качестве первого объекта исследований принята модель рельефа, приведенная в [8]. В VBE-программе **Sub МакросВЕЙВЛсИстОш()** истинные высоты точек представлены массивом **cc1(),** а высоты, отягощенные случайными ошибками – массивом **cm().** Также как и в [8] связь настоящих массивов определяется формулой $cm(i) = cc1(i) + delta$, где *i* изменяется от 0 до N – 1, а $delta = Randbetween(-t, +t) * Std$ -функция языка VBE генерирования случайного числа в интервале значений квантиля от $-t$ до $+t$, Std -задаваемый стандарт случайных ошибок (шумов). Именно высоты массива ***cm()*** подвержены вейвлет-разложению по частотам. При вейвлет-сжатии и соответственно фильтрации оставались самые большие по амплитуде члены разложения на всех частотах. Фильтрационный вектор представлен массивом Filt= Array(1, 0.8, 0.6, 0.5, 0.25, 0.15, 0.1, 0). Например, при значении фильтра Filter=Filt(0)=0.8 на всех частотах разложения оставались значения, большие 0.8, остальные значения обнулялись. На выходе формировался отфильтрованный массив высот Tw(). Среднее квадратическое ошибка отфильтрованных высот определялось по формуле $Sko = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (Tw(i) - cc1(i))^2}{N}}$. В табл. 3 приведены значения Sko в зависимости от значения фильтра, Filter и точности отмоделированных высот, величины Std. Оставшаяся информация в процентах вычислена как процентное отношени числа наибольших оставшихся коэффициентов к их общему числу до сжатия, равному 15.

Таблица 3. **Средние квадратические отклонения Sko по каждому фильтру в метрах в зависимости от стандартов Std распределения случайных ошибок высот**

Filter	Оставшаяся информация в процентах	Значения Std				
		0,05	0,1	0,3	0,4	0,5

1	25	0,66	0,88	0,71	0,93	0,94
0,8	33	0,55	0,35	0,63	0,86	0,88
0,6	40	0,23	0,26	0,63	0,86	0,94
0,5	48	0,23	0,26	0,64	0,86	0,94
0,25	51	0,19	0,24	0,63	0,86	0,99
0,15	66	0,15	0,20	0,64	0,86	0,99
0,1	70	0,11	0,17	0,63	0,86	0,99
0	100	0,09	0,18	0,63	0,86	0,99

Для сохранения максимально-высокой точности исходных высот при их вейвлет-разложении сжатие информации недопустимо; даже при отсутствии сжатия (Filter=0) и наличии случайных ошибок среднее квадратическое отклонение результирующих высот больше их стандартного отклонения на входе; сжатие информации можно допускать, но при этом следует учитывать порог понижения точности изображения рельефа; например, при трехкратном сжатии (Filter=0,8) и Std=0,1 среднее квадратическое отклонение высот на выходе Sko = 0,35 больше Std в 3,5 раза, в остальных случаях оно больше в 2 раза.

Одновременно авторами составлена программа ***pro oroi_data_corr24bitWAVE на алгоритмическом языке IDL системы ENVI*** вейвлет-фильтрации (сжатия) изображений.

При большем сжатии различных несовпадений больше и они представляют собой уже шумы, при которых изображение не пригодно к использованию. Таким образом, при сжатии изображения рекомендуется также подобрать вначале фильтр в соответствии с пунктами 1-3 в случае рельефа, или при котором отсутствуют видимые несовпадения. И лишь при нем осуществлять вейвлет-сжатие.

Заключение

Методика расчета значения фильтра для сжатия информации о высотах рельефа может быть принята такой.

1. Определяется по известной методике оценка стандарта высот рельефа Std в виде средней квадратической ошибки съемки рельефа.

2. Для данного объекта определяются средние квадратические отклонения (СКО) по каждому фильтру.

3. Если значение средней ошибки рельефа, полученное как 0,8Std, меньше трети высоты сечения рельефа, то по полученной экспериментально можно выбрать порог (величину СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе при определенном значении фильтра (Filter). Если средняя ошибка рельефа больше трети высоты сечения рельефа и приближается к величине СКО, получаемой при 25–30 процентном сжатии информации (то есть трех и четырехкратном сжатии), то в таком случае значение порога (величины СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе не имеет значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шпаара, Д. Точное сельское хозяйство (Precision agriculture) / Д. Шпаара, А. Захаренко, В. Якушева ; под ред. Д. Шпаара. – СПб. – Пушкин, 2009. – 398 с.

2. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер ; пер. с англ. – М. :БИНОМ, Лаборатория знаний. 2008. – 487 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов т.2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука. – 1978. – 575 с.

4. Мазурова, Е. М. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье / Е. М. Мазурова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – №3. – С. 18–35.

5. Мазурова, Е. М. Двумерное и матричное представление быстрого преобразования Фурье / Е. М. Мазурова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – №4. – С. 3–12.

6. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла; пер. с англ. – М. : Мир, 2005. – 671 с.

7. Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи ; пер. с англ. – М. :Мир, 2001. – 412 с.

8. Ярмоленко, А. С. Фильтрация геоинформации в рядах Фурье / А. С. Ярмоленко, О. В. Скобенко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – №1. – С. 107–113.

9. Шовенгердт, Р. А. Дистанционное зондирование, модели и методы обработки изображений / Р. А. Шовенгерд. – М.: Техносфера, 2010. – 560 с.

10. Журкин, И. Г. Автоматизированная обработка данных дистанционного зондирования: учеб. для вузов / И. Г. Журкин, Н. К. Шавенько ; под общ. ред. И.Г. Журкина. – М.: ООО «Диона», 2013. – 456 с.

11. Дьяконов, В. П. Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. – М.: Солон – Р, 2002. – 448 с.

12. Уэлстид, С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии / С. Уэлстид. – М. : Издательство Триумф, 2003. – 320 с.

13. Воробъев, В. И. Теория и практика вейвлет преобразования / В. И. Воробъев, В. Г. Грибунин. – СПб. : ВУС, 1999. – 204 с.

14. Яковлев, А. Н. Введение в вейвлет-преобразование : учеб. пособие / А. Н. Яковлев. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2003. – 104с.

15. Красильников, Н. П. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений : учеб. пособие / Н. П. Красильников. – СПб БХВ – Петербург, 2011. – 608 с.

16. Малинников, В. А. Анализ методов формирования мультифрактальной меры, основанных на вейвлет-обработке экспериментальных данных / В. А. Малинников, Д. В. Учаев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – №6. – С. 57–61.

17. Большаков, В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В. Д. Большаков, П. А. Гайдаев – Изд. 2, перераб. и доп. – М. : «Недра», 1977. – 367 с.