МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования по специальностям
1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий,
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство*

Горки
БГСХА
2020

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
К93

Одобрено методической комиссией
мелиоративно-строительного факультета 23.10.2019 (протокол № 2)
и Научно-методическим советом БГСХА 27.11.2019 (протокол № 3)

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М. П. Дымков*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*

Курзенков, С. В.
К93 Высшая математика. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве : учебно-методическое пособие / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова. – Горки : БГСХА, 2020. – 125 с.
ISBN 978-985-7231-85-0.

Приведены краткий теоретический материал по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», тестовые задания, варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-7231-85-0

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы сформировать умение самостоятельно рационально организовать свой умственный труд.

Самостоятельная работа студентов по математике способствует лучшему усвоению теоретического материала и методов решения задач.

Предлагаемое пособие содержит теоретические сведения по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», рекомендуемую литературу, задачи для решения на практических занятиях и дома.

Для того чтобы студенты могли оценить уровень своих знаний по разделу «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», в данное пособие включены: тестовые задания, пример модульного задания, а также варианты индивидуальных домашних заданий. После выполнения студентами своего варианта индивидуального задания и проверки его преподавателем предполагается защита этого задания в форме контрольной работы. При этом студент должен показать знание соответствующих теоретических вопросов раздела и приобретенные навыки при решении задач.

Данная разработка является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики для студентов инженерных и экономических специальностей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. пособие: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: БГУ, 1983. – Т. 1. – 462 с.
2. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Астровский, А. И. Высшая математика: учеб. пособие: в 3 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2009. – Ч. 1. – 400 с.
4. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйш. шк., 1992. – 384 с.
5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 3 ч. / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.
6. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак. – Минск: Вышэйш. шк., 2001. – 288 с.
7. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М.: Наука, 1998. – 240 с.

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия представляет собой раздел геометрии, в которой геометрические объекты (фигуры) исследуются методами алгебры на основе метода координат.

Основными понятиями аналитической геометрии являются понятие геометрической фигуры или просто фигуры, и понятие системы координат.

1.1. Системы координат на плоскости

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Одной из таких систем является *прямоугольная (декартова)* система координат. Она задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – *осями*, на каждой из которых:

1) выбрано положительное направление;

2) задан единичный отрезок.

Обычно, единицу масштаба берут одинаковой для обеих осей.

Оси называют *осями координат*, точку их пересечения O – *началом координат*. Одну из осей называют осью *абсцисс* (осью Ox), другую – осью *ординат* (осью Oy) (рис. 1.1). На рисунках обычно ось абсцисс располагают горизонтально, и направленной слева направо, ось ординат – вертикально и снизу вверх. Оси координат делят плоскость на 4 области – *четверти (или квадранты)*.

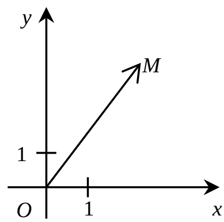

Рис. 1.1

Систему координат обозначают xOy, а плоскость, которую образуют (в которой расположены!) оси координат, называют *координатной плоскостью*.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости xOy. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют радиус-вектором точки M. Пользуясь выбранными осями координат, поставим этой точке M (и радиус-вектору $\overrightarrow{OM}$ также) в соответствие два числа x и y – координаты точки M в заданной системе координат. Для этого из точки M опустим перпендикуляры на оси координат (спроецируем). Длины отрезков проекций обозначим x и у, соответственно. При этом берем знак «+» или «–» в зависимости от положения относительно начала координат O. Таким образом, два числа (x; y) однозначно определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка и наоборот. При этом считаем, радиус-ветор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка $M(x; y)$.

Еще одной важной системой координат является *полярная система*. Она задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом $O\rho$, называемым *полярной осью* и единичным масштабным вектором $\vec{e}$ на этой оси (рис. 1.2).

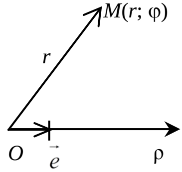

Рис. 1.2

Возьмем на плоскости точку M не совпадающую с полюсом. Положение этой точки определяется парой чисел: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет – против часовой стрелки). Числа (r, φ) – полярные координаты (r – полярный радиус, φ – полярный угол). При этом для изучения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $-\pi < \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$), а полярный радиус – $[0, \infty)$. В этом случае каждой точке (кроме полюса) соответствует единственная пара чисел (r, φ), и наоборот.

Для установления связи между указанными системами координат, совместим полюс O с началом координат системы xOy, а полярную ось $O\rho$ с положительным направлением оси Ox. Пусть точка M имеет координаты (x, y) и в системе xOy и (r, φ) полярной системе, соответственно. Тогда декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi), \end{cases}$$

а обратная связь осуществляется на основании системы уравнений

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}(\varphi) = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

При этом, определяя угол φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$).

1.2. Уравнение линии на плоскости

В аналитической геометрии любую линию на плоскости рассматривают как *множество точек, обладающих общими свойствами*.

Например, *окружность радиуса* R – это множество точек плоскости, равноудаленных на расстояние R от заданной точки, называемой *центром окружности*.

Уравнением линии называется такое уравнение $F(x; y) = 0$, связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами точек линии*.

Для того чтобы составить уравнение линии, на ней выбирают произвольную текущую точку $M(x; y)$ и посредством координат выбранной точки математически выражают свойства, присущие всем точкам линии.

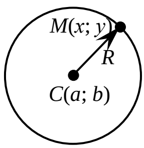

Рис. 1.3

Например, составить уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R (рис. 1.3).

Решение. Выберем на окружности текущую точку $M(x; y)$. Известно, что все точки окружности равноудалены от центра C на расстояние R. Тогда длина вектора будет равна R. Выразим длину вектора $\overrightarrow{CM}$. Так как вектор имеет координаты $\overrightarrow{CM}(x-a; y-b)$, то его длина равна $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$, или $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$.

Таким образом, уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ определяет окружность с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R.

Нетрудно заметить, что, если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение будет выглядеть следующим образом

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения. Так, для того чтобы установить, лежит ли точка $M_0(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки M_0 уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример. Лежат ли точки $A(2; –7)$ и $B(–2; – 6)$ на линии

$$(x-2)^2+(y+4)^2 = 9?$$

Решение. Линией является окружность с центром в точке $C(2; -4)$ и радиусом 3 единицы длины. Подставим в уравнение окружности вместо x и y координаты точек A и B, получим:

$$(2-2)^2+(-7+4)^2=0^2+(-3)^2=9;$$

$$(-2-2)^2+(-6+4)^2=(-4)^2+(-2)^2=20\neq 9.$$

Следовательно, точка A лежит на данной линии, а точка B не лежит на ней.

Уравнение линии на плоскости может быть задано в полярной системе координат уравнением $F(r;\ \varphi) = 0$ или выражено параметрическим способом через некоторый независимый параметр t в виде системы уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$

Например, в полярной системе координат уравнение $r = 2R\cdot\sin(\varphi)$ задает окружность с центром в точке с координатами $(0; R)$ и радиусом R единиц длины.

Эту же окружность, но с центром в начале координат, можно записать в параметрическом виде: $\begin{cases} x = R\cdot\cos(t) \\ y = R\cdot\sin(t). \end{cases}$

Алгебраической линией n-го порядка называется линия, которая определяется алгебраическим уравнением n-й степени (n – наивысший показатель степени переменных, входящих в уравнение).

Рассмотрим алгебраические линии, которые задаются уравнением второй степени, $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$

Если $A^2+B^2+C^2\neq 0$, то данное уравнение на координатной плоскости определяет одну из кривых второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Иначе данное уравнение преобразуется к алгебраическому уравнению первой степени, которое определяет на координатной плоскости прямую линию.

1.3. Построение прямой на плоскости

Известно, что прямую на координатной плоскости однозначно определяют две заданные точки.

Например. Для построения прямой, заданной уравнением $2x-y-4=0$, достаточно знать координаты двух ее произвольных точек.

Результаты вычислений при этом обычно представляют в виде таблицы:

x	0	1
y	–4	–2

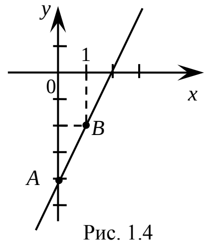

Рис. 1.4

Построим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую (рис. 1.4).

Рассмотрим различные способы аналитического задания прямой линии.

1.4. Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору

Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B)$ (рис. 1.5). Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором прямой*.

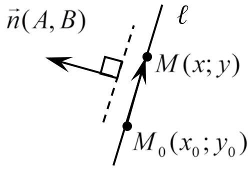

Рис. 1.5

Выберем на прямой ℓ текущую точку $M(x;\ y)$ и найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$. Можно заметить, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны. Это означает, что их скалярное произведение будет равно нулю, т. е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору*.

Например. Уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1;-4)$, будет иметь следующий вид:

$$1\cdot(x+3)-4(y-5)=0.$$

1.5. Общее уравнение прямой

Пусть прямая задана уравнением $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$ Если в нем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получим

$$Ax+By+C=0,$$

где $C=-Ax_0-By_0$.

Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Н а п р и м е р, раскроем скобки и приведем подобные в уравнении $1\cdot(x+3)-4(y-5)=0$, получим $x+3-4y+20=0$, или общее уравнение прямой примет вид $x-4y+23=0$.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой:

$Ax+By=0$ $(C=0)$ – прямая проходит через начало координат;

$Ax+C=0$ $(B=0)$ – прямая параллельна оси Oy;

$By+C=0$ $(A=0)$ – прямая параллельна оси Ox;

$Ax=0$ $(B=C=0)$ – прямая совпадает с осью Oy;

$By=0$ $(A=C=0)$ – прямая совпадает с осью Ox.

1.6. Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m;\, k)$ (рис. 1.6). Ненулевой вектор $\vec{s}$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

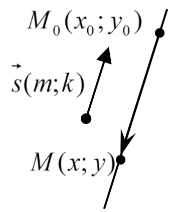

Рис. 1.6

Выберем на прямой ℓ произвольную текущую точку $M(x;\, y)$ и найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\, y-y_0)$. Можно заметить, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны. Это означает, что соответствующие координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

1.7. Параметрические уравнения прямой

Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ следует, что $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{s}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x-x_0=tm,\; y-y_0=tk.$$

В результате получим *параметрические уравнения прямой на плоскости*: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + kt, \end{cases}$

где $\vec{s}(m;k)$ – направляющий вектор прямой;

$(x_0;y_0)$ – координаты точки, принадлежащей данной прямой.

Пример. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3;\ 5)$ параллельно вектору $\vec{s}(2;\ 6)$.

Решение. Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k},\quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{6}.$$

Приравняем в каноническом уравнении прямой пропорции к параметру t и выразим из них переменные x и y:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{6}=t.$$

Получим параметрические уравнения этой же прямой:

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 6t+5. \end{cases}$$

1.8. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M_1(x_1;\ y_1)$ (рис. 1.7).

Выберем на прямой ℓ текущую точку $M(x;\ y)$ и найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\,y-y_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;\ y_1-y_0)$. Заметим, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарны, т. е. можем записать

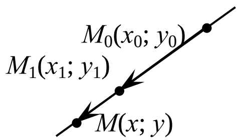

Рис. 1.7

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

Заметим, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;\,y_1-y_0)$.

Если $x_1 = x_0$, то уравнение прямой примет вид $x = x_0$. При $y_1 = y_0$ уравнение прямой будет иметь вид $y = y_1$.

Например, составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -3)$ и начало координат.

Решение. Уравнение прямой имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

где $x_0 = y_0 = 0$; $x_1 = -2$; $y_1 = -3$.

Тогда получим $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}$; $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}$. Избавимся от знаменателей в левой и правой части уравнения, используя свойство пропорции. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. В результате общее уравнение прямой примет вид $3x - 2y = 0$.

1.9. Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат

Пусть искомая прямая ℓ отсекает от осей координат отрезки: a от оси Ox и b – от оси Oy (рис. 1.8). Тогда *уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат* будет иметь вид

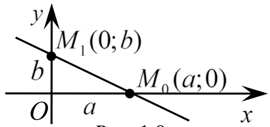

Рис. 1.8

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Пример. Прямая отсекает от координатных осей равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна, 8 см^2.

Решение. Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат, имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Так как прямая отсекает равные отрезки, то $a = b$. Это означает, что образованный при этом прямоугольный треугольник будет иметь площадь, равную $a^2 / 2 = 8$. Таким образом, $a = 4$ и уравнение прямой примет вид $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Умножим обе части уравнения на 4 и перенесем все его слагаемые в левую часть. Тогда общее уравнение прямой будет выглядеть следующим образом:

$$x + y - 4 = 0.$$

1.10. Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом

Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$ (рис. 1.9). При этом она будет задаваться уравнением

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Выразим из данного уравнения числитель правой части: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$ и введем обозначение $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, коэффициент k будем называть *угловым коэффициентом*. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

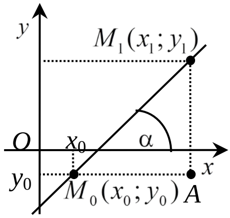

Рис. 1.9

Это уравнение называют *уравнением прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом*.

Допустим, что прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и образует с положительным направлением оси Ox угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0AM_1. Можно заметить, что величина $y_1 - y_0$ определяет величину противолежащего катета к углу α, а $x_1 - x_0$ – величину прилежащего катета. Это означает, что с геометрической точки зрения *угловой коэффициент прямой определяет тангенс угла наклона этой прямой с положительным направлением оси Ox*:

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \mathrm{tg}(\alpha).$$

1.11. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Приведем подобные в уравнении

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В результате получим $y = kx + (y_0 - kx_0)$.

Введем обозначение $b = y_0 - kx_0$. Тогда уравнение прямой (рис. 1.10) примет вид

$$y = kx + b,$$

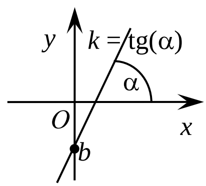

Рис. 1.10

где k – угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox);

b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Решение. Выполним преобразования данного уравнения, приводящие к уравнению прямой в отрезках, отсекаемых ею от осей координат: $12x - 5y = 65$, $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$, $\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$.

Преобразуем общее уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$12x - 5y - 65 = 0,\ \ -5y = 65 - 12x,\ \ y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5},\ \ y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Угловой коэффициент данной прямой $k = \frac{12}{5}$.

1.12. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Рассмотрим две прямые ℓ_1 и ℓ_2 на плоскости (рис. 1.11).

Углом φ *между прямыми* называется острый из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

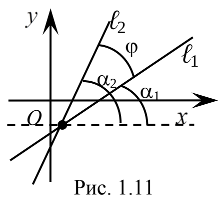

Рис. 1.11

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться по формуле

$$\angle\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

При этом прямые ℓ_1 и ℓ_2 *параллельны,* если $k_1 = k_2$, и *перпендикулярны*, когда $k_1 = -1/k_2$.

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. Выпишем угловые коэффициенты данных прямых: $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ и найдем угол между ними: $\angle\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}\right| = 1$, или $\angle\varphi = \pi/4$.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда угол φ между ними будет равен углу между их векторами нормалей:

$$\angle\varphi = \arccos\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

При этом *условие параллельности прямых* ℓ_1 и ℓ_2 вытекает из коллинеарности их нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и может быть записано в следующем виде:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых ℓ_1 и ℓ_2 следует из ортогональности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и определяется следующим равенством:

$$A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 = 0.$$

Пример. Вычислить угол между прямыми:

а) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$; б) $y=\frac{3}{4}x-2$ и $8x+6y+5=0$.

Решение. а) В данном случае прямые заданы общими уравнениями. Выпишем координаты векторов нормалей этих прямых: $\vec{n}_1(2;-3)$, $\vec{n}_2(5;-1)$. Воспользуемся расчетной формулой

$$\angle\varphi = \arccos\left(\frac{2\cdot5+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{10+3}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{25+1}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{13}{13\cdot\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

б) В данном случае $k_1 = \frac{3}{4}$. Найдем k_2.

$8x+6y+5=0 \Rightarrow 6y=-8x-5 \Rightarrow y=-\frac{8}{6}x-\frac{5}{6} \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}$. Тогда $k_2=-\frac{4}{3}$.

Следует отметить, что угловые коэффициенты прямых связаны соотношением $k_1 = -1/k_2$, т. е. прямые перпендикулярны и $\phi = \frac{\pi}{2}$.

1.13. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой

Пусть две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями соответственно: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и требуется найти точку их пересечения $M_0(x_0; y_0)$. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases}$$

и решим методом Крамера. В результате получим

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются и найти координаты точки пересечения.

Решение. Так как $\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{5}$, т. е. $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются. Координаты точки пересечения прямых найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 12 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 5y = 12. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 24}{15 + 4} = \frac{19}{19} = 1;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{36 + 2}{15 + 4} = \frac{38}{19} = 2.$$

Точка пересечения имеет координаты $M(1; 2)$.

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой ℓ: $Ax + By + C = 0$ (рис. 1.12).

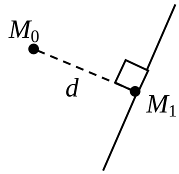

Рис. 1.12

Предположим, что точка $M_1(x_1,\ y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M_0 и M_1 $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку M_0. В качестве направляющего вектора к этой прямой можно взять вектор $\vec{s}(A; B)$. Тогда уравнение перпендикулярной прямой будет иметь вид $\frac{(x - x_0)}{A} = \frac{(y - y_0)}{B}$.

Найдем координаты M_1 как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \dfrac{(x - x_0)}{A} = \dfrac{(y - y_0)}{B}. \end{cases}$$

Для этого запишем второе уравнение системы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0. \end{cases}$$

Подставим правые части второго и третьего равенства в первое уравнение системы и выразим параметр t

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Тогда можем записать

$$x - x_0 = At = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \cdot A;$$

$$y - y_0 = Bt = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \cdot B.$$

Таким образом, $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(2; 1)$ до прямой $4x-3y+10=0$.

Решение. Воспользуемся расчетной формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 2+(-3)\cdot 1+10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|8-3+10|}{\sqrt{16+9}}=\frac{15}{5}=3 \text{ ед. дл.}$$

1.14. Эллипс, его канонические уравнения

Эллипсом называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами эллипса,* есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Величину a для эллипса называют *большей полуосью*, а c – *полуфокусным расстоянием*. Очевидно, что большая полуось эллипса с его полуфокусным расстоянием связаны соотношением $a > c$.

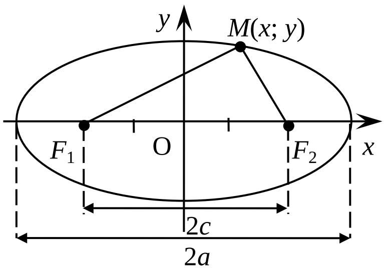

Рис. 1.13

Получим уравнение эллипса, фокусы которого располагаются симметрично относительно начала координат и лежат на одной из осей. Такое уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*.

Для определенности положим, что фокусы эллипса располагаются на оси Ox (рис. 1.13).

Выберем на эллипсе текущую точку $M(x; y)$. Тогда для нее можно записать следующее равенство: $|F_1M|+|F_2M| = 2a$. Перепишем его в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

Сделаем преобразования:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$(x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$xc-a^2=-a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\cdot((x-c)^2+y^2);$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - a^2c^2 + a^2y^2;$$
$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2;$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Введем величину $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Нетрудно заметить, что $b \le a$, поэтому параметр b называют *меньшей полуосью эллипса*.

В результате получим каноническое уравнение эллипса (рис. 1.13) с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

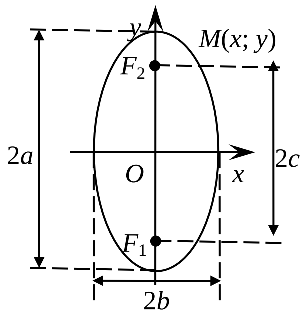

Рис. 1.14

Каноническое уравнение эллипса (рис. 1.14) с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Исследуем форму эллипса.

1. Канонические уравнения эллипса содержат переменные x и y в четных степенях, поэтому любая точка эллипса будет иметь на нем симметричные точки относительно осей координат и начала координат (рис. 1.15). При этом начало координат называют *центром эллипса*.

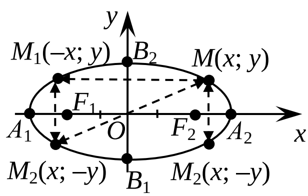

Рис. 1.15

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Для определенности рассмотрим каноническое уравнение эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox. Тогда координаты точек пересечения эллипса с осью Ox должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -a \text{ или } x_2 = a \\ y = 0. \end{cases}$$

В результате получаем две точки $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$.

Точки пересечения эллипса с осью Oy найдем из аналогичной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} y^2=b^2 \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} y_1=-b \text{ или } y_2=b \\ x=0. \end{cases}$$

Искомые точки будут иметь координаты $B_1(0;\ -b)$ и $B_2(0;\ b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 (см. рис. 1.15) называются *вершинами эллипса*, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – соответственно большой и малой осями эллипса.

3. Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной y. В результате получим

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика эллипса, на которые он разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика эллипса, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $-a \le x \le a$.

Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной x, получим

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ .$$

Знак «+» будет соответствовать фрагменту графика эллипса, лежащему правее оси Oy, а «–» – левее этой оси. Равенство определено для значений переменной y, изменяющихся в пределах $-b \le y \le b$.

Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В рассматриваемом уравнении сумма неотрицательных слагаемых $\dfrac{x^2}{a^2}$ и $\dfrac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается, и наоборот.

Аналогичные рассуждения справедливы для эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy.

Следовательно, *эллипс имеет форму овальной замкнутой кривой.*

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Сделать построение.

Решение. Данное уравнение определяет эллипс с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси *Ox*.

Большая его полуось $a = 5$, а меньшая $b = 4$. Найдем полуфокусное расстояние: $c^2 = a^2 – b^2 = 25 – 16 = 9$, т. е. с = 3, а фокусы эллипса находятся в точках $F_1(–3; 0)$, $F_2(3; 0)$. Нижняя вершина эллипса будет находиться в точке $B_1(0; –4)$.

Тогда уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, будет иметь вид

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\ \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\ 4x=-3y-12;\ 4x+3y+12=0\ .$$

Сделаем построения (рис. 1.16).

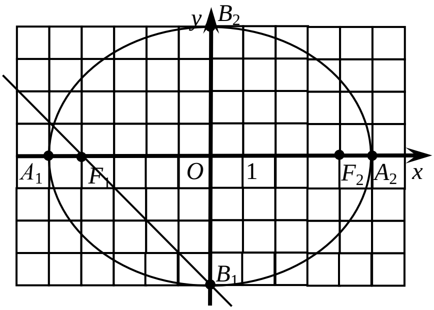

Рис. 1.16

Пример. Построить эллипс с вершиной в начале координат, если известно, что один из его фокусов находится в точке $M(0; -\sqrt{2})$, а большая ось равна 4.

Решение. Так как фокус расположен на оси ординат, а его центр совпадает с началом координат, то каноническое уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, причем большая полуось $a = 2$, а полуфокусное расстояние $c=\sqrt{2}$ (рис. 1.17).

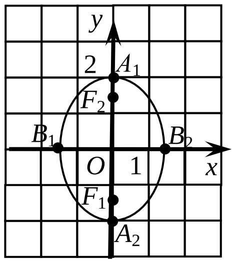

Рис. 1.17

Известно, что меньшая полуось определяется как

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$$

Тогда каноническое уравнение эллипса примет вид $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$

1.15. Окружность, ее канонические уравнения

Окружность – это линия, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром окружности*.

Уравнение окружности с центром в начале координат радиусом R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Очевидно, что данное уравнение является частным случаем канонического уравнения эллипса, когда его большая и меньшая полуоси равны. Действительно, пусть $a = b = R$, тогда каноническое уравнение эллипса можно записать в виде

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на R^2, в результате получим $x^2 + y^2 = R^2$ – уравнение окружности. В данном случае говорят, что фокусы эллипса совпадают с вершиной, а сам эллипс вырождается в окружность.

1.16. Гипербола, ее канонические уравнения

Гиперболой называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами гиперболы*, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Величину a для гиперболы называют *действительной полуосью*, а c – *полуфокусным расстоянием*. Очевидно, что действительная полуось гиперболы меньше полуфокусного расстояния, $a < c$.

Выведем уравнение гиперболы, фокусы которого располагаются симметрично относительно начала координат и лежат на одной из осей. Такое уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*.

Для определенности положим, что фокусы гиперболы располагаются на оси Ox (рис. 1.18).

Выберем на гиперболе произвольную текущую точку $M(x; y)$.

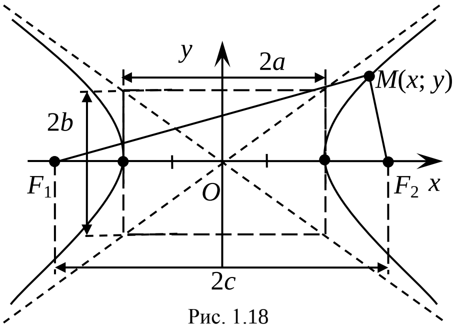

Рис. 1.18

Тогда для нее можно записать следующее равенство: $\left|\,|F_1M| - |F_2M|\,\right| = 2a$ или $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$.

Перепишем его в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a.$$

Выполним преобразования:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2;$$

$$(x+c)^2 - 4a^2 - (x-c)^2 = \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$xc - a^2 = \pm a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\cdot((x-c)^2+y^2);$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2;$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4;$$

$$x^2(a^2-c^2) - a^2y^2 = a^2(a^2-c^2);$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Так как $c > a$, введем следующее обозначение: $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Назовем параметр b *мнимой полуосью гиперболы*, а прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ по оси Ox и Oy, диагонали которого пересекаются в точке начала координат, соответственно – *основным прямоугольником гиперболы*. В результате получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(см. рис. 1.18) с фокусами, расположенными на оси Ox симметрично относительно начала координат.

Каноническое уравнение гиперболы (рис. 1.19) с фокусами и действительной осью $2b$, расположенными на оси Oy симметрично относительно начала координат, и мнимой осью $2a$ на оси Ox имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

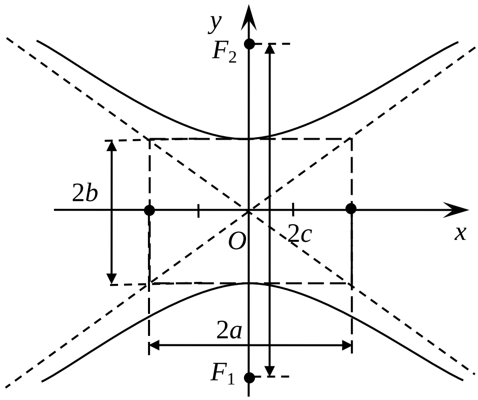

Рис. 1.19

Нетрудно заметить, что гипербола

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

имеет общий прямоугольник с гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Такие гиперболы называют *сопряженными*.

Исследуем форму гиперболы.

1. Канонические уравнения гиперболы содержат переменные x и y в четных степенях, поэтому любая точка гиперболы будет иметь на ней симметричные точки относительно осей координат и начала координат (см. рис. 1.18, 1.19). При этом начало координат называют *центром гиперболы*.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Для определенности рассмотрим каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала коор-

динат на оси Ox. Тогда координаты точек пересечения гиперболы с осью Ox должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -a \text{ или } x_2 = a \\ y = 0. \end{cases}$$

В результате получаем две точки $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$, которые будем называть *вершинами гиперболы*, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ – *действительной осью*.

Точки пересечения гиперболы с осью Oy будем искать из аналогичной системы:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Данная система решений не имеет, а значит, гипербола не пересекает ось Oy.

Отрезок $B_1B_2 = 2b$, соединяющий точки $B_1(0;\ -b)$ и $B_2(0;\ b)$, называется *мнимой осью гиперболы*.

3. Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной y. В результате получим

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика гиперболы, на которые она разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $x \in (-\infty;\ -a] \cup [a;\ \infty)$.

Рассмотрим данные уравнения при неограниченном удалении переменной x влево и вправо от начала координат. В этом случае постоянной величиной, стоящей под знаком корня можно пренебречь и уравнения примут вид

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \pm\frac{b}{a}x.$$

Уравнения $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ определяют прямые, пересекающиеся в начале координат и являющиеся продолжением диагоналей основного прямоугольника гиперболы. Можно показать, что при неограниченном удалении переменной x от начала координат расстояние от точки гиперболы до одной из этих прямых стремится к нулю. Поэтому прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Разрешим уравнение относительно переменной x, получим

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

Знак «+» будет соответствовать фрагменту графика гиперболы, лежащему правее оси Oy, а «–» – левее этой оси. Равенство определено для любого значения переменной y.

4. В рассматриваемом уравнении разность неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при увеличении одного слагаемого другое будет тоже возрастать, т. е. при возрастании $|x|$ увеличивается и $|y|$, и наоборот.

Аналогичные рассуждения справедливы для гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy.

Из приведенных исследований следует, что гипербола – это кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей, имеющая форму, изображенную на рис. 1.18 или рис. 1.19.

При построении гиперболы целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы и отметить ее вершины. Затем продлить диагонали основного прямоугольника гиперболы на бесконечность, получив при этом ее асимптоты. Расставить точки относительно асимптот, характеризующие неограниченное приближение к ним ветвей гиперболы вдоль действительной оси. Соединить плавной линией эти точки с вершинами гиперболы.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, проходящей через точки $A(-5;\ 4)$ и $B(1;\ -1)$. Найти полуоси, фокусы, уравнения асимптот гиперболы. Сделать построения.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Так как точки A и B лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению. В результате подстановки координат точек получаем систему уравнений двух неизвестных a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{b^2} - \dfrac{25}{a^2} = 1 \\ \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2} = 1. \end{cases}$$

Исключим из системы, например, переменную b. Для этого второе уравнение системы умножим на 16 и вычтем из первого уравнения второе. В результате уравнение примет вид $-\dfrac{9}{a^2} = -15,$ откуда $a^2 = \dfrac{3}{5}$.

Подставив a^2 во второе уравнение системы, получим $b^2 = \dfrac{3}{8}$.

Таким образом, каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, проходящей через точки $A(-5;\ 4)$ и $B(1;\ -1)$ (рис. 1.20), будет иметь вид

$$\frac{y^2}{3/8} - \frac{x^2}{3/5} = 1.$$

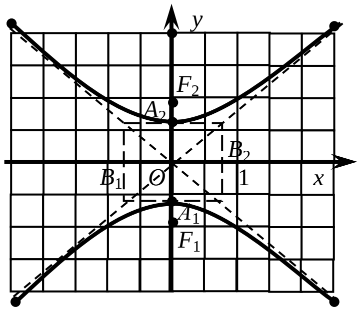

Рис. 1.20

При этом действительная полуось гиперболы $b = \sqrt{\dfrac{3}{8}} \approx 0{,}612$, а мнимая $a = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \approx 0{,}775$.

Найдем полуфокусное расстояние

$$c = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{39}{40}} \approx 0{,}987.$$

Тогда фокусы гиперболы будут находиться в точках

$$F_1\left(0; -\sqrt{\frac{39}{40}}\right) \text{ и } F_2\left(0; \sqrt{\frac{39}{40}}\right).$$

Уравнения асимптот гиперболы примут вид: $y = \sqrt{\dfrac{5}{8}}x$ и $y = -\sqrt{\dfrac{5}{8}}x$.

1.17. Дополнительные сведения об эллипсе и гиперболе

Форма эллипса (гиперболы) определяется характеристикой, которая является отношением полуфокусного расстояния c к большей (действительной) полуоси a и называется *эксцентриситетом* ε:

$$\varepsilon = c/a.$$

Для эллипса эксцентриситет $\varepsilon < 1$, так как $c < a$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$, потому что $c > a$.

Величина $k = b/a$ называется *коэффициентом сжатия* эллипса (гиперболы). Данная величина характеризует сжатие прямоугольника эллипса (гиперболы).

Например, если для эллипса коэффициент сжатия k равен единице – это означает, что рассматриваемый эллипс вписан в квадрат, а значит он превращается в окружность.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением

$$k^2 = 1 - \varepsilon^2.$$

С эллипсом (гиперболой) связаны две прямые, называемые *директрисами*. Их уравнения имеют вид:

$$x = a/\varepsilon; \quad x = -a/\varepsilon.$$

Значение директрис выявляется следующим утверждением: для того чтобы точка лежала на эллипсе (гиперболе), необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса r к расстоянию до соответствующей директрисы d равнялось эксцентриситету ε, т. е. выполнялось равенство $\varepsilon = r/d$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Решение. Найдем квадрат полуфокусного расстояния эллипса $c^2 = 25 - 9 = 16$. Для искомой гиперболы эта же величина будет равна $c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Нам известно, что эксцентриситет гиперболы, с одной стороны, равен $\varepsilon = 2$, а с другой, выражается зависимостью $\varepsilon = c/a$, откуда получим $c = 2a$, или $a^2 = 4$. Тогда $b^2 = 16 - 4 = 12$, т. е. искомое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

1.18. Парабола, ее канонические уравнения

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой, лежащих в той же плоскости.

Ось симметрии параболы, вдоль которой располагаются ее ветви, называется *осью параболы*, а точка пересечения параболы с осью – *вершиной параболы*. Отрезок прямой, соединяющий любую точку параболы с фокусом, называется *фокальным радиусом*.

Выведем *каноническое уравнение параболы* с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо вдоль оси Оx. Для этого фокус параболы расположим на оси Ox, а директрису – параллельно оси Oy так, чтобы фокус и директриса отстояли от оси Oy на равных расстояниях $\frac{p}{2}$ (рис. 1.21).

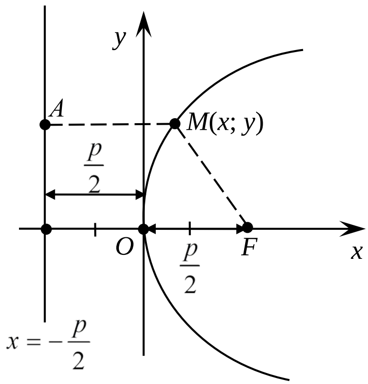

Рис. 1.21

Величину p (расстояние от фокуса до директрисы) будем называть *параметром параболы*.

Из геометрических соотношений $|AM| = |MF|$, $|AM| = x + p/2$, $|MF|^2 = y^2 + (x - p/2)^2$, получаем уравнение $(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$. Раскроем в этом уравнении скобки, приведем подобные слагаемые и выразим y^2. В результате получим

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - x\text{p} + p^2/4,$$

а затем и каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо, вдоль оси Оx

$$y^2 = 2px.$$

По аналогии можно записать следующие уравнения: $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$. Эти уравнения определяют на плоскости параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными соответственно: влево, вдоль оси Оx, вдоль оси Оy вверх и вниз, вдоль оси Оy.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 6.

Решение. Из уравнения параболы определяем, что ее параметр $p = 4$. Тогда расстояние от любой точки параболы до директрисы вычисляется по формуле $d = x + p/2$. Подставив в данное равенство $d = 6$ и $p = 4$, получим $6 = x + 2$, откуда абсцисса искомой точки равна $x = 4$. Подставим это значение в уравнение параболы, в результате ординаты искомых точек $y_{1,2} = \pm 4\sqrt{2}$. Это означает, что на параболе имеются две точки, отстоящие от директрисы на расстоянии, равном 6, это точки $M_1(4; 4\sqrt{2})$ и $M_2(4; -4\sqrt{2})$.

Пример. Построить линию, определяемую уравнением

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{-y} .$$

Решение. Из уравнения видно, что оно определено только при $x \le 0$ и $y \le 0$, т. е. это уравнение задает лишь фрагмент некоторой кривой, лежащей в третьей четверти координатной плоскости.

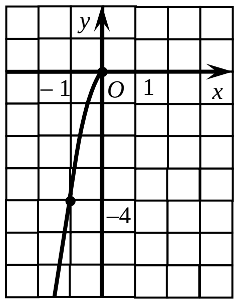

Рис. 1.22

Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения, в результате получим $x^2 = \frac{1}{4}(-y)$ или $y = -4x^2$. Это уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вниз, вдоль оси Оy (рис. 1.22).

Проанализировав результаты, делаем вывод, что данное уравнение определяет на плоскости левую ветвь параболы $y = -4x^2$. Сделаем построения.

Исследуем форму параболы.

1. В канонические уравнения параболы с вершиной в начале координат лишь одна переменная x или y входит в четной степени. Если это переменная x, то осью симметрии параболы будет являться ось Оy, иначе – ось Оx.

2. Для канонического уравнения вершина параболы находится в начале координат.

3. Разрешим относительно переменной y каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо, вдоль оси Оx. В результате получим

$$y = \pm\sqrt{2px}\,.$$

Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика параболы, на которые она разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Так как $p > 0$, то равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $x \in [0; \infty)$ и любого значения переменной y.

1.19. Дополнительные сведения о параболе

В общем виде уравнение параболы может быть представлено как:

$y = ax^2 + bx + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси параллельной Оy;

$x = ay^2 + by + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси параллельной Оx.

Параметр a определяет направление ветвей параболы. Так, если $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх вдоль оси Оy, иначе (если $a < 0$) – вниз вдоль этой оси. Для уравнения $x = ay^2 + by + c$ при $a > 0$ ветви параболы направлены вправо, а при $a < 0$ влево вдоль оси Оx.

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c$ абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_в = –b/2a$. Аналогично $y_в = –b/2a$, можно найти ординату параболы $x = ay^2 + by + c$. Другую координату вершины параболы определяют путем подстановки найденной координаты в правую часть соответствующего равенства.

График параболы характеризуется тремя точками, одна из которых вершина, а две другие располагаются на различных ее ветвях. Поэтому для построения графика параболы обычно придерживаются следующей схемы.

Для определенности положим, что требуется построить график параболы $x = –2y^2 + 8y + 1$. Для этого выполним следующие действия.

1. Определяем, как располагается парабола (направление ее ветвей).

Ветви данной параболы направлены вдоль оси Ox влево.

2. Найдем координаты вершины параболы. Ординату вершины параболы определим по формуле

$$y_в = –b / 2a = –8 / (2 \cdot (–2)) = 2.$$

Абсциссу вершины найдем путем подстановки ординаты в уравнение параболы $x = -2y^2 + 8y + 1$

$$x_в = -2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 1 = 9.$$

Таким образом, вершина параболы будет располагаться в точке с координатами (9; 2).

3. Найдем координаты двух точек, расположенных на разных ветвях параболы.

Данные точки удобно выбрать так, чтобы их ординаты располагались симметрично ординате вершины. В таком случае абсциссы этих точек будут совпадать.

Возьмем в качестве ординат искомых точек $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Тогда абсциссы их будут равны: $x_{1,2} = -2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$. Найденные точки будут иметь координаты (1; 0) и (1; 4).

4. Построим параболу (рис. 1.23).

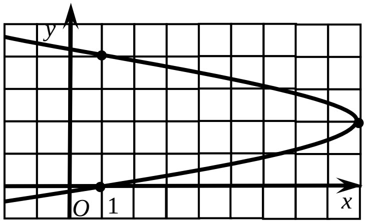

Рис. 1.23

1.20. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общим уравнением кривой второго порядка называется уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Это уравнение всегда определяет на плоскости либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). Однако возможны случаи вырождения, когда эллипс вырождается в окружность или точку, гипербола – в пару пересекающихся прямых, парабола – в пару параллельных прямых.

При этом справедливо утверждение, что любую кривую второго порядка, записанную общим уравнением, можно элементарными преобразованиями на плоскости привести к каноническому виду. К таким элементарным преобразованиям относятся *поворот* и *параллельный перенос* координатных осей.

Поворот координатных осей на угол α. Если в общем уравнении кривой второго порядка $B \neq 0$, то из него можно исключить слагаемое с произведением координат $x \cdot y$ за счет поворота координатных осей на угол $\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2B}{A-C}\right)$. Используя формулы поворота координатных осей $x = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha)$; $y = x'\sin(\alpha) - y'\cos(\alpha)$; общее уравнение кривой второго порядка примет вид

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F = 0,$$

где $A' = A\cos^2(\alpha) + 2B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\sin^2(\alpha)$;

$C' = A\sin^2(\alpha) - 2B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\cos^2(\alpha)$;

$D' = 2D\cos(\alpha) + 2E\sin(\alpha)$;

$E' = 2D\sin(\alpha) + 2E\cos(\alpha)$.

Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса координатных осей. Предположим, что в общем уравнении кривой второго порядка $B = 0$, т. е. оно имеет вид $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Тогда для того чтобы привести данное уравнение к каноническому виду необходимо выполнить ряд действий.

1. Сгруппировать слагаемые по переменным:

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) + F = 0\ .$$

2. Вынести за скобки коэффициенты, стоящие перед квадратами переменных:

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0.$$

3. Выделить полные квадраты в скобках:

$$A\left(\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + C\left(\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) + F = 0.$$

4. Раскрыть внешние скобки и привести подобные:

$$A \cdot \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C \cdot \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F\right) = 0.$$

5. Перенести свободный член уравнения в правую его часть и разделить обе его части на эту величину:

$$\frac{A \cdot \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F} + \frac{C \cdot \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F} = 1.$$

6. Ввести следующие обозначения

$$a^2 = \frac{C^2D^2 + A^2E^2 - 4A^2C^2F}{4A^2C^2}, \quad b^2 = \frac{C^2D^2 + A^2E^2 - 4A^2C^2F}{4A^2C^2}$$

и произвести переход к новой системе координат с помощью преобразований:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{D}{2A} \\ y' = y + \dfrac{E}{2C}. \end{cases}$$

В результате получим каноническое уравнение одной из кривых второго порядка:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

с центром в точке $O'(-\dfrac{D}{2A}; -\dfrac{E}{2C})$, которая является началом новой системы координат.

Пример. Привести уравнение $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ к каноническому виду и построить данную кривую второго порядка.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду.

1. Избавимся от коэффициентов при квадратах переменных, для этого обе части уравнения разделим на 2:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0.$$

2. Сгруппируем слагаемые в уравнении по переменным:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2{,}5y) - 2 = 0.$$

3. Выделим в скобках полные квадраты:

$$((x - 2)^2 - 4) + ((y + \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16}) - 2 = 0.$$

4. Раскроем внешние скобки и приведем подобные:

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 - \frac{121}{16} = 0.$$

5. Перенесем свободный член уравнения в правую его часть и разделим на эту величину обе его части:

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{121}{16}} + \frac{\left(y + \frac{5}{4}\right)^2}{\frac{121}{16}} = 1.$$

6. Введем обозначения:

$$a^2 = \frac{121}{16}, \;\; b^2 = \frac{121}{16}.$$

Выполним параллельный перенос координатных осей

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $\dfrac{(x')^2}{\frac{121}{16}} + \dfrac{(y')^2}{\frac{121}{16}} = 1.$

Это уравнение эллипса, но можно заметить, что его полуоси равны, поэтому в данном случае эллипс вырождается в окружность с радиусом $R = \sqrt{\dfrac{121}{16}} = \dfrac{11}{4}.$

Для того чтобы определить центр окружности и ее построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Тогда центр новой системы координат, а значит, и центр окружности будет находиться в точке $O'(2; -\dfrac{5}{4})$.

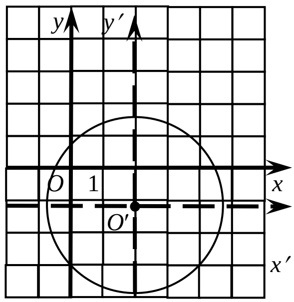

Рис. 1.24

Сделаем построения (рис. 1.24).

Пример. Привести уравнение $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$ к каноническому виду и построить данную кривую второго порядка.

Решение. $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0;\;\; 8(x^2 - x) + 9y^2 - 16 = 0;$

$$8 \cdot ((x - 1/2)^2 - 1/4) + 9y^2 - 16 = 0; \;\; 8 \cdot (x - 1/2)^2 + 9y^2 - 18 = 0;$$

$$8 \cdot (x - 1/2)^2 + 9y^2 = 18; \;\; \frac{(x - 1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

В данном случае $a^2 = \frac{9}{4}$, $b^2 = 2$. Выполним параллельный перенос координатных осей:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $\frac{(x')^2}{9/4} + \frac{(y')^2}{2} = 1$.

Для того чтобы определить центр эллипса и его построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} \\ y = y'. \end{cases}$$

Тогда центр новой системы координат, а значит, и центр окружности будет находиться в точке $O'(\frac{1}{2};0)$.

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1 / 2 вправо, большая полуось a равна 3 / 2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, полуфокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 / 2$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a = 1 / 3$. Фокусы эллипса находятся на оси $O'x'$ и в новой системе имеют координаты $F'_1(-1/2; 0)$ и $F'_2(1/2; 0)$, а в старой – $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.

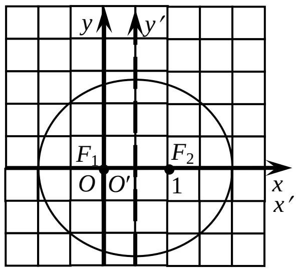

Рис. 1.25

Сделаем построения (рис. 1.25).

Пример. Определить тип кривой $9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0$, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду:

$$9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0,\ \ (9x^2 + 90x) - 16y^2 + 81 = 0;$$

$$9(x^2 + 10x) - 16y^2 + 81 = 0,\ \ 9((x+5)^2 - 25) - 16y^2 + 81 = 0;$$

$$9(x+5)^2 - 225 - 16y^2 + 81 = 0,\ \ 9(x+5)^2 - 16y^2 = 144;$$

$$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

В данном случае $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. Выполним параллельный перенос координатных осей:

$$\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{9} = 1.$

Для того чтобы определить центр гиперболы и построить ее, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' - 5 \\ y = y'. \end{cases}$$

Сделаем построения (рис. 1.26).

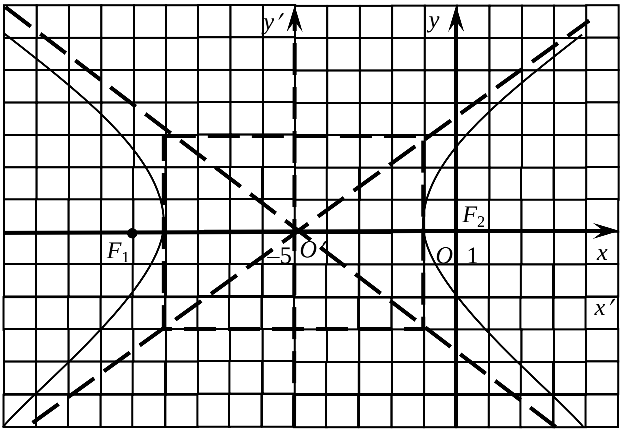

Рис. 1.26

Центр окружности будет находиться в точке $O'(-5;\ 0)$. Действительная полуось гиперболы $a = 4$, мнимая полуось $b = 3$, полуфокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a = 5/4$.

Фокусы гиперболы находятся на оси $O'x'$ и в новой системе имеют координаты $F'_1(-5;\ 0)$ и $F'_2(5;\ 0)$, а в старой – $F_1(-10;\ 0)$ и $F_2(0;\ 0)$.

Пример. Привести уравнение линии к каноническому виду и построить ее: $-2x^2 - y + 8x - 5 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение $y = -2x^2 + 8x - 5$.

$$y = -2(x^2 - 4x) - 5, \quad y = -2((x-2)^2 - 4) - 5, \quad y = -2(x-2)^2 + 3,$$

$$y - 3 = -2(x-2)^2, \quad (x-2)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(y-3).$$

Выполним параллельный перенос координатных осей

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $(x')^2 = -0{,}5y'$. Для того чтобы определить координаты вершины параболы и ее построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3. \end{cases}$$

Получим уравнение параболы с вершиной в точке (2; 3), $2p = \frac{1}{2} \Rightarrow \ p = \frac{1}{4}$. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, т. е. $F\left(2; 2\frac{7}{8}\right)$.

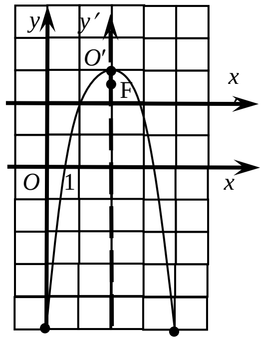

Рис. 1.27

Сделаем построения (рис. 1.27).

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Уравнения поверхности и линии в пространстве

В аналитической геометрии любую поверхность в пространстве можно рассматривать как *геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию*.

Например, *сфера* радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ есть геометрическое место точек пространства, равноудаленных на расстояние R от заданной точки M_0, называемой центром сферы.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y, z – их координатами. Общее свойство, присущее точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, которое связывает их координаты.

Пусть дано уравнение

$$F(x; y; z) = 0. \tag{2.1}$$

Множество всех точек пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению (2.1), называется *поверхностью.* Соотношение (2.1) называется *уравнением* данной *поверхности S*, если соблюдены следующие два условия:

а) координаты любой точки поверхности S удовлетворяют уравнению (2.1);

б) координаты любой точки, не принадлежащей поверхности S, не удовлетворяют этому уравнению.

Переменные x, y, z в уравнении поверхности называются *текущими координатами* точек поверхности.

Например. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R.

Сфера – это геометрическое место точек, равноудаленных от одной данной точки M_0 *на расстояние* R.

Возьмем на поверхности сферы текущую точку $M(x; y; z)$. Расстояние от точки M_0 до точки M равно R, следовательно, $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$.

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + \left(z-z_0\right)^2},$$

то есть $\sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + \left(z-z_0\right)^2} = R,$

или $$\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + \left(z-z_0\right)^2 = R^2. \tag{2.2}$$

Полученное уравнение – это *уравнение сферы с центром в точке* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *радиуса* R.

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ определяет сферу $(x-2)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$ с центром в точке (2; – 4; 0) и радиусом 5.

Линию в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, принадлежащих двум поверхностям $F_1\left(x; y; z\right) = 0$ и $F_2\left(x;\ y;\ z\right) = 0$. Таким образом, *уравнения* любой *линии* в пространстве можно записать в виде системы двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z) = 0 \\ F_2(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Например, прямая, совпадающая с осью *Oy*, определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

а результатом пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $z = \dfrac{1}{2}$

является линия $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Таким образом, данная линия имеет уравнение $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}$ и является окружностью, лежащей в плоскости $z = \dfrac{1}{2}$ с центром в начале координат $O(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Линию в пространстве также можно рассмотреть как траекторию движения точки. В этом случае ее задают *векторным уравнением* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или системой *параметрических уравнений*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

Для того чтобы составить уравнения поверхности или линии в пространстве, на них выбирают текущую точку $M(x;\ y;\ z)$ и посредством координат выбранной точки аналитически выражают свойства, присущие всем точкам рассматриваемой поверхности или линии.

Для изучения формы поверхностей, как правило, пользуются методом сечений. Сущность этого метода заключается в том, что изучаемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям и следующими друг за другом через одинаковые, достаточно малые числовые промежутки. Если для каждого сечения построить его проекцию на соответствующую координатную плоскость, то получится множество кривых, которое называется *картой поверхности в горизонталях*. Эта карта дает некоторое представление как обо всей поверхности, так и о некоторых ее участках.

Например, сгущение линий на карте означает возрастание крутизны поверхности на соответствующем участке.

2.2. Уравнение плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Она может быть задана различными способами, различающимися видом уравнения.

1. С каждой плоскостью связан ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости. Этот вектор называется *нормальным вектором плоскости*. В качестве нормального вектора плоскости можно взять любой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Пусть искомая плоскость L проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B; C)$ (рис. 2.1). Выберем на плоскости текущую точку $M(x;\, y;\, z)$ и найдем координаты вектора:

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0).$$

Можно заметить, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны. Это означает, что их скалярное произведение будет равно нулю.

Таким образом, *уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}(A;\ B;\ C)$, имеет вид

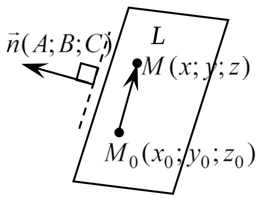

Рис. 2.1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.4)$$

2. В записанном выше уравнении раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. В результате уравнение плоскости примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.5)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Полученное уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

В частности:

– если $D = 0$, то имеем $Ax + By + Cz = 0$. Это уравнение определяет в пространстве плоскость, проходящую через начало координат;

– если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет в пространстве плоскость, параллельную оси Oz. При $B = 0$ уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а при $A = 0$ уравнение $By+Cz+ D = 0$ плоскость, параллельную оси Ox соответственно;

– если $C = D = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ соответствует плоскости, проходящей через ось Oz. В аналогичных случаях уравнения $Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ соответствуют плоскостям, проходящим через оси Oy и Ox;

– если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ описывает плоскость, параллельную Oxy. Соответственно уравнения $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ характеризуют плоскости параллельные Oyz и Oxz;

– уравнения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в пространстве определяют плоскости Oyz, Oxz и Oxy соответственно.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; –4; 1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(1; -5; 2)$. Записать общее уравнение этой плоскости.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярно данному вектору, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Так как по условию $A = 1$, $B = -5$, $C = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -4$, $z_0 = 1$, то подставим эти значения в уравнение и получим

$$1\cdot(x-2)-5\cdot(y+4)+2\cdot(z-1)=0,$$

или общее уравнение плоскости будет иметь вид $x - 5y + 2z – 24 = 0$.

3. В пространстве плоскость однозначно определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Найдем уравнение плоскости L, проходящей через три данные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой.

Выберем в искомой плоскости L текущую точку $M(x; y; z)$ и проведем векторы, выходящие из одной общей точки, например M_0 (рис. 2.2) с концами в точках M, M_1, M_2 соответственно.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_2}(x_2-x_0;\ y_2-y_0;\ z_2-z_0).$$

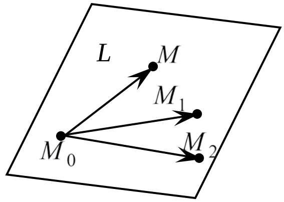

Рис. 2.2

Эти векторы лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарны. Критерием компланарности тройки векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Поэтому *уравнение плоскости L, проходящей через три данные точки*, будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

4. Пусть плоскость отсекает на осях *Ox, Oy* и *Oz* соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через точки $M_0(a;\ 0;\ 0)$, $M_1(0;\ b;\ 0)$ и $M_3(0;\ 0;\ c)$ (рис. 2.3).

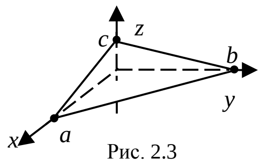

Рис. 2.3

Тогда согласно приведенному выше уравнению можем записать

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получим $bcx - abc +$ $+ abz + acy = 0$, или $bcx + abz + acy = abc$. Разделим обе части уравнения на число, стоящее в правой его части. Тогда равенство примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2.7}$$

Данное уравнение называется уравнением плоскости в отрезках на координатных осях. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Пример 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 3;\ 5)$, $B(-1;\ 2;\ 2)$, $C(2;\ -3;\ 7)$. Определить вектор нормали этой плоскости и построить ее.

Решение. Воспользуемся *уравнением плоскости, проходящей через три данные точки*,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -1-1 & 2-3 & 2-5 \\ 2-1 & -3-3 & 7-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} - (y-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -20x + y + 13z - 48,$$

т. е. искомая плоскость определяется уравнением

$$-20x + y + 13z - 48 = 0, \text{ или } 20x - y - 13z + 48 = 0.$$

Таким образом, одним из векторов нормалей для этой плоскости будет являться вектор $\overline{n}(20;\ -1;\ -13)$. Для построения плоскости преобразуем ее уравнение к уравнению в отрезках на осях координат:

$$20x - y - 13z + 48 = 0,\ 20x - y - 13z = -48, \text{ или } \frac{x}{-48/20} + \frac{y}{48} + \frac{z}{48/13} = 1 .$$

Данная плоскость (рис. 2.4) отсекает от осей координат следующие отрезки: $a = -\dfrac{48}{20} \approx -2{,}4$ от оси Ox, $b = 48$ от оси Oy, $c = \dfrac{48}{13} \approx 3{,}69$ от оси Oz.

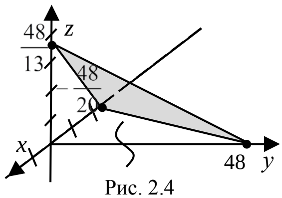

Рис. 2.4

2.3. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до плоскости

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

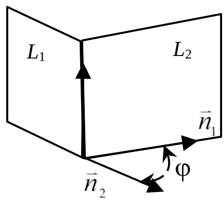

Рис. 2.5

Углом между плоскостями (рис. 2.5) будем считать угол между их нормальными векторами $\bar{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2; B_2; C_2)$, который определятся по формуле

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \qquad (2.8)$$

Если плоскости параллельны, то векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны и их координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (2.9)$$

Эти равенства являются *условием параллельности двух плоскостей*.

Если же плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (2.10)$$

Это равенство является *условием перпендикулярности двух плоскостей.*

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(2;\,4;\,-1)$ параллельно плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости равен $\overline{n}(3;\,-2;\,1)$. Так как искомая плоскость параллельна заданной, то в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять этот же вектор. Подставим координаты точки A и вектора $\overline{n}$ в уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$$3(x-2) - -2(y-4) + (z+1) = 0 \text{ или } 3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Пример 4. Определить угол между плоскостями $2x + y - 2z + 3 = 0$ и $x + y - 5 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами и определяется по формуле (2.8):

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Запишем нормальные векторы для данных плоскостей: $\overline{n}_1(2;\,1;\,-2)$, $\overline{n}_2(1;\,1;\,0)$. Подставим координаты этих векторов в формулу (2.8):

$$\cos(\varphi) = \frac{2\cdot1 + 1\cdot1 + (-2)\cdot0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Следовательно, $\varphi = 45°$.

Пример 5. Даны пары плоскостей:

а) $3x - 4y + 5z - 3 = 0$ и $6x - 8y + 10z + 5 = 0$;

б) $2x - y + 5z - 5 = 0$ и $4x + 3y - z + 1 = 0$;

в) $x - 3y + z - 1 = 0$ и $2x + 4y - 3z + 2 = 0$.

Определить, какие из них параллельны, а какие – перпендикулярны.

Решение. 1. Запишем нормальные векторы плоскостей:

$\overline{n}_1(3;\,-4;\,5)$ и $\overline{n}_2(6;\,-8;\,10)$. Так как координаты векторов пропорциональны: $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{5}{10}$, то выполняется условие параллельности плоскостей (2.9), т. е. плоскости параллельны.

2. Нормальными векторами плоскостей являются следующие векторы $\overline{n}_1(2;\,-1;\,5)$ и $\overline{n}_2(4;\,3;\,-1)$. Скалярное произведение векторов $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=2\cdot4+(-1)\cdot3+5\cdot(-1)=0$, что является условием перпендикулярности плоскостей (2.10). Следовательно, плоскости перпендикулярны.

3. Плоскости имеют нормальные векторы $\overline{n}_1(1;\,-3;\,1)$ и $\overline{n}_2(2;\,4;\,-3)$. Координаты этих векторов не пропорциональны, т. е. $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-3}{4}\neq\dfrac{1}{-3}$, и скалярное произведение векторов не равно нулю: $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=$ $=1\cdot2+(-3)\cdot4+1\cdot(-3)\neq0$. Следовательно, заданные плоскости не параллельны и не перпендикулярны.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ *до плоскости*, которая задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.11)$$

Пример 6. Найти расстояние d от точки $A(4;\,-6;\,6)$ до плоскости $3x-5y+5z-13=0$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.11)

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot4-5\cdot(-6)+5\cdot6-13|}{\sqrt{9+25+25}}=\frac{|59|}{\sqrt{59}}=\sqrt{59}.$$

2.4. Прямая в пространстве

С любой прямой в пространстве связан ненулевой вектор, который лежит на этой прямой или ей параллельный.

Такой вектор называется *направляющим вектором прямой* и обозначается $\vec{s}(l;\,m;\,n)$.

По аналогии с уравнением прямой в плоскости *уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *параллельно вектору* $\vec{s}(l;\ m;\ n)$ *в пространстве* (или *канонические уравнения прямой*), могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим данные равенства как пропорции с коэффициентом пропорциональности t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t, \text{ или } \frac{x-x_0}{l}=t, \quad \frac{y-y_0}{m}=t, \quad \frac{z-z_0}{n}=t$$

и выразим из них текущие координаты точки, принадлежащей заданной прямой. В результате получим *параметрические уравнения прямой:*

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{2.13}$$

Пример 7. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;\ -2;\ 3)$ параллельно вектору $\vec{s}(2;\ -1;\ 3)$.

Решение. По условию $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, $l=2$, $m=-3$, $n=1$.

Подставим эти величины в канонические (2.12) и параметрические (2.13) уравнения прямой. В результате получим:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=3+t \end{cases} \text{ и } \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}.$$

Рассмотрим случай, когда прямая в пространстве задается двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда по аналогии с уравнением прямой на плоскости у*равнения прямой, проходящей через две точки*, имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.14}$$

Пример 8. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;\ -3;\ 2)$ и $M_2(-1;\ 2;\ 4)$.

Решение. Подставим координаты заданных точек в уравнения (2.14): $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y-(-3)}{2-(-3)}=\dfrac{z-2}{4-2}$, или $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-2}{2}$. Последние уравнения являются каноническими уравнениями прямой, где $x_0=1$, $y_0=-3$, $z_0=2$, $l=-2$, $m=5$, $n=2$. Подставим в параметрические уравнения прямой и получим искомые уравнения:

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+5t \\ z=2+2t. \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Такой способ задания прямой в пространстве называется *общими уравнениями прямой*.

Часто на практике требуется от общих перейти к каноническим уравнениям прямой. В этом случае координаты произвольной точки M_0 прямой можно определить из приведенной выше системы, придав одной из ее неизвестных произвольное значение (например, $z=0$). Так как плоскости не параллельны, а искомая прямая перпендикулярна векторам $\vec{n}_1(A_1;\, B_1;\, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;\, B_2;\, C_2)$, то за ее направляющий вектор можно принять векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 9. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения произвольной точки прямой примем ее координату $x=0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений:

$$\begin{cases} y=3z-1 \\ 4y-z-7=0, \end{cases} \begin{cases} y=3z-1 \\ 12z-4-z-7=0, \end{cases} \begin{cases} y=3z-1 \\ z=1, \end{cases} \begin{cases} y=2 \\ z=1, \end{cases} \text{ т. е. } A(0;\,2;\,1).$$

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}\ .$$

Тогда канонические уравнения прямой будут иметь следующий вид:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Пример 10. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Разрешим данную систему относительно x и y. Первое уравнение умножим на (-2):

$$\begin{cases} -4x - 2y + 10z - 6 = 0 \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Сложим со вторым и получим: $-x + 6z - 4 = 0$, или $x = 6z - 4$. Подставим в первое уравнение: $2(6z-4) + y - 5z + 3 = 0$, или $y = -7z + 5$.

Полученные равенства разрешим относительно z: $z = \dfrac{x+4}{6}$ и $z = \dfrac{y-5}{-7}$. Тогда можно записать $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z}{1}$. Получены канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух данных плоскостей.

2.5. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть даны две прямые (рис. 2.6), заданные уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

и $$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

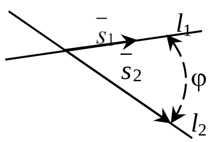

Рис. 2.6

где $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$ – их направляющие векторы.

Углом между прямыми будем считать угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$, который определяется по формуле

$$\cos(\varphi) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (2.15)$$

Прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$. Эти соотношения являются *условием параллельности двух прямых*.

Две прямые взаимно перпендикулярны, если их направляющие векторы $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$ ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 .$$

Это равенство выражает *необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых*.

Пример 11. Даны пары прямых:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{4}$ и $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{-8}$;

б) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ и $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z}{-8}$;

в) $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+4}{1}$ и $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Определить, какие из этих пар прямых параллельны, а какие – взаимно перпендикулярны. В случае если прямые не являются параллельными или перпендикулярными, определить угол между ними.

Решение. 1. Направляющие векторы прямых $\vec{s}_1(2;\, -3;\, 4)$ и $\vec{s}_2(-4;\, 6;\, -8)$. Координаты векторов пропорциональны: $\dfrac{-4}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{-8}{4}$. Так как условие параллельности прямых выполняется, то прямые параллельны.

2. Направляющими векторами прямых являются $\vec{s}_1(3;\, -2;\, 1)$ и $\vec{s}_2(4;\, 2;\, -8)$. Их скалярное произведение равно нулю: $3\cdot 4 + (-2)\cdot 2 +$

$+1\cdot(-8)=0$. В данном случае выполняется условие перпендикулярности прямых, т. е. прямые взаимно перпендикулярны.

3. Координаты направляющих векторов $\vec{s}_1(1;\ 0;\ 1)$ и $\vec{s}_2(2;\ -2;\ 1)$ прямых не пропорциональны и скалярное произведение этих векторов не равно нулю, т. е. прямые не параллельны и не перпендикулярны. Найдем угол между прямыми, который равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos(\varphi)=\frac{1\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Следовательно, $\varphi=45°$.

2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть заданы прямая уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ (рис. 2.7).

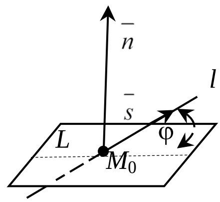

Рис. 2.7

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Определяется он по формуле

$$\sin(\varphi)=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,. \tag{2.16}$$

Если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор $\vec{s}(l;\ m;\ n)$ прямой и нормальный вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ плоскости ортогональны. Следовательно, равенство нулю скалярного произведения этих векторов $Al+Bm+Cn=0$ является *условием параллельности прямой и плоскости.*

Если же прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{s}(l;\ m;\ n)$ и $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ коллинеарны и соотношение $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ является *условием перпендикулярности прямой и плоскости*.

Пример 12. Даны прямая и плоскость:

а) $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{-2}$ и $3x-4y+z-3=0$;

б) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ и $2x+y-4z+1=0$;

в) $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$ и $2x-4y+2z-9=0$.

Определить, какие из заданных пар параллельны или перпендикулярны. В случае если прямая и плоскость не являются параллельными или перпендикулярными, определить угол между ними.

Решение. 1. Направляющим вектором прямой является вектор $\bar{s}(-6;8;-2)$, а нормальным вектором плоскости – вектор $\bar{n}(3;-4;1)$. Координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{3}{-6}=\frac{-4}{8}=\frac{1}{-2}.$$

Следовательно, прямая перпендикулярна плоскости.

2. Координаты направляющего вектора $\bar{s}(3;-2;1)$ прямой и нормального вектора $\bar{n}(2;1;-4)$ плоскости удовлетворяют условию параллельности прямой и плоскости: $2\cdot 3+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 1=0$. Это означает, что прямая параллельна плоскости.

3. Координаты направляющего вектора $\bar{s}(-1;-1;2)$ прямой и нормального вектора $\bar{n}(2;-4;2)$ плоскости не удовлетворяют ни условию параллельности, ни условию перпендикулярности прямой и плоскости. Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin(\varphi)=\frac{\left|2\cdot(-1)+(-4)\cdot(-1)+2\cdot 2\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются под углом $\varphi=30°$.

В случае, когда требуется найти координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве, выполняют приведенные ниже вычисления.

1. Так как искомая точка принадлежит и плоскости, и прямой, то необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

2. Для этого канонические уравнения прямой преобразуют к параметрическому виду:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \qquad (2.17)$$

3. Подставим в четвертое уравнение системы правые части первых трех равенств, получим

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0.$$

Выразим из него значение параметра t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}. \qquad (2.18)$$

4. В результате подстановки значения параметра в правые части первых трех равенств получим координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве:

$$x=x_0-l\cdot\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn},$$

$$y=y_0-m\cdot\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn},$$

$$z=z_0-n\cdot\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}.$$

Пример 13. Известно, что прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-5}{2}$ и плоскость $x+2y-z-1=0$ пересекаются в точке P. Найти координаты этой точки.

Решение. Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим: $\frac{x-2}{3}=t,\quad \frac{y+4}{2}=t,\quad \frac{z-5}{2}=t,$ или $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-4+2t \\ z=5+2t. \end{cases}$

Полученные выражения для $x,\ y,\ z$ подставим в уравнение плоскости и найдем параметр t:

1-й способ: $2+3t+2(-4+2t)-(5+2t)-1=0,\ 5t-12=0,\ t=\frac{12}{5};$

2-й способ: $t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}=-\frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)-1\cdot 5-1}{1\cdot 3+2\cdot 2-1\cdot 2}=\frac{12}{5}.$

Найденный параметр t подставим в параметрические уравнения плоскости и найдем координаты пересечения прямой и плоскости:

$$x=2+3\cdot\frac{12}{5}=9\frac{1}{5},\quad y=-4+2\cdot\frac{12}{5}=\frac{4}{5},\quad z=5+2\cdot\frac{12}{5}=9\frac{4}{5}.$$

Таким образом, точка $P(9\frac{1}{5};\ \frac{4}{5};\ 9\frac{4}{5})$ пересечения прямой и плоскости найдена.

3. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И ДОМАШНИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1.

1. Определить, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$, а какие не лежат на ней. Построить данную прямую.

2. Точки $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ и P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$ и их абсциссы соответственно равны числам: 4, 0, 2, –2 и –6. Определить ординаты этих точек. Построить данную прямую.

3. Точки $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$ и Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$ и их ординаты соответственно равны числам: 1, 0, 2, –1, 3. Определить абсциссы этих точек. Построить данную прямую.

4. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой. Построить эти прямые.

5. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

6. Даны вершины треугольника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$. Составить уравнения его сторон и медиан.

7. Даны вершины треугольника $M_1(2;-2)$, $M_2(3;-5)$, $M_3(5;7)$. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

8. Даны прямые: 1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4) $3x-5y-2=0$. Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые.

9. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $x+2y-5=0$ и $3x-2y+1=0$ перпендикулярно к прямой $2x+3y+7=0$.

11. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ и составляющую с положительным направлением оси Oy угол $\varphi=120^\circ$. Построить эту прямую.

12. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=-4$ и составляющей с осью Ox угол $\varphi=45^\circ$.

13. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная ее угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

1) $k=\frac{2}{3}$, $b=3$; 2) $k=3$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-2$;

4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$; 5) $k=-2$, $b=-5$; 6) $k=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$.

14. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$;

4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.

15. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки:

а) $M_1(2;-5)$, $M_2(3;2)$; б) $P(-3;1)$, $Q(7;8)$; в) $A(5;-3)$, $B(-1;6)$.

Домашнее задание к занятию 1.

1. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельно прямой $x + 3y = 0$. Определить направляющий и нормальный векторы прямой, а также ее угловой коэффициент и угол, образованный ею с положительным направлением оси Ox.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $x - 4y + 5 = 0$ и через точку $A(-2; 3)$. Определить направляющий и нормальный векторы прямой, ее угловой коэффициент. Сделать построения.

4. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

5. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

Практическое занятие 2.

1. Определить угол φ между двумя прямыми:

а) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; б) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;

в) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$; г) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.

2. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

а) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; б) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;

в) $6x - 15y = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$; г) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 1 = 0$.

3. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$; 2) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$;

3) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$; 4) $2x + y - 1 = 0$, $4x + 2y + 7 = 0$.

4. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой: 1) параллельной данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

5. Даны вершины треугольника $M(2; 1)$, $N(-1; -1)$, $P(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

6. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;

б) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

в) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;

г) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

7. Найти точку M_1, симметричную точке $M_2(8;-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3;-4)$ и $B(-1;-2)$.

8. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;5)$, $B(2;0)$, $C(3;1)$. Составить уравнения стороны *AC*, высоты *CK* и медианы *BM*. Записать систему неравенств, определяющую внутренние точки треугольника.

Домашнее задание к занятию 2.

1. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Определить: 1) уравнения, длины его сторон и их угловые коэффициенты; 2) угол при вершине *A* в радианах; 3) уравнение медианы *AE*; 4) уравнение высоты *AD* и ее длину. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на медиану, проведенную из вершины *B*.

2. Найти точку *Q*, симметричную точке $P(-5;\,13)$ относительно прямой $2x = 3y + 3$.

3. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь. Сделать построения.

4. Определить угол φ между прямыми $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$.

Практическое занятие 3.

1. Написать уравнение окружности радиуса R с центром в точке

а) $R = 3,\ M(0;0)$; б) $R = 4,\ M(-4;-1)$.

2. Какие из точек $M_1(1;\ 3)$; $M_2(8;\ -1)$; $M_3(0;\ 1)$; $M_4(-2;\ 3)$; $M_5(0;\ 1)$; $M_6(-4;\ -4)$ лежат внутри окружности $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$?

3. Найти полуоси и фокусы эллипса.

а) $10x^2 + 6y^2 = 60$; б) $25x^2 + 4y^2 = 100$;

в) $4x^2 + 9y^2 = 36$; г) $x^2 + 10y^2 = 10$.

Построить линии.

4. Найти координаты фокусов эллипса и делать построения:

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$; б) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$;

в) $\frac{x^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$; г) $\frac{(x+3)^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$.

5. Написать уравнение эллипса с фокусами в точках F_1, F_2 и полуосью, равной a:

а) $F_1(4;2),\ F_2(8;2),\ a=5;$ б) $F_1(-3;1),\ F_2(1;1),\ a=3;$

в) $F_1(2;3),\ F_2(-4;3),\ a=4.$

Сделать построения.

6. Найти полуоси и координаты фокусов гиперболы:

а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$ б) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1;$

в) $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1;$ г) $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{2}=1.$

Сделать построения.

7. Написать уравнение параболы с вершиной в точке $O(0;\ 0)$ и параметром p, если

а) парабола направлена ветвями вправо и $p=2;$

б) парабола направлена ветвями влево и $p=0{,}25;$

в) парабола направлена ветвями вверх и $p=3.$

8. Найти фокус и уравнение директрисы параболы:

а) $y^2=6x;$ б) $x^2=4y;$ в) $2x=3y^2;$ г) $y^2=-4x.$

Домашнее задание к занятию 3.

1. Написать уравнение окружности радиусом R с центром в точ- ке M:

а) $R=1,\quad M(-5;\ 0)$; б) $R=6,\quad M(-1;\ 2)$.

2. Построить кривые второго порядка на координатной плоскости:

а) $4x^2+9y^2=36$; б) $x^2-10y^2=10$;

в) $-4x^2+9y^2=36$; г) $5x^2+2y^2=10$.

Показать фокусы и полуоси.

3. Найти параметр p, фокус и уравнение директрисы параболы:

а) $y^2=-3x;$ б) $y^2=5x;$ в) $x^2=4y;$ г) $x^2=0{,}25y.$

Сделать построения.

Практическое занятие 4.

1. Найти радиус и центр окружности:

а) $x^2+y^2+8x-6y-11=0;$ б) $2x^2+2y^2+4x+8y-6=0;$

в) $3x^2+3y^2-12y=0;$ г) $x^2+y^2-6x-7=0.$

2. Выяснить, как расположена прямая $2x - y + 3 = 0$ относительно окружности (пересекает, касается или проходит вне окружности):

а) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 50 = 0$.

3. Преобразовать заданные уравнения к каноническому виду и построить соответствующие линии:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $5x^2 + 2y^2 - 50x - 8y - 27 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

г) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

4. Найти параметр p, координаты вершины, фокуса и уравнения директрисы параболы:

а) $y = 4x^2 - 8x = 3$; б) $y = 2x^2 - 6x + 7$;

г) $x = 2y^2 + 4y + 1$; г) $x = 5y - y^2$.

5. Записать уравнение параболы с фокусом в точке F и директрисой, заданной уравнением

а) $F(2;\ 0)$, $x + 4 = 0$; б) $F(2;\ 6)$, $x - 4 = 0$;

в) $F(2;\ 6)$, $y - 10 = 0$; г) $F(3; -4)$, $y = 0$.

6. Построить линии, определяемые уравнениями

а) $x = 6\sqrt{1 - y^2}$; б) $y = -8\sqrt{1 - x^2}$; в) $y = 7\sqrt{x}$; г) $x = -5\sqrt{y}$.

Домашнее задание к занятию 4.

Преобразовать заданные уравнения к каноническому виду и построить соответствующие линии или их части:

а) $8x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 199 = 0$; б) $y = x^2 - 3x + 4$;

в) $8x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 24 = 0$; г) $y = -\dfrac{1}{5}\sqrt{x^2 + 3}$;

д) $x^2 + 2y^2 + 2x + 8y - 12 = 0$; е) $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{y^2 + 9}$;

Практическое занятие 5.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;\ 1;\ -1)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}(1;\ -2;\ 3)$.

2. Даны две точки $A(3;\ -1;\ 2)$ и $B(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;\ 3)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3;\ -1;\ 4)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ -1;\ -1)$ и $C(2;\ 0;\ 2)$.

5. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости, а какие перпендикулярные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0,\ \ 2x-3y+5z+3=0;$

2) $4x+2y-4z+5=0,\ \ 2x+y+2z-1=0;$

3) $x-3z+2=0,\ \ 2x-6z-7=0;$

4) $3x-y-2z-5=0,\ \ x+9y-3z+2=0;$

5) $2x+3y-z-3=0,\ \ x-y-z+5=0;$

6) $2x-5y+z=0,\ \ x+2z-3=0.$

6. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\ \ \ x+y\sqrt{2}-z+3=0;$

2) $3y-z=0,\ \ \ 2y+z=0;$

3) $6x+3y-2z=0,\ \ x+2y+6z-12=0;$

4) $x+2y+2z-3=0,\ \ 16x+12y-15z-1=0.$

7. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x+ly+3z-5=0,\ \ mx-6y-6z+2=0;$

2) $3x-y+lz-9=0,\ \ 2x+my+2z-3=0;$

3) $mx+3y-2z-1=0,\ \ 2x-5y-lz=0$.

8. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x-5y+lz-3=0,\ \ x+3y+2z+5=0;$

2) $5x+y-3z-3=0,\ \ 2x+ly+1=0;$

3) $7x-2y-z=0,\ \ lx+y-3z-1=0.$

9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

10. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось Ox и точку $M_1(4;\ -1;\ 2)$;

2) через ось Oy и точку $M_2(1;\ 4;\ -3)$;

3) через ось Oz и точку $M_3(3;\ -4;\ 7)$.

11. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7;\ 2;\ -3)$ и $M_2(5;\ 6;\ -4)$ параллельно оси Ox;

2) через точки $P_1(2;\ -1;\ 1)$ и $P_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно оси Oy;

3) через точки $Q_1(3;-2;\ 5)$ и $Q_2(2;\ 3;\ 1)$ параллельно оси Oz.

12. Найти точки пересечения плоскости $2x-3y-4z-24=0$ с осями координат.

13. Дано уравнение плоскости $x+2y-3z-6=0$. Написать для нее уравнение «в отрезках». Построить эту плоскость.

14. Плоскость проходит через точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$ и $M_2(-3;\ 2;\ 1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

15. Вычислить расстояние d от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(-2;\ -4;\ 3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $M_2(2;\ -1;\ -1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) $M_3(3;-6;7)$, $4x-3z-1=0$.

16. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

1) $\begin{matrix} x-2y-2z-12=0, \\ x-2y-2z-6=0; \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 2x-3y+6z-14=0, \\ 4x-6y+12z+21=0; \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} 2x-y+2z+9=0, \\ 4x-2y+4z-21=0; \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} 16x+12y-15z+50=0, \\ 16x+12y-15z+25=0. \end{matrix}$

Домашнее задание к занятию 5.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 4;\ -5)$ параллельно двум векторам $\overrightarrow{a_1}\left(3;\ 1;\ -1\right)$ и $\overrightarrow{a_2}\left(1;\ -2;\ 1\right)$.

2. Плоскость проходит через точку $A(6;\ -10;\ 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках» и построить ее.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $A(2;\ -3;\ 3)$ параллельно плоскости Oxy;

2) через точку $B(1;\ -2;\ 4)$ параллельно плоскости Oxz;

3) через точку $C(-5;\ 2;\ -1)$ параллельно плоскости Oyz.

4. Вычислить расстояние d от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; -1; 1)$; $M_2(-2; 1; 3)$; $M_3(4; -5; -2)$.

Практическое занятие 6.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;\ 0;\ -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}\left(2;\ -2;\ 5\right)$; 2) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

2. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;-2;1)$, $B(3;1;-1)$. Определить координаты направляющего вектора этой прямой.

3. Даны вершины треугольника $A(1;3;-2)$, $B(4;1;0)$, $C(3;-3;2)$. Составить уравнение медианы CM.

4. Найти острый угол между прямыми: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

5. Доказать:

1) параллельность прямых $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0\\ x-y-5z-8=0;\end{cases}$

2) перпендикулярность прямых $\begin{cases} x=2t+1\\ y=3t-2\\ z=-6t+1\end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0\\ 4x-y-5z+4=0.\end{cases}$

6. Даны точки $A(2;\ 3;\ -4)$, $B(1;\ 0;\ 6)$, $C(-3;\ -1;\ 5)$. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно отрезку BC.

7. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\ -4;\ 1)$ параллельно оси Oz.

8. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;\ 1;\ -4)$ параллельно прямой $x=2-3t,\ \ y=-1+t,\ \ z=5t$.

9. Составить канонические и параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

10. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;\,-4;\,2)$ параллельно прямой $\begin{cases} 7x+y+z-8=0 \\ 6x+y-2z-7=0. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 6.

1. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;\,-1;\,-3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}(2;\,-2;\,4)$; 2) прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) прямой $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-2t+3 \\ z=5t+2. \end{cases}$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;\,3;\,-5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

3. Найти угол между прямыми

1) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+6}{7}=\dfrac{z+2}{8}$ и $\dfrac{x+5}{-8}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+4}{7}$;

2) $\begin{cases} x=2t+5 \\ y=-t+2 \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

Практическое занятие 7.

Прямая и плоскость в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\,-1;\,-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\,-3;\,-5)$ параллельно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

3. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\,-3;\,1)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+4z-5=0$.

4. Вычислить угол между прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-6}{1}$ и плоскостью $4x+2y-2z+5=0$.

5. При каком значении C прямая $\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ будет параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

6. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ будет перпендикулярна к прямой $x=3+2t,\ y=5-3t,\ z=-2-2t$?

7. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6},\quad 2x+3y+z-1=0;$

2) $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5},\quad x-2y+z-15=0;$

3) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2},\quad x+2y-2z+6=0.$

8. Найти проекцию точки $P(2;\,-1;\,3)$ на прямую

$$x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2.$$

9. Найти координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(6;\,1;\,7)$ на плоскость $2x-y+3z-4=0$.

10. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;\,3;\,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

11. Найти точку N, симметричную точке $M(3;\,-2;\,5)$ относительно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+9}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

Домашнее задание к занятию 7.

1. При каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ будет параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

2. При каких значениях L и C прямая $\dfrac{x-2}{L}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ будет перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

3. Найти координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(3;\ 2;\ 0)$ на прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{-2}$.

4. Найти проекцию точки $P(5;\ 2;\ -1)$ на плоскость

$$2x-y+3z+23=0.$$

5. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;\ -5;\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;\ 4;\ 6)$ и $M_2(-2;\ -17;\ -8)$.

4. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(N - (15 + 2G); 3)$, $B(G; (-1)^N \cdot 6)$, $C(-1; G - 4)$.

Требуется найти:

а) длины и уравнения сторон треугольника;

б) выписать координаты направляющих и нормальных векторов сторон треугольника и их угловые коэффициенты;

в) $<$ A при G = 1 или 4, $< B$ при G = 2 или 5, $< C$ при G = 3 или 6;

г) уравнение медианы CE при G = 1 или 4, AE при G = 2 или 5, BE при G = 3 или 6;

д) уравнение и длину высоты BD при G = 1 или 4, CD при G = 2 или 5, AD при G = 3 или 6;

е) точку пересечения найденной высоты и медианы;

ж) сделать построения.

2. Привести уравнение к каноническому виду, определить полуоси, полуфокусное расстояние и построить линию.

$$(N - 16) \cdot x^2 + (-1)^N \cdot y^2 + 2(G - 4) \cdot y + 2 \cdot G \cdot x - (N - 15) = 0.$$

3. Даны точки $A(N - 16; 1; G)$, $B(-G; -5; 1)$, $C(0; N - 20; 0)$, $M(2; 0; -1)$.

Требуется найти:

1) уравнение плоскости Q, проходящей через точку C перпендикулярно вектору AB;

2) уравнение плоскости *W*, проходящей через точки *B, C, M*;

3) угол между плоскостями *Q* и *W*;

4) расстояние от точки *M* до плоскости *Q*;

5) канонические уравнения прямой *l*, проходящей через точку *M* перпендикулярно плоскости *Q*;

6) угол, образованный прямой *l* с плоскостью *W*;

7) точку пересечения прямой *l* с плоскостью *Q*.

5. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M* перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

1.1. *M*(1; 2), $\vec{n}$ (3; 4).

1) $4(x-2)+3(x-1)=0$; 2) $1(x-3)+2(x-4)=0$;

3) $2(x-4)+1(x-3)=0$; 4) $3(x-1)+4(x-2)=0$.

1.2. *M*(–1; 0), $\vec{n}$ (2; –3).

1) $2(x+1)-3y=0$; 2) $-1(x-2)=0$;

3) $-3(x+1)+2(y+0)=0$; 4) $y+3=0$.

1.3. *M*(–5; 1), $\vec{n}$ (3; 1).

1) $1(x+5)+3(y-1)=0$; 2) $-5(x-3)+1(y-1)=0$;

3) $3(x+5)+y-1=0$; 4) $x+5+y=0$.

1.4. *M*(5; 2), $\vec{n}$ (4; 2).

1) $2(x-2)+5(y-4)=0$; 2) $5(x-4)+2(y-2)=0$;

3) $4(x-5)+2(y-2)=0$; 4) $2(x-4)+4(y-5)=0$.

1.5. *M*(7; –2), $\vec{n}$ (1; –3).

1) $7(x-1)-2(y+3)=0$; 2) $x-7-3(y+2)=0$;

3) $-2(x-7)-3y=0$; 4) $-3(x+2)+7(y-1)=0$.

1.6. *M*(4; 3), $\vec{n}$ (5; 6).

1) $5(x-4)+6(y-3)=0$; 2) $4(x-5)+3(y-6)=0$;

3) $6(x-4)+5(y-3)=0$; 4) $3(x-6)+4(y-5)=0$.

1.7. *M*(2; –3), $\vec{n}$ (–4; 7).

1) $2(x+4)-3(y-7)=0$; 2) $-4(x-2)+7(y+3)=0$;

3) $-3(x+7)-4(y-2)=0$; 4) $7(x-2)-4(y+3)=0$.

1.8. $M(1;\ \ 1)$, $\vec{n}\,(2;\ 3)$.

1) $x+y=0$; 2) $x+y-5=0$;

3) $2x+3y=0$; 4) $2(x-1)+3(y-1)=0$.

1.9. $M(2;\ \ 1)$, $\vec{n}\,(–1;\ 4)$.

1) $1(x+1)+2(y-4)=0$; 2) $4(x-2)-1(y-1)=0$;

3) $2(x+1)+1(y-4)=0$; 4) $-1(x-2)+4(y-1)=0$.

1.10. $M(3;\ \ –5)$, $\vec{n}\,(6;\ 7)$.

1) $6(x-3)+7(y+5)=0$; 2) $3(x-6)-5(y-7)=0$;

3) $-5(x-7)+6(y-3)=0$; 4) $3x-5y+13=0$.

1.11. $M(5;\ \ 1)$, $\vec{n}\,(–1;\ –3)$.

1) $-(x-5)-3(y-1)=0$; 2) $5(x+1)+y+3=0$;

3) $5x-y-2=0$; 4) $-3(x-1)-1(y-5)=0$.

1.12. $M(–6;\ \ –2)$, $\vec{n}\,(8;\ 5)$.

1) $-2(x+6)+5(y-8)=0$; 2) $-6(x-8)-2(y-5)=0$;

3) $8(x+6)+5(y+2)=0$; 4) $8(x+2)-2(y+6)=0$.

1.13. $M(–9;\ \ 1)$, $\vec{n}\,(4;\ 3)$.

1) $3(x+1)+4(y+9)=0$; 2) $4(x+9)+3(y-1)=0$;

3) $4(x+9)-3(y-1)=0$; 4) $1(x+3)-9(y-4)=0$.

1.14. $M(–5;\ \ 2)$, $\vec{n}\,(1;–7)$.

1) $-5x+y-5=0$; 2) $-5(x-1)+2(y-2)=0$;

3) $-7(x+1)+2(y+5)=0$; 4) $1(x+5)-7(y-2)=0$.

1.15. $M(3;\ \ –1)$, $\vec{n}\,(8;\ 1)$.

1) $-1(x-3)+8(y-1)=0$; 2) $3(x-8)-1(y-1)=0$;

3) $3x-y=0$; 4) $8(x-3)+1(y+1)=0$.

1.16. $M(1;\ \ 0)$, $\vec{n}\,(3;\ 5)$.

1) $3(x-1)+5y=0$; 2) $3x=0$;

3) $5y=0$; 4) $x+5(y-3)=0$.

1.17. $M(7;\ \ –1)$, $\vec{n}\,(6;\ 5)$.

1) $5(x+1)+6(y-7)=0$; 2) $7(x-6)-1(y-5)=0$;

3) $6(x-7)+5(y+1)=0$; 4) $-1(x-5)+7(y-6)=0$.

1.18. $M(1;\ -2)$, $\vec{n}\,(11;\ 1)$.

1) $-2(x+1)+11(y-1)=0$; 2) $11(x-1)+1(y+2)=0$;

3) $1(x-11)-2(y-1)=0$; 4) $1(x+2)+1(y-11)=0$.

1.19. $M(-3;\ -2)$, $\vec{n}\,(2;\ -2)$.

1) $2(x+3)-2(y+2)=0$; 2) $-3(x-2)-2(y+2)=0$;

3) $-2(x+3)-3(y+2)=0$; 4) $2x-3(y+2)=0$.

1.20. $M(4;\ -5)$, $\vec{n}\,(6;\ -1)$.

1) $6(x-4)-1(y+5)=0$; 2) $4(x-6)-5(y+1)=0$;

3) $-1(x+5)+6(y-4)=0$; 4) $-5(x+1)+4(y-6)=0$.

1.21. $M(-7;\ 1)$, $\vec{n}\,(5;\ 6)$.

1) $1(x-6)-7(y-5)=0$; 2) $-7(x-5)+1(y-6)=0$;

3) $6(x+7)+5(y-1)=0$; 4) $5(x+7)+6(y-1)=0$.

1.22. $M(2;\ -1)$, $\vec{n}\,(3;\ -4)$.

1) $-1(x+4)+2(y+1)=0$; 2) $2(x-3)-1(y+4)=0$;

3) $3(x-2)-4(y+1)=0$; 4) $4(x+1)+3(y-2)=0$.

1.23. $M(5;\ 2)$, $\vec{n}\,(7;\ 1)$.

1) $5(x-7)+2(y-1)=0$; 2) $7(x-5)+1(y-2)=0$;

3) $7(x+1)+1(y+2)=0$; 4) $2(x-5)-1(y-7)=0$.

1.24. $M(1;\ -4)$, $\vec{n}\,(6;\ 2)$.

1) $6(x-1)+2(y+4)=0$; 2) $1(x-6)-4(y-2)=0$;

3) $-4(x-2)+6(y-1)=0$; 4) $2(x+4)+1(y-6)=0$.

1.25. $M(2;\ -3)$, $\vec{n}\,(-5;\ 3)$.

1) $2(x+5)-3(y-3)=0$; 2) $-5(x-2)+3(y+3)=0$;

3) $-3(x+3)+5(y-2)=0$; 4) $3(x-5)-3(y+2)=0$.

1.26. $M(4;\ 7)$; $\vec{n}\,(1;\ 2)$.

1) $2(x+1)+7(y+4)=0$; 2) $4(x-1)+7(y-2)=0$;

3) $1(x-4)+2(y-7)=0$; 4) $7(x-4)+2(y-1)=0$.

1.27. $M(7;\ 6)$, $\vec{n}\,(-4;\ -5)$.

1) $6(x+5)+7(y+6)=0$; 2) $7(x+4)+6(y+5)=0$;

3) $-5(x-6)-4(y-7)=0$; 4) $-4(x-7)-5(y-6)=0$.

1.28. $M(-8;\ 9)$, $\vec{n}\,(4;\ 3)$.

1) $9(x+8)+3(y-4)=0$; 2) $-8(x-4)+9(y-3)=0$;

3) $3(x-4)+9(y+8)=0$; 4) $4(x+8)+3(y-9)=0$.

1.29. $M(-7;\ -1)$, $\vec{n}\,(5;\ 2)$.

1) $5(x+7)+2(y+1)=0$; 2) $-7(x-5)-1(y-2)=0$;

3) $2(x+5)+7(y+1)=0$; 4) $-1(x-2)-7(y+5)=0$.

1.30. $M(-1;\ 2)$, $\vec{n}\,(7;\ 10)$.

1) $7(x+1)+10(y-2)=0$; 2) $-1(x-7)+2(y-10)=0$;

3) $10(x+1)+7(y-2)=0$; 4) $2(x-10)-1(y-7)=0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;7)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(-3;\ 5)$.

Решение. Используем уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору: $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0.$ Подставим в уравнение исходные данные: $A=-3, B=5, x_0=-2, y_0=7$.

Получим $-3\left(x+2\right)+5\left(y-7\right)=0 \Rightarrow -3x-6+5y-35=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x+5y-41=0$ или $3x-5y+41=0.$ Ответ: $3x-5y+41=0.$

Задание 2. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку P, и является параллельной вектору $\vec{s}$:

2.1. $P(1;\ -1)$, $\vec{s}\,(2;\ 3)$.

1) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}$; 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}$;

3) $2(x-1)+3(y+1)=0$; 4) $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-3}{-1-1}$.

2.2. $P(2;\ 3)$, $\vec{s}\,(5;\ 1)$.

1) $\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y-3}{1-2}$; 2) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}$;

3) $5(x-2)+3(y-1)=0$; 4) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}$.

2.3. $P(7;\ -1)$, $\vec{s}\,(3;\ 2)$.

1) $\frac{x-7}{3}=\frac{y+1}{2}$; 2) $\frac{x-3}{7}=\frac{y-2}{1}$;

3) $3(x-7)+2(y+1)=0$; 4) $\frac{x-7}{3-7}=\frac{y+1}{2+1}$.

2.4. $P(5; 2)$, $\vec{s}\,(9; 8)$.

1) $\frac{x-2}{8}=\frac{y-5}{9}$; 2) $\frac{x-9}{5}=\frac{y-8}{2}$;

3) $\frac{x-5}{9}=\frac{y-2}{8}$; 4) $\frac{x-8}{2}=\frac{y-9}{5}$.

2.5. $P(10; –1)$, $\vec{s}\,(3; 2)$.

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-10}{3}$; 2) $\frac{x-3}{10}=\frac{y-2}{-1}$;

3) $\frac{x-10}{3}=\frac{y+1}{2}$; 4) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{10}$.

2.6. $P(7; 3)$, $\vec{s}\,(4; 5)$.

1) $\frac{x-7}{4}=\frac{y-3}{5}$; 2) $\frac{x-4}{7}=\frac{y-3}{5}$;

3) $\frac{x-3}{7}=\frac{y-4}{5}$; 4) $\frac{x-5}{3}=\frac{y-7}{4}$.

2.7. $P(–1; 4)$, $\vec{s}\,(–2; –3)$.

1) $\frac{x+3}{4}=\frac{y+2}{-1}$; 2) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{4}$;

3) $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{-3}$.

2.8. $P(5; –3)$, $\vec{s}\,(–7; 2)$.

1) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-7}$; 2) $\frac{x+7}{5}=\frac{y-2}{-3}$;

3) $\frac{x-5}{-7}=\frac{y+3}{2}$; 4) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+7}{5}$.

2.9. $P(-9;\,1)$, $\vec{s}\,(-2;\,-3)$.

1) $\dfrac{x+2}{-9}=\dfrac{y+3}{1}$; 2) $\dfrac{x+9}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}$;

3) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+9}{2}$; 4) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{9}$.

2.10. $P(15;\,2)$, $\vec{s}\,(-7;\,-6)$.

1) $\dfrac{x+7}{15}=\dfrac{y+6}{2}$; 2) $\dfrac{x-15}{-7}=\dfrac{y-2}{-6}$;

3) $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y+15}{7}$; 4) $\dfrac{x+6}{15}=\dfrac{y+7}{2}$.

2.11. $P(2;\,7)$, $\vec{s}\,(2;\,-6)$.

1) $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+6}{2}$; 2) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+6}{7}$;

3) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-7}{-6}$; 4) $\dfrac{x-6}{-7}=\dfrac{y-2}{2}$.

2.12. $P(-3;\,-5)$, $\vec{s}\,(4;\,5)$.

1) $\dfrac{x-5}{-5}=\dfrac{y-4}{-3}$; 2) $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-5}{-5}$;

3) $\dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y+3}{4}$; 4) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+5}{5}$.

2.13. $P(8;\,1)$, $\vec{s}\,(7;\,-2)$.

1) $\dfrac{x-8}{7}=\dfrac{y-1}{-2}$; 2) $\dfrac{x-7}{8}=\dfrac{y+2}{1}$;

3) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-8}{7}$; 4) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-7}{2}$.

2.14. $P(2;\,-10)$, $\vec{s}\,(1;\,4)$.

1) $\dfrac{x+10}{4}=\dfrac{y-2}{1}$; 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-10}$;

3) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+10}{4}$; 4) $\dfrac{x-4}{-10}=\dfrac{y-1}{2}$.

2.15. $P(3; -5)$, $\vec{s}\,(1; 2)$.

1) $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{2}$; 2) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+5}{2}$;

3) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+5}{2}$; 4) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}$.

2.16. $P(-2; -5)$, $\vec{s}\,(2; -3)$.

1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-5}$; 2) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+5}{-3}$;

3) $\dfrac{x+5}{-3}=\dfrac{y+2}{2}$; 4) $\dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y-2}{2}$.

2.17. $P(-3; 2)$, $\vec{s}\,(4; -7)$.

1) $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-4}{-3}$; 2) $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y+7}{2}$;

3) $\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y+3}{4}$; 4) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-7}$.

2.18. $P(-2; 4)$, $\vec{s}\,(3; 6)$.

1) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-6}{4}$; 2) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-4}{6}$;

3) $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y+2}{3}$; 4) $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-3}{-2}$.

2.19. $P(5; -7)$, $\vec{s}\,(-3; 1)$.

1) $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+7}{1}$; 2) $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-1}{-7}$;

3) $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y-5}{-3}$; 4) $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y+3}{5}$.

2.20. $P(12; 2)$, $\vec{s}\,(4; 7)$.

1) $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y-12}{4}$; 2) $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-7}{2}$;

3) $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-2}{7}$; 4) $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-4}{12}$.

2.21. $P(-7;\ 1)$, $\vec{s}\ (2;\ 5)$.

1) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+7}{2}$; 2) $\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y-5}{1}$;

3) $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-1}{5}$; 4) $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{-7}$.

2.22. $P(2;\ -6)$, $\vec{s}\ (7;\ 1)$.

1) $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+6}{1}$; 2) $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-1}{-6}$;

3) $\dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-2}{7}$; 4) $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-7}{2}$.

2.23. $P(1;\ 9)$, $\vec{s}\ (-2;\ 3)$.

1) $\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y+2}{1}$; 2) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{9}$;

3) $\dfrac{x-9}{3}=\dfrac{y-1}{-2}$; 4) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-9}{3}$.

2.24. $P(4;\ 8)$, $\vec{s}\ (11;\ 2)$.

1) $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-11}{4}$; 2) $\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y-2}{8}$;

3) $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-4}{11}$; 4) $\dfrac{x-4}{11}=\dfrac{y-8}{2}$.

2.25. $P(6;\ -1)$, $\vec{s}\ (4;\ 5)$.

1) $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y+1}{5}$; 2) $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-5}{-1}$;

3) $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-6}{4}$; 4) $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y-4}{6}$.

2.26. $P(-3;\ -2)$, $\vec{s}\ (1;\ 6)$.

1) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{6}$; 2) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-6}{-2}$;

3) $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y+3}{1}$; 4) $\dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}$.

2.27. $P(14;\ 10)$, $\vec{s}\,(6;\ 3)$.

1) $\dfrac{x-10}{3}=\dfrac{y-14}{6}$; 2) $\dfrac{x-6}{14}=\dfrac{y-3}{10}$;

3) $\dfrac{x-14}{6}=\dfrac{y-10}{3}$; 4) $\dfrac{x-3}{10}=\dfrac{y-6}{14}$.

2.28. $P(8;\ 2)$, $\vec{s}\,(-4;\ 1)$.

1) $\dfrac{x+4}{8}=\dfrac{y-1}{2}$; 2) $\dfrac{x-8}{4}=\dfrac{y-2}{1}$;

3) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-8}{-4}$; 4) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{8}$.

2.29. $P(-5;\ 9)$, $\vec{s}\,(1;\ -6)$.

1) $\dfrac{x-9}{-6}=\dfrac{y+5}{1}$; 2) $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+6}{9}$;

3) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-9}{-6}$; 4) $\dfrac{x+6}{9}=\dfrac{y-1}{-5}$.

2.30. $P(17;\ 8)$, $\vec{s}\,(7;\ 4)$.

1) $\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y-7}{17}$; 2) $\dfrac{x-7}{17}=\dfrac{y-4}{8}$;

3) $\dfrac{x-8}{4}=\dfrac{y-17}{7}$; 4) $\dfrac{x-17}{7}=\dfrac{y-8}{4}$.

Пример. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(4;\ -6)$ и является параллельной вектору $\vec{s}(-3;\ 8)$.

Решение. Используем каноническое уравнение прямой на плоскости: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{k}$, где точка $M_0(x_0;y_0)$ – данная точка на прямой, вектор $\vec{s}(m;\ k)$ – направляющий вектор прямой. Подставим в уравнение исходные данные: $m=-3,\ k=8,\ x_0=4,\ y_0=-6$ и получим:

$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+6}{8}.$$

Преобразуем к общему уравнению прямой:

$$8(x-4)=-3(y+6)\Rightarrow 8x-32=-3y-18\Rightarrow 8x+3y-14=0.$$

Ответ: $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y+6}{8}$, или
$8x+3y-14=0.$

Задание 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$:

3.1. $M_1(2;1)$, $M_2(3;4)$.

1) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{1}$; 2) $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{-3}$;

3) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{1}$; 4) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}$.

3.2. $M_1(-5;2)$, $M_2(4;-3)$.

1) $\dfrac{x-9}{5}=\dfrac{y+5}{2}$; 2) $\dfrac{x-4}{-9}=\dfrac{y+3}{5}$;

3) $\dfrac{x+9}{4}=\dfrac{y-5}{-3}$; 4) $\dfrac{x+5}{9}=\dfrac{y-2}{-5}$.

3.3. $M_1(7;-3)$, $M_2(5;2)$.

1) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{7}$; 2) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-5}$;

3) $\dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y+3}{5}$; 4) $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y+3}{2}$.

3.4. $M_1(2;8)$, $M_2(-4;3)$.

1) $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-3}{8}$; 2) $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-8}{3}$;

3) $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-8}{-5}$; 4) $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-2}{-4}$.

3.5. $M_1(7;10)$, $M_2(-2;-3)$.

1) $\dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y-10}{-3}$; 2) $\dfrac{x-7}{-9}=\dfrac{y-10}{-13}$;

3) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+3}{10}$; 4) $\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{y+3}{13}$.

3.6. $M_1(5;\ -1)$, $M_2(3;\ 4)$.

1) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{4}$; 2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}$;

3) $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+1}{5}$; 4) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-4}{-1}$.

3.7. $M_1(11;\ 9)$, $M_2(7;\ 3)$.

1) $\dfrac{x-7}{11}=\dfrac{y-3}{9}$; 2) $\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y-3}{6}$;

3) $\dfrac{x-11}{7}=\dfrac{y-9}{3}$; 4) $\dfrac{x-11}{-4}=\dfrac{y-9}{-6}$.

3.8. $M_1(5;\ -3)$, $M_2(2;\ 4)$.

1) $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+3}{7}$; 2) $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-4}{-7}$;

3) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{4}$; 4) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{-3}$.

3.9. $M_1(9;\ -2)$, $M_2(1;\ -4)$.

1) $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+4}{2}$; 2) $\dfrac{x-9}{-8}=\dfrac{y+2}{-2}$;

3) $\dfrac{x-9}{1}=\dfrac{y+2}{-4}$; 4) $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+4}{-2}$.

3.10. $M_1(10;\ 11)$, $M_2(15;\ 7)$.

1) $\dfrac{x-10}{15}=\dfrac{y-11}{7}$; 2) $\dfrac{x-15}{-5}=\dfrac{y-7}{4}$;

3) $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-11}{-4}$; 4) $\dfrac{x-15}{10}=\dfrac{y-7}{11}$.

3.11. $M_1(-9;\ 4)$, $M_2(7;\ 3)$.

1) $\dfrac{x+9}{7}=\dfrac{y-4}{3}$; 2) $\dfrac{x-7}{-16}=\dfrac{y-3}{1}$;

3) $\dfrac{x+9}{16}=\dfrac{y-4}{-1}$; 4) $\dfrac{x-7}{-9}=\dfrac{y-3}{4}$.

3.12. $M_1(13;\ 4)$, $M_2(-4;\ 2)$.

1) $\dfrac{x-13}{-17}=\dfrac{y-4}{-2}$; 2) $\dfrac{x+4}{17}=\dfrac{y-2}{2}$;

3) $\dfrac{x-13}{-4}=\dfrac{y-4}{2}$; 4) $\dfrac{x+4}{13}=\dfrac{y-2}{4}$.

3.13. $M_1(18;1)$, $M_2(20;\ 2)$.

1) $\dfrac{x-18}{2}=\dfrac{y-1}{1}$; 2) $\dfrac{x-20}{-2}=\dfrac{y-2}{1}$;

3) $\dfrac{x-18}{20}=\dfrac{y-1}{2}$; 4) $\dfrac{x-20}{18}=\dfrac{y-2}{1}$.

3.14. $M_1(13;\ 3)$, $M_2(14;\ 8)$.

1) $\dfrac{x-14}{-1}=\dfrac{y-8}{-5}$; 2) $\dfrac{x-13}{-1}=\dfrac{y-3}{5}$;

3) $\dfrac{x-13}{14}=\dfrac{y-3}{8}$; 4) $\dfrac{x-14}{13}=\dfrac{y-8}{3}$.

3.15. $M_1(2;\ 7)$, $M_2(11;\ 13)$.

1) $\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y-13}{7}$; 2) $\dfrac{x-11}{9}=\dfrac{y-13}{-6}$;

3) $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y-7}{13}$; 4) $\dfrac{x-2}{9}=\dfrac{y-7}{6}$.

3.16. $M_1(3;1)$, $M_2(5;\ 7)$.

1) $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-7}{-6}$; 2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{6}$;

3) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-1}{7}$; 4) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-7}{6}$.

3.17. $M_1(7;\ -5)$, $M_2(-8;\ 4)$.

1) $\dfrac{x-7}{-15}=\dfrac{y+5}{9}$; 2) $\dfrac{x+8}{15}=\dfrac{y-4}{-9}$;

3) $\dfrac{x-7}{-8}=\dfrac{y+5}{4}$; 4) $\dfrac{x+8}{7}=\dfrac{y-4}{-5}$.

3.18. $M_1(9;10)$, $M_2(15;1)$.

1) $\frac{x-9}{15}=\frac{y-10}{1}$; 2) $\frac{x-15}{-6}=\frac{y-10}{9}$;

3) $\frac{x-9}{6}=\frac{y-10}{-9}$; 4) $\frac{x-15}{9}=\frac{y-1}{10}$.

3.19. $M_1(2;3)$, $M_2(11;9)$.

1) $\frac{x-11}{-9}=\frac{y-9}{-6}$; 2) $\frac{x-2}{9}=\frac{y-3}{6}$;

3) $\frac{x-2}{11}=\frac{y-3}{9}$; 4) $\frac{x-11}{2}=\frac{y-9}{3}$.

3.20. $M_1(0;-1)$, $M_2(5;-2)$.

1) $\frac{x}{5}=\frac{y+2}{-1}$; 2) $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{1}$;

3) $x-5=\frac{y+1}{-2}$; 4) $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-1}$.

3.21. $M_1(2;-3)$, $M_2(5;7)$.

1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{10}$; 2) $\frac{x-5}{-3}=\frac{y-7}{-10}$;

3) $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{7}$; 4) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-7}{-3}$.

3.22. $M_1(10;7)$, $M_2(-3;2)$.

1) $\frac{x-10}{-3}=\frac{y-7}{2}$; 2) $\frac{x+3}{13}=\frac{y-2}{5}$;

3) $\frac{x-10}{-13}=\frac{y-7}{-5}$; 4) $\frac{x+3}{10}=\frac{y-2}{7}$.

3.23. $M_1(12;0)$, $M_2(20;4)$.

1) $\frac{x-12}{8}=\frac{y}{4}$; 2) $\frac{x-20}{-8}=y-4$;

3) $\frac{x-12}{20}=\frac{y}{4}$; 4) $\frac{x-20}{12}=y-4$.

3.24. $M_1(2;\ 6)$, $M_2(10;\ 9)$.

1) $\dfrac{x-10}{-8}=\dfrac{y-9}{-3}$;

2) $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-6}{3}$;

3) $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y-6}{9}$;

4) $\dfrac{x-10}{2}=\dfrac{y-9}{6}$.

3.25. $M_1(6;\ 8)$, $M_2(15;\ 10)$.

1) $\dfrac{x-15}{6}=\dfrac{y-10}{8}$;

2) $\dfrac{x-15}{-9}=\dfrac{y-10}{-2}$;

3) $\dfrac{x-6}{15}=\dfrac{y-8}{10}$;

4) $\dfrac{x-6}{9}=\dfrac{y-8}{2}$.

3.26. $M_1(1;\ 2)$, $M_2(7;\ 6)$.

1) $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{6}$;

2) $\dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-6}{-4}$;

3) $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-2}{4}$;

4) $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-6}{2}$.

3.27. $M_1(4;\ 4)$, $M_2(8;\ 2)$.

1) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-4}{-2}$;

2) $\dfrac{x-8}{4}=\dfrac{y-2}{4}$;

3) $\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y-4}{2}$;

4) $x-8=y-2$.

3.28. $M_1(5;\ 7)$, $M_2(7;\ 5)$.

1) $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-5}{7}$;

2) $\dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y-5}{2}$;

3) $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y-7}{5}$;

4) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}$.

3.29. $M_1(10;\ 4)$, $M_2(15;\ 9)$.

1) $x-15=y-4$;

2) $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-4}{5}$;

3) $\dfrac{x-10}{15}=\dfrac{y-4}{9}$;

4) $\dfrac{x-15}{10}=\dfrac{y-9}{4}$.

3.30. $M_1(7;\ 2)$, $M_2(10;\ 5)$.

1) $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{3}$;   2) $\dfrac{x-10}{-3}=\dfrac{y-3}{2}$;

3) $\dfrac{x-10}{7}=\dfrac{y-5}{2}$;   4) $\dfrac{x-7}{10}=\dfrac{y-2}{5}$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(-4;1\right)$ и $M_2\left(3;-6\right)$.

Решение. Используем уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M_1(x_1;\ y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Подставим в уравнение исходные данные: $x_0 = -4$, $x_1 = 3$, $y_0 = 1$, $y_1 = -6$ и получим: $\dfrac{x+4}{3+4}=\dfrac{y-1}{-6-1}\Rightarrow\dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-1}{-7}$. Преобразуем к общему уравнению прямой:

$$-7\left(x+4\right)=7\left(y-1\right)\Rightarrow -7x-28=7y-7\Rightarrow -7x-7y-21=0,$$

$$\text{или}\ \ x+y+3=0.$$

Ответ: $\dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-1}{-7}$, или $x+y+3=0$.

Задание 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $N(x_1;\ y_1)$, если угловой коэффициент равен $k=k_0$.

4.1. $N(2;3),\ \ k=-2$.

1) $x+2=-2(y+3)$;   2) $-2(y-3)=x-2$;

3) $y-3=-2(x-2)$;   4) $(y+3)\cdot(-2)=x+2$.

4.2. $N(-5;\ 8),\ \ k=3$.

1) $y+5=8(x-3)$;   2) $y-8=3(x+5)$;

3) $x+5=3(y-8)$;   4) $8(x+5)=3y$.

4.3. $N(7;\ 4),\ \ k=5$.

1) $x+7=5(y+4)$;   2) $y-7=5(x-4)$;

3) $5(y-7)=x-4$;   4) $y-4=5(x-7)$.

4.4. $N(-4;-5),\ \ k=6$.

1) $y+5=6(x+4)$;   2) $-4x-5y+6=0$;

3) $x+4=6(y+5)$; 4) $-4(x-6)=y+5$.

4.5. $N(2;-3)$, $k=7$.

1) $2x-3y=7$; 2) $y-7=-3(x-2)$;

3) $y+3=7(x-2)$; 4) $x+2=7(y-3)$.

4.6. $N(10;1)$, $k=-6$.

1) $-6(y-10)=x-1$; 2) $y-10=-6(y-1)$;

3) $10x+y=-6$; 4) $y-1=-6(x-10)$.

4.7. $N(-5;2)$, $k=4$.

1) $-5x+2y=4$; 2) $x+5=4(y-2)$;

3) $4(x+5)=y-2$; 4) $4(y-2)=2x$.

4.8. $N(-3;7)$, $k=11$.

1) $y-7=-3(x-4)$; 2) $(x+3)\cdot 11=y-7$;

3) $-3x+7y=11$; 4) $11(x-3)=y-7$.

4.9. $N(7;9)$, $k=12$.

1) $7x+9y=12$; 2) $(y-7)\cdot 12=x-7$;

3) $(x-7)\cdot 12=y-9$; 4) $x+7=12(y+9)$.

4.10. $N(11;3)$, $k=2$.

1) $(x+3)\cdot 2=y+11$; 2) $y-11=2(x+3)$;

3) $11x+3y=2$; 4) $y-3=2(x-11)$.

4.11. $N(17;2)$, $k=5$.

1) $y-17=2(x-5)$; 2) $y-2=5(x-17)$;

3) $17x+2y=5$; 4) $5(x-17)=y+2$.

4.12. $N(2;-1)$, $k=10$.

1) $y-10=2(x+1)$; 2) $y+1=10(x-2)$;

3) $2x-y=10$; 4) $10(x-2)=y-1$.

4.13. $N(8;9)$, $k=4$.

1) $8x+9y=4$; 2) $y-9=4x+8$;

3) $y-9=4(x-8)$; 4) $4(x-8)=y+9$.

4.14. $N(13;3)$, $k=7$.

1) $13x+3y=7$; 2) $y-3=7(x-13)$;

3) $7(x-13)=y+3$; 4) $13(x-7)=3y$.

4.15. $N(-2;\ 5)$, $k=8$.

1) $8(x+2)=y-5$; 2) $-2y+5x=8$;

3) $8(x+2)=y+5$; 4) $-2(x-8)=y-5$.

4.16. $N(-4;\ 8)$, $k=12$.

1) $12(x+4)=y+8$; 2) $12(x+4)=y-8$;

3) $-4x+8y=12$; 4) $8y-4=12x$.

4.17. $N(21;\ 4)$, $k=1$.

1) $21x+4y=1$; 2) $x-21)=y-4$;

3) $x+21=y-4$; 4) $(x+1)\cdot 21=y-4$.

4.18. $N(11;\ 2)$, $k=-3$.

1) $y-2=-3(x-11)$; 2) $11x+2y=-3$;

3) $x+3=2(y-11)$; 4) $11(x+3)=y-2$.

4.19. $N(-3;\ 10)$, $k=7$.

1) $10(y-7)=x+3$; 2) $y-10=7(x-3)$;

3) $-3x+10y=7$; 4) $7(x+3)=y-10$.

4.20. $N(5;\ -4)$, $k=9$.

1) $y+4=9(x+5)$; 2) $9(x-5)=y+4$;

3) $5x-4y=9$; 4) $-4(x+y)=5$.

4.21. $N(17;\ 4)$, $k=8$.

1) $17x+4y=8$; 2) $y-4=8(x-17)$;

3) $8(x+17)=y+4$; 4) $8x-4y=17$.

4.22. $N(9;\ 2)$, $k=-4$.

1) $-4(x+9)=y+2$; 2) $y+4=9x$;

3) $9x+2y=-4$; 4) $y-2=-4(x-9)$.

4.23. $N(11;\ 8)$, $k=7$.

1) $11x+8y=17$; 2) $7(x+11)=y+8$;

3) $y-8=7(x-11)$; 4) $7(x+y)=19$.

4.24. $N(-8;\ 4)$, $k=5$.

1) $-8x+4y=5$; 2) $y+4=5(x-8)$;

3) $5(x+8)=y-4$; 4) $-8y+4x=5$.

4.25. $N(14;-8)$, $k=18$.

1) $14x-8y=18$; 2) $y+14=18(x-8)$;

3) $18(x+8)=y-14$; 4) $18(x+8)=14y$.

4.26. $N(7;-2)$, $k=12$.

1) $y+2=12(x+7)$; 2) $y-7=12(x+2)$;

3) $7x-2y=12$; 4) $y+2=12(x-7)$.

4.27. $N(4;-7)$, $k=15$.

1) $15(x+4)=y-7$; 2) $y+7=15(x-4)$;

3) $4x-7y=15$; 4) $15(y+7)=x-4$.

4.28. $N(2;7)$, $k=9$.

1) $y-7=9(x-2)$; 2) $x-2=9(y-7)$;

3) $2x+7y=9$; 4) $x-9=2(y-7)$.

4.29. $N(4;10)$, $k=-11$.

1) $10-y=(4-x)\cdot(-11)$; 2) $-11(y-10)=x-4$;

3) $4x+10y=-11$; 4) $y-10=11(x-4)$.

4.30. $N(8;-9)$, $k=13$.

1) $8x-9y=13$; 2) $y+9=13(x+8)$;

3) $13(x-8)=y+9$; 4) $13(y+9)=x-8$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $N(8;-5)$, если ее угловой коэффициент равен $k=-9$.

Решение. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k: $y-y_0=k(x-x_0)$. Подставим в уравнение исходные данные: $x_0=8$, $y_0=-5, k=-9$ и получим: $y+5=-9(x-8)$. Преобразуем к общему уравнению прямой:

$$y+5=-9x+72 \Rightarrow 9x+y+5-72=0 \Rightarrow 9x+y-67=0.$$

Ответ: $y+5=-9(x-8)$, или $9x+y-67=0$.

Задание 5.

5.1. Указать уравнение прямой, параллельной данной $y=2x-8$.

1) $y-2x=4$; 2) $y+2x-1=0$; 3) $y=-2x-1$; 4) $y=-0,5x+2$.

5.2. Указать уравнение прямой, параллельной данной $y=-3x-1$.

1) $y=\frac{1}{3}x$; 2) $y=3x-4$; 3) $y=-3x+2$; 4) $y=-\frac{1}{3}x+8$.

5.3. Указать уравнение прямой, параллельной данной $y=8x-4$.

1) $y=-8x+4$; 2) $y=8x-1$; 3) $y=\frac{1}{8}x+2$; 4) $y=-\frac{1}{8}x-5$.

5.4. Указать уравнение прямой, параллельной данной $2y+x=1$.

1) $y=x-1$; 2) $y=-\frac{1}{2}x-1$; 3) $y=2x-6$; 4) $y=\frac{1}{2}x-7$.

5.5. Указать уравнение прямой, параллельной данной $y+5x+4=0$.

1) $y=-\frac{1}{5}x+8$; 2) $y=5x-7$; 3) $y=\frac{1}{5}x-3$; 4) $y=-5x+1$.

5.6. Указать уравнение прямой, перпендикулярной данной $y=2x+5$.

1) $y=2x-4$; 2) $y=-\frac{1}{2}x-3$; 3) $y=\frac{1}{2}x-1$; 4) $y=-2x$.

5.7. Указать уравнение прямой, перпендикулярной данной $y=-4x+3$.

1) $y=0,25x-1$; 2) $y=4x+5$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+2$; 4) $y=3x-4$.

5.8. Указать уравнение прямой, перпендикулярной данной $y=0,2x-7$.

1) $y=5x$; 2) $y=-0,2x+4$; 3) $y=-10x+2$; 4) $y=-5x-2$.

5.9. Указать уравнение прямой, перпендикулярной данной $y=\frac{1}{3}x-5$.

1) $y=-3x+2$; 2) $y=3x-4$; 3) $y=-\frac{1}{3}x-1$; 4) $y+\frac{1}{3}x=2$.

5.10. Указать уравнение прямой, перпендикулярной данной $y=-10x+2$.

1) $y=0,1x-3$; 2) $y=10x-2$; 3) $y=-0,1x+4$; 4) $y=7x-8$.

5.11. Указать уравнения параллельных прямых.

1) $y = 5x,\ \ y = -5x + 2$; 2) $y = -3x + 1,\ \ y = \dfrac{1}{3}x - 4$;

3) $y = 8x + 4,\ \ y + 8x = 5$; 4) $y = 2x + 4,\ \ y - 2x = 8$.

5.12. Указать уравнения параллельных прямых.

1) $y = x,\ \ y = -x + 2$; 2) $y + 5x + 8 = 0,\ \ y = 5x + 1$;

3) $y - x - 1 = 0,\ \ y = x - 2$; 4) $y = -7x + 2,\ \ y = \dfrac{1}{7}x$.

5.13. Указать уравнения параллельных прямых.

1) $8x - 4y - 1 = 0,\ \ y = -2x$; 2) $2y - x = 8,\ \ y = x + 1$;

3) $x + 2y - 3 = 0,\ \ 2y + 5x = 0$; 4) $y - 2x + 2 = 0,\ \ y = 2x$.

5.14. Указать уравнения параллельных прямых.

1) $y = 5x + 8,\ \ y + 5x = 1$; 2) $y = 3x,\ \ y = -\dfrac{1}{3}x + 4$;

3) $2y = 4x - 1,\ \ y = 2x$; 4) $8x = y,\ \ x = 8y$.

5.15. Указать уравнения параллельных прямых.

1) $y - x = 1,\ \ y + x = 2$; 2) $y = -\dfrac{1}{3}x - 7,\ \ y = 3x - 1$;

3) $2x = y,\ \ y = 2x + 8$; 4) $5y = 1,\ \ 5x = 2y$.

5.16. Указать уравнения перпендикулярных прямых.

1) $5x + y = 1,\ \ y - 8x = 7$; 2) $7x = 2y + 1,\ \ y = \dfrac{7}{2}x - 4$;

3) $y = x,\ \ x = -y$; 4) $y = 5x,\ \ y = -5x + 7$.

5.17. Указать уравнения перпендикулярных прямых.

1) $2x - 7y = 3,\ \ y = -7x - 3$; 2) $y = 5x - 4,\ \ y = -0{,}2x + 10$;

3) $6x + y = 7,\ \ y = 6x - 7$; 4) $y = 2x,\ \ y = -2x + 8$.

5.18. Указать уравнения перпендикулярных прямых.

1) $y = 2x + 1,\ \ 2y = x$; 2) $2y + x = 0,\ \ y + 0{,}5x = 0$;

3) $y = 5x + 2,\ \ y = 5x + 7$; 4) $y = 7x + 5,\ y + \dfrac{1}{7}x + 4 = 0$.

5.19. Указать уравнения перпендикулярных прямых.

1) $2y + 5x = 1,\ \ 5x - 2y = 2$; 2) $y = 7x - 1,\ \ y = 7x + 2$;

3) $y = -5x - 8,\ \ y = 0{,}2x + 3$; 4) $y + x = 4,\ \ y + 2x = 5$.

5.20. Указать уравнения перпендикулярных прямых.

1) $y+8x=1, \quad y-\frac{1}{8}x=2$; 2) $y=5x-4, \quad y=5x-7$;

3) $4x+y=2, \quad 4y-x=1$; 4) $x+y+1=0, \quad x+2y+2=0$.

5.21. Угловой коэффициент прямой $y=2x-4$ равен…

1) –2; 2) –4; 3) 1; 4) 2.

5.22. Угловой коэффициент прямой $3y+5x=4$ равен…

1) $-\frac{5}{3}$; 2) 5; 3) 3; 4) 4.

5.23. Угловой коэффициент прямой $8x+2y=5$ равен…

1) $\frac{1}{4}$; 2) –4; 3) 8; 4) 2.

5.24. Угловой коэффициент прямой $y=5-8x$ равен…

1) –8; 2) 5; 3) 8; 4) –3.

5.25. Угловой коэффициент прямой $y+x=1$ равен…

1) –1; 2) 1; 3) 2; 4) 0.

5.26. Угловой коэффициент прямой $5y-x=10$ равен…

1) 5; 2) 2; 3) 0,2; 4) 10.

5.27. Угловой коэффициент прямой $2y+6x+5=0$ равен…

1) –6; 2) 6; 3) –3; 4) 2.

5.28. Угловой коэффициент прямой $3x-y+7=0$ равен…

1) 7; 2) –3; 3) 3; 4) 10.

5.29. Угловой коэффициент прямой $3y+6x-1=0$ равен…

1) 6; 2) –2; 3) 3; 4) –1.

5.30. Угловой коэффициент прямой $5x+y-8=0$ равен…

1) 1; 2) –5; 3) –8; 4) 5.

Пример. Составить уравнения прямых: параллельной и перпендикулярной к прямой $2x-3y+4=0$, проходящих через точку $M_0(-2; 7)$.

Решение. Найдем угловой коэффициент заданной прямой, приведя ее к виду $y=kx+b$: $-3y=-2x-4 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$. Значит, угловой коэффициент заданной прямой $k=\frac{2}{3}$.

Составим уравнение прямой, проходящей параллельно данной. Из условия параллельности прямых следует: $k_1 = k = \frac{2}{3}$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Подставим в уравнение исходные данные: $x_0 = -2, y_0 = 7,\ k = \frac{2}{3}$ и получим $y - 7 = \frac{2}{3}\left(x + 2\right)$. Преобразуем уравнение к общему уравнению прямой: $3(y-7) = 2(x+2) \Rightarrow 3y - 21 = 2x + 4 \Rightarrow -2x + 3y - 21 - 4 = 0 \Rightarrow$ $2x - 3y + 25 = 0$.

Составим уравнение прямой, проходящей перпендикулярно данной. Из условия перпендикулярности прямых следует: $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{3}{2}$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставим в уравнение исходные данные: $x_0 = -2,\ \ y_0 = 7, k = -\frac{3}{2}$ и получим $y - 7 = -\frac{3}{2}(x+2)$. Преобразуем к общему уравнению прямой:

$2(y-7) = -3(x+2) \Rightarrow 2y - 14 = -3x - 6 \Rightarrow 3x + 2y - 14 + 6 = 0 \Rightarrow$
$3x + 2y - 8 = 0$. Ответ: $2x - 3y + 25 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$.

Задание 6. Указать вид кривой второго порядка.

6.1. $x^2 + y^2 = 2$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.2. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.3. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.4. $x^2 = 2y$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.5. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.6. $y^2=5x$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.7. $y^2-x^2=4$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.8. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{20}=1$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.9. $y^2-x=0$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

6.10. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$.

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) окружность.

Чему равны полуоси кривой второго порядка ?

6.11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$.

1) $a=8,\ b=4$; 2) $a=4,\ b=8$; 3) $a=2\sqrt{2},\ b=2$; 4) $a=1$.

6.12. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

1) $a=5,\ \ b=4$; 2) $a=25,\ \ b=16$; 3) $a=4,\ \ b=5$; 4) $a=1$.

6.13. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$.

1) $a=\sqrt{2},\ b=2$; 2) $a=2,\ b=4$; 3) $a=4,\ b=2$; 4) $a=2,\ b=2$.

6.14. $x^2+y^2=2$.

1) $a=2,\ b=1$; 2) $a=0,\ b=0$; 3) $a=b=2$; 4) $a=1,\ b=1$.

6.15. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

1) $a=4,\ \ b=1$; 2) $a=2,\ \ b=1$; 3) $a=1,\ \ b=4$; 4) $a=b=1$.

6.16. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{121}=1$.

1) $a=1$; 2) $a=16,\ \ b=121$; 3) $a=4,\ \ b=11$; 4) $a=4,\ \ b=1$.

6.17. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1) $a=3,\ \ b=\sqrt{2}$; 2) $a=8,\ \ b=9$; 3) $a=3,\ \ b=2\sqrt{2}$; 4) $a=1,\ \ b=9$

.

6.18. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

1) $a=25,\ \ b=4$; 2) $a=5,\ \ b=1$; 3) $a=1,\ \ b=25$; 4) $a=25,\ b=1$.

6.19. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

1) $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{2}$; 2) $a=2,\ b=3$; 3) $a=2,\ b=1$; 4) $a=3,\ \ b=2$.

6.20. $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1) $a=7,\ \ b=9$; 2) $a=9,\ \ b=7$; 3) $a=3,\ \ b=\sqrt{7}$; 4) $a=1,\ b=1$.

6.21. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

1) $a=1,\ \ b=2$; 2) $a=2,\ \ b=\sqrt{2}$; 3) $a=2,\ \ b=4$; 4) $a=b=1$.

6.22. $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{18}=1$.

1) $a=12, b=18$; 2) $a=2\sqrt{3}, b=3\sqrt{2}$; 3) $a=1, b=\sqrt{2}$; 4) $a=1,\ b=6$.

Чему равны полуоси элемента кривой второго порядка ?

6.23. $x=-\dfrac{3}{5}\sqrt{y^2+25}$.

1) $a=3,\ b=5$; 2) $a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{3}$; 3) $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{5}$; 4) $a=0,\ \ b=1$.

6.24. $y=\sqrt{9-x^2}$.

1) $a=9,\ b=1$; 2) $a=1,\ b=1$; 3) $a=3,\ b=3$; 4) $a=b=1$.

6.25. $y=\sqrt{64-x^2}$.

1) $a=64,\ b=-1$; 2) $a=8,\ b=8$; 3) $a=64,\ b=64$; 4) $a=b=1$.

6.26. $x=-\frac{1}{5}\sqrt{25-y^2}$.

1) $a=25, b=1$; 2) $a=5, b=1$; 3) $a=b=-1/5$; 4) $a=1, b=25$.

6.27. $x=\sqrt{49-y^2}$.

1) $a=1, \quad b=49$; 2) $a=1, \quad b=-1$; 3) $a=49, \quad b=1$; 4) $a=b=7$.

6.28. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+9}$.

1) $a=b=1$; 2) $a=3, \quad b=2$; 3) $a=b=2$; 4) $a=2, \quad b=3$.

6.29. $x=\sqrt{121+y^2}$.

1) $a=1, \quad b=121$; 2) $a=121$; 3) $a=11, \quad b=11$; 4) $a=121, \quad b=1$.

6.30. $x=\sqrt{3-y^2}$.

1) $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$; 2) $a=3, b=3$; 3) $a=1, b=-1$; 4) $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}$.

Пример. Указать вид кривых второго порядка и найти их полуоси:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=-1.$

Решение. Канонические уравнения эллипса, гиперболы с фокусами, расположенными на оси Ox и Oy, соответственно имеют вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$ Поэтому уравнение 1) задает эллипс, полуоси которого: $a=\sqrt{4}=2, b=\sqrt{9}=3$, уравнение 2) задает гиперболу с фокусами, расположенными на оси Ox, полуоси которой $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{4}=2$, уравнение 3) задает гиперболу с фокусами, расположенными на оси Oy, полуоси которой $a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Ответ: 1) эллипс, $a=2, b=3$;

2) гипербола, $a=\sqrt{5}, b=2$;

3) гипербола, $a=4, b=2\sqrt{3}$.

Задание 7. Указать координаты вершины параболы.

7.1. $y=x^2+2x+1$.

1) (0; 1); 2) (1; 4); 3) (–1; 0); 4) $\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right)$.

7.2. $y = x^2 + 1$.

1) (1; 0); 2) (0; 1); 3) (1; 2); 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}\right)$.

7.3. $x = y^2 - 2$.

1) (2; 2); 2) (1; 1); 3) (0; $\sqrt{2}$); 4) (–2; 0).

7.4. $y = x^2 + 4$.

1) (0; 4); 2) (1; 5); 3) (–1; 5); 4) (2; 2).

7.5. $y = (x-1)^2$.

1) (1; 0); 2) (0; 1); 3) (2; 1); 4) (3; 4).

7.6. $y = (x+2)^2 - 1$.

1) (0; 3); 2) (–2; –1); 3) (1; 8); 4) (4; 4).

7.7. $y = (x-3)^2 + 2$.

1) (1; 4); 2) (0; 4); 3) (3; 2); 4) (2; 2).

7.8. $y = (x-5)^2 - 2$.

1) (5; –2); 2) (6; –1); 3) (0; 0); 4) (3; 2).

7.9. $y = (x+1)^2 - 3$.

1) (0; 0); 2) (0; –2); 3) (1; 1); 4) (–1; –3).

7.10. $x = y^2 + 5$.

1) (6; 1); 2) (5; 0); 3) (9; 2); 4) (0; 0).

7.11. $x = (y+1)^2 - 4$.

1) (–3; 0); 2) (1; –4); 3) (0; –3); 4) (–4; –1).

7.12. $x = (y-4)^2 + 2$.

1) (2; 4); 2) (18; 0); 3) (2; 4); 4) (0; 0).

7.13. $x = (y+3)^2 - 1$.

1) (1; 1); 2) (–1; –3); 3) (0; 0) ; 4) (0; –2).

7.14. $y = (x+2)^2 - 1$.

1) (–2; –1); 2) (0; 3); 3) (–1; 0); 4) (0; 0).

7.15. $y = (x+4)^2$.

1) (0; 0); 2) (0; 16); 3) (–3; 1); 4) (–4; 0).

7.16. $y = (x+8)^2 - 7$.

1) (0; 57); 2) (–7; –6); 3) (0; 0); 4) (–8; –7).

7.17. $x=(y-5)^2-1$.

1) (0; 0); 2) (0; 4); 3) (3; 3); 4) (–1; 5).

7.18. $x=(y-10)^2+3$.

1) (4; 9); 2) (3; 10); 3) (7; 8); 4) (0; 0).

7.19. $x=(y+3)^2-4$.

1) (0; –1); 2) (0; 0); 3) (–4; –3); 4) (–3; 2).

7.20. $y=(x-4)^2+2$.

1) (4; 2); 2) (3; 3); 3) (0; 0); 4) (5; 3).

7.21. $y=(x-1)^2-7$.

1) (1; –7); 2) (2; –6); 3) (0; 0); 4) (3; –3).

7.22. $y=(x+5)^2-1$.

1) (–2; 8); 2) (–3; 3); 3) (–5; –1); 4) (0; 0).

7.23. $x=(y-5)^2-7$.

1) (2; 2); 2) (0; 0); 3) (9; 1); 4) (–7; 5).

7.24. $x=(y-11)^2+4$.

1) (0; 0); 2) (5; 10); 3) (8; 9); 4) (4; 11).

7.25. $x=(y+3)^2-7$.

1) (2; 0); 2) (–7; –3); 3) (9; 1); 4) (0; 0).

7.26. $y=(x-7)^2-1$.

1) (6; 0); 2) (8; 0); 3) (7; –1); 4) (0; 0).

7.27. $y=(x-5)^2$.

1) (5; 0); 2) (6; 1); 3) (7; 4); 4) (0; 0).

7.28. $y=x^2-1$.

1) (0; 0); 2) (1; 0); 3) (2; 3); 4) (0; –1).

7.29. $y=x^2-4$.

1) (0; –4); 2) (2; 0); 3) (1; –3); 4) (0; 0).

7.30. $y=(x-2)^2+5$.

1) (2; 5); 2) (3; 6); 3) (0; 0); 4) (4; 9).

Пример. Указать координаты вершины параболы:
1) $y=x^2-4x+6$; 2) $x=y^2+2y-7$; 3) $x=(y+7)^2-9$; 4) $x^2=y+11$.

Решение. Уравнение 1) соответствует каноническому уравнению параболы $y=ax^2+bx+c$, абсцисса вершины которой

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2,$ тогда $y_0 = 2^2 - 4\cdot 2 + 6 = 2.$ Итак, вершина параболы 1) находится в точке $(2;\, 2)$.

Уравнение 2) соответствует каноническому уравнению параболы $x = ay^2 + by + c$, ордината вершины которой $y_0 = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1,$ тогда $x_0 = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 7 = -8.$ Итак, вершина параболы 2) находится в точке $(-8;\, -1)$.

Уравнение 3) перепишем в виде $(y+7)^2 = (x+9)$. Тогда ему соответствует каноническое уравнение параболы $(y')^2 = 2px'$ после параллельного переноса осей координат в точку $(-9;\, -7)$. Поэтому вершина параболы 3) находится в этой точке.

Уравнению 4) соответствует каноническое уравнение параболы $(x')^2 = 2py'$ после параллельного переноса осей координат в точку $\left(0;\, -11\right)$. Поэтому вершина параболы 4) находится в этой точке.

Ответ: 1) $(2;\, 2)$, 2) $(-8;\, -1)$, 3) $(-9;\, -7)$, 4) $(0;\, -11)$.

Задание 8. Координаты фокусов кривой второго порядка равны.

8.1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1) $F_1(13;\, 0),\quad F_2(-13;\, 0)$; 2) $F_1(\sqrt{5};\, 0),\quad F_2(-\sqrt{5};\, 0)$;

3) $F_1(\sqrt{5};\, \sqrt{13}),\quad F_2(-\sqrt{5};\, \sqrt{13})$; 4) $F_1(9;\, 4),\quad F_2(3;\, 2)$.

8.2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1) $F_1(4;\, 3),\quad F_2(-4;\, -3)$; 2) $F_1(\sqrt{7};\, 0),\quad F_2(-\sqrt{7};\, 0)$;

3) $F_1(5;\, 0),\quad F_2(-5;\, 0)$; 4) $F_1(4;\, 0),\quad F_2(16;\, 9)$.

8.3. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

1) $F_1(1;\, 0),\quad F_2(-1;\, 0)$; 2) $F_1(3;\, 0),\quad F_2(-3;\, 0)$;

3) $F_1(\sqrt{5};\, 2),\quad F_2(-\sqrt{5};\, 2)$; 4) $F_1(1;\, 2),\quad F_2(5;\, 4)$.

8.4. $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

1) $F_1(17;\ 0)$, $F_2(0;\ 8)$;

2) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$;

3) $F_1(17;\ 8)$, $F_2(-17;\ 8)$;

4) $F_1(3;\ 0)$, $F_2(-3;\ 0)$.

8.5. $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

1) $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$;

2) $F_1(\sqrt{24};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{24};\ 0)$;

3) $F_1(20;\ 0)$, $F_2(-20;\ 0)$;

4) $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$.

8.6. $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$.

1) $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$;

2) $F_1(2;\ 0)$, $F_2(-2;\ 0)$;

3) $F_1(10;\ 0)$, $F_2(-10;\ 0)$;

4) $F_1(6;\ 0)$, $F_2(10;\ 6)$.

8.7. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

1) $F_1(\sqrt{41};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{41};\ 0)$;

2) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$;

3) $F_1(3;\ 0)$, $F_2(-3;\ 0)$;

4) $F_1(5;\ 4)$, $F_2(-5;\ -4)$.

8.8. $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{10}=1$.

1) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$;

2) $F_1(\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{5};\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{15};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{15};\ 0)$;

4) $F_1(0;\ \sqrt{10})$, $F_2(0;\ -\sqrt{10})$.

8.9. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

1) $F_1(\sqrt{2};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{2};\ 0)$;

2) $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$;

3) $F_1(3;\ 0)$, $F_2(-3;\ 0)$;

4) $F_1(0;\ \sqrt{7}$, $F_2(0;\ -\sqrt{7})$.

8.10. $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

1) $F_1(32;\ 7)$, $F_2(-32;\ -7)$;

2) $F_1(\sqrt{39};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{39};\ 0)$;

3) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$;

4) $F_1(\sqrt{32};\ 0)$, $F_2(0;\ \sqrt{7})$.

8.11. $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

1) $F_1(8;\ 0)$, $F_2(-8;\ 0)$;

2) $F_1(\sqrt{56};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{56};\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{60};\ 0)$, $F_2(0;\ 2)$;

4) $F_1(\sqrt{60};\ 2)$, $F_2(2;\ -\sqrt{60})$.

8.12. $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

1) $F_1(0;\ 6)$, $F_2(0;\ -6)$; 2) $F_1(6;\ 0)$, $F_2(-6;\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{30};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{30};\ 0)$; 4) $F_1(\sqrt{24};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{24};\ 0)$.

8.13. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{56}=1$.

1) $F_1(5;\ \sqrt{56})$, $F_2(-5;\ \sqrt{56})$; 2) $F_1(\sqrt{31};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{31};\ 0)$;

3) $F_1(9;\ 0)$, $F_2(-9;\ 0)$; 4) $F_1(\sqrt{56};\ 0)$, $F_2(0;\ 5)$.

8.14. $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

1) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$; 2) $F_1(\sqrt{15};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{15};\ 0)$;

3) $F_1(2\sqrt{5};\ \sqrt{5})$, $F_2(-2\sqrt{5};\ \sqrt{5})$; 4) $F_1(\sqrt{20};\ 0)$, $F_2(0;\ \sqrt{5})$.

8.15. $\dfrac{x^2}{40}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

1) $F_1(\sqrt{31};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{31};\ 0)$; 2) $F_1(7;\ 0)$, $F_2(-7;\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{40};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{40};\ 0)$; 4) $F_1(0;\ 3)$, $F_2(0;\ -3)$.

8.16. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

1) $F_1(\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{5};\ 0)$; 2) $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{7};\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$; 4) $F_1(0;\ 2)$, $F_2(0;\ -2)$.

8.17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

1) $F_1(\sqrt{23};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{23};\ 0)$; 2) $F_1(3;\ 0)$, $F_2(-3;\ 0)$;

3) $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$; 4) $F_1(16;\ 7)$, $F_2(-16;\ -7)$.

8.18. $\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

1) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$; 2) $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$;

3) $F_1(2\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{7};\ 0)$; 4) $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$.

8.19. $\dfrac{x^2}{41}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

1) $F_1(41;\,3)$, $F_2(-41;\,-3)$; 2) $F_1(\sqrt{38};\,0)$, $F_2(-\sqrt{38};\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{41};\,0)$, $F_2(-\sqrt{41};\,0)$; 4) $F_1(3\sqrt{5};\,0)$, $F_2(-3\sqrt{5};\,0)$.

8.20. $\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

1) $F_1(21;\,12)$, $F_2(-\sqrt{21};\,-2\sqrt{3})$; 2) $F_1(\sqrt{33};\,0)$, $F_2(-\sqrt{33};\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{21};\,0)$, $F_2(-\sqrt{21};\,0)$; 4) $F_1(3;\,0)$, $F_2(-3;\,0)$.

8.21. $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

1) $F_1(2\sqrt{5};\,\sqrt{5})$, $F_2(-2\sqrt{5};\,\sqrt{5})$; 2) $F_1(5;\,0)$, $F_2(-5;\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{15};\,0)$, $F_2(-\sqrt{15};\,0)$; 4) $F_1(20;\,5)$, $F_2(-20;\,5)$.

8.22. $\dfrac{x^2}{11}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

1) $F_1(\sqrt{6};\,0)$, $F_2(-\sqrt{6};\,0)$; 2) $F_1(4;\,0)$, $F_2(-4;\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{11};\,0)$, $F_2(-\sqrt{11};\,0)$; 4) $F_1(0;\,5)$, $F_2(-11;\,5)$.

8.23. $\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

1) $F_1(\sqrt{33};\,0)$, $F_2(-\sqrt{33};\,0)$; 2) $F_1(3;\,0)$, $F_2(-3;\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{21};\,2\sqrt{3})$, $F_2(-\sqrt{21};\,2\sqrt{3})$; 4) $F_1(\sqrt{21};\,0)$, $F_2(-\sqrt{21};\,0)$.

8.24. $\dfrac{x^2}{11}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

1) $F_1(11;\,0)$, $F_2(-11;\,0)$; 2) $F_1(4;\,0)$, $F_2(-4;\,0)$;

3) $F_1(\sqrt{6};\,0)$, $F_2(-\sqrt{6};\,0)$; 4) $F_1(0;\,5)$, $F_2(-11;\,5)$.

8.25. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

1) $F_1(3;\,2)$, $F_2(-3;\,-2)$; 2) $F_1(\sqrt{5};\,0)$, $F_2(-\sqrt{5};\,0)$;

3) $F_1(3;\,0)$, $F_2(-3;\,0)$; 4) $F_1(1;\,0)$, $F_2(-1;\,0)$.

8.26. $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

1) $F_1(7;\,3)$, $F_2(-7;\,-3)$; 2) $F_1(2;\,0)$, $F_2(-2;\,0)$;

3) $F_1(-7;\ 0),\quad F_2(0;\ 3)$; 4) $F_1(\sqrt{10};\ 0),\quad F_2(-\sqrt{10};\ 0)$.

8.27. $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

1) $F_1(2\sqrt{2};\ 0),\quad F_2(-2\sqrt{2};\ 0)$; 2) $F_1(2;\ 0),\quad F_2(-2;\ 0)$;

3) $F_1(6;\ 2),\quad F_2(-6;\ -2)$; 4) $F_1(6;\ 0),\quad F_2(0;\ 2)$.

8.28. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

1) $F_1(\sqrt{5};\ 0),\quad F_2(-\sqrt{5};\ 0)$; 2) $F_1(1;\ 0),\quad F_2(-1;\ 0)$;

3) $F_1(3;\ 0),\quad F_2(-3;\ 0)$; 4) $F_1(3;\ 2),\quad F_2(-3;\ -2)$.

8.29. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1) $F_1(4;\ 3),\quad F_2(-4;\ -3)$; 2) $F_1(5;\ 0),\quad F_2(-5;\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{7};\ 0),\quad F_2(-\sqrt{7};\ 0)$; 4) $F_1(16;\ 9),\quad F_2(-16;\ 9)$.

8.30. $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

1) $F_1(3;\ 0),\quad F_2(-3;\ 0)$; 2) $F_1(\sqrt{5};\ 0),\quad F_2(-\sqrt{5};\ 0)$;

3) $F_1(\sqrt{7};\ 0),\quad F_2(-\sqrt{7};\ 0)$; 4) $F_1(7;\ 2),\quad F_2(-7;\ -2)$.

Пример. Найти координаты фокусов кривых второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{10}=-1$.

Р е ш е н и е. Уравнение 1) задает эллипс, фокусы которого расположены на оси Oy. Найдем квадрат полуфокусного расстояния:

$$c^2=b^2-a^2=16-9=7\Rightarrow c=\sqrt{7}.$$

Значит, фокусы эллипса 1) находятся в точках $F_1(0;\ -\sqrt{7})$ и $F_2(0;\ \sqrt{7})$.

Уравнение 2) задает эллипс, фокусы которого расположены на оси Ox. Найдем квадрат полуфокусного расстояния:

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9\Rightarrow c=3.$$

Значит, фокусы эллипса 2) находятся в точках $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;0)$.

Уравнение 3) задает гиперболу, фокусы которой расположены на оси Ox. Найдем квадрат полуфокусного расстояния:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 3 = 9 \Rightarrow c = 3 .$$

Значит, фокусы гиперболы 3) находятся в точках $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$.

Уравнение 4) задает гиперболу, фокусы которой расположены на оси Oy. Найдем квадрат полуфокусного расстояния:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 10 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} .$$

Значит, фокусы гиперболы 4) находятся в точках $F_1(0;\ -2\sqrt{3})$ и $F_2(0;\ 2\sqrt{3})$.

Ответ: 1) $F_1(0;\ -\sqrt{7})$, $F_2(0;\ \sqrt{7})$; 2) $F_1\left(-3;\ 0\right)$, $F_2\left(3;\ 0\right)$;
3) $F_1\left(-3;\ 0\right)$, $F_2\left(3;\ 0\right)$; 4) $F_1(0;\ -2\sqrt{3})$; $F_2(0;\ 2\sqrt{3})$.

Задание 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(m;\ k;\ l)$.

9.1. $M_0(1;\ 4;\ -2)$, $\vec{n}(2;\ -3;\ 1)$.

1) $2x - 3y + z + 3 = 0$;

2) $x + 4y - 2z + 12 = 0$;

3) $2x - 3y + z - 8 = 0$;

4) $2x - 3y + z + 12 = 0$.

9.2. $M_0(3;\ 0;\ 0)$, $\vec{n}(2;\ 3;\ 4)$.

1) $2x + 3y + 4z - 6 = 0$;

2) $2x + 3y + 4z + 3 = 0$;

3) $3x - 6 = 0$;

4) $2x + 3y + 4z + 6 = 0$.

9.3. $M_0(1;\ 0;\ 5)$, $\vec{n}(-1;\ 4;\ 3)$.

1) $x + 5z - 4y + 16 = 0$;

2) $-x + 4y + 3z - 14 = 0$;

3) $x + 4y + 5z - 15 = 0$;

4) $-x + 5z - 14 = 0$.

9.4. $M_0(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{n}(-1; -2; -3)$.

1) $-2x - 4y - 9z + 14 = 0$;

2) $x + 2y + 3z - 14 = 0$;

3) $-x-2y-3z+14=0$;

4) $2x+4y+9z-14=0$.

9.5. $M_0(0;\ 1;\ 2)$, $\vec{n}(0; -1; -2)$.

1) $-y-z+5=0$;

2) $y+2z-5=0$;

3) $-x-2z-y+5=0$;

4) $-x+2z+y-5=0$.

9.6. $M_0(2; 3; 4)$, $\vec{n}(1;\ 3;\ 2)$.

1) $x+3y+2z-19=0$;

2) $x+3y+2z+19=0$;

3) $2x+3y+4z-19=0$;

4) $2x+3y+4z+19=0$.

9.7. $M_0(3; 4; 5)$, $\vec{n}(3;\ 4;\ 5)$.

1) $-3x-4y-5z-50=0$;

2) $3x+4y+5z+50=0$;

3) $3x+4y+5z-50=0$;

4) $-3x-4y-5z+50=0$.

9.8. $M_0(1;\ 3;\ 5)$, $\vec{n}(2;\ 4;\ 6)$.

1) $x+3y+5z+44=0$;

2) $2x+4y+6z+44=0$;

3) $x+3y+5z-44=0$;

4) $2x+4y+6z-44=0$.

9.9. $M_0(7;\ 3;\ 1)$, $\vec{n}(1;\ 0;\ 2)$.

1) $x+2z-9=0$;

2) $x+2z+9=0$;

3) $7x+3y+z-9=0$;

4) $7x+3y+z+9=0$.

9.10. $M_0(0;\ 1;\ 1)$, $\vec{n}(3;\ 7;\ 8)$.

1) $y+z-15=0$;

2) $3x+7y+8z+15=0$;

3) $3x+7y+8z-15=0$;

4) $y+z+15=0$.

9.11. $M_0(3;\ 10;\ 0)$, $\vec{n}(3;\ 0;\ 1)$.

1) $3x+z-9=0$;

2) $3x+z+9=0$;

3) $3x+10y-9=0$;

4) $3x+10y+9=0$.

9.12. $M_0(2;\ 4;\ 0)$, $\vec{n}(3;\ 0;\ 8)$.

1) $3x+8z+6=0$;

2) $3x+8z-6=0$;

3) $2x+4y-6=0$;

4) $2x+4y+6=0$.

9.13. $M_0(1;\ -1;\ 0)$, $\vec{n}(2;\ 3;\ 4)$.

1) $x-4y-2=0$;

2) $2x-4z=0$;

3) $x+3y-4z-2=0$;

4) $2x+3y+4z+1=0$.

9.14. $M_0(2;\ 1;\ -2)$, $\vec{n}(3;\ 0;\ 2)$.

1) $4x+2y+2z+2=0$;

2) $2x+y-2z+1=0$;

3) $6x+2z-2=0$;

4) $3x+2z-2=0$.

9.15. $M_0(1;\ -1;\ 3)$, $\vec{n}(4;\ 2;\ 3)$.

1) $2x+y+4z+1=0$;

2) $4x+2y+3z-11=0$;

3) $2x+2y-4z+1=0$;

4) $4x+y+3z-6=0$.

9.16. $M_0(5;\ 2;\ 1)$, $\vec{n}(3;\ 8;\ 7)$.

1) $3x+7y+8z-12=0$;

2) $3x+8y+7z-38=0$;

3) $6x+6y+6z-10=0$;

4) $3x+8y-7z+14=0$.

9.17. $M_0(2;\ 8;\ 2),\ \vec{n}(3;\ 2;\ -2)$.

1) $x+10y+2z+11=0$;

2) $6x+2y+2z-10=0$;

3) $8x+9y+11z+11=0$;

4) $3x+2y-2z-18=0$.

9.18. $M_0(8;\ 2;\ -1),\ \vec{n}(3;\ 9;\ 1)$.

1) $3x+9y+z-41=0$;

2) $3x-9y-10z-12=0$;

3) $5x-2y+z-1=0$;

4) $5x+2y-10z+1=0$.

9.19. $M_0(3;\ -1;\ -2),\ \vec{n}(1;\ 2;\ 8)$.

1) $3x-2y-6z+18=0$;

2) $8x+y-2z=0$;

3) $x+2y+8z+15=0$;

4) $3x+2y+8z+17=0$.

9.20. $M_0(2;\ -1;\ -1),\ \vec{n}(2;\ 0;\ 10)$.

1) $2x-y+10z-6=0$;

2) $3x-2y+9z-7=0$;

3) $x+8z+9=0$;

4) $2x+10z+6=0$.

9.21. $M_0(-2;-1;-2),\ \vec{n}(2;-3;-2)$.

1) $2x+3y-3=0$;

2) $2x+3y+2z=0$;

3) $2x-3y-2z-3=0$;

4) $2x-3y-2z=0$.

9.22. $M_0(2;\ -2;\ 0),\ \vec{n}(2;\ 3;\ 4)$.

1) $2x+6y-2=0$;

2) $2x+3y+4z+2=0$;

3) $x+3y-4z-2=0$;

4) $3y+4z-2=0$.

9.23. $M_0(2;\ 1;\ -5),\ \vec{n}(-1;\ 0;\ 1)$.

1) $x+3y+z+7=0$;

2) $2x+y-5z+10=0$;

3) $-x+z+7=0$;

4) $-x+2z+7=0$.

9.24. $M_0(-3;\ -2;\ 3),\ \vec{n}(-3;\ 1;\ 0)$.

1) $-3x-y+7=0$;

2) $-3x+y-7=0$;

3) $x+2y+z+1=0$;

4) $-2x+y-7=0$.

9.25. $M_0(5;\ 3;\ 2),\ \vec{n}(-1;\ 0;\ 3)$.

1) $-x+3z-4=0$;

2) $-2x+4z+2=0$;

3) $-x+3z-1=0$;

4) $2x+4y+3z-2=0$.

9.26. $M_0(7;\ 4;\ -2),\ \vec{n}(5;\ -3;\ 4)$.

1) $5x+3y+4z-15=0$;

2) $5x-3y+4z-15=0$;

3) $x+2y+z-16=0$;

4) $2x+3y-4z+14=0$.

9.27. $M_0(-2;\ 4;\ -1),\ \vec{n}(-1;\ 3;\ 4)$.

1) $-x+3y+4z-10=0$;

2) $-x-3y-4z+10=0$;

3) $x+3y-10=0$;

4) $x-4z-10=0$.

9.28. $M_0(6;\ 4;\ 5),\ \vec{n}(-6;-4;-5)$.

1) $6x+4y+5z-77=0$;

2) $-6x-4y-5z+77=0$;

3) $3x+5z-7=0$;

4) $3x-8y-13=0$.

9.29. $M_0(-2;\ 4;\ 4)$, $\vec{n}(3;\ 4;\ -4)$.

1) $3x+4y-4z+26=0$;

2) $x+2y-z=0$;

3) $3x+4y-4z+6=0$;

4) $-2x+4y+4z+6=0$.

9.30. $M_0(2;\ 3;\ 5)$, $\vec{n}(1;\ 3;\ 4)$.

1) $x-3y+4z-26=0$;

2) $2x+3y-4z+10=0$;

3) $-x-3y-4z+31=0$;

4) $x+3y+4z-31=0$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2;\ 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(4;\ -1;\ 3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярно данному вектору имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставим значения $A=4$, $B=-1$, $C=3$, $x_0=-1$, $y_0=2$, $z_0=0$ в уравнение и получим $4\cdot(x+1)-1\cdot(y-2)+3\cdot(z-0)=0$. Раскроем скобки и получим общее уравнение плоскости $4x-y+3z+6=0$.

Ответ: $4x-y+3z+6=0$.

Задание 10. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(x;\ y;\ z)$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

10.1. $M(1;2;3)$; $5x-2y+z+1=0$.

1) $\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-2}{-2-2}=\dfrac{z-3}{1-3}$;

2) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$;

3) $x+2y+3z=4$;

4) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

10.2. $M(4;-1;\ 2)$; $7x+y-5z+3=0$.

1) $4x-y+2=3$;

2) $\frac{x+7}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{2}$;

3) $\frac{x-4}{7}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-5}$;

4) $\frac{x-4}{7-4}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-2}{-5-2}$.

10.3. $M(5;7;-3)$; $6x+4y-7z+4=0$.

1) $\frac{x+6}{5}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-7}{-3}$;

2) $\frac{x-5}{6}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-7}$;

3) $5x+7y-3z=3$;

4) $\frac{x-5}{6-5}=\frac{y-7}{4-7}=\frac{z+3}{-7+3}$.

10.4. $M(7;-2;-5)$; $-3x-4y+2z=0$.

1) $\frac{x-7}{-3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+5}{2}$;

2) $\frac{x-3}{7}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+2}{-5}$;

3) $7x-2y-5z=-5$;

4) $\frac{x-7}{-3-7}=\frac{y-2}{-4-2}=\frac{z+5}{2+5}$.

10.5. $M(5;-1;0)$; $5x-10y+z-4=0$.

1) $\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z}{1}$;

2) $\frac{x+5}{5}=\frac{y-10}{-1}=\frac{z+1}{0}$;

3) $5x-y=-4$;

4) $\frac{x-7}{5-5}=\frac{y+1}{10+1}=z$.

10.6. $M(7;-3;-5)$; $-x+2y-3z=0$.

1) $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$;

2) $\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+5}{-3}$;

3) $7x-3y-5z-2=0$;

4) $\dfrac{x-7}{-1-7}=\dfrac{y+3}{2+3}=\dfrac{z+5}{-3+5}$.

10.7. $M(3;-2;1)$; $7x-8y+5z-10=0$.

1) $\dfrac{x-3}{7-3}=\dfrac{y+2}{-8+2}=\dfrac{z+1}{5+1}$;

2) $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+5}{1}$;

3) $3x-2y+1=4$;

4) $\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-1}{5}$.

10.8. $M(4;10;-5)$; $-4x+3y-5z=0$.

1) $4x+10y-5z=-6$;

2) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z-5}{-5}$;

3) $\dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{y-10}{3}=\dfrac{z+5}{-5}$;

4) $\dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{y-10}{3-10}=\dfrac{z+5}{-5+5}$.

10.9. $M(8;9;10)$; $-3x-4y+5z+1=0$.

1) $8x+9y+10z=-2$;

2) $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-4}{9}=\dfrac{z+5}{10}$;

3) $\dfrac{x-8}{-3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z-10}{5}$;

4) $\dfrac{x-8}{-3-8}=\dfrac{y-9}{-4-9}=\dfrac{z-10}{5-10}$.

10.10. $M(7;-5;-1)$; $x+y+z+10=0$.

1) $\dfrac{x-7}{1-7}=\dfrac{y+5}{1+5}=\dfrac{z-1}{1-1}$;

2) $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$;

3) $7x-5y+z=3$;

4) $x-7=y+5=z+1$.

10.11. $M(6;-1;2)$; $3x-4y+z-7=0$.

1) $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$;

2) $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+10}{2}$;

3) $6x-y+2z=0$;

4) $\dfrac{x-6}{3-6}=\dfrac{y+1}{-4+1}=\dfrac{z-2}{1-2}$.

10.12. $M(10;-5;1)$; $-2x+10y-z=0$.

1) $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y+10}{-5}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) $\dfrac{x-10}{-2}=\dfrac{y+5}{10}=\dfrac{z-1}{-1}$;

3) $10x-5y+z=2$;

4) $\dfrac{x-10}{-2-10}=\dfrac{y+5}{10+5}=\dfrac{z-1}{-1+5}$.

10.13. $M(6;1;-2)$; $5x-6y+7z+4=0$.

1) $\dfrac{x-6}{5-6}=\dfrac{y-1}{-6-1}=\dfrac{z+2}{7+2}$;

2) $\dfrac{x+5}{6}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$;

3) $6x+y-2z=4$;

4) $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z+2}{7}$.

10.14. $M(7;-2;8)$; $-5x+10y-11z=0$.

1) $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+10}{-2}=\dfrac{z-11}{8}$;

2) $\dfrac{x-7}{-5}=\dfrac{y+2}{10}=\dfrac{z-8}{-11}$;

3) $7x-2y+8z=5$;

4) $\dfrac{x-7}{-5-7}=\dfrac{y+2}{10+2}=\dfrac{z-8}{-11-8}$.

10.15. $M(-3;-2;1)$; $4x+3y-2z+1=0$.

1) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$;

2) $\dfrac{x+4}{-3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$;

3) $-3x-2y+z=1$;

4) $\dfrac{x+3}{4+3}=\dfrac{y+2}{3+2}=\dfrac{z-1}{-2+1}$.

10.16. $M(-2;3;7)$; $8x-7y+2z+1=0$.

1) $-2x+3y+7z=1$;

2) $\dfrac{x+8}{-2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z+2}{7}$;

3) $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-3}{-7}=\dfrac{z-7}{2}$;

4) $\dfrac{x+2}{8+2}=\dfrac{y-3}{-7-3}=\dfrac{z-7}{2-7}$.

10.17. $M(7;2;1)$; $x-y+4z-7=0$.

1) $\dfrac{x-7}{1-7}=\dfrac{y-2}{-1-2}=\dfrac{z-1}{4-1}$;

2) $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{1}$;

3) $7x+2y+z=-7$;

4) $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$.

10.18. $M(5;-6;1)$; $12x+4y-5z-6=0$.

1) $\frac{x+12}{5}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{1}$;

2) $\frac{x-5}{12}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-1}{-5}$;

3) $5x-6y+z=-6$;

4) $\frac{x-5}{12-5}=\frac{y+6}{4+6}=\frac{z-1}{-5-1}$.

10.19. $M(7;-2;1)$; $-3x+5y-2z=0$.

1) $\frac{x-7}{-3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{-2}$;

2) $\frac{x-3}{7}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{1}$;

3) $7x-2y+z=-3$;

4) $\frac{x-7}{-3-7}=\frac{y+2}{5+2}=\frac{z-1}{-2-1}$.

10.20. $M(-3;-2;-1)$; $x-4y+3z-1=0$.

1) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{-1}$;

2) $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+1}{3}$;

3) $-3x-2y-z=-1$;

4) $\frac{x+3}{1+3}=\frac{y+2}{-4+2}=\frac{z+1}{3+1}$.

10.21. $M(7;5;2)$; $9x-3y+2z-4=0$.

1) $7x+5y+2z=-4$;

2) $\frac{x+9}{7}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{2}$;

3) $\frac{x-7}{9}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{2}$;

4) $\frac{x-7}{9-7}=\frac{y-5}{-3-5}=\frac{z-2}{2-2}$.

10.22. $M(-9;3;4)$; $2x-8y+9z=-8$.

1) $\dfrac{x+9}{2+9}=\dfrac{y-3}{-8-3}=\dfrac{z-4}{9-4}$;

2) $\dfrac{x+2}{-9}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z+9}{4}$;

3) $-9x+3y+4z=-8$;

4) $\dfrac{x+9}{2}=\dfrac{y-3}{-8}=\dfrac{z-4}{9}$.

10.23. $M(2;-2;-3)$; $8x-y+4z-3=0$.

1) $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$;

2) $\dfrac{x+8}{8}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+4}{-3}$;

3) $2x-2y-3z=3$;

4) $\dfrac{x-2}{8-2}=\dfrac{y+2}{-1+2}=\dfrac{z+3}{4+3}$.

10.24. $M(1;6;9)$; $3x-y-3z-6=0$.

1) $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-6}{-1-6}=\dfrac{z-9}{-3-9}$;

2) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-3}{9}$;

3) $x+6y+9z=6$;

4) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-9}{-3}$.

10.25. $M(7;4;-3)$; $9x-y+5z-7=0$.

1) $\dfrac{x+9}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+5}{-3}$;

2) $\dfrac{x-7}{9}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+3}{5}$;

3) $7x+4y-3z=7$;

4) $\dfrac{x-7}{9-7}=\dfrac{y-4}{-1-4}=\dfrac{z+3}{5+3}$.

10.26. $M(4;-3;1)$; $7x-5y+z-5=0$.

1) $4x-3y+z=5$;

2) $\frac{x+7}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+1}{1}$;

3) $\frac{x-4}{7}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-1}{1}$;

4) $\frac{x-4}{7-4}=\frac{y+3}{-5+3}=\frac{z-1}{1-1}$.

10.27. $M(4;1;3)$; $-2x-3y+4z+6=0$.

1) $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{4}$;

2) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{3}$;

3) $4x+y+3z=6$;

4) $\frac{x-4}{-2-4}=\frac{y-1}{-3-1}=\frac{z-3}{4-3}$.

10.28. $M(5;2;-7)$; $10x-9y+8z-3=0$.

1) $\frac{x+10}{5}=\frac{y-9}{2}=\frac{z+8}{-7}$;

2) $\frac{x-5}{10}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+7}{8}$;

3) $5x+2y-7z-3=0$;

4) $\frac{x-5}{10-5}=\frac{y-2}{-9-2}=\frac{z+7}{8+7}$.

10.29. $M(10;-7;8)$; $-9x+2y-5z=0$.

1) $\frac{x-10}{-9-10}=\frac{y+7}{2+7}=\frac{z-8}{-5-8}$;

2) $\frac{x-9}{10}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-5}{8}$;

3) $10x-7y+8z=8$;

4) $\frac{x-10}{-9}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-8}{-5}$.

10.30. $M(7;-4;3)$; $12x-10y+9z+1=0$.

1) $7x-4y+3z=1$;

2) $\dfrac{x+12}{7}=\dfrac{y-10}{-4}=\dfrac{z+9}{3}$;

3) $\dfrac{x-7}{12}=\dfrac{y+4}{-10}=\dfrac{z-3}{9}$;

4) $\dfrac{x-7}{12-7}=\dfrac{y+4}{-10+4}=\dfrac{z-3}{9-3}$.

Пример. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;\ 5;\ -2)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+10z=0$.

Решение. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{S}(l;\ m;\ n)$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Так как прямая перпендикулярна плоскости, то ее направляющий вектор равен нормальному вектору плоскости $\vec{S}(2;\ -1;\ 10)$. Подставим значения $x_0=-1,\ y_0=5,\ z_0=-2,\ l=2,\ m=-1,\ n=10$ в уравнения и получим $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+2}{10}$. Ответ: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+2}{10}$.

Задание 11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$; $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$.

11.1. $A(1;\ 3;\ 4)$; $B(4;\ -2;\ 3)$.

1) $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-5t+3 \\ z=-t+4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=t+4 \\ y=3t-2 \\ z=4t+3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=-3t-4 \\ y=5t+2 \\ z=t-3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=4t+1 \\ y=-2t+3 \\ z=3t+4 \end{cases}$.

11.2. $A(4;\ 6;\ -2)$; $B(-7;1;\ 4)$.

1) $\begin{cases} x=4t-7 \\ y=6t+1 \\ z=-2t+4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=11t+7 \\ y=5t-1 \\ z=-6t-4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=-11t+4 \\ y=-5t+6 \\ z=6t-2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-7t+1 \\ y=t+6 \\ z=4t-2 \end{cases}$.

11.3. $A(5;\ 2;\ 0);\ \ B(11;\ 7;\ -10)$.

1) $\begin{cases} x = 11t + 5 \\ y = 7t + 2 \\ z = -10t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -6t + 11 \\ y = -5t + 7 \\ z = 10t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 5t + 11 \\ y = 2t + 7 \\ z = -10 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 6t + 5 \\ y = 5t + 2 \\ z = -10t \end{cases}$.

11.4. $A(7;\ 8;\ -9);\ \ B(0;\ -1;\ 1)$.

1) $\begin{cases} x = 7t \\ y = 9t - 1 \\ z = -8t + 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -7t + 7 \\ y = -9t + 8 \\ z = 10t - 9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t \\ y = 8t - 1 \\ z = -9t + 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 7 \\ y = -t + 8 \\ z = t - 9 \end{cases}$.

11.5. $A(6;\ -10;\ 1);\ \ B(7;\ -4;\ 2)$.

1) $\begin{cases} x = -t + 7 \\ y = -6t - 4 \\ z = -t + 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = t + 6 \\ y = 6t - 10 \\ z = t + 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 6t + 7 \\ y = -10t - 4 \\ z = t + 2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 7t + 6 \\ y = -4t - 10 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$.

11.6. $A(7;\ 8;\ 10);\ \ B(-1;\ 7;\ 4)$.

1) $\begin{cases} x = -8t + 7 \\ y = -t + 8 \\ z = -6t + 10 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 8t - 1 \\ y = t + 7 \\ z = 6t + 4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = 8t + 7 \\ z = 10t + 4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -t + 7 \\ y = 7t + 8 \\ z = 4t - 10 \end{cases}$.

11.7. $A(-10;\ 4;\ -8);\ \ B(0;\ -1;\ 4)$.

1) $\begin{cases} x = -10 \\ y = -t + 4 \\ z = 4t - 8 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -10t \\ y = 5t - 1 \\ z = -12t + 4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = -10t \\ y = 4t - 1 \\ z = -8t + 4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 10t - 10 \\ y = -5t + 4 \\ z = 12t - 8 \end{cases}$.

11.8. $A(7;\ -2;\ 1);\ \ B(10;\ -4;\ 5)$.

1) $\begin{cases} x = 7t + 10 \\ y = -2t - 4 \\ z = t + 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -3t + 10 \\ y = 2t - 4 \\ z = -4t + 5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = -2t - 2 \\ z = 4t + 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 10t + 7 \\ y = -4t - 2 \\ z = 5t + 1 \end{cases}$.

11.9. $A(8;\ 10;\ 2);\ \ B(-4;\ -6;\ 0)$.

1) $\begin{cases} x = 8t - 4 \\ y = 10t - 6 \\ z = 2t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 12t - 4 \\ y = 16t - 6 \\ z = 2t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = -12t + 8 \\ y = -16t + 10 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -4t + 8 \\ y = -6t + 10 \\ z = 2 \end{cases}$.

11.10. $A(-4;\ -7;\ -5);\ \ B(1;\ \ 2;\ \ 3)$.

1) $\begin{cases} x=-5t+1 \\ y=-9t+2 \\ z=-8t+3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=5t-4 \\ y=9t-7 \\ z=8t-5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=-7t+2 \\ z=-5t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=t-4 \\ y=2t-7 \\ z=3t-5 \end{cases}$.

11.11. $A(-9;\ -1;\ 6);\ \ B(3;\ \ 2;\ 1)$.

1) $\begin{cases} x=12t-9 \\ y=3t-1 \\ z=-5t+6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-12t+3 \\ y=-3t+2 \\ z=5t+1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=-9t+3 \\ y=-t+2 \\ z=6t+1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=3t-9 \\ y=2t-1 \\ z=t+6 \end{cases}$.

11.12. $A(10;\ -12;\ 1);\ \ B(12;\ \ 1;\ \ 3)$.

1) $\begin{cases} x=12t+10 \\ y=t-12 \\ z=3t-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-2t+12 \\ y=-13t+1 \\ z=-2t+3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=10t+12 \\ y=-12t+1 \\ z=t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=2t+10 \\ y=13t-12 \\ z=2t+1 \end{cases}$.

11.13. $A(8;\ \ 7;\ 6);\ \ B(5;\ 4;\ \ 3)$.

1) $\begin{cases} x=5t+8 \\ y=4t+7 \\ z=3t+6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=3t+5 \\ y=3t+4 \\ z=3t+3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=8t+5 \\ y=7t+4 \\ z=6t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-3t+8 \\ y=-3t+7 \\ z=-3t+6 \end{cases}$.

11.14. $A(6;\ \ 7;\ 1);\ \ B(-2;\ \ 4;\ \ 3)$.

1) $\begin{cases} x=-8t+6 \\ y=-3t+7 \\ z=2t+1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=8t-2 \\ y=3t+4 \\ z=-2t+3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=6t-2 \\ y=7t+4 \\ z=t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-2t+6 \\ y=4t+7 \\ z=3t+1 \end{cases}$.

11.15. $A(-10;\ -9;\ 1);\ \ B(4;\ \ 1;\ \ 0)$.

1) $\begin{cases} x=-10t+4 \\ y=-9t+1 \\ z=t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-14t+4 \\ y=-10t+1 \\ z=t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=14t-10 \\ y=10t-9 \\ z=-t+1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=4t-10 \\ y=t-9 \\ z=1 \end{cases}$.

11.16. $A(3;\ \ 4;\ -5);\ \ B(0;\ -1;\ \ 2)$.

1) $\begin{cases} x=3t \\ y=5t-1 \\ z=-7t+2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-3t+3 \\ y=-5t+4 \\ z=7t-5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=3t \\ y=4t-1 \\ z=-5t+2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=3 \\ y=-t+4 \\ z=2t-5 \end{cases}$.

11.17. $A(7;\,-6;\,1)$; $B(9;\;-8;\;1)$.

1) $\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -2t - 6 \\ z = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -2t + 9 \\ y = 2t - 8 \\ z = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t + 9 \\ y = -6t - 8 \\ z = t + 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 9t + 7 \\ y = -8t - 6 \\ z = t - 1 \end{cases}$.

11.18. $A(7;\,-6;\,2)$; $B(5;\;-10;\;1)$.

1) $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 4t - 10 \\ z = t + 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = -4t - 6 \\ z = -t + 2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t + 5 \\ y = -6t - 10 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 5t + 7 \\ y = -10t - 6 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

11.19. $A(3;\;4;-2)$; $B(7;\;6;\;5)$.

1) $\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 4t + 6 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -4t + 7 \\ y = -2t + 6 \\ z = -7t + 5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t + 4 \\ z = 7t - 2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 7t + 3 \\ y = 6t + 4 \\ z = 5t - 2 \end{cases}$.

11.20. $A(7;\,10;\,-2)$; $B(1;\;3;\;4)$.

1) $\begin{cases} x = t + 7 \\ y = 3t + 10 \\ z = 4t - 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 7t + 3 \\ z = -6t + 4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = 10t + 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -6t + 7 \\ y = -7t + 10 \\ z = 6t - 2 \end{cases}$.

11.21. $A(6;\;2;\;5)$; $B(-1;\;0;\;1)$.

1) $\begin{cases} x = 6t - 1 \\ y = 2t \\ z = 5t + 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = 2t \\ z = 4t + 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = -7t + 6 \\ y = -2t + 2 \\ z = -4t + 5 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -t + 6 \\ y = 2 \\ z = t + 5 \end{cases}$.

11.22. $A(7;\;8;\;6)$; $B(12;\;13;\;10)$.

1) $\begin{cases} x = 5t + 7 \\ y = 5t + 8 \\ z = 4t + 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -5t + 12 \\ y = -5t + 13 \\ z = -4t + 10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 7t + 12 \\ y = 8t + 13 \\ z = 6t + 10 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 12t + 7 \\ y = 13t + 8 \\ z = 10t + 6 \end{cases}$.

11.23. $A(9;\;1;\;10)$; $B(8;\;2;\;12)$.

1) $\begin{cases} x = t + 8 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t + 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -t + 9 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 9t + 8 \\ y = t + 2 \\ z = 10t + 12 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 8t + 9 \\ y = 2t + 1 \\ z = 12t + 10 \end{cases}$.

11.24. $A(7;\ -6;\ 1);\ B(6;\ 1;\ 3)$.

1) $\begin{cases} x=-t+7 \\ y=7t-6 \\ z=2t+1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=t+6 \\ y=-7t+1 \\ z=-2t+3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=7t+6 \\ y=-6t+1 \\ z=t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=6t+7 \\ y=t-6 \\ z=3t+1 \end{cases}$.

11.25. $A(1;\ 2;\ 3);\ B(7;\ 6;\ 5)$.

1) $\begin{cases} x=t+7 \\ y=2t+6 \\ z=3t+5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-6t+7 \\ y=-4t+6 \\ z=-2t+5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=6t+1 \\ y=4t+2 \\ z=2t+3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=7t+1 \\ y=6t+2 \\ z=5t+3 \end{cases}$.

11.26. $A(5;\ 6;\ 7);\ B(1;\ 5;\ 6)$.

1) $\begin{cases} x=t+5 \\ y=5t+6 \\ z=6t+7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=4t+1 \\ y=t+5 \\ z=t+6 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=5t+1 \\ y=6t+5 \\ z=7t+6 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-4t+5 \\ y=-t+6 \\ z=-t+7 \end{cases}$.

11.27. $A(7;\ 8;\ 10);\ B(8;\ 9;\ 10)$.

1) $\begin{cases} x=t+7 \\ y=t+8 \\ z=10 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-t+8 \\ y=-t+9 \\ z=10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=7t+8 \\ y=8t+9 \\ z=10t+10 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=8t+7 \\ y=9t+8 \\ z=10t+10 \end{cases}$.

11.28. $A(3;\ 4;\ 0);\ B(7;\ -2;\ 1)$.

1) $\begin{cases} x=-4t+7 \\ y=6t-2 \\ z=t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=4t+3 \\ y=-6t+4 \\ z=t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=3t+7 \\ y=4t-2 \\ z=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=7t+3 \\ y=-2t+4 \\ z=t \end{cases}$.

11.29. $A(5;\ -2;\ -1);\ B(3;\ 2;\ 0)$.

1) $\begin{cases} x=3t+5 \\ y=2t-2 \\ z=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-4t+2 \\ z=-t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=5t+3 \\ y=-2t+2 \\ z=-t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-2t+5 \\ y=4t-2 \\ z=t-1 \end{cases}$.

11.30. $A(7;\ 5;\ 2);\ B(11;\ 10;\ 9)$.

1) $\begin{cases} x=7t+11 \\ y=5t+10 \\ z=2t+9 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=-4t+11 \\ y=-5t+10 \\ z=-7t+9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=4t+7 \\ y=5t+5 \\ z=7t+2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=11t+7 \\ y=10t+5 \\ z=9t+2 \end{cases}$.

Пример. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-3;\ 4;\ 1);\ B(2;\ -1;\ 5)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, имеют вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Подставим значения $x_1=-3,\ y_1=4,\ z_1=1,\ x_2=2,\ y_2=-1,\ z_2=5$ в уравнения и получим $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-4}{-1-4}=\frac{z-1}{5-1}$, или $\frac{x+3}{5}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-1}{4}$.

Приравняем каждую часть уравнений к параметру t: $\frac{x+3}{5}=t$, $\frac{y-4}{-5}=t$, $\frac{z-1}{4}=t$. Получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=-3+5t \\ y=4-5t \\ z=1+4t \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=4-5t \\ z=1+4t \end{cases}$.

Задание 12. Найти расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

12.1. $M_0(1;\ 1;\ 5)$, $4x - 2y - 4z + 2 = 0$.

1) 3; 2) 1; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$.

12.2. $M_0(-1;\ 2;\ 3)$, $4x - 2y - 4z + 2 = 0$.

1) $\frac{1}{6}$; 2) 4 3) $\frac{1}{3}$ 4) 3.

12.3. $M_0(1;\ -1;\ 1)$, $4x + 3y + 9 = 0$.

1) 2; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 4; 4) $\frac{3}{5}$.

12.4. $M_0(3;\ -1;\ 1)$, $-5x + 14y + 2z - 3 = 0$.

1) 5; 2) 2; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{2}{15}$.

12.5. $M_0(3;\ -1;\ 1)$, $x + 2y + 2z - 18 = 0$.

1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) 3.

12.6. $M_0(5; 0; 1)$, $4x - 2y - 4z + 2 = 0$.

1) 1; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) 3.

12.7. $M_0(-2; 1; 1)$, $4x + 3y + 9 = 0$.

1) 2; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{7}{25}$; 4) 4.

12.8. $M_0(0; 1; 1)$, $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

1) 4; 2) $\frac{5}{3}$; 3) 1; 4) 2.

12.9. $M_0(3; -2;1)$, $-5x + 14y + 2z - 4 = 0$.

1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3)3; 4) 4.

12.10. $M_0(-5;-1;-2)$, $4x - 2y - 4z + 2 = 0$.

1) 1; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{6}$.

12.11. $M_0(2;-3;-2)$, $x - 8y - 4z + 2 = 0$.

1) 1; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $\frac{5}{3}$; 4)4.

12.12. $M_0(0; 1; 0)$, $x - 2y - 2z - 4 = 0$.

1) 2; 2) 3; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{2}{9}$.

12.13. $M_0(0; 0; 0)$, $4x - 2y - 4z + 2 = 0$.

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{5}{6}$.

12.14. $M_0(1; 1;2)$, $-5x + 14y - 2z + 10 = 0$.

1) 1; 2) $\frac{8}{5}$; 3) $\frac{7}{15}$; 4) 2.

12.15. $M_0(1; 2; 0)$, $x - 8y - 4z + 9 = 0$.

1) 5; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{5}{9}$; 4) $\frac{2}{3}$.

12.16. $M_0(1; 3; 5)$, $3y + 4z + 1 = 0$.

1) 2; 2) 1; 3) 6; 4) $\frac{5}{6}$.

12.17. $M_0(-2; 3; -1)$, $4x - 3y + 2 = 0$.

1) $\frac{3}{5}$; 2) 3; 3) $\frac{4}{5}$; 4) 1.

12.18. $M_0(0; 1; 0)$, $x - 2y - 2z - 10 = 0$.

1) 4; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{9}$.

12.19. $M_0(-1;-1;0)$, $-5x + 14y - 2z - 6 = 0$.

1) 2; 2) 3; 3) $\frac{12}{5}$; 4) 1.

12.20. $M_0(-1; 1; 1)$, $x + 8y + 4z - 2 = 0$.

1) 3; 2) 1; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{1}{3}$.

12.21. $M_0(0; 0; 0)$, $x - 2y + 2z - 16 = 0$.

1) 4; 2) 3; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$.

12.22. $M_0(3; -1;1)$, $5x + 14y + 2z - 18 = 0$.

1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 4.

12.23. $M_0(1; 2; -1)$, $x - 8y - 4z + 7 = 0$.

1) 2; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{9}$.

12.24. $M_0(1; 3; 5)$, $4x - 3y + 2 = 0$.

1) 5; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 3.

12.25. $M_0(7; 0; 0)$, $-5x + 14y - 2z - 10 = 0$.

1) 4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 6.

12.26. $M_0(0; 2; -1)$, $x + 8y - 4z + 7 = 0$.

1) 3; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 4.

12.27. $M_0(1; 0; -2)$, $3y-4z+1 = 0$.

1) 2; 2) $\frac{2}{9}$; 3) 1; 4) $\frac{9}{5}$.

12.28. $M_0(2;0;–2)$, $x – 2y + 2z – 16 = 0$.

1) 3; 2) 6; 3) 4; 4) 5.

12.29. $M_0(1; 1; –2)$, $3x + 4z + 1 = 0$.

1) 5; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{5}{6}$.

12.30. $M_0(0; 2; –1)$, $x + 8y + 4z + 6 = 0$.

1) 4; 2) 2; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1.

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-1; 3; 4)$ до плоскости $6x - 2y + 3z - 14 = 0$.

Решение. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставим значения $x_0 = -1$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$, $A = 6$, $B = -2$, $C = 3$ в формулу и получим $d = \frac{|6 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 14|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{14}{7} = 2$. Ответ: 2.

Задание 13. Найти:

а) косинус угла, образованного плоскостями L_1 и L_2.

13.1. L_1: $2x + 2y + z + 3 = 0$, L_2: $3x + 4y + 5z – 1 = 0$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.2. L_1: $–2x + 2y + z + 5 = 0$, L_2: $3x + 4y – 5z + 3 = 0$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.3. L_1: $–x + y + z + 4 = 0$, L_2: $3x + 4y – 5 = 0$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.4. L_1: $–2x + 2y – z – 3 = 0$, L_2: $3x + 2y + 6z + 4 = 0$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.5. L_1: $-2x + 4y + 5z + 7 = 0$, L_2: $-3x - 2y + 6z + 1 = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.6. L_1: $3x + y + 5z - 2 = 0$, L_2: $x - 2y + 4z + 6 = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.7. L_1: $x + y + 2z - 5 = 0$, L_2: $x - 2y + 4z = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{14}}{6}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.8. L_1: $4x + y + 2z - 8 = 0$, L_2: $x - 2y + 2z + 7 = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.9. L_1: $5x + y + z + 4 = 0$, L_2: $x + y + z - 2 = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.10. L_1: $x + 5y + z - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + z - 3 = 0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

б) косинус угла, образованного пересечением прямых l_1 и l_2.

13.11. l_1: $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, l_2: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-11}{4} = \frac{z+1}{5}$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

5.12. l_1: $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$, l_2: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-5}$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.13. l_1: $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, l_2: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{6}$.

1) $-\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.14. l_1: $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{1}$, l_2: $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=4t+2 \\ z=-3 \end{cases}$.

1) $-\dfrac{8}{21}$; 2) $\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

13.15. l_1: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+1}{5}$, l_2: $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z}{6}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

13.16. l_1: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+1}{5}$, l_2: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+4}{4}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

13.17. l_1: $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, l_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z+4}{4}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

13.18. l_1: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, l_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

13.19. l_1: $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$, l_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{7}{9}$; 3) $\dfrac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

13.20. l_1: $\dfrac{x-1{,}5}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{1}$, l_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3{,}4}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

в) синус угла, образованного пересечением прямой l с плоскостью L.

13.21. l: $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$, L: $3x+4y+5z-1=0$.

1) $\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.22. l: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$, L: $3x+4y-5z+3=0$.

1) $\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.23. l: $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$, L: $3x+2y+6z+4=0$.

1) $\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.24. l: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{1}$, L: $3x+4y-5=0$.

1) $\frac{8}{21}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{19}{15\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13.25. l: $\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{5}$, L_2: $-3x-2y+6z+1=0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.26. l: $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{1}=\frac{z+1}{5}$, L: $x-2y+4z+6=0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.27. l: $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$, L: $x-2y+4z=0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{14}}{6}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.28. l: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, L: $x-2y+2z+7=0$.

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

13.29. l: $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$, L: $x + y + z - 2 = 0$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{7}{9}$; 3) $\dfrac{14}{\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

30. l: $\dfrac{x-1{,}5}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{1}$, L: $x + 2y + z - 3 = 0$.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Пример. Найти косинус угла, образованного плоскостями $x-2y+2z+16=0$ и $3x-4y-18=0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами и вычисляется по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Выпишем нормальные векторы для данных плоскостей: $\overrightarrow{n_1}(1;\ -2;\ 2)$ и $\vec{n}_2(3;\ -4;\ 0)$. Подставим значения $A_1=1$, $B_1=-2$, $C_1=2$, $A_2=3$, $B_2=-4$, $C_2=0$ в формулу и получим

$$\cos(\varphi)=\frac{1\cdot3+(-2)\cdot(-4)+2\cdot0}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+16+0}}=\frac{11}{3\cdot5}=\frac{11}{15}.\qquad \text{Ответ: } \frac{11}{15}.$$

Пример. Найти косинус угла, образованного пересечением прямых $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{5}$ и $\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Решение. Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами и вычисляется по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Выпишем направляющие векторы данных прямых: $\vec{S}_1(-3;\ 4;\ 5)$ и $\vec{S}_2(-2;\ -2;\ 1)$. Подставим значения $l_1=-3$, $m_1=4$, $n_1=5$, $l_2=-2$, $m_2=-2$, $n_2=1$ в формулу и получим

$$\cos(\varphi)=\frac{-3\cdot(-2)+4\cdot(-2)+5\cdot1}{\sqrt{9+16+25}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{5\sqrt{2}\cdot3}=\frac{\sqrt{2}}{10}.\qquad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{10}$$

.

Пример. Найти синус угла, образованного пересечением прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-5}{1}$ и плоскостью $3x+4z-19=0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле

$$\sin(\varphi)=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Выпишем нормальный вектор плоскости $\vec{n}(3;\,0;\,4)$ и направляющий вектор прямой $\vec{S}(2;-2;\,1)$. Подставим значения $A = 3$, $B = 0$, $C = 4$, $l=2$, $m=-2$, $n=1$ в формулу и получим

$$\cos(\varphi)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{|10|}{5\cdot 3}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6. ПРИМЕР МОДУЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;\,–6)$, $B(3;\,–6)$, $C(7;\,2)$. Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB, BC и их угловые коэффициенты;
3) уравнение медианы AE;
4) уравнение и длину высоты CD.

2. Построить линию, определяемую уравнением $x=\frac{3}{8}\sqrt{y^2-32}$.

3. Привести уравнение к каноническому виду, определить полуоси, полуфокусное расстояние, эксцентриситет и построить линию

$$9x^2-4y^2+18x+8y-31=0.$$

4. Даны точки $A(4;\,–1;\,–3)$, $B(2;\,–3;\,–2)$, $C(–3;\,2;\,3)$, $M_0(–2;\,6;\,–5)$. Требуется найти:

1) уравнение плоскости Q, проходящей через точку C перпендикулярно вектору AB;
2) уравнение плоскости W, проходящей через точки B, C, M_0;
3) точку M' симметричную M_0 относительно плоскости Q;
4) расстояние между точкой M_0 и плоскостью Q.

СОДЕРЖАНИЕ