МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования I ступени по специальностям
1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий,
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство*

Горки
БГСХА
2022

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
К93

Одобрено методической комиссией мелиоративно-строительного факультета 25.01.2021 (протокол № 5) и Научно-методическим советом БГСХА 24.02.2021 (протокол № 6)

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. В. Жерело*

Курзенков, С. В.

К93 Высшая математика. Элементы векторной алгебры : учебно-методическое пособие / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова. – Горки : БГСХА, 2022. – 84 с.
ISBN 978-985-882-187-6.

Приведены краткий теоретический материал по теме «Элементы векторной алгебры», тестовые задания, варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования I ступени по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-882-187-6

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы выработать прочные навыки самостоятельной работы с книгой, сформировать умение рационально организовывать свой умственный труд.

Самостоятельная работа студентов по высшей математике способствует лучшему усвоению теоретического материала и методов решения задач.

Предлагаемое пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Элементы векторной алгебры». Для того чтобы студенты могли оценить уровень своих знаний по данному разделу высшей математики, в данную разработку включены контрольный тест, типовой пример модульного задания, а также тридцать вариантов индивидуального домашнего задания. После выполнения студентом своего варианта индивидуального задания и проверки преподавателем предполагается его защита. При этом студент должен показать знание соответствующих теоретических вопросов раздела и приобретенные навыки при решении задач.

Настоящее пособие является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики для студентов по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. Н. Высшая математика: в 2 ч. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Ч. 1. – 544 с.

2. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

3. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск: Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 302 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 3 ч. / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 608 с.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Векторы, основные понятия

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$).

Модулем (*длиной*) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние от начальной точки A до конечной точки B вектора и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Единичным (или *ортом*) называется вектор $\vec{e}$, длина которого равна единице.

Нулевым (или *нуль-вектором*) называется вектор $\vec{0}$, длина которого равна нулю.

Коллинеарными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Компланарными называются три вектора и более, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Равными ($\vec{a} = \vec{b}$) называются два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т. е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор $\vec{a}$ имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол $\angle\varphi = (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})$, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\vec{b}$, при условии, что оба вектора отнесены к общему началу (рис. 1).

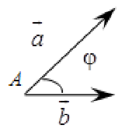


Рис. 1

Угол между векторами измеряется в пределах $0 \le (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) \le \pi$. Если угол между векторами $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$ (или 90°), то векторы называются *ортогональными*. В случае, когда $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 0$ (или 0°), говорят, что вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$, если же $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \pi$ (или 180°), то вектор $\vec{a}$ имеет противоположное направление к вектору $\vec{b}$.

1.2. Координаты вектора и его длина

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет угол φ с осью l.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2), взятой со знаком плюс, если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и со знаком минус в противном случае.

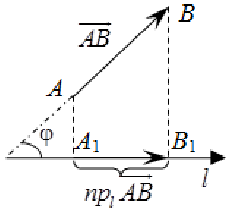


Рис. 2

Проекция вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l вычисляется по формуле

$$пр_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\varphi).$$

Декартовыми прямоугольными координатами x, y, z вектора $\vec{a}$ называются его проекции на соответствующие координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Вектор $\vec{a}$ с координатами x, y, z записывают в координатной форме $\vec{a}(x; y; z)$ или в виде разложения по базису $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно (или *базисные векторы*).

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.3. Линейные операции над векторами и их свойства

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$ (рис. 3).

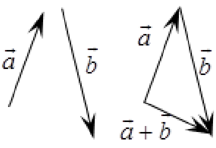
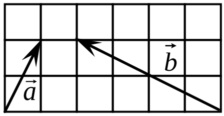
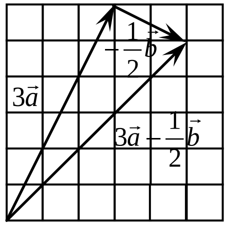


Рис. 3

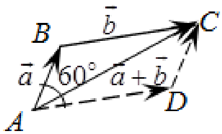
Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ *на число* $\lambda \neq 0$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и коллинеарен вектору $\vec{a}$. Причем векторы $\vec{a}$ и $\lambda \cdot \vec{a}$ сонаправлены в случае $\lambda > 0$ и имеют противоположные направления, если $\lambda < 0$.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.





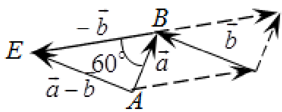
Пример 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60°$, причем $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=7$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.



Решение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. Заметим, что $\angle ABC=120°$. Тогда длину вектора $|\overrightarrow{AC}|$ можем найти по теореме косинусов $|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle ABC)}=$

$$=\sqrt{2^2+7^2-2\cdot2\cdot7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{4+49+14}=\sqrt{67}.$$

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{b}$. Так как $\angle ABE=60°$, то длина вектора $|\overrightarrow{AE}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ по теореме косинусов равна



$$|\overrightarrow{AE}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle ABE)}=\sqrt{2^2+7^2-2\cdot2\cdot7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{4+49-14}=\sqrt{39}.$$

1.4. Операции над векторами в координатах

Пусть заданы векторы $\vec{a}(x_a;y_a;z_a)$ и $\vec{b}(x_b;y_b;z_b)$ в прямоугольной системе координат. Линейные операции над ними выполняются по следующим формулам:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\vec{c}(x_a\pm x_b;y_a\pm y_b;z_a\pm z_b);\quad \alpha\cdot\vec{a}=(\alpha x_a;\alpha y_a;\alpha z_a).$$

Пример 1. Даны два вектора $\vec{a}(2; -1; 4)$ и $\vec{b}(0; -1; 2)$. Найти координаты и длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a}(4; -2; 8)$; $-3\vec{b}(0; 3; -6)$; $2\vec{a} - 3\vec{b}(4+0; -2+3; 8-6)$; $2\vec{a} - 3\vec{b}(4; 1; 2)$; $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$.

Пример 2. Дан вектор $\vec{a}$, образующий с осью ℓ угол $\varphi_1 = 60°$, и вектор $\vec{b}$, образующий с той же осью угол $\varphi_2 = 120°$. Найти проекцию суммы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, где $\vec{c} = 2(\vec{a} - \vec{b})$, на ось ℓ, если известно, что $\left|\vec{a}\right| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 4$.

Решение. Так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, необходимо найти проекцию каждого слагаемого на ось ℓ.

$$np_\ell \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos(\varphi_1) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$np_\ell \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cos(\varphi_2) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

$$np_\ell \vec{c} = 2\left(np_\ell \vec{a} - np_\ell \vec{b}\right) = 2 \cdot (3+2) = 10.$$

Тогда $np_\ell(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 3 - 2 + 10 = 11$.

Понятие радиус-вектора точки. Координаты и длина вектора, заданного граничными точками.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ произвольную точку M. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ будем называть *координатами точки M*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M и обозначается $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r_M}$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты начальной точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и конечной точки $B(x_B; y_B; z_B)$ (рис. 4). Нетрудно заметить, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$. Тогда согласно введенным для векторов операциям имеем $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

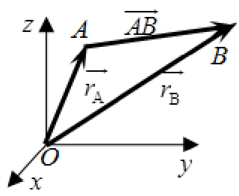


Рис. 4

Рассмотрим *радиус-вектор точки* $M(x_M; y_M; z_M)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Пусть $\overrightarrow{r_M}$ образует с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно углы α, β, γ (рис. 5). Направление вектора $\overrightarrow{r_M}$ определяется с помощью направляющих косинусов cos(α), cos(β), cos(γ), которые равны:

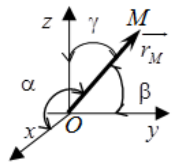


Рис. 5

$$\cos(\alpha)=\frac{x_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|};\quad \cos(\beta)=\frac{y_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|};\quad \cos(\gamma)=\frac{z_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|},$$

где $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1$.

Пример 3. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-3;-4)$, $B(1;-2)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\big(1-(-3);-2-(-4)\big),\ \ \overrightarrow{AB}\big(1+3;\,-2+4\big),\ \ \overrightarrow{AB}\big(4;\ 2\big).$$

Тогда длина вектора будет равна

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Пример 4. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AM}$, если $A(3;-4;1)$, $M(4;6;-3)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}(4-3;\ 6-(-4);\ -3-1);\quad \overrightarrow{AM}(1;10;-4).$$

Тогда его длина и направляющие косинусы будут соответственно равны:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{1^2+10^2+(-4)^2}=\sqrt{1+100+16}=\sqrt{117},$$

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{117}};\quad \cos(\beta)=\frac{10}{\sqrt{117}};\quad \cos(\gamma)=\frac{-4}{\sqrt{117}}.$$

Условия коллинеарности и равенства векторов, заданных в координатах.

Пусть задан ненулевой вектор $\vec{a}(x_a;\,y_a;\,z_a)$. Тогда любой коллинеарный с ним вектор будет отличаться от него на постоянный множитель, т. е. $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, где $\vec{b}(\lambda x_a;\lambda y_a;\lambda z_a)$. Следовательно, у коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ координаты пропорциональны:

$$\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}=\lambda,$$

причем, если: 1) $\lambda > 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены;

2) $\lambda < 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположные направления;

3) $0 < |\lambda| < 1$, то $\vec{a}$ короче вектора $\vec{b}$ в λ раз;

4) $|\lambda| > 1$, то $\vec{a}$ длиннее вектора $\vec{b}$ в λ раз.

Условием равенства двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является *совпадение их координат*.

Пример 5. Определить, при каких значениях параметров α и β векторы $\vec{a}(-2;\, 3;\, \beta)$ и $\vec{b}(\alpha;\, -6;\, 2)$ коллинеарны. Как направлены эти векторы и как соотносятся их длины?

Решение. Из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет следовать пропорциональность их соответствующих координат $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$. В нашем случае эти пропорции будут выглядеть следующим образом $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} = \lambda$.

Вторая пропорция полностью определена, откуда $\lambda = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{-2}{\alpha} = -\frac{1}{2}$, откуда $\alpha = 4$. С другой стороны $\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}$, тогда $\beta = -1$.

Так как $\lambda = -0{,}5$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположные направления и вектор $\vec{a}$ в два раза короче вектора $\vec{b}$.

Пример 6. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;\, -4;\, 7)$; $B(-5;\, 3;\, -2)$; $C(1;\, 2;\, -3)$. Найти координаты вершины D.

Решение. Заметим, что вектор $\overrightarrow{BC}$ равен вектору $\overrightarrow{AD}$, а значит координаты этих векторов равны. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{BC}(6;\, -1;\, -1)$, $\overrightarrow{AD}(x_D - 3;\, y_D + 4;\, z_D - 7)$. Тогда $x_D - 3 = 6$ или $x_D = 9$; $y_D + 4 = -1$ или $y_D = -5$; $z_D - 7 = -1$ или $z_D = 6$. Таким образом, точка D имеет координаты $D(9;\, -5;\, 6)$.

1.5. Деление отрезка в заданном отношении

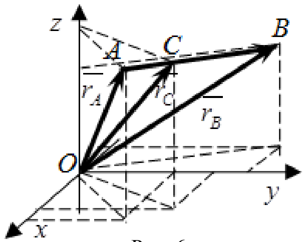


Рис. 6

Пусть в прямоугольной системе координат *Oxyz* задан произвольный отрезок *AB*, где граничные точки отрезка имеют координаты $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, а также известно, что внутренняя точка *C* этого отрезка делит отрезок *AB* в отношении $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (рис. 6).

Тогда радиус-вектор точки *C* определяется по формуле

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{m_2 \cdot \overrightarrow{r_A} + m_1 \cdot \overrightarrow{r_B}}{m_1 + m_2} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \lambda \cdot \overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}.$$

В координатной форме данную зависимость можно переписать так:

$$x_C = \frac{m_2 \cdot x_A + m_1 \cdot x_B}{m_1 + m_2} = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{m_2 \cdot y_A + m_1 \cdot y_B}{m_1 + m_2} = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda};$$

$$z_C = \frac{m_2 \cdot z_A + m_1 \cdot z_B}{m_1 + m_2} = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}.$$

В частном случае, когда точка *C* является серединой отрезка *AB*, формулы преобразуются к виду:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Пример. Найти координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* в отношении $\lambda = \dfrac{2}{3}$, если $A(2;\ 4;\ -1)$, $B(-3;\ -1;\ 6)$.

Решение. Воспользуемся расчетными формулами:

$$x_C = \frac{2 + \frac{2}{3}\cdot(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{0}{\frac{5}{3}} = 0; \quad y_C = \frac{4 + \frac{2}{3}\cdot(-1)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{10}{3} : \frac{5}{3} = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5} = 2;$$

$$z_C = \frac{-1 + \frac{2}{3}\cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{1} : \frac{5}{3} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{5}.$$

Таким образом, точка *C* имеет координаты $C(0;\ 2;\ 1{,}8)$.

1.6. Линейная зависимость векторов

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ *линейно независимы*, если из равенства

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = 0$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. В противном случае векторы называются *линейно зависимыми*.

Если произвольный вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$, то говорят, что этот вектор *линейно выражается* через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

Справедливы следующие утверждения:

1) векторы (при $n > 1$) линейно зависимы тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из них линейно выражается через остальные;

2) если векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ линейно независимы, то ни один из них нельзя выразить через остальные; в частности, ни один из них не может быть нулевым;

3) векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.

Пример. Разложить вектор $\vec{c}(9;\ 4)$ по векторам $\vec{a}(1;\ 2)$ и $\vec{b}(2;\ -3)$.

Решение. $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b};\ \vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j};\ \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j};\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}.$

$$9\vec{i} + 4\vec{j} = \lambda_1\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) + \lambda_2\left(2\vec{i} - 3\vec{j}\right) = \left(\lambda_1 + 2\lambda_2\right)\vec{i} + \left(2\lambda_1 - 3\lambda_2\right)\vec{j}.$$

Нахождение неизвестных параметров λ_1 и λ_2 сведем к решению системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 9, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Систему решим методом Крамера:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{-7} = 5;\quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Тогда вектор $\vec{c}(9;\ 4)$ в разложении по векторам $\vec{a}(1;\ 2)$ и $\vec{b}(2;\ -3)$ будет иметь следующий вид: $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$.

1.7. Скалярное произведение векторов, его свойства и применение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

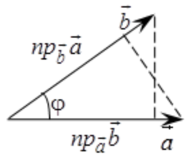


Рис. 7

Из рис. 7 видно, что $|\vec{a}|\cos(\varphi) = np_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos(\varphi) = np_{\vec{a}}\vec{b}$. Поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переместительный закон;
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ – распределительный закон;
3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны ($\vec{a} \| \vec{b}$), то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = \vec{0}$);
5. Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату длины этого вектора $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

В частности, скалярное произведение единичных векторов (ортов) удовлетворяет равенствам (рис. 8):

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{i} = 1,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

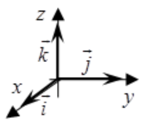


Рис. 8

В координатной форме скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Пример 1. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a} \hat{;} \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся пятым свойством скалярного произведения векторов:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^{\,2} - 24\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 4 - 24\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot 25} = \sqrt{36 - 120 + 400} = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}.$$

Применение скалярного произведения векторов.

1. *Нахождение угла между векторами* $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2} + z_a^{\,2}}\cdot\sqrt{x_b^{\,2} + y_b^{\,2} + z_b^{\,2}}}.$$

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$. Найти внутренний угол при вершине C.

Решение. Для нахождения угла C найдем координаты векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB}(1-0;\ 1-0;\ 1-5),\quad \overrightarrow{CB}(1;\ 1;\ -4);$$

$$\overrightarrow{CA}(2-0;\ -1-0;\ 3-5),\quad \overrightarrow{CA}(2;\ -1;\ -2).$$

Тогда $\cos(\angle C) = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \dfrac{1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} =$

$= \dfrac{2 - 1 + 8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}\cdot 9} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $\angle C = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ на ось l, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. Определим на оси l орт $\bar{e}_l$ и найдем его координаты. Для этого воспользуемся тождеством $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$. Так как $\vec{e}_l$ лежит на оси l, то он образует с осями координат равные острые углы. Таким образом, $\angle\alpha = \angle\beta = \angle\gamma$. Тогда тождество примет вид: $3\cos^2(\alpha) = 1$, или $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Это означает, что орт оси l имеет координаты $\vec{e}_l\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Найдем косинус угла между ортом и вектором $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$:

$$\cos(\vec{a};\vec{e}_l)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_l}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_l|}=\frac{1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}:\frac{\sqrt{6}}{1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда проекция вектора $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ на ось l будет равна

$$np_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a};\vec{e}_l)=\sqrt{6}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

2. *Нахождение проекции вектора на вектор*. Пусть векторы заданы в координатной форме: $\vec{a}(x_a;y_a;z_a)$ и $\vec{b}(x_b;y_b;z_b)$. Тогда проекции определяются формулами:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_b{}^2+y_b{}^2+z_b{}^2}};$$

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a{}^2+y_a{}^2+z_a{}^2}}.$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

Решение.

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_b{}^2+y_b{}^2+z_b{}^2}}=\frac{2\cdot1+(-3)\cdot(-1)+2\cdot4}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{13}{\sqrt{18}}=\frac{13}{3\sqrt{2}}.$$

3. *Проверка векторов на ортогональность.* Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b=0.$$

Пример 5. Даны вершины четырехугольника $A(1;\,-2;\,2)$, $B(1;\,4;\,0)$, $C(-4;\,1;\,1)$, $D(-5;\,-5;\,3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем координаты векторов, определяющих диагонали четырехугольника $\overrightarrow{AC}(-4-1;\,1+2;\,1-2)$, или $\overrightarrow{AC}(-5;\,3;\,-1)$; $\overrightarrow{BD}(-5-1;-5-4;\,3-0)$, или $\overrightarrow{BD}(-6;-9;\,3)$. Проверим ортогональность этих векторов $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-5\cdot(-6)+3\cdot(-9)-1\cdot3=30-27-3=0$.

Это означает, что диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

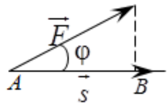


Рис. 9

4. *Нахождение работы постоянной силы.* Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$ (рис. 9). Из курса физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos(\varphi) = \vec{s} \cdot \vec{F}$.

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора перемещения на вектор силы.

Пример 6. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F}$, если она имеет координаты $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, а точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения A(2; 4; 6) в положение B(4; 2; 7). Под каким углом к $\vec{s}$ направлена сила $\vec{F}$?

Решение. Найдем перемещение материальной точки, т. е. вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$. $\vec{s}(4-2;\ 2-4;\ 7-6)$, или $\vec{s}(2; -2;\ 1)$. Тогда

$$A = \vec{s} \cdot \vec{F} = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6 \text{ (ед. работы).}$$

Угол φ между $\vec{F}$ и $\vec{s}$ найдем по формуле

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|} = \frac{6}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

1.8. Векторное произведение двух векторов, его свойства и применение

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 10) называется *вектор* $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\varphi)$, где $0 \le \varphi \le \pi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. численно *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, *как на сторонах*;

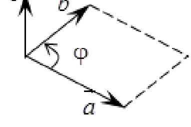


Рис. 10

2) вектор $\vec{c}$ *ортогонален векторам* $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке *образуют правую тройку векторов*, т. е. если смотреть на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с конечной точки вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет осуществляться против часовой стрелки.

Обозначается векторное произведение как $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$;
3. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

В частности, векторное произведение единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, образующих прямоугольный базис, определяется по следующей схеме: векторное произведение совпадающих сомножителей равно нулю; векторное произведение несовпадающих сомножителей равно третьему не задействованному в произведении орту, взятому с положительным знаком, если направление кратчайшего поворота от первого сомножителя до второго совпадает с направлением часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

В координатной форме векторное произведение векторов $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ равно:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Применение векторного произведения векторов.

1. *Проверка векторов на коллинеарность.* Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и наоборот.

Пример 1. Проверить векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ на коллинеарность.

Решение. Запишем векторы в координатной форме $\vec{a}\,(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}\,(1;\ 2;\ -3)$ и найдем их векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Так как $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$, то эти векторы не коллинеарны.

2. *Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.* Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ модуль этого произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т. е.

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\varphi) = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{matrix}\right\|,$$

а значит площадь соответствующего треугольника будет равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{matrix}\right\|.$$

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b},\ \ 3\vec{a} + \vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 30^\circ$.

Решение. Площадь параллелограмма определяется по формуле

$S_{\text{пар}} = \left|(\vec{a} + 3\vec{b})\times(3\vec{a} + \vec{b})\right|$. Найдем $(\vec{a} + 3\vec{b})\times\ (3\vec{a} + \vec{b}) =$

$$= 3\vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} + 9\vec{b}\times\vec{a} + 3\vec{b}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} + 9\vec{b}\times\vec{a} = \ 8\cdot(\vec{b}\times\vec{a})\,.$$

Тогда $S_{\text{пар}} = 8\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin 30^\circ = 4$ (ед.^{2}).

Пример 3. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 0;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 0)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC}(0-2;\ 1-2;\ 0-2),\ \text{ или }\ \overrightarrow{AC}(-2;\ -1;\ -2);$$

$$\overrightarrow{AB}(4-2;\ 0-2;\ 3-2),\ \text{или}\ \overrightarrow{AB}(2;-2;\ 1).$$

Тогда $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$

$=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k},$ а его модуль равен $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}.$ Следовательно, площадь треугольника равна $S_{\Delta}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед.^{2}).

3. *Определение момента силы относительно точки*. Пусть в точке A приложена сила $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства (рис. 11).

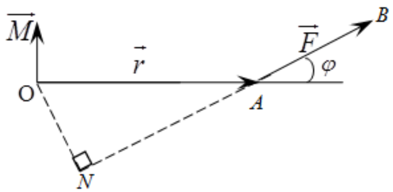


Рис. 11

Из физики известно, что моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, который проходит через точку O и удовлетворяет следующим условиям:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

2) численно равен произведению силы на плечо:

$$\vec{M}=\left|\vec{F}\right|\cdot ON=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{r}\right|\cdot\sin(\varphi)=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\sin(\vec{F}\,\hat{;}\,\overrightarrow{OA});$$

3) образует правую тройку векторов с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что

$$\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}.$$

Пример 4. Найти величину момента силы $\vec{F}(1;\ 0;\ 1)$ относительно точки $A(-2;\ 1;\ 3)$, если сила приложена к точке $B(3;\ -1;\ 0)$.

Решение. Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB}(3+2;\ -1-1;\ 0-3)$, $\overrightarrow{AB}(5;\ -2;\ -3)$. Момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки A найдем как

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k},$$

$\vec{M}(-2;\ -8;\ 2)$.

Тогда величина момента силы $\vec{F}$ равна модулю вектора

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

1.9. Смешанное произведение тройки векторов, его свойства и применение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) в произведении есть коллинеарные векторы;

в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$.

4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \lambda\vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \mu\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$.

В координатной форме смешанное произведение векторов $\vec{a}\,(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ и $\vec{c}(x_c; y_c; z_c)$ равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Применение смешанного произведения векторов.

1. *Проверка тройки векторов на компланарность.* Векторы $\vec{a}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю при условии, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{ векторы } \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Пример 1. Доказать, что точки $A(5;\ 7;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9;\ 4;\ -4)$, $D(1;\ 5;\ 0)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Если заданные точки лежат в одной плоскости, то соответствующая тройка векторов, выходящих из общего начала, будет компланарна. Проверим, компланарны ли векторы с общим началом в точке A. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(-2;-6;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}(4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD}(-4;-2;\ 2)$. Вычислим их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

2. *Определение взаимной ориентации тройки векторов в пространстве.* Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве правоориентирована, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, и левоориентирована при $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

3. *Нахождение объемов.* Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах (рис. 12), т. е.

$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \left\| \begin{matrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{matrix} \right\|.$$

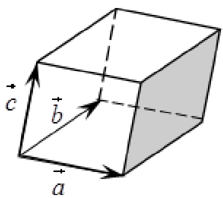


Рис. 12

Объем треугольной пирамиды, построенной

на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах (рис. 13), равен одной шестой смешанного произведения этих векторов, взятого по абсолютной величине, т. е.

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{matrix}\right\|.$$

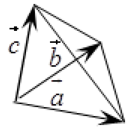


Рис. 13

Пример 2. Найти длину высоты треугольной пирамиды с вершинами $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$, опущенную на грань BCD.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}(-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD}(1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC}(4;-1;-2)$. Тогда объем пирамиды можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20\,(\text{ед.}^3).$$

Из школьного курса математики известно, что $V = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h.$ Откуда следует, что $h_B = \frac{3\cdot V}{S_{\text{осн}}}\cdot$ Поэтому для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-8-3) - \vec{j}\,(-2+12) + \vec{k}\,(-1-16) =$$

$$= -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Определим модуль векторного произведения векторов:

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2+10^2+17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}.$$

Тогда площадь треугольника BCD равна $S_{\text{осн}} = \sqrt{510}/2\,(\text{ед.}^2)$, а длина искомой высоты – $h_B = \frac{3\cdot V}{S_{\text{осн}}} = \frac{2\cdot 3\cdot 20}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}\,(\text{ед.})$.

2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И ДОМАШНИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1

1. Построить радиус-вектор точек: 1) $A(2;-3;1)$; 2) $C(1;0;3)$.

2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы:

$$1)\ \vec{a}+2\vec{b};\quad 2)\ \frac{1}{4}\vec{a}-3\vec{b}.$$

3. Векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ являются медианами треугольника ABC. Выразить через $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ векторы, определяющие стороны данного треугольника: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.

4. Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ и их длину.

5. Определить точку N с которой совпадает конец вектора $\vec{a}(3;-1;4)$, если его начало совпадает с точкой $M(1;2;-3)$.

6. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha=45^\circ,\ \beta=60^\circ,\ \gamma=120^\circ$; 2) $\alpha=45^\circ,\ \beta=135^\circ,\ \gamma=60^\circ$.

7. Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(-6;3;-9)$. Если да, то установить, какой из них длиннее и во сколько раз. Как они направлены – в одну сторону или в противоположные?

8. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

9. Найти орты векторов: 1) $\vec{a}(6;-2;-3)$; 2) $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}$.

10. Даны векторы $\vec{a}(3;-2;6)$ и $\vec{b}(-2;1;0)$. Найти координаты следующих векторов: 1) $\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $3\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2(\vec{a}+\vec{b})$.

Домашнее задание к занятию 1

1. Построить радиус-вектор точки $B(-1;-4;2)$.

2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы:

$$1)\ 2\vec{b}-\vec{a};\quad 2)\ -\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}.$$

3. Даны точки $M(2;3;-5)$ и $N(1;\ 0;\ -3)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, его длину и направляющие косинусы.

4. Определить начало вектора $\vec{a}(2;-3;-1)$, если конец вектора имеет координаты $(1;\ -1;\ 2)$.

5. Даны точки $A(2;-1;3)$, $B(1;0;-2)$, $C(2;\ 4;\ 1)$, $D(1;\ 1;\ 5)$. Найти:

1) координаты вектора $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; 2) длину вектора $\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

Практическое занятие 2

1. На плоскости даны два вектора: $\vec{p}(2;\ -3)$ и $\vec{g}(1;\ 2)$. Разложить вектор $\vec{a}(9;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g}$.

2. Даны три вектора: $\vec{p}(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{g}(-1;\ 1;\ -2)$, $\vec{r}(2;\ 1;\ -3)$. Разложить вектор $\vec{c}(11;\ -6;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

3. Даны три вектора: $\vec{a}(1;\ 2)$, $\vec{b}(-5;-1)$, $\vec{c}(-1;\ 3)$. Найти координаты линейных комбинаций векторов $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ и $16\vec{a}+5\vec{b}-9\vec{c}$.

4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$. Зная, что длины этих векторов соответственно равны $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$, вычислить:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^{\,2}$; 3) $\vec{b}^{\,2}$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(a+2\vec{b})$; 6) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

5. Даны векторы $\vec{a}(4;\ -2;\ -4)$, $\vec{b}(6;\ -3;\ 2)$. Вычислить:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$; 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

6. Даны три силы: $\overrightarrow{M}(3;-4;2)$, $\overrightarrow{N}(2;3;-5)$ и $\overrightarrow{P}(-3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;\ 3;\ -7)$ в положение $M_2(4;\ -1;\ -4)$.

7. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны.

8. Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

9. Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c}(3;-4;12)$. Вычислить $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

10. Даны точки $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ -4)$. Найти:

1) $(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $np_{\overrightarrow{AD}}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB})$;

3) угол между векторами $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

Домашнее задание к занятию 2

1. Даны векторы $\vec{a}(4;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(3;-1;\ 0)$, $\vec{c}(-1;\ 1;\ 1)$, $\vec{d}(-1;\ 3;\ 4)$. Найти числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, удовлетворяющие равенству $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

2. Даны точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;\ -1;\ 5)$ и $C(0;\ 1;\ -5)$. Вычислить:

1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

4) координаты векторов $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$.

3. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}(3;-2;-5)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2;-3;\ 5)$ в положение $B(3;\ -2;\ 1)$.

4. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;\ 1)$. Определить его внутренний угол при вершине C и $np_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$.

Практическое занятие 3

1. Даны векторы: $\vec{a} = 10$, $\vec{b} = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2. Даны векторы: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $|\vec{a}\times\vec{b}| = 72$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$; 2) $|(\overrightarrow{3a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$.

4. Даны векторы $\vec{a}(3;-1;-2)$ и $\vec{b}(1;\ 2;\ -1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; 3) $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

5. Сила $\vec{P}(2;\,-4;\,5)$ приложена к точке $M_0(4;\,-2;\,3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

6. Даны три силы: $\overrightarrow{M}(2;\,-1;\,-3)$, $\vec{N}(3;\,2;-1)$ и $\vec{P}(-4;\,1;\,3)$, приложенные к точке $C(-1;\,4;\,-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

7. Даны вершины треугольника $A(1;\,-1;\,2)$, $B(5;\,-6;\,2)$, $C(1;\,3;\,-1)$. Вычислить длины его высот.

8. Даны три вектора: $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Требуется:

1) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

2) установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;

3) определить, какой является тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (правой или левой);

4) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

9. Проверить, лежат ли точки $A(1;\,2;-1)$, $B(0;\,1;\,5)$, $C(-1;\,2;\,1)$, $D(2;\,1;\,3)$ в одной плоскости.

10. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;\,1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;\,1;\,3)$.

11. Даны вершины тетраэдра: $A(2;\,3;\,1)$, $B(4;\,1;-\,2)$, $C(6;\,3;\,7)$ и $\mathrm{D}(-5;-\,4;\,8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Домашнее задание к занятию 3

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=5$, вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, вычислить: 1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2$; 2) $\left((2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right)^2$.

3. Даны точки $A(2;\,-1;\,2)$, $B(1;\,2;\,-1)$ и $C(3;\,2;\,1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$.

4. Даны точки $\mathrm{A}(1;\,2;\,0)$, $\mathrm{B}(3;\,0;\,-3)$ и $\mathrm{C}(5;\,2;\,6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

5. Проверить, лежат ли точки $A(2;\,-1;\,0)$, $B(1;\,4;\,-1)$, $C(2;\,3;\,-1)$, $D(4;\,5;\,1)$ в одной плоскости. Если не лежат, то определить:

1) какой является тройка векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ – правой или левой;

2) высоту пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, опущенную из вершины C.

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задание 1. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить векторы:

1.1. а) $2\vec{a}-3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$; в) $-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

1.2. а) $\vec{a}+2\vec{b}$; б) $-2\vec{a}-3\vec{b}$; в) $\frac{1}{4}\vec{a}+\ \frac{3}{2}\vec{b}$.

1.3. а) $\frac{1}{3}\vec{a}-4\vec{b}$; б) $2\vec{a}+4\vec{b}$; в) $-3\vec{a}-\vec{b}$.

1.4. а) $-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$; в) $3\vec{a}+4\vec{b}$.

1.5. а) $2\vec{b}-3\vec{a}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$; в) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

1.6. а) $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$; в) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

1.7. а) $-\vec{a}-\vec{b}$; б) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; в) $\frac{1}{4}\vec{a}-4\vec{b}$.

1.8. а) $-2\vec{a}-3\vec{b}$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $4\vec{a}+2\vec{b}$.

1.9. а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $-2\vec{a}-\vec{b}$; в) $\frac{1}{4}\vec{a}+5\vec{b}$.

1.10.а) $-3\vec{a}-2\vec{b}$; б) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $3\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

1.11. а) $-\vec{b}-4\vec{a}$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}+5\vec{b}$; в) $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

1.12. а) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $3\vec{a}-4\vec{b}$; в) $-2\vec{a}-4\vec{b}$.

1.13. а) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}+5\vec{b}$; в) $-3\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$.

1.14. а) $-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$; в) $-3\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

1.15. а) $-3\vec{a}-2\vec{b}$; б) $\frac{1}{4}\vec{a}-4\vec{b}$; в) $2\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$.

1.16. а) $5\vec{a}-\vec{b}$; б) $\frac{1}{4}\vec{a}+3\vec{b}$; в) $-2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

1.17. а) $4\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$; б) $-\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{7}{9}\vec{b}$; в) $2\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$.

1.18. а) $-\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$; б) $3\vec{a}+4\vec{b}$; в) $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$.

1.19. а) $3\vec{a}+\frac{7}{8}\vec{b}$; б) $-\frac{1}{7}\vec{a}+3\vec{b}$; в) $-2\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$.

1.20. а) $-2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; б) $\frac{3}{5}\vec{a}-3\vec{b}$; в) $-\frac{2}{3}\vec{a}-4\vec{b}$.

1.21. а) $2\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$; б) $5\vec{a}-3\vec{b}$; в) $-\frac{2}{7}\vec{a}-2\vec{b}$.

1.22. а) $-2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$; б) $\frac{5}{8}\vec{a}+2\vec{b}$; в) $\vec{a}-3\vec{b}$.

1.23. а) $-\vec{a}-4\vec{b}$; б) $\frac{3}{4}\vec{a}+2\vec{b}$; в) $-3\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$.

1.24. а) $2\vec{a}-3\vec{b}$; б) $\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{7}{3}\vec{b}$; в) $-4\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$.

1.25. а) $-2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b};$ б) $3\vec{a}-\frac{3}{7}\vec{b};$ в) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}.$

1.26. а) $\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b};$ б) $2\vec{a}-\frac{8}{3}\vec{b};$ в) $\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{a}.$

1.27. а) $\frac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b};$ б) $\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b};$ в) $-\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{5}{4}\vec{b}.$

1.28. а) $-3\vec{a}+1,5\vec{b};$ б) $\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b};$ в) $-4\vec{a}-1,5\vec{b}.$

1.29. а) $\frac{3}{2}\vec{a}+2,5\vec{b};$ б) $-2\vec{a}+3,5\vec{b};$ в) $-3\vec{a}-\vec{b}.$

1.30. а) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b};$ б) $-2\vec{a}+1,5\vec{b};$ в) $-2,5\vec{a}-2\vec{b}.$

Задание 2. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направляющие косинусы.

2.1. $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 3)$.
2.2. $A(0;\ 6;\ 4)$, $B(3;\ 5;\ 3)$.
2.3. $A(3;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 2;\ 0)$.
2.4. $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$.
2.5. $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 3)$.
2.6. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(-1;\ 1;\ -3)$.
2.7. $A(3;\ 1;\ 4)$, $B(-1;\ 6;\ 1)$.
2.8. $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$.
2.9. $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$.
2.10. $A(3;\ -4;\ 2)$, $B(4;\ -2;\ 0)$.

2.11. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}(-6;\ 3;-9)$. Установить, какой из них длиннее и во сколько раз и как они относительно друг друга направлены.

2.12. Определить, при каких значениях λ и β векторы $\vec{a}(-2;\ 3;\ \beta)$ и $\vec{b}=\lambda\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны.

2.13. Найти орт вектора $\vec{a}(6;\ -2;\ -3)$.

2.14. Дан вектор $\vec{c}=4\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k}.$ Найти вектор $\vec{d}$, противоположно направленный к вектору $\vec{c}$, если $\left|\vec{d}\right|=27.$

2.15. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3;\ -5;\ 8)$, $\vec{b}(-1;\ 1;\ -4)$.

2.16. Векторы $\overrightarrow{AB}(2;\ 6;-4)$ и $\overrightarrow{AC}(4;\ 2;\ -2)$ являются сторонами ΔABC. Определить координаты векторов, проведенных из вершин треугольника и совпадающих с его медианами $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN},\ \overrightarrow{CD}.$

2.17. В точке $A(1;\ 3)$ приложена сила, проекции которой на оси координат равны: $x = 3$, $y = 4$. Определить конец вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу и величину силы.

2.18. Даны три вершины параллелограмма: $A(3;\ –4;\ 7)$, $B(–5;\ 3;\ –2)$, $C(1;\ 2;\ –3)$. Найти его четвертую вершину D, противоположную вершине B.

2.19. Доказать, что точки $A(3;\ –1;\ 2)$, $B(–1;\ 1;\ –3)$, $C(1;\ 2;\ –1)$, $D(3;\ –5;\ 3)$ являются вершинами трапеции. Найти длины ее параллельных сторон.

2.20. В точке $A(–3;\ –2)$ приложена сила, проекция которой $y = –1$, а проекция x положительна. Определить конец вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу, если его величина равна $5\sqrt{2}$.

2.21. Найти единичный вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и оси Oy.

2.22. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(1;\ 2;\ -3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 12$.

2.23. Найти направляющие косинусы вектора, перпендикулярного к оси Oz и к вектору $\overrightarrow{AB}$, проходящему через точки $A(1;\ –1;\ 4)$ и $B(–3;\ 2;\ 4)$.

2.24. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}(8;\ -15;\ 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что длина вектора $|\vec{m}| = 51$, найти его координаты.

2.25. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны 1. Полагая, что $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, вычислить выражение $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

2.26. Найти единичный вектор, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2.27. Даны силы $\overrightarrow{F_1}(3;\ -4;\ 2)$, $\overrightarrow{F_2}(2;\ 3;\ -5)$, $\overrightarrow{F_3}(-3;\ -2;\ 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $B(5;\ 3;\ –7)$ в точку $C(4;\ –1;\ –4)$.

2.28. На материальную точку действуют силы $\overrightarrow{F_1}(2;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{F_2} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{F_3} = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил при перемещении из точки $B(-2;\ 5;\ -1)$ в точку $C(0;\ 0;\ -3)$.

2.29. Упростить выражение $\vec{a}^{\,2} + 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 2(\vec{b}\cdot\vec{c}) + 1$, если $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m};\vec{n}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2.30. Определить, при каком значении λ векторы $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Задание 3. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$

3.1. $\vec{a}(6;\ 5)$, $\vec{b}(3;\ 1)$, $\vec{c}(-4;-1)$.

3.2. $\vec{a}(7;\ 4)$, $\vec{b}(3;\ 4)$, $\vec{c}(2;\ -5)$.

3.3. $\vec{a}(6;\ 5)$, $\vec{b}(3;\ 4)$, $\vec{c}(1;\ 1)$.

3.4. $\vec{a}(4;\ 8)$, $\vec{b}(5;\ 7)$, $\vec{c}(2;\ 4)$.

3.5. $\vec{a}(8;\ 15)$, $\vec{b}(5;\ 3)$, $\vec{c}(-4;\ 1)$.

3.6. $\vec{a}(11;\ -3)$, $\vec{b}(2;\ 1)$, $\vec{c}(-5;\ 6)$.

3.7. $\vec{a}(5;\ 12)$, $\vec{b}(4;\ 3)$, $\vec{c}(1;\ -2)$.

3.8. $\vec{a}(-1;\ -17)$, $\vec{b}(3;7)$, $\vec{c}(-5;\ 3)$.

3.9. $\vec{a}\left(21;20\right)$, $\vec{b}(5;\ 2)$, $\vec{c}(3;\ 5)$.

3.10. $\vec{a}(12;\ 5)$, $\vec{b}(5;\ 4)$, $\vec{c}(-2;\ 3)$.

3.11. $\vec{a}(1;\ 5)$, $\vec{b}(6;\ 8)$, $\vec{c}(5;\ 3)$.

3.12. $\vec{a}(-17;\ 1)$, $\vec{b}(2;\ 4)$, $\vec{c}(-3;\ 1)$.

3.13. $\vec{a}(8;\ 3)$, $\vec{b}(9;\ 4)$, $\vec{c}(2;\ 1)$.

3.14. $\vec{a}(6;\ 13)$, $\vec{b}(4;\ 3)$, $\vec{c}(3;\ -2)$.

3.15. $\vec{a}(9;\ 6)$, $\vec{b}(2;\ 5)$, $\vec{c}(3;\ 2)$.

3.16. $\vec{a}(9;\ 10)$, $\vec{b}(5;\ 3)$, $\vec{c}(1;\ -4)$.

3.17. $\vec{a}(4;\ 12),\ \vec{b}(1;\ 3),\ \vec{c}(2;\ 1).$

3.18. $\vec{a}(2;\ 8),\ \vec{b}(1;\ 2),\ \vec{c}(2;\ 3).$

3.19. $\vec{a}(1;\ 6),\ \vec{b}(5;\ 1),\ \vec{c}(-3;\ 11).$

3.20. $\vec{a}(10;\ 16),\ \vec{b}(7;\ 3),\ \vec{c}(2;\ -5).$

3.21. $\vec{a}(1;\ 4),\ \vec{b}(2;\ 3),\ \vec{c}(3;\ 5).$

3.22. $\vec{a}(5;\ 11),\ \vec{b}(3;\ 1),\ \vec{c}(5;-3).$

3.23. $\vec{a}(4;\ 1),\ \vec{b}(3;\ 2),\ \vec{c}(1;\ 4).$

3.24. $\vec{a}(13;\ 15),\ \vec{b}(4;\ 2),\ \vec{c}(-7;\ 5).$

3.25. $\vec{a}(1;\ 2),\ \vec{b}(1;\ 1),\ \vec{c}(1;\ -1).$

3.26. $\vec{a}(0;\ 7),\ \vec{b}(1;\ 3),\ \vec{c}(-2;\ 1).$

3.27. $\vec{a}(-6;\ 18),\ \vec{b}(3;\ 3),\ \vec{c}(-4;\ 4).$

3.28. $\vec{a}(4;\ 3),\ \vec{b}(1;\ 2),\ \vec{c}(4;\ 1).$

3.29. $\vec{a}(13;\ 17),\ \vec{b}(3;\ 2),\ \vec{c}(-5;\ 7).$

3.30. $\vec{a}(-2;\ -5),\ \vec{b}(1;3),\ \vec{c}(-2;-7).$

Задание 4. Вычислить длины векторов $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, угол между ними $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})$ и проекцию $\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{a}+\vec{b})$.

4.1. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{g},\ \vec{b} = 3\vec{p} + 6\vec{g},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{g}| = 2,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = \dfrac{\pi}{3}.$

4.2. $\vec{a} = \vec{p} - \vec{g},\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{g},\ |\vec{p}| = 2,\ |\vec{g}| = 4,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

4.3. $\vec{a} = 2\vec{p},\ \vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{g},\ |\vec{p}| = 2,\ |\vec{g}| = 1,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = \pi.$

4.4. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{g},\ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{g},\ |\vec{p}| = 3,\ |\vec{g}| = 3,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = \dfrac{\pi}{3}.$

4.5. $\vec{a} = 3\vec{g},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{g},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{g}| = 4,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = 0.$

4.6. $\vec{a} = \vec{p} + \vec{g},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{g},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{g}| = 2,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g}) = \dfrac{\pi}{3}.$

4.7. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{g},\ \vec{b}=2\vec{p}+4\vec{g},\ |\vec{p}|=1,\ |\vec{g}|=1,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g})=\dfrac{2\pi}{3}.$

4.8. $\vec{a}=\vec{p}-\vec{g},\ \vec{b}=4\vec{p}+6\vec{g},\ |\vec{p}|=2,\ |\vec{g}|=3,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g})=\dfrac{\pi}{3}.$

4.9. $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{g},\ \vec{b}=\vec{p}+5\vec{g},\ |\vec{p}|=1,\ |\vec{g}|=2,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g})=\pi.$

4.10. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{g},\ \vec{b}=\vec{p}+\vec{g},\ |\vec{p}|=2,\ |\vec{g}|=5,\ (\vec{p}\hat{;}\vec{g})=0.$

4.11. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{g}$ и $\vec{b}=5\vec{p}+2\vec{g}$, если $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{g}|=3$ и угол между ними $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

4.12. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 60°.

4.13. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

4.14. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

4.15. Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный к другому сомножителю.

4.16. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}(3;-2;-5)$, когда точка ее приложения перемещается прямолинейно из точки $A(2;\ -3;\ 5)$ в точку $B(3;\ -2;\ -1)$.

4.17. Силы $\vec{F_1}(3;-4;\ 2)$, $\vec{F_2}(2;\ 3;\ -5)$, $\vec{F_3}(-3;-2;\ 4)$ приложены к одной точке. Вычислить величину и направляющие косинусы равнодействующей.

4.18. Найти единичный вектор, перпендикулярный к вектору $\vec{a}(3;\ 6;\ 8)$ и к оси Ox.

4.19. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(1;2;3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=28$.

4.20. В плоскости xOy найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}(1;-2;\ 2)$, имеющий одинаковую с ним длину.

4.21. На плоскости xOy построить радиус-векторы $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.22. Разложить вектор $\vec{a}=9\vec{i}+4\vec{j}$ по векторам $\vec{p}=2\vec{i}+3\vec{j}$ и $\vec{g}=\vec{i}+2\vec{j}$ аналитически и геометрически.

4.23. Разложить вектор $\vec{a}(1;\ 6)$ по векторам $\vec{m}(5;\ 1)$ и $\vec{n}(-3;\ 11)$ аналитически и геометрически.

4.24. Вектор $\vec{a}(11;\ -3)$ разложить по векторам $\vec{m}(2;\ 1)$ и $\vec{n}(-5;\ 6)$ аналитически и геометрически.

4.25. Найти разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ аналитически и геометрически: $\vec{a}(1;\ 5)$, $\vec{m}(6;\ 8)$, $\vec{n}(5;\ 3)$.

4.26. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ аналитически и геометрически: $\vec{a}(8;\ 15)$, $\vec{m}(5;\ 3)$, $\vec{n}(-4;\ 1)$.

4.27. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ аналитически и геометрически: $\vec{a}(7;-3)$, $\vec{m}(2;\ 1)$, $\vec{n}(-3;\ 5)$. Будут ли векторы линейно зависимы?

4.28. $\vec{a}(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}(-6;\ 2;\ -4)$, $\vec{c}(1;\ 0;\ -2)$.

4.29. $\vec{a}(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b}(2;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}(3;\ 4;\ 6)$.

4.30. $\vec{a}(-1;\ -1;\ 1)$, $\vec{b}(0;\ 4;\ -2)$, $\vec{c}(-2;\ 0;\ -4)$.

Задание 5. Сила $\vec{F}$ приложена к вершине A треугольника ABC. Вычислить работу силы $\vec{F}$ по сторонам AB и AC, момент силы относительно середины стороны BC.

5.1. $A(1;\ –2;\ 3)$, $B(0;\ –1;\ 2)$, $C(2;\ –3;\ 6)$, $\vec{F}\,(1;\ 0;\ 3)$.

5.2. $A(6;\ 0;\ –5)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(1;\ –2;\ 1)$, $\vec{F}\,(2;\ 3;\ 7)$.

5.3. $A(2;\ –1;\ 5)$, $B(7;\ 2;\ 1)$, $C(3;\ 0;\ 1)$, $\vec{F}\,(8;\ 0;\ 1)$.

5.4. $A(0;\ 3;\ –5)$, $B(7;\ 8;\ –4)$, $C(1;\ 2;\ –2)$, $\vec{F}\,(5;\ –1;\ 2)$.

5.5. $A(–1;\ 3;\ 0)$, $B(6;\ 5;\ –2)$, $C(0;\ 1;\ 2)$, $\vec{F}\,(2;\ 1;\ 3)$.

5.6. $A(5; 2; -1)$, $B(3; 0; 4)$, $C(1; 2; -2)$, $\vec{F}\,(1; 3; -5)$.

5.7. $A(3; 1; 4)$, $B(-2; 4; 6)$, $C(6; 0; 10)$, $\vec{F}\,(1; 4; 0)$.

5.8. $A(6; 2; 0)$, $B(-4; 10; 5)$, $C(-2; 6; 9)$, $\vec{F}\,(3; 2; 4)$.

5.9. $A(3; 2; -1)$, $B(5; 3; 3)$, $C(1; 10; 5)$, $\vec{F}\,(5; 1; 2)$.

5.10. $A(2; 0; 8)$, $B(4; 5; -2)$, $C(6; 3; 0)$, $\vec{F}\,(1; 7; -3)$.

Вычислить площадь треугольника ABC; длину высоты, проведенной из вершины B; угол BAC; $(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{AC}$.

5.11. $A(3; 2; 1)$; $B(6; 2; 5)$; $C(-1; 2; 1)$.
5.12. $A\,(1; 3; -1)$; $B(2; 0; 4)$; $C(1; 5; -2)$.
5.13. $A\,(2; 0; 3)$; $B(1; 1; 2)$; $C(3; 1; 4)$.
5.14. $A\,(1; 2; 3)$; $B(2; 1; -3)$; $C(3; 0; 4)$.
5.15. $A\,(1; -2; 0)$; $B(5; 4; 1)$; $C(1; -1; -1)$.
5.16. $A\,(0; 1; 2)$; $B(-1; 3; 2)$; $C(3; 3; 1)$.
5.17. $A\,(2; 1 ;3)$; $B(-1; 2; 0)$; $C(3; 2; 5)$.
5.18. $A\,(5; 3; 2)$; $B(4; 1; 0)$; $C(8; 4; 3)$.
5.19. $A\,(2; 0; -1)$; $B(3; 4; -1)$; $C(2; 1; 0)$.
5.20. $A\,(5; -2; 1)$; $B(2; -1; 6)$; $C(6; 1; 3)$.

Диагонали параллелограмма лежат на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить площадь и меньшую высоту параллелограмма.

5.21. $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

5.22. $\left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$.

5.23. $\left|\vec{a}\right| = 2{,}5,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.24. $\left|\vec{a}\right| = 7,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

5.25. $\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 3,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5.26. $\left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$.

5.27. $\left|\vec{a}\right| = 7,\ \left|\vec{b}\right| = 7,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

5.28. $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.29. $\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5.30. $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 3,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Задание 6. Проверить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости.
6.1. $A(1; -2; 3)$, $B(1; 0; -1)$, $C(3; 2; 4)$, $D(0; -2; 1)$.
6.2. $A(3; 0; -1)$, $B(2; 1; 4)$, $C(5; 2; -2)$, $D(-1; -4; 1)$.

6.3. $A(2; 1; -5)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-2; 7; 1)$, $D(4; 3; 1)$.
6.4. $A(5; 1; -1)$, $B(4; 1; 2)$, $C(0; 3; -5)$, $D(3; 2; 1)$.
6.5. $A(6; 3; -2)$, $B(0; 2; 5)$, $C(3; 4; 1)$, $D(0; 5; 4)$.
6.6. $A(1; 5; 2)$, $B(-3; 1; 1)$, $C(7; 9; 0)$, $D(1; 2; -3)$.
6.7. $A(4; 2; -1)$, $B(3; 1; 6)$, $C(-2; 5; -4)$, $D(8; 0; 1)$.
6.8. $A(2; 1; 5)$, $B(0; 11; 2)$, $C(3; 8; 1)$, $D(6; 2; 7)$.
6.9. $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; 5; -2)$, $D(11; 2; 3)$.
6.10. $A(2; 6; 3)$, $B(0; -3; 5)$, $C(7; 2; -1)$, $D(-3; 10; 7)$.

Вершины тетраэдра расположены в точках A, B, C, D. Вычислить его объем и высоту, опущенную из вершины A на грань BCD.

6.11. $A(-1; 0; 5)$, $B(1; 2; -1)$, $C(0; 2; 2)$, $D(-1; 0; 2)$.
6.12. $A(-5; 4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.
6.13. $A(2; -4; 5)$, $B(-1; 3; 4)$, $C(5; 5; -1)$, $D(1; -2; 2)$.
6.14. $A(0; 0; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(2; 3; 5)$, $D(6; 0; -3)$.
6.15. $A(3; 2; -6)$, $B(4; -1; 3)$, $C(-2; 1; 0)$, $D(0; -5; 1)$.
6.16. $A(3; 4; 5)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(4; -1; 0)$, $D(2; 1; -2)$.
6.17. $A(7; 5; -3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.
6.18. $A(-4; 3; -12)$, $B(1; 5; -7)$, $C(-3; 6; 3)$, $D(-2; 7; 3)$.
6.19. $A(8; 4; -9)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 0; -3)$, $D(5; 2; 6)$.
6.20. $A(-1; 0; -2)$, $B(1; 1; 2)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(2; -2; 4)$.

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и его высоту, опущенную на грань, лежащую на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

6.21. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

6.22. $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

6.23. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 7\vec{k}$.

6.24. $\vec{a} = \vec{i} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$.

6.25. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

6.26. $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

6.27. $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

6.28. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

6.29. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

6.30. $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

1.1. Равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{F_2}(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{F_3}(-2;-1;-1)$ равна …

1) $(-2;-3;-5)$; 2) $(-1;3;-3)$; 3) $(-2;\ 0;\ 5)$; 4) $(-3;-3;-3)$.

1.2. Равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}(1;\ 2;\ 3)$, $\overrightarrow{F_2}(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{F_3}(-2;-1;-1)$ равна …

1) $\vec{0}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $2\vec{i}$; 4) 0.

1.3. Равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{F_2}(3;2;4)$, $\overrightarrow{F_3}(-1;0;-1)$ равна …

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $3\vec{i}-\vec{j}$; 3)0; 4) $\vec{e}$.

1.4. Равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}(3;-5;\ 7)$, $\overrightarrow{F_2}(-2;3;7)$, $\overrightarrow{F_3}=3\bar{i}-14\vec{k}$ равна …

1) $4\vec{i}-2\vec{k}$; 2) $(4;1;-2)$; 3) $(4;4;-4)$; 4) $4\vec{i}-2\vec{j}$.

1.5. Равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}(1;0;\ 9)$, $\overrightarrow{F_2}(-2;2;-5)$, $\overrightarrow{F_3}(1;-3;-3)$ равна …

1) $\vec{i}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}-\vec{j}$; 3) $-\vec{j}+\vec{k}$; 4) $3\vec{i}+\vec{k}$.

1.6. Заданы векторы $\vec{a}(1;0;-1)$, $\vec{b}(0;1;2)$, $\vec{c}(2;1;0)$. Найти $2\vec{a}+(3\vec{b}+\vec{c})$.

1) $4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$; 2) $4\vec{j}-4\vec{k}$; 3) $4\vec{i}-2\vec{j}$; 4) $4\vec{j}+3\vec{k}$.

1.7. Заданы векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}$. Найти $2\vec{a}+(3\vec{b}+\vec{c})$.

1) $(2;-4;4)$; 2) $(0;3;2)$; 3) $(1;4;0)$; 4) $(4;4;4)$.

1.8. Заданы векторы $\vec{a}(-4;2;3)$, $\vec{b}(1;0;3)$, $\vec{c}(-1;-1;-2)$. Найти $(\vec{a}+\vec{b})+3\vec{c}$.

1) $-6\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $-6\vec{i}-\vec{j}$; 4) $\vec{0}$.

1.9. Найти $(\bar{a}+\bar{b})+3\bar{c}$, если заданы векторы $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{a}(-4;2;3)$, $\vec{c}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

1) $(-6;-1;0)$; 2) $(1;1;1)$; 3) $(-6;0;-1)$; 4) $(0;0;\ 0)$.

1.10. Найти $\vec{a}-(\vec{b}+3\vec{c})$, если заданы векторы $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(-1;-2;0)$, $\vec{c}(0;\ 4;\ 3)$.

1) $(3;\ 13;\ -6)$; 2) $4\vec{i}+6\vec{k}$; 3) $3\vec{i}-13\vec{j}-5\vec{k}$; 4) $3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.

1.11. Заданы векторы $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{j}+3\vec{k}$. Найти $\vec{a}-(\vec{b}+3\vec{c})$.

1) $(3;\ -1;\ 5)$; 2) $(4;\ 0;\ 6)$; 3) $(3;\ 13;\ -6)$; 4) $(3;-13;-5)$.

1.12. Заданы векторы $\vec{a}(4;\ 5;-3)$, $\vec{b}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{c}(6;\ 7;\ 0)$. Найти $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

1) $-\vec{i}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}$; 3) $-\vec{k}$; 4) $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1.13. Заданы векторы $\vec{a}(4;\ 5;-3)$, $\vec{c}=6\vec{i}+7\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Найти $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

1) $(1;1;\ 0)$; 2) $(-1;0;0)$; 3) $(0;\ 0;\ -1)$; 4) $(1;\ 1;\ -1)$.

1.14. Заданы векторы $\vec{a}(6;\ -2;4)$, $\vec{b}(-3;\ -3;-3)$, $\vec{c}(2;\ 1;-2)$. Найти $\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}$.

1) $\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$; 2) $2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$; 3) $\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$; 4) $\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$.

1.15. Заданы векторы $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}(-3;-3;-3)$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Найти $\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}$.

1) $(1;\ -5;\ 1)$; 2) $(2;4;-2)$; 3) $(1;-3;5)$; 4) $(1;-6;3)$.

1.16. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(2;-1;0)$, $\vec{F_2}(0;-1;4)$, $\vec{F_3}(5;1;-2)$ равна…

1) $(7;-2;1)$; 2) $(2;-1;7)$; 3) $(7;-1;2)$; 4) $(2;7;-1)$.

1.17. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(5;0;6)$, $\vec{F_2}(-1;-6;4)$, $\vec{F_3}(5;8;-1)$ равна…

1) $(9;9;9)$; 2) $(9;2;9)$; 3) $(2;\ 9;\ 2)$; 4) $(2;2;2)$.

1.18. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(3;2;1)$, $\vec{F_2}(-1;2;5)$, $\vec{F_3}(2;-1;-2)$ равна…

1) $(4;3;4)$; 2) $(4;4;4)$; 3) $(3;3;3)$; 4) $(3;\ 4;\ 3)$.

1.19. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(6;-1;-2)$, $\vec{F_2}(-1;0;-1)$, $\vec{F_3}(-2;-3;-1)$ равна…

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$; 3) $3\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$; 4) $\vec{0}$.

1.20. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(-1;-1;2)$, $\vec{F_2}(2;2;-1)$, $\vec{F_3}(-3;2;0)$ равна…

1) $\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; 2) $2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 3) $-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; 4) $3\vec{i}-2\vec{j}$.

1.21. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(3;4;5)$, $\vec{F_2}(-1;0;-1)$, $\vec{F_3}(2;2;3)$ равна…

1) $4\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$; 2) $4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$; 3) $3\vec{i}+3\vec{k}$; 4) $-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1.22. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(1;-1;5)$, $\vec{F_2}(-1;0;-1)$, $\vec{F_3}(0;-3;1)$ равна…

1) $4\vec{i}+5\vec{k}$; 2) $-4\vec{i}+5\vec{j}$; 3) $3\vec{i}+3\vec{k}$; 4) $-4\vec{j}+5\vec{k}$.

1.23. Равнодействующая сил $\vec{F_1}(1;2;4)$, $\vec{F_2}(0;-1;-1)$, $\vec{F_3}(3;2;1)$ равна…

1) $3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$; 2) $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; 3) $3\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$; 4) $4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.

1.24. Заданы векторы $\vec{a}(1;-1;0)$, $\vec{b}(0;2;3)$, $\vec{c}(2;3;-2)$. Найти $2\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})$.

1) $\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$; 2) $-2\vec{j}+5\vec{k}$; 3) $2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$; 4) $-3\vec{j}+5\vec{k}$.

1.25. Заданы векторы $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$. Найти $\vec{a}+(\vec{b}+2\vec{c})$.

1) $8\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$; 2) $6\vec{i}$; 3) $7\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 4) $9\vec{i}+4\vec{j}$.

1.26. Заданы векторы $\vec{c}=-3\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Найти $(\vec{a}+2\vec{b})-3\vec{c}$.

1) $4\vec{i}+2\vec{k}$; 2) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; 3) $13\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$; 4) $9\vec{i}+3\vec{k}$.

1.27. Заданы векторы $\vec{a}(1;1;1)$, $\vec{b}(2;1;2)$, $\vec{c}(3;1;-1)$. Найти $\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

1) $\vec{0}$; 2) -4; 3) $\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$; 4) $-4\vec{k}$.

1.28. Заданы векторы $\vec{a}(-1;-2;5)$, $\vec{b}(-3;5;-2)$, $\vec{c}(1;1;1)$. Найти $2\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$.

1) $-10\vec{j}+11\vec{k}$; 2) $\vec{i}+10\vec{j}+11\vec{k}$; 3) $11\vec{j}+10\vec{k}$; 4) $10\vec{k}$.

1.29. Заданы векторы $\vec{a}(-1;-1;-1)$, $\vec{b}(-2;0;-2)$, $\vec{c}(0;1;2)$. Найти $3\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

1) $-3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$; 2) $-5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$; 3) $2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$; 4) $-3\vec{i}+2\vec{k}$.

1.30. Заданы векторы $\vec{a}(2;3;1)$, $\vec{b}(-1;-2;-3)$, $\vec{c}(0;2;3)$. Найти $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$.

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; 3) $3\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; 4) $\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$.

Задание 2. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

2.1. Если $A(2;7)$, $B(5;11)$, то длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна …

1) 10; 2) 7; 3) 1; 4) 5.

2.2. Если $\vec{r}_A(2;7), \vec{r}_B(5;11)$, то длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна …

1) 5; 2) 7; 3) 1; 4) 10.

2.3. Если $B(-2;4)$, $C(4;12)$, то $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ равен …

1) 8; 2) 5; 3) 10; 4) 7.

2.4. Если $\vec{r}_B(-2;4), \vec{r}_C(4;12)$, то $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ равен …

1) 10; 2) 5; 3) 8; 4) 7.

2.5. Если $C(5;11)$, $M(2;7)$, то $\left|\overrightarrow{CM}\right|$ равен …

1) 4; 2) 1; 3) 5; 4) 2.

2.6. Если $\vec{r}_C=5\vec{i}+11\vec{k}$, $\vec{r}_M=2\vec{i}+7\vec{k}$, то $\left|\overrightarrow{CM}\right|$ равен …

1) 5; 2) 1; 3) 4; 4) 2.

2.7. Если $K(1;5)$, $L(4;-4)$, то $\left|\overrightarrow{KL}\right|$ равен…

1) $3\sqrt{10}$; 2) 10; 3) 5; 4) $10\sqrt{3}$.

2.8. Если $\vec{r}_L=4\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{r}_K=\vec{i}+5\vec{j}$, то $\left|\overrightarrow{KL}\right|$ равен …

1) $3\sqrt{10}$; 2) 10; 3) 5; 4) $10\sqrt{3}$.

2.9. Если $O(7;-5)$, $M(9;-3)$, то $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ равен …

1) $2\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{5}$; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $4\sqrt{6}$.

2.10. Если $\vec{r}_M = 9\vec{i} - 3\vec{j},\ \vec{r}_O = 7\vec{i} - 5\vec{j}$, то $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ равен …

1) $2\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{5}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $4\sqrt{6}$.

2.11. Если $E(0;-6),\ F(3;-7)$, то $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ равен …

1) $\sqrt{10}$; 2) 5; 3) 10; 4) $2\sqrt{5}$.

2.12. Если $\vec{r}_F = 3\vec{i} - 7\vec{j},\ \vec{r}_E = -6\vec{j}$, то $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ равен …

1) $\sqrt{10}$; 2) 5; 3) 10; 4) $2\sqrt{5}$.

2.13. Направляющий косинус угла между вектором $\overrightarrow{AB}(2;3;4)$ и осью Ox равен …

1) $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{29}}$; 4) $\sqrt{29}$.

2.14. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(-2;3;4)$ и осью Ox равен …

1) $\dfrac{-2}{\sqrt{29}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{29}}$; 4) $\sqrt{29}$.

2.15. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(-2;3;4)$ и осью Oy равен …

1) $\dfrac{-2}{\sqrt{29}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{29}}$; 4) $\sqrt{29}$.

2.16. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(-2;3;4)$ и осью Oz равен …

1) $\dfrac{-2}{\sqrt{29}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{29}}$; 4) $\sqrt{29}$.

2.17. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(3;0;4)$ и осью Ox равен …

1) $\dfrac{7}{5}$; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) 0; 4) $\dfrac{4}{5}$.

2.18. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(3;0;4)$ и осью Oy равен …

1) $\dfrac{7}{5}$; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) 0; 4) $\dfrac{4}{5}$.

2.19. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(3;0;4)$ и осью Oz равен …

1) $\frac{7}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0; 4) $\frac{4}{5}$.

2.20. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(1;2;3)$ и осью Ox равен …

1) $\frac{1}{\sqrt{14}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

2.21. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(1;2;3)$ и осью Oy равен …

1) $\frac{1}{\sqrt{14}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

2.22. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(1;2;3)$ и осью Oz равен …

1) $\frac{1}{\sqrt{14}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

2.23. Если $K(2; -3)$, $M(6; 0)$, то $\left|\overrightarrow{KM}\right|$ равен …

1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 5.

2.24. Если $C(1; 2)$, $D(3; 5)$, то $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ равен …

1) $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{14}$.

2.25. Если $\vec{r}_R = \vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{r}_S = 2\vec{i} + 6\vec{j},$ то $\left|\overrightarrow{RS}\right|$ равен …

1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{13}$.

2.26. Если $D(4; 5)$, $E(6; 10)$, то $\left|\overrightarrow{DE}\right|$ равен …

1) $\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{29}$; 3) $\sqrt{30}$; 4) $\sqrt{31}$.

2.27. Если $F(-2;-3)$, $E(2;1)$, то $\left|\overrightarrow{FE}\right|$ равен …

1) 4; 2) $4\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $4\sqrt{2}$.

2.28. Если $\vec{r}_K = 3\vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{r}_O = 6\vec{i} + 3\vec{j},$ то $\left|\overrightarrow{KO}\right|$ равен …

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{13}$.

2.29. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(-3;\,0;\,-4)$ и осью *Oy* равен …

1) $\dfrac{1}{5}$; 2) $-\dfrac{3}{5}$; 3) 0; 4) $\dfrac{4}{5}$.

2.30. Направляющий косинус угла между вектором $\vec{a}(-3;\,0;\,-4)$ и осью *Oz* равен …

1) $\dfrac{7}{5}$; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{4}{5}$.

Задание 3. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

3.1. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если *A*(2; 1; 4), *B*(4; 3; 2), а точка *C* является серединой отрезка *AB*.

1) $\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; 3) $-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $\vec{i}-\vec{k}$.

3.2. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CB}$, если *A*(2; –1; 4), *B*(4; 3; 2), а точка *C* является серединой отрезка *AB*.

1) $\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 3) $-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $\vec{i}-\vec{k}$.

3.3. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если *A*(2; –1; 4), *B*(6; 7; 0), а точка *C* является серединой отрезка *AB*.

1) $-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 3) $2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $\vec{i}-\vec{k}$.

3.4. Записать координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, если *M*(2; –3; 1), Р(6; 5; 3), а точка *N* является серединой отрезка *MP*.

1) $-2\vec{i}+3\vec{k}$; 2) $2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; 3) $4\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.

3.5. Записать координаты вектора $\overrightarrow{PN}$, если *P*(6; 5; 3), *M*(2; –3; 3), а точка *N* является серединой отрезка *PM*.

1) $-(2\vec{i}+4\vec{j})$; 2) $-2\vec{i}+3\vec{k}$; 3) $-4\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.

3.6. Записать координаты вектора $\overrightarrow{MP}$, если *M*(2; –3; 1), *N*(4; 1; 2), а точка *N* является серединой отрезка *PM*.

1) (4; 8; 2); 2) $2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; 3) (–4; 8; –4); 4) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.

3.7. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CE}$, если *C*(–1; 3; –5), *O*(3; –3; 3), а точка *E* является серединой отрезка *CO*

1) $\vec{j}-3\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$; 4) $2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$.

3.8. Записать координаты вектора $\overrightarrow{EO}$, если C(–1; 3; –5), O(3; –3; 3), а точка E является серединой отрезка CO.

1) $2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$; 4) $\vec{j}-3\vec{k}$.

3.9. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CO}$, если C(–1; 3; –5), E(1; 0; –1), а точка E является серединой отрезка CO.

1) $3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $4\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}$; 4) $\vec{j}-3\vec{k}$.

3.10. Записать координаты вектора $\overrightarrow{KM}$, если K(–2; –4; 8), L(2; –6; 4), а точка M является серединой отрезка KL.

1) $3\vec{i}+4\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$; 3) $5\vec{j}-4\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

3.11. Записать координаты вектора $\overrightarrow{ML}$, если K(–2; –4; 8), L(2; –6; 4), а точка M является серединой отрезка KL.

1) $2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$; 2) $3\vec{j}+4\vec{k}$; 3) $5\vec{j}-4\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

3.12. Записать координаты вектора $\overrightarrow{KL}$, если K(–2; –4; 8), M(0; –5; 6), а точка M является серединой отрезка KL.

1) $4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$; 3) $3\vec{j}+4\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

3.13. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если A(3; –2; 5), B(–3; 4; –3), а точка C является серединой отрезка AB.

1) (2; 5; 2); 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) (–3; 3; –4); 4) $5\vec{i}-4\vec{k}$.

3.14. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CB}$, если A(3; –2; 5), B(–3; 4; –3), а точка C является серединой отрезка AB.

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) (–3; 3; –4); 3) (–2; 5; 2); 4) $5\vec{i}-4\vec{k}$.

3.15. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если A(3; –2; 5), C(0; 1; 1), а точка C является серединой отрезка AB.

1) (–6; 6; –8); 2) (–3; 3; –4); 3) (–2; 5; 2); 4) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3.16. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если A(2; 6; –2), C(6; 4; –2), а точка B является серединой отрезка AC.

1) $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{j}$; 3) $2\vec{i}+\vec{j}$; 4) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3.17. Записать координаты вектора $\overrightarrow{FB}$, если A(–1; 3; 1), B(–5; 11; 1), а точка F является серединой отрезка AB.

1) $-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; 2) $-2\vec{i}+4\vec{j}$; 3) $4\vec{j}+\vec{k}$; 4) $-2\vec{i}+\vec{k}$.

3.18. Записать координаты вектора $\overrightarrow{MO}$, если $M(–7; 3; 2)$, $C(2; –7; 3)$, а точка C является серединой отрезка MO.

1) (18; –20; 2); 2) (9; –10; 1); 3) (10; 20; 2); 4) $9\vec{i}-\vec{k}$.

3.19. Записать координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, если $M(5; –2; 1)$, $K(3; 4; 3)$, а точка N является серединой отрезка MK.

1) $\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; 2) $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; 4) $3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3.20. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(3; 2; 1)$, $M(5; 4; 3)$, а точка D является серединой отрезка CM.

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}$; 3) $\vec{j}+\vec{k}$; 4) $\vec{k}$.

3.21. Записать координаты вектора $\overrightarrow{LK}$, если $L(1; 4; 8)$, $E(2; –1; 0)$, а точка E является серединой отрезка LK.

1) (10;–2;–16); 2) $\vec{j}+\vec{k}$; 3) (1; –5; –8); 4) (2;–10;–16).

3.22. Записать координаты вектора $\overrightarrow{KE}$, если $K(2; 4; 3)$, $O(4; 2; 5)$, а точка E является серединой отрезка KO.

1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 3) $\vec{i}+\vec{j}$; 4) $\vec{j}+\vec{k}$.

3.23. Записать координаты вектора $\overrightarrow{EO}$, если $A(2; –1; 3)$, $O(2;–3; 5)$, а точка E является серединой отрезка AO.

1) $\vec{i}+\vec{k}$; 2) $-\vec{j}+\vec{k}$; 3) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 4) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

3.24. Записать координаты вектора $\overrightarrow{MO}$, если $M(2; 3; 4)$, $B(4; 5; 2)$, а точка B является серединой отрезка MO.

1) $4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$; 2) $2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; 3) $4\vec{i}+4\vec{j}$; 4) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3.25. Записать координаты вектора $\overrightarrow{KP}$, если $K(2; –1; –3)$, $O(4; –3; 5)$, а точка P является серединой отрезка KO.

1) $4\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$; 2) $4\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$; 3) $\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$; 4) $\vec{i}$.

3.26. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $C(–2; 4; 1)$, $B(– 4; 2; 3)$, а точка A является серединой отрезка CB.

1) $-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 3) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; 4) $-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

3.27. Записать координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(5; 1; 3)$, $K(3; 1; 7)$, а точка K является серединой отрезка CD.

1) $\vec{i}+\vec{j}+11\vec{k}$; 2) $-4\vec{i}+8\vec{k}$; 3) $\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$; 4) $-4\vec{i}+8\vec{j}$.

3.28. Записать координаты вектора $\overrightarrow{DE}$, если $D(3;\ –1;\ 4)$, $B(–3;\ –5;\ 6)$, а точка E является серединой отрезка DB.

1) $-3\vec{i}+5\vec{j}$; 2) $-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; 3) $-3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; 4) $\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

3.29. Записать координаты вектора $\overrightarrow{EA}$, если $A(–3;\ 2;\ –5)$, $B(–1;\ –4;\ 1)$, а точка E является серединой отрезка AB.

1) $-\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$; 2) $-2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$; 3) $3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$; 4) $-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

3.30. Записать координаты вектора $\overrightarrow{AD}$, если $A(1;\ 1;\ 1)$; $B(0;\ –1;\ 2)$, а точка B является серединой отрезка AD.

1) $2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$; 2) (–2; –4; 2); 3) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 4) (2; 4; 2).

Задание 4. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

4.1. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связаны соотношением $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, где $\lambda=\text{const}$, то можно утверждать, что они …

1) коллинеарны; 2) ортогональны;
3) равны; 4) имеют одинаковое направление.

4.2. Соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны. Тогда можно утверждать, что эти векторы …

1) равны; 2)ортогональны;
3) коллинеарны; 4) имеют одинаковую длину.

4.3. Если у векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ соответствующие координаты различны, то эти векторы …

1) равны по длине; 2) не равны;
3) не коллинеарны; 4) ортогональны.

4.4. Если два вектора $\vec{c}$ и $\vec{d}$ связаны соотношением $\vec{d}=\beta\cdot\vec{c}$, где $\beta=1$, то можно утверждать, что эти векторы …

1) равны; 2) ортогональны;
3) не коллинеарны; 4) не равны.

4.5. Если у векторов $\vec{c}$ и $\vec{b}$ соответствующие координаты равны. Тогда можно утверждать, что эти векторы …

1) равны; 2) ортогональны;
3) не коллинеарны; 4) не равны.

4.6. Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связаны соотношениями $\dfrac{x_a}{x_b}=\dfrac{y_a}{y_b}=\dfrac{z_a}{z_b}=\dfrac{1}{2}$, тогда можно утверждать, что …

1) вектор $\vec{a}$ в 2 раза длиннее вектора $\vec{b}$;

2) противоположны по направлению;

3) вектор $\vec{b}$ в 2 раза длиннее вектора $\vec{a}$;

4) векторы равны.

4.7. Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связаны соотношениями $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = 1$, тогда можно утверждать, что они …

1) равны; 2) не равны;
3) ортогональны; 4) противоположны по направлению.

4.8. Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связаны соотношениями $\frac{x_a}{x_b}\ \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = -1$, тогда можно утверждать, что они …

1) противоположны по направлению; 2) не равны;
3) ортогональны; 4) имеют одинаковое направление.

4.9. Известно, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одинаковую длину, но противоположны по направлению, тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно…

1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2.

4.10. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем вектор $\vec{c}$ в 2 раза короче вектора $\vec{d}$. Тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно…

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) –2; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.11. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем $\left|\vec{c}\right| = 3\left|\vec{d}\right|$, тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \left|\vec{d}\right|$, где λ равно…

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –3; 4) $-\frac{1}{3}$.

4.12. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление и вектор $\vec{c}$ в 2 раза длиннее вектора $\vec{d}$, тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно…

1) 2; 2) –2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.13. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор $\vec{c}$ в 2 раза длиннее вектора $\vec{d}$, тогда $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$, где λ равно …

1) 2; 2) –2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.14. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равны. Тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно …

1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2.

4.15. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор $\vec{c}$ в 2 раза короче вектора $\vec{d}$, тогда $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$, где λ равно …

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) –2; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.16. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор $\vec{c}$ в 4 раза длиннее вектора $\vec{d}$, тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно …

1) 4; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) –4 ; 4) $\frac{1}{4}$.

4.17. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем $2|\vec{c}| = |\vec{d}|$, тогда $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$, где λ равно …

1) 2; 2) –2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор $\vec{a}$ в 4 раза длиннее вектора $\vec{b}$, тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ равно …

1) 4; 2) –4; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$.

4.19. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}|$, тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ равно …

1) 2; 2) –2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

4.20. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем $|\vec{c}| = 3|\vec{d}|$, тогда $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$, где λ равно …

1) 3; 2) –3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$.

4.21. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор $\vec{c}$ в 5 раз длиннее вектора $\vec{d}$, тогда $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$, где λ равно …

1) 5; 2) –5; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{5}$.

4.22. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем $3|\vec{c}| = |\vec{d}|$, $\vec{c} = \lambda\vec{d}$, где λ равно …

1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 3; 4) –3.

4.23. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор $\vec{a}$ в 6 раз короче вектора $\vec{b}$, тогда $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$, где λ равно …

1) $\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) 6; 4) –6.

4.24. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем $|\vec{c}| = \frac{1}{3}|\vec{d}|$, тогда $\vec{c} = \lambda\vec{d}$, где λ равно…

1) $-\frac{1}{3}$; 2) 3; 3) – 3; 4) $\frac{1}{3}$.

4.25. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем $\frac{1}{2}|\vec{c}| = |\vec{d}|$, тогда $\vec{c} = \lambda\vec{d}$, где λ равно…

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) –2; 4) 2.

4.26. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем вектор $\vec{c}$ длиннее $\vec{d}$ в 4 раза, тогда $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda,$ где λ равно …

1) 4; 2) –4; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$.

4.27. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, длина вектора $\vec{a}$ в 6 раз меньше длины вектора $\vec{b}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b},$ тогда λ равно …

1) 6; 2) –6; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{6}$.

4.28. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют одно и то же направление и $5|\vec{a}| = |\vec{b}|,$ тогда $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda,$ где λ равно …

1) 5; 2) –5; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{5}$.

4.29. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем $\frac{1}{7}|\vec{a}| = |\vec{b}|,$ тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b},$ где λ равно …

1) 7; 2) $-\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) –7.

4.30. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, причем $7|\vec{c}| = |\vec{d}|,$ тогда $\lambda\vec{c} = \vec{d},$ где λ равно …

1) $\frac{1}{7}$; 2) $-\frac{1}{7}$; 3) 7; 4) –7.

Рекомендации к решению заданий 1–4.

Пример 1. Для заданных векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},$ $\vec{b} = -4\vec{i} + 5\vec{k},$ $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$. Найти $\vec{a} - (2\vec{b} - \vec{c})$.

Решение. Запишем векторы в координатной форме: $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(-4;0;5)$, $\vec{c}(1;-5;-7)$.

Последовательно найдем результат: 1) $2\vec{b}=2\cdot(-4;0;5)=(-8;0;10)$; 2) $2\vec{b}-\vec{c}=(-8;0;10)-(1;-5;-7)=(-9;5;17)$; 3) $\vec{a}-(2\vec{b}-\vec{c})=(2;-3;1)-$ $-(-9;5;17)=(11;-8;-16)$. Запишем полученный вектор в разложении по базису $\vec{a}-(2\vec{b}-\vec{c})=11\vec{i}-8\vec{j}-16\vec{k}$. Ответ: $11\vec{i}-8\vec{j}-16\vec{k}$.

Пример 2. Найти равнодействующую заданных сил $\vec{F_1}(2;0;-3)$, $\vec{F_2}(-3;1;4)$, $\vec{F_3}(5;-3;-1)$.

Решение. Равнодействующая заданных сил равна их сумме, поэтому: $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(2;0;-3)+(-3;1;4)+(5;-3;-1)=(4;-2;0)$.

Ответ: (4; –2; 0).

Пример 3. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(0;3;5)$, $B(4;-1;3)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}(4-0;\ -1-3;\ 3-5)$, или $\overrightarrow{AB}(4;\ -4;\ -2)$. Вычислим длину вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$ $=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+16+4}=6$.

Тогда направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$ будут равны:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3};\ \cos\gamma=\frac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $6;\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}$.

Пример 4. Найти длину вектора $\overrightarrow{ME}$, если $\vec{r}_M=2\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{r}_E=5\vec{i}+6\vec{j}$.

Решение. Граничные точки вектора $\overrightarrow{ME}$ заданы радиус-векторами точек. Запишем координаты этих точек: $M(2;-1)$, $E(5;6)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{ME}(5-2;6-(-1))$, или $\overrightarrow{ME}(3;7)$. Тогда длина этого вектора будет равна:

$\left|\overrightarrow{ME}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$. Ответ: $\sqrt{58}$.

Пример 5. Для заданных точек $A(-1;0;4)$ и $C(-3;2;4)$ найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где точка B является серединой отрезка AC.

Решение. Точка B является серединой отрезка AC, поэтому ее координаты найдем по следующим формулам:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2; \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1;$$

$$z_B = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4, \text{ т. е. } B(-2;\ 1;\ 4).$$

Тогда $\overrightarrow{AB}(-2-(-1);\, 1-0;\ 4-4)$, $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, или $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$.

Ответ: $-\vec{i} + \vec{j}$.

Пример 6. Записать условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в векторной форме, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположные направления, а длина вектора $\vec{a}$ в 5 раз меньше длины вектора $\vec{b}$.

Решение. Условие коллинеарности в векторной форме имеет следующий вид: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = -5$. Значит, запишем $\vec{b} = -5\vec{a}$ или $\vec{a} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

Задание 5. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

5.1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 30°$.

1) 12; 2) 24; 3) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; 4) $12\sqrt{3}$.

5.2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 9$, $\vec{b} = 10$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 45°$.

1) $45\sqrt{2}$; 2) 90; 3) $\frac{45}{\sqrt{2}}$; 4) $45\sqrt{3}$.

5.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 12$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 60°$.

1) $30\sqrt{3}$; 2) $30\sqrt{2}$; 3) 30; 4) $\dfrac{30}{\sqrt{2}}$.

5.4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 90°$.

1) 1; 2) 0; 3) 6; 4) $2\sqrt{2}$.

5.5. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 120°$.

1) 15; 2) $15\sqrt{3}$; 3) –15; 4) $15\sqrt{2}$.

5.6. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 150°$.

1) $-22\sqrt{3}$; 2) 44; 3) $22\sqrt{2}$; 4) -22.

5.7. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 0°$.

1) 7,5; 2) 13; 3) 0; 4) 26.

5.8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 14$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 180°$.

1) 21; 2) 42; 3) –42; 4) –21.

5.9. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 135°$.

1) 14; 2) $-7\sqrt{2}$; 3) –7; 4) $7\sqrt{2}$.

5.10. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 8$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 60°$.

1) 16; 2) 32; 3) –16; 4) $16\sqrt{3}$.

5.11. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

1) $5\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 5; 4) $20\sqrt{3}$.

5.12. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=15$, $|\vec{b}|=6$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{4}$.

1) $\frac{45\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{6\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{75\sqrt{2}}{2}$.

5.13. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=12$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{3}$.

1) $\frac{7}{2}$; 2) 42; 3) $\frac{74\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

5.14. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{2}$.

1) 40; 2) 20; 3) 1; 4) 0.

5.15. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=9$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$.

1) $\frac{27}{6}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

5.16. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=15$, $|\vec{b}|=13$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{5\pi}{6}$.

1) $-\frac{13\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{26\sqrt{3}}{2}$.

5.17. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 0$.

1) 11; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

5.18. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 19$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$.

1) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $-3\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{2}$.

5.19. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 18$, $|\vec{b}| = 14$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

1) 74; 2) 7; 3) 1; 4) –7.

5.20. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

1) 1; 2) 0; 3) 24; 4) 12.

5.21. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.

5.22. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 10$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 45\sqrt{2}$.

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

5.23. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$.

5.24. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

5.25. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$.

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$.

5.26. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 4$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = 5\sqrt{3}$.

1) $30°$; 2) $0°$; 3) $60°$; 4) $45°$.

5.27. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 6$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

1) $0°$; 2) $45°$; 3) $30°$; 4) $60°$.

5.28. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 12$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{7}{2}$.

1) $90°$; 2) $30°$; 3) $45°$; 4) $60°$.

5.29. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 13$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{13\sqrt{3}}{2}$.

1) $45°$; 2) $60°$; 3) $150°$; 4) $90°$.

5.30. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 2$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

1) $30°$; 2) $45°$; 3) $90°$; 4) $0°$.

Задание 6. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

6.1. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(2; -3; \sqrt{3})$, $\vec{b}(1; 4; \sqrt{3})$.

1) $-\frac{7}{2}$; 2) $-\frac{7}{2\sqrt{5}}$; 3) $-\frac{7}{4}$; 4) -7.

6.2. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}(2; -3; \sqrt{3})$, $\vec{b}(1; 4; \sqrt{3})$.

1) $-\frac{7}{4}$; 2) $-\frac{7}{2}$; 3) -7; 4) 1.

6.3. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(3; -4; 0)$, $\vec{b}(-2; 4; \sqrt{5})$.

1) -22; 2) $-\frac{22}{3}$; 3) $-\frac{22}{5}$; 4) $-\frac{22}{4}$.

6.4. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}(3; -4; 0)$, $\vec{b}(-2; 4; \sqrt{5})$.

1) 11; 2) $-\frac{22}{3}$; 3) $-\frac{22}{4}$; 4) $-\frac{22}{5}$.

6.5. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(1; 2\sqrt{2}; 0)$, $\vec{b}(0; -3; 4)$.

1) 1; 2) $-\frac{6\sqrt{2}}{5}$; 3) $-\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 4) 2.

6.6. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}(1; 2\sqrt{2}; 0)$, $\vec{b}(0; -3; 4)$.

1) $-2\sqrt{2}$; 2) -2; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{2}$.

6.7. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(-6; 0; 8)$, $\vec{b}(1; -2; 2)$.

1) $-\frac{22}{3}$; 2) $-\frac{22}{4}$; 3) $-\frac{12}{3}$; 4) $\frac{10}{3}$.

6.8. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}(-6;0;8)$, $\vec{b}(1;-2;2)$.

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0.

6.9. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(-4;2;4)$, $\vec{b}(-8;6;0)$.

1) 4,4; 2) 4; 3) 3; 4) 3,4.

6.10. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(2;1;-2)$, $\vec{b}(2;4;4)$.

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 3.

6.11. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(1;2;-3)$, $\vec{b}(4;7;6)$.

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0.

6.12. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(3;-7;4)$, $\vec{b}(1;-2;3)$.

1) 29; 2) 28; 3) 27; 4) 26.

6.13. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(5;1;-6)$, $\vec{b}(2;-10;-1)$.

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

6.14. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(0;-4;3)$, $\vec{b}(7;6;8)$.

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

6.15. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(9;0;-11)$, $\vec{b}(5;6;4)$.

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

6.16. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(4;-7;3)$, $\vec{b}(4;3;2)$.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

6.17. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(8;2;-5)$, $\vec{b}(4;-9;-1)$.

1) 17; 2) 18; 3) 19; 4) 20.

6.18. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-3;-4;-5)$.

1) –55; 2) –26; 3) –57; 4) –58.

6.19. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(10;-9;0)$, $\vec{b}(-2;3;18)$.

1) –44; 2) –45; 3) –46; 4) –47.

6.20. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}(3;6;-7)$, $\vec{b}(4;\ -2;\ 2)$.

1) –14; 2) –15; 3) –16; 4) –17.

6.21. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(0;-3;0)$, $\vec{b}(2;1;-2)$?

1) $-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{6}$.

6.22. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-4;2;4)$, $\vec{b}(-8;6;0)$?

1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{11}{4}$; 3) $\frac{11}{15}$; 4) $\frac{11}{6}$.

6.23. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-6;0;8)$, $\vec{b}(1;-2;2)$?

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$.

6.24. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(3;0;-4)$, $\vec{b}(1;2\sqrt{2};0)$?

1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$.

6.25. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-4;3;0)$, $\vec{b}(2;4;4)$?

1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{3}{15}$; 4) $\frac{4}{15}$.

6.26. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(1;4;\sqrt{8})$, $\vec{b}(3;-4;0)$?

1) $-\frac{12}{25}$; 2) $-\frac{14}{25}$; 3) $-\frac{15}{25}$; 4) $-\frac{13}{25}$.

6.27. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-2;4;\sqrt{5})$, $\vec{b}(8;-6;0)$?

1) $-\frac{2}{5}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{1}{5}$.

6.28. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(1;-2;2)$, $\vec{b}(2;-1;2)$?

1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{8}{9}$; 3) 1; 4) $\frac{10}{9}$.

6.29. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-4;2;4)$, $\vec{b}(4;4;2)$?

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

6.30. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(6;0;-8)$, $\vec{b}(0;6;8)$?

1) $-\frac{13}{25}$; 2) $-\frac{14}{25}$; 3) $-\frac{15}{25}$; 4) $-\frac{16}{25}$.

Задание 7. Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F}$ по перемещению тела из точки C в точку B.

7.1. $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $C(2;4)$, $B(4;2)$.

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 5.

7.2. $\vec{F}=-4\vec{i}+3\vec{j}$, $C(-1;3)$, $B(2;7)$.

1) 1; 2) 9; 3) 6; 4) 0.

7.3. $\vec{F}=\vec{i}+4\vec{j}$, $C(4;4)$, $B(1;6)$.

1) 20; 2) 7; 3) 5; 4) 8.

7.4. $\vec{F}=5\vec{i}-4\vec{j}$, $C(2;-3)$, $B(5;-2)$.

1) 11; 2) 1; 3) 3; 4) 2.

7.5. $\vec{F}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $C(6;3)$, $B(0;9)$.

1) 5; 2) 6; 3) 9; 4) 0.

7.6. $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j},\ C(1;-3),\ B(5;2).$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

7.7. $\vec{F} = -\vec{i} + 4\vec{j},\ C(4;5),\ B(-6;3).$

1) 3; 2) 2; 3) 9; 4) 1.

7.8. $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j},\ C(3;7),\ B(1;4).$

1) 0; 2) 5; 3) 10; 4) 1.

7.9. $\vec{F} = -4\vec{i} + 2\vec{j},\ C(6;-1),\ B(8;4).$

1) 1; 2) 5; 3) 12; 4) 2.

7.10. $\vec{F} = -2\vec{i} + \vec{j},\ C(3;5),\ B(-2;4).$

1) 1; 2) 8; 3) 9; 4) 10.

7.11. $\vec{F} = 7\vec{i} - \vec{j},\ C(1;1),\ B(3;2).$

1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14.

7.12. $\vec{F} = 7\vec{i} - \vec{j},\ C(3;9),\ B(2;-3).$

1) 6; 2) 12; 3) 1; 4) 5.

7.13. $\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j},\ C(2;4),\ B(3;3).$

1) 7; 2) 1; 3) 6; 4) 0.

7.14. $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j},\ C(7;4),\ B(9;3).$

1) 7; 2) 2; 3) 11; 4) 12.

7.15. $\vec{F} = 3\vec{j},\ C(0;-2),\ B(1;4).$

1) 18; 2) 3; 3) 2; 4) 5.

7.16. $\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j},\ C(1;2),\ B(-1;4).$

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

7.17. $\vec{F} = -\vec{i} - 4\vec{j},\ C(-1;0),\ B(2;-1).$

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

7.18. $\vec{F} = 5\vec{i} + \vec{j},\ C(5;1),\ B(6;7).$

1) 6; 2) 12; 3) 11; 4) 13.

7.19. $\vec{F} = -2\vec{i} - 5\vec{j},\ C(-5;4),\ B(-2;-1).$

1) 7; 2) 15; 3) 18; 4) 19.

7.20. $\vec{F} = 5\vec{i} - 7\vec{j},\ C(-2;0),\ B(-6;-5).$

1) 0; 2) 16; 3) 17; 4) 15.

7.21. $\vec{F} = -6\vec{i} + 2\vec{j},\ C(-1;-7),\ B(1;-1).$

1) 8; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

7.22. $\vec{F} = 7\vec{i} + \vec{j}$, $C(-8;1)$, $B(1;2)$.

1) 8; 2) 32; 3) 64; 4) 28.

7.23. $\vec{F} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, $C(1;1)$, $B(4;6)$.

1) 5; 2) 1; 3) 2; 4) 10.

7.24. $\vec{F} = 11\vec{i} + 10\vec{j}$, $C(-5;2)$, $B(1;-1)$.

1) 36; 2) 24; 3) 12; 4) 6.

7.25. $\vec{F} = -9\vec{i} + 5\vec{j}$, $C(2;8)$, $B(-1;4)$.

1) 4; 2) 10; 3) 7; 4) 3.

7.26. $\vec{F} = -6\vec{i} - 12\vec{j}$, $C(8;1)$, $B(-4;2)$.

1) 30; 2) 9; 3) 2; 4) 60.

7.27. $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $C(-2;1)$, $B(7;6)$.

1) 1; 2) 21; 3) 30; 4) 42.

7.28. $\vec{F} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$, $C(2;1)$, $B(-4;1)$.

1) 30; 2) 20; 3) 1; 4) 0.

7.29. $\vec{F} = 8\vec{i} + 81\vec{j}$, $C(3;1)$, $B(-7;2)$.

1) 1; 2) 13; 3) 5; 4) 2.

7.30. $\vec{F} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$, $C(1;2)$, $B(-4;4)$.

1) 5; 2) 1; 3) 0; 4) 14.

Рекомендации к решению заданий 5–7.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 9$, $\left|\vec{b}\right| = 16$, $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Применим формулу $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})$. Тогда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 16 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 9 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -72\sqrt{2}.$$

Ответ: $-72\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 8$, $np_{\vec{a}}\vec{b} = -4\sqrt{3}$.

Решение.

1-й способ. Из формулы $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ находим скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}=np_{\vec{a}}\vec{b}\cdot|\vec{a}|=-4\sqrt{3}\cdot 5=-20\sqrt{3}$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдем по формуле $\cos(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-20\sqrt{3}}{5\cdot 8}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значит угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°.

2-й способ. Для данных условий угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдем следующим образом: $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})}{|\vec{a}|}=$ $=|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})$, отсюда $\cos(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})=\dfrac{np_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: 150°.

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}(-4;2;-4)$, $\vec{b}(0;-1;4)$.

Решение. Применим формулу $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot 0+2\cdot(-1)+(-4)\cdot 4=-18$ и длину вектора $|\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{36}=6$. Тогда $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{-18}{6}=-3$.

Ответ: – 3.

Пример 4. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F}$ по перемещению тела из точки C в точку B, если $\vec{F}=5\vec{i}-3\vec{j}$, $C(-3;1)$, $B(0;-2)$.

Решение. Работа, произведенная силой $\vec{F}$ по перемещению тела из точки C в точку B, равна скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\overrightarrow{CB}$: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{CB}$. Вектор перемещения имеет координаты $\overrightarrow{CB}(0+3;-2-1)$, или $\overrightarrow{CB}(3;-3)$. Тогда работа силы $\vec{F}$ равна $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{CB}=5\cdot 3+(-3)\cdot(-3)=15+9=24$. Ответ: 24.

Задание 8. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8.1. $\vec{a}(2;3;0)$, $\vec{b}(-1;1;0)$.

1) (–2; 3; 0); 2) (0; 0; 5); 3) (1; 4; 0); 4) (1; 1; 4).

8.2. $\vec{a}(-1;0;4)$, $\vec{b}(2;0;-3)$.

1) (–2; 0; 1); 2) (1; 0; 1); 3) (0; 5; 0); 4) (1; 0; –12).

8.3. $\vec{a}(0;6;3)$, $\vec{b}(0;1;-1)$.

1) (0; 6; –3); 2) (–9; 0; 0); 3) (0; 7; 2); 4) (0; 6; 2).

8.4. $\vec{a}(1;-2;0)$, $\vec{b}(3;-4;0)$.

1) (0; 0; 2); 2) (4; –6; 0); 3) (3; 6; 0); 4) (2; –2; 0).

8.5. $\vec{a}(0;3;-5)$, $\vec{b}(0;4;1)$.

1) (0; 7; 4); 2) (0; 12; –4); 3) (2; 0; 0); 4) (23; 0; 0).

8.6. $\vec{a}(2;0;4)$, $\vec{b}(9;0;3)$.

1) (18; 0; 12); 2) (11; 0; 7); 3) (0; 30; 0); 4) (0; 28; 0).

8.7. $\vec{a}(3;1;-4)$, $\vec{b}(2;0;0)$.

1) (0;–8; –2); 2) (5; 1; –4); 3) (6; 1; 0); 4) (0; –7; 1).

8.8. $\vec{a}(0;5;0)$, $\vec{b}(2;3;4)$.

1) (0; 15; 0); 2) (20;0;–10); 3) (2; 8; 4); 4) (10; 0; –5).

8.9. $\vec{a}(1;6;-3)$, $\vec{b}(0;2;0)$.

1) (1; 8; –3); 2) (4; 0; 5); 3) (6; 0; 2); 4) (0; 12; 0).

8.10. $\vec{a}(7;0;0)$, $\vec{b}(1;-1;1)$.

1) (0;–7;–7); 2) (0; 1; 5); 3) (7; 0; 0); 4) (8; –1; 1).

8.11. $\vec{a}(1;2;4)$, $\vec{b}(0;6;0)$.

1) (1; 8; 4); 2) (0; 12; 0); 3) (–20; 0; 5); 4) (–24;0;6).

8.12. $\vec{a}(2;3;0)$, $\vec{b}(-6;4;\ 0)$.

1) (0;0;26); 2) (–12; 1; 0); 3) (–4; 7; 0); 4) (0; 0; 6).

8.13. $\vec{a}(7;0;3)$, $\vec{b}(-2;0;1)$.

1) (–14; 0; 3); 2) (0;–13;0); 3) (5; 0; 4); 4) (0; –10; 5).

8.14. $\vec{a}(2;0;0)$, $\vec{b}(5;2;8)$.

1) (10; 0; 0); 2) (7; 2; 8); 3) (0;–16;4); 4) (0; –17; 5).

8.15. $\vec{a}(3;7;4)$, $\vec{b}(0;5;0)$.

1) (3; 12; 4); 2) (0; 35; 0); 3) (–10; 0; 5); 4) (–20;0;15).

8.16. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-1;4;2)$.

1) (–1; 6; 6); 2) (–8;–5; 6); 3) (0; 6; 5); 4) (–4; –1; 5).

8.17. $\vec{a}(-1;0;4)$, $\vec{b}(2;1;-1)$.

1) (–4; 7; –1); 2) (1; 1; 3); 3) (–2; 0; –4); 4) (–2; 4; 5).

8.18. $\vec{a}(-1;4;1)$, $\vec{b}(0;2;4)$.

1) (0; 8; 4); 2) (–1; 8; 4); 3) (10; 4; –6); 4) (14;4; –2).

8.19. $\vec{a}(2;-1;0)$, $\vec{b}(-1;2;-1)$.

1) (–2; –2; 0); 2) (1; 2; 5); 3) (1; 1; –1); 4) (1; 2; 3).

8.20 $\vec{a}(-3;1;0)$, $\vec{b}(6;5;1)$.

1) (–18; 5; 0); 2) (3; 6; 0); 3) (1; 3; –21); 4) (2; –9; 5).

8.21. $\vec{a}(1;4;8)$, $\vec{b}(-2;0;5)$.

1) (1; 4; 13); 2) (–2; 0; 40); 3) (20; –21; 8); 4) (10; 11; 5).

8.22. $\vec{a}(3;1;0)$, $\vec{b}(-1;2;-3)$.

1) (2; 3; –3); 2) (–3; 9; 7); 3) (5; 1; 9); 4) (–3; 3; –3).

8.23. $\vec{a}(1;-2;5)$, $\vec{b}(-1;0;2)$.

1) (–4;–7;–2); 2) (0; –2; 7); 3) (–1; –2; 1); 4) (1; 6; 5).

8.24. $\vec{a}(5;1;-4)$, $\vec{b}(3;-1;0)$.

1) (8; 0; –4); 2) (15; –1; 0); 3) (–5; 10; 1); 4) (–4;–12;–8).

8.25. $\vec{a}(1;7;5)$, $\vec{b}(-1;0;2)$.

1) (0; 7; 7); 2) (–1; 0; 10); 3) (10; –5; 5); 4) (14; –7; 7).

8.26. $\vec{a}(-1;4;5)$, $\vec{b}(1;0;8)$.

1) (32;13;–4); 2) (0; 0; 40); 3) (30; 15; 5); 4) (0; 4; 13).

8.27. $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(0;1;2)$.

1) (2; –2; 3); 2) (–7;–4;2); 3) (0; –3; 2); 4) (–5; –3; 5).

8.28. $\vec{a}(-1;0;2)$, $\vec{b}(3;4;5)$.

1) (–3; 0; 10); 2) (2; 4; 7); 3) (–8; 11; –4); 4) (–7; 1; –3).

8.29. $\vec{a}(4;5;1)$, $\vec{b}(1;8;7)$.

1) (5; 13; 8); 2) (4; 40; 8); 3) (17; 17; 17); 4)(27;–27;27).

8.30. $\vec{a}(7;2;-1)$, $\vec{b}(5;0;4)$.

1) (8;–33;–10); 2) (35; 0; –4); 3) (12; 0; –4); 4) (8; –30; 5).

Задание 9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах.

9.1. $\vec{a}(-5;1;-3)$, $\vec{b}(0;-3;-1)$.

1) 1; 2) $\sqrt{5}$; 3) $5\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{15}$.

9.2. $\vec{a}(-5;1;3)$, $\vec{b}(0;3;-1)$.

1) $5\sqrt{14}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $3\sqrt{14}$.

9.3. $\vec{a}(5;1;3)$, $\vec{b}(0;3;-1)$.

1) 1; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $5\sqrt{14}$.

9.4. $\vec{a}(4;1;1)$, $\vec{b}(0;1;-1)$.

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

9.5. $\vec{a}(4;1;-1)$, $\vec{b}(0;-1;-1)$.

1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.

9.6. $\vec{a}(-4;1;-1)$, $\vec{b}(0;-1;-1)$.

1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3.

9.7. $\vec{a}(-2;1;-1)$, $\vec{b}(0;-1;-1)$.

1) $\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) 2.

9.8. $\vec{a}(-2;1;1)$, $\vec{b}(0;1;-1)$.

1) $\sqrt{3}$; 2) 2; 3) 1; 4) $2\sqrt{3}$.

9.9. $\vec{a}(-2;1;3)$, $\vec{b}(0;3;-1)$.

1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{35}$; 4) $\sqrt{3}$.

9.10. $\vec{a}(2;1;3)$, $\vec{b}(0;3;-1)$.

1) $2\sqrt{35}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) 2; 4) $2\sqrt{3}$.

9.11. $\vec{a}(1;1;-2)$, $\vec{b}(0;-2;-3)$.

1) $2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{32}$; 3) 2; 4) $\sqrt{62}$.

9.12. $\vec{a}(1;1;-2)$, $\vec{b}(1;-2;-3)$.

1) $\sqrt{69}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{59}$; 4) $\sqrt{29}$.

9.13. $\vec{a}(-1;1;-2)$, $\vec{b}(1;-2;-1)$.

1) $\sqrt{35}$; 2) $\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{55}$; 4) $\sqrt{65}$.

9.14. $\vec{a}(-1;1;2)$, $\vec{b}(1;2;3)$.

1) $2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) 8.

9.15. $\vec{a}(-2;1;2)$, $\vec{b}(1;2;4)$.

1) 5; 2) $5\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $2\sqrt{3}$.

9.16. $\vec{a}(-3;1;2)$, $\vec{b}(-4;2;5)$.

1) 6; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{6}$; 4) 9.

9.17. $\vec{a}(-1;1;2)$, $\vec{b}(-4;2;3)$.

1) $\sqrt{30}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $2\sqrt{32}$; 4) $\sqrt{29}$.

9.18. $\vec{a}(-1;1;1)$, $\vec{b}(-4;1;2)$.

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{14}$.

9.19. $\vec{a}(-1;1;-1)$, $\vec{b}(-4;-1;0)$.

1) $\sqrt{42}$; 2) $\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{55}$; 4) $\sqrt{14}$.

9.20. $\vec{a}(1;1;-1)$, $\vec{b}(-6;-1;-2)$.

1) 7; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $7\sqrt{2}$.

9.21. $\vec{a}(-1;1;1)$, $\vec{b}(-6;1;2)$.

1) $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{43}$; 3) $\sqrt{42}$; 4) $\sqrt{40}$.

9.22. $\vec{a}(-2;1;1)$, $\vec{b}(-6;1;3)$.

1) $5\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $7\sqrt{2}$.

9.23. $\vec{a}(-2;1;3)$, $\vec{b}(-6;3;5)$.

1) $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{5}$; 3) $4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{5}$.

9.24. $\vec{a}(-2;1;-3)$, $\vec{b}(-6;-3;-1)$.

1) $6\sqrt{5}$; 2) $10\sqrt{5}$; 3) $7\sqrt{5}$; 4) $12\sqrt{5}$.

9.25. $\vec{a}(-2;1;-1)$, $\vec{b}(3;-1;1)$.

1) 2; 2) $7\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{12}$.

9.26. $\vec{a}(2;1;5)$, $\vec{b}(0;5;-2)$.

1) $13\sqrt{5}$; 2) $12\sqrt{5}$; 3) $10\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{5}$.

9.27. $\vec{a}(2;1;-5)$, $\vec{b}(0;-5;-2)$.

1) $6\sqrt{5}$;   2) $13\sqrt{5}$;   3) $2\sqrt{5}$;   4) $12\sqrt{5}$.

9.28. $\vec{a}(3;1;-2)$, $\vec{b}(0;-2;-5)$.

1) $\sqrt{35}$;   2) $\sqrt{30}$;   3) 3;   4) $3\sqrt{38}$.

9.29. $\vec{a}(2;1;-1)$, $\vec{b}(0;-1;-3)$.

1) $\sqrt{12}$;   2) $\sqrt{10}$;   3) $2\sqrt{14}$;   4) $\sqrt{29}$.

9.30. $\vec{a}(2;1;-2)$, $\vec{b}(0;-2;-4)$.

1) 10;   2) 12;   3) 14;   4) 15.

Задание 10. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

10.1. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=4, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=30°$.

1)6;   2) $6\sqrt{2}$;   3)12;   4) $6\sqrt{3}$;

10.2. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=5, \left|\vec{b}\right|=6, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=60°$.

1) 15;   2) $15\sqrt{2}$;   3) 30;   4) $15\sqrt{3}$.

10.3. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=7, \left|\vec{b}\right|=12, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{4}$.

1) $42\sqrt{3}$;   2) $42\sqrt{2}$; 3) 42;   4) 82.

10.4. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=4, \left|\vec{b}\right|=9, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$.

1) $9\sqrt{2}$;   2)9;   3) $18\sqrt{3}$;   4)36.

10.5. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=6, \left|\vec{b}\right|=1, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{5\pi}{6}$.

1) 6;   2) $3\sqrt{2}$;   3) $3\sqrt{3}$;   4)3.

10.6. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=4, \left|\vec{b}\right|=8, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{2}$.

1) 0;   2) 16;   3) 32;   4) 12.

10.7. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=7, (\vec{a}\hat{;}\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

1) $\frac{21}{2}$;   2) 21;   3) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$;   4) $\frac{21\sqrt{3}}{2}$.

10.8. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 14, \left|\vec{b}\right| = 3, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}.$

1) $21\sqrt{2}$; 2) $21\sqrt{3}$; 3) 21; 4) 0.

10.9. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 11, \left|\vec{b}\right| = 2, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 0°.$

1) 0; 2) 1; 3) 22; 4) 11.

10.10. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 7, \left|\vec{b}\right| = 8, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 45°.$

1) 15; 2) 28; 3) $28\sqrt{2}$; 4) $28\sqrt{3}$.

10.11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 6,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 60°.$

1) $12\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{2}$; 3) 12; 4) 1.

10.12. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 19,\ \left|\vec{b}\right| = 2, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 45°.$

1) $19\sqrt{3}$; 2) $19\sqrt{2}$; 3) 19; 4) 1.

10.13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 34,\ \left|\vec{b}\right| = 1, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 135°.$

1) $17\sqrt{3}$; 2) 17; 3) $17\sqrt{2}$; 4) 1.

10.14. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 7,\ \left|\vec{b}\right| = 8,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 120°.$

1) $28\sqrt{2}$; 2) 28; 3) 56; 4) $28\sqrt{3}$.

10.15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 5,\ \left|\vec{b}\right| = 3,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 150°.$

1) $\dfrac{15}{2}$; 2) 15; 3) $15\sqrt{2}$; 4) $15\sqrt{3}$.

10.16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 4, \left|\vec{b}\right| = 18, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 90°.$

1) 72; 2) 0; 3) $72\sqrt{2}$; 4) $72\sqrt{3}$.

10.17. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 5,\ \left|\vec{b}\right| = 6,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 30°.$

1) 30; 2) $15\sqrt{2}$; 3) $15\sqrt{3}$; 4) 15.

10.18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 14$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 45°$.

1) 42; 2) 21; 3) $21\sqrt{2}$; 4) $21\sqrt{3}$.

10.19. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 18$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 60°$.

1) $36\sqrt{3}$; 2) $36\sqrt{2}$; 3) 36; 4) 0.

10.20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 30°$.

1) 35; 2) $\frac{35}{2}$; 3) $35\sqrt{2}$; 4) $35\sqrt{3}$.

10.21. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 60°$.

1) $6\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{3}$; 3) $24\sqrt{3}$; 4)12.

10.22. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 19, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 45°$.

1) 19; 2) $19\sqrt{2}$; 3) $\frac{19}{2}\sqrt{2}$; 4) 9,5.

10.23. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 34, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 135°$.

1) 8,5; 2)34; 3)$17\sqrt{2}$; 4) $\frac{17}{2}\sqrt{2}$.

10.24. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 120°$.

1) $14\sqrt{3}$; 2) 28; 3) $28\sqrt{2}$; 4) 14.

10.25. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 150°$.

1) 15; 2) $\frac{15}{4}$; 3) $\frac{15}{2}$; 4) $7{,}5\sqrt{2}$.

10.26. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 4, \left|\vec{b}\right| = 18, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 90°.$

1) 36; 2) 18; 3) $36\sqrt{2};$ 4) $36\sqrt{3}.$

10.27. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 5, \left|\vec{b}\right| = 6, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 30°.$

1) 15; 2) $\frac{15}{4};$ 3) $15\sqrt{3};$ 4) $\frac{15}{2}.$

10.28. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 14, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 45°.$

1) 21; 2) $\frac{21}{2}\sqrt{2};$ 3) $21\sqrt{2};$ 4) $21\sqrt{3}.$

10.29. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 18, \left|\vec{b}\right| = 4, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 60°.$

1) $18\sqrt{2};$ 2) 18; 3) $18\sqrt{3};$ 4) 36.

10.30. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 7, \left|\vec{b}\right| = 5, (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 30°.$

1) $\frac{35}{4};$ 2) $\frac{35}{2};$ 3) $\frac{35\sqrt{2}}{2};$ 4) $\frac{35\sqrt{3}}{2}.$

Задание 11. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

11.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(1;-1;0)$ и $\vec{b}(2;1;0),$ как на сторонах.

1) $\frac{3}{2};$ 2) $\frac{3}{4};$ 3) 2; 4) 3.

11.2. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(2;0;-1)$ и $\vec{b}(1;0;2),$ как на сторонах.

1) 4; 2) $\frac{5}{4};$ 3) $\frac{5}{2};$ 4) 1.

11.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(0;1;2)$ и $\vec{b}(0;-1;2)$, как на сторонах.

1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

11.4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$ и $\vec{b}(0;0;-1)$, как на сторонах.

1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) 4; 4) 2.

11.5. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$ и $\vec{b}(-1;0;0)$, как на сторонах.

1) $\sqrt{21}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{6}$.

11.6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$ и $\vec{b}(0;-1;0)$, как на сторонах.

1) $\frac{\sqrt{17}}{2}$; 2) 1; 3) $\sqrt{17}$; 4) $\sqrt{18}$.

11.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(0;0;2)$; и $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) 1; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{2}$.

11.8. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(0;2;0)$ и $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$.

11.9. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(2;0;0)$ и $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}$.

11.10. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(-4;3;0)$ и $\vec{b}(0;0;1)$, как на сторонах.

1) 5; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{5}{2}$.

11.11. Найти величину момента силы $\vec{F}(1;0;0)$ относительно точки $N(-2;2;1)$, если сила приложена к точке $M(1;2;3)$.

1) 2; 2) 8; 3) 7; 4) 6.

11.12. Найти величину момента силы $\vec{F}(1;0;0)$ относительно точки $N(1;-3;2)$, если сила приложена к точке $M(3;-1;2)$.

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 4.

11.13. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;0;1)$ относительно точки $N(4;1;1)$, если сила приложена к точке $M(4;-2;3)$.

1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 6.

11.14. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;1;0)$ относительно точки $N(3;1;-5)$, если сила приложена к точке $M(-1;2;-5)$.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

11.15. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;1;0)$ относительно точки $N(2;6;4)$, если сила приложена к точке $M(3;6;5)$.

1) $\sqrt{2}$; 2) 1; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{3}$.

11.16. Найти величину момента силы $\vec{F}(1;0;0)$ относительно точки $N(7;0;-1)$, если сила приложена к точке $M(7;3;2)$.

1) $\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{3}$.

11.17. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;0;-1)$ относительно точки $N(2;4;1)$, если сила приложена к точке $M(4;4;-2)$.

1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

11.18. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;-1;0)$ относительно точки $N(1;3;0)$, если сила приложена к точке $M(3;3;-1)$.

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2; 4) $\sqrt{5}$.

11.19. Найти величину момента силы $\vec{F}(0;-1;0)$ относительно точки $N(7;0;-1)$, если сила приложена к точке $M(7;3;2)$.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

11.20. Найти величину момента силы $\vec{F}(-1;0;0)$ относительно точки $N(3;1;-5)$, если сила приложена к точке $M(-1;2;-5)$.

1) 1; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) 2.

11.21. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;0;-1)$, $\vec{b}(1;0;2)$, как на сторонах.

1) $\sqrt{2}$; 2) 1; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$.

11.22. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1;-1;0)$, $\vec{b}(2;1;0)$, как на сторонах.

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

11.23. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(0;1;2)$, $\vec{b}(0;-1;2)$, как на сторонах.

1) 5; 2) 3; 3) 4; 4) 2.

11.24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$, $\vec{b}(0;0;-1)$, как на сторонах.

1) 1; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{5}$.

11.25. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$, $\vec{b}(-1;0;0)$, как на сторонах.

1) $2\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) 1.

11.26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1;2;4)$, $\vec{b}(0;-1;0)$, как на сторонах.

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{14}$; 3) 4; 4) $\sqrt{17}$.

11.27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(-4;3;0)$, $\vec{b}(0;0;1)$, как на сторонах.

1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 2.

11.28. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(0;2;0)$, $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 3; 4) 1.

11.29. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;0;0)$, $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) $\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 3; 4)2.

11.30. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(0;0;2)$, $\vec{b}(1;-1;1)$, как на сторонах.

1) 1; 2) 2; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}$.

Задание 12. Найти смешанное произведение векторов.

12.1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

1) –25; 2) –24; 3) –23; 4) –22.

12.2. $\vec{a}(-1;0;2)$, $\vec{b}(3;-1;0)$, $\vec{c}(5;-1;-2)$.

1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 4.

12.3. $\vec{a}(-4;1;-2)$, $\vec{b}(2;1;2)$, $\vec{c}(0;-1;-2)$.

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8.

12.4. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(0;-1;-2)$, $\vec{c}(-3;1;0)$.

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

12.5. $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(-1;-2;0)$, $\vec{c}(4;1;0)$.

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

12.6. $\vec{a}(4;-1;0)$, $\vec{b}(3;-1;0)$, $\vec{c}(0;2;5)$.

1) –6; 2) –5; 3) –4; 4) –3.

12.7. $\vec{a}(1;0;-1)$, $\vec{b}(2;-1;1)$, $\vec{c}(5;2;1)$.

1) –10; 2) –11; 3) –12; 4) –13.

12.8. $\vec{a}(2;-1;0)$, $\vec{b}(5;4;1)$, $\vec{c}(3;0;-2)$.

1) –26; 2) –27; 3) –28; 4) –29.

12.9. $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(1;4;1)$, $\vec{c}(-1;0;-2)$.

1) –14; 2) –15; 3) –16; 4) –17.

12.10. $\vec{a}(0;1;1)$, $\vec{b}(2;-1;3)$, $\vec{c}(1;2;0)$.

1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9.

12.11. $\vec{a}(-1;0;2)$, $\vec{b}(-2;1;-3)$, $\vec{c}(4;-1;0)$.

1) –4; 2) –3; 3) –2; 4) –1.

12.12. $\vec{a}(-2;0;-1)$, $\vec{b}(1;3;-1)$, $\vec{c}(3;2;1)$.

1) –3; 2) –2; 3) –1; 4) 1.

12.13. $\vec{a}(-4;1;0)$, $\vec{b}(1;0;1)$, $\vec{c}(2;-1;0)$.

1) –2; 2) –1; 3) 2; 4) 3.

12.14. $\vec{a}(-1;1;-1)$, $\vec{b}(2;1;0)$, $\vec{c}(-1;1;0)$.

1) –7; 2) –3; 3) –5; 4) –4.

12.15. $\vec{a}(2;-1;0)$, $\vec{b}(1;-1;1)$, $\vec{c}(0;-1;2)$.

1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1.

12.16. $\vec{a}(3;1;-1)$, $\vec{b}(0;-1;1)$, $\vec{c}(1;1;1)$.

1) –3; 2) –4; 3) –5; 4) –6.

12.17. $\vec{a}(1;4;-2)$, $\vec{b}(0;-1;1)$, $\vec{c}(1;1;-1)$.

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

12.18. $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(0;1;-2)$, $\vec{c}(1;-1;0)$.

1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1.

12.19. $\vec{a}(5;0;-1)$, $\vec{b}(-1;2;1)$, $\vec{c}(2;3;-1)$.

1) –19; 2) –18; 3) –16; 4) –15.

12.20. $\vec{a}(-1;0;1)$, $\vec{b}(2;-1;0)$, $\vec{c}(3;4;5)$.

1) 18; 2) 17; 3) 16; 4) 15.

12.21. $\vec{a}(5;0;7)$, $\vec{b}(1;-1;0)$, $\vec{c}(0;1;2)$.

1) –3; 2) –2; 3) –1; 4) 1.

12.22. $\vec{a}(-4;1;2)$, $\vec{b}(5;1;0)$, $\vec{c}(-1;0;1)$.

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) –7.

12.23. $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{b}(3;4;5)$, $\vec{c}(0;1;2)$.

1) 17; 2) 16; 3) 15; 4) 14.

12.24. $\vec{a}(1;3;1)$, $\vec{b}(2;1;3)$, $\vec{c}(3;1;2)$.

1) 12; 2) 13; 3) 11; 4) 14.

12.25. $\vec{a}(0;3;0)$, $\vec{b}(1;2;3)$, $\vec{c}(-2;6;0)$.

1) –18; 2) –17; 3) –16; 4) –15.

12.26. $\vec{a}(1;7;0)$, $\vec{b}(0;6;2)$, $\vec{c}(1;0;2)$.

1) 29; 2) 28; 3) 27; 4) 26.

12.27. $\vec{a}(1;3;-4)$, $\vec{b}(0;-1;2)$, $\vec{c}(1;-1;4)$.

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

12.28. $\vec{a}(-1;1;4)$, $\vec{b}(0;1;3)$, $\vec{c}(5;1;3)$.

1) –6; 2) –5; 3) –4; 4) –3.

12.29. $\vec{a}(-1;1;2)$, $\vec{b}(1;0;-1)$, $\vec{c}(2;4;0)$.

1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2.

12.30. $\vec{a}(5;1;2)$, $\vec{b}(2;0;-1)$, $\vec{c}(3;4;0)$.

1) 31; 2) 32; 3) 33; 4) 34.

Задание 13. Выбрать верные утверждения для заданных векторов, взятых в указанном порядке ***(тестовое задание может иметь несколько правильных ответов)***.

13.1. $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;-5;6)$, $\vec{c}(5;-7;9)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.2. $\vec{a}(0;0;2)$, $\vec{b}(2;0;-1)$, $\vec{c}(3;4;0)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.3. $\vec{a}(-1;0;2)$, $\vec{b}(1;0;-1)$, $\vec{c}(-1;-1;0)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.4. $\vec{a}(-1;0;1)$, $\vec{b}(1;0;-1)$, $\vec{c}(-1;1;0)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.5. $\vec{a}(-1;0;1)$, $\vec{b}(1;-1;1)$, $\vec{c}(1;1;0)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.6. $\vec{a}(1;1;2)$, $\vec{b}(3;5;1)$, $\vec{c}(2;2;4)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.7. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(4;5;6)$, $\vec{c}(7;8;9)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.8. $\vec{a}(1;3;5)$, $\vec{b}(2;4;6)$, $\vec{c}(8;9;7)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.9. $\vec{a}(2;1;2)$, $\vec{b}(1;2;2)$, $\vec{c}(2;2;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.10. $\vec{a}(1;7;1)$, $\vec{b}(8;1;8)$, $\vec{c}(1;2;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.11. $\vec{a}(-1;-1;2)$, $\vec{b}(-2;1;1)$, $\vec{c}(1;-2;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.12. $\vec{a}(1;2;1)$, $\vec{b}(2;1;1)$, $\vec{c}(1;1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.13. $\vec{a}(3;-2;-1)$, $\vec{b}(2;-3;1)$, $\vec{c}(1;-2;-3)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.14. $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(2;-5;1)$, $\vec{c}(1;-3;2)$.

1) некомпланарные вектора ; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.15. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(1;0;3)$, $\vec{c}(2;0;6)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.16. $\vec{a}(1;3;2)$, $\vec{b}(-1;0;5)$, $\vec{c}(1;1;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.17. $\vec{a}(1;0;1)$, $\vec{b}(-1;0;-1)$, $\vec{c}(0;1;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.18. $\vec{a}(1;0;1)$, $\vec{b}(1;0;2)$, $\vec{c}(1;-1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.19. $\vec{a}(6;1;4)$, $\vec{b}(12;2;3)$, $\vec{c}(18;3;4)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.20. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(4;5;6)$, $\vec{c}(7;8;9)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.21. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(0;1;0)$, $\vec{c}(2;1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.22. $\vec{a}(2;-1;-2)$, $\vec{b}(-1;0;3)$, $\vec{c}(-3;4;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.23. $\vec{a}(4;1;1)$, $\vec{b}(-4;0;-2)$, $\vec{c}(0;1;-1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.24. $\vec{a}(1;2;0)$, $\vec{b}(3;2;1)$, $\vec{c}(0;1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.25. $\vec{a}(1;3;4)$, $\vec{b}(2;4;-2)$, $\vec{c}(1;1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.26. $\vec{a}(2;1;4)$, $\vec{b}(-1;2;-2)$, $\vec{c}(-1;1;2)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.27. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(7;2;1)$, $\vec{c}(2;1;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.28. $\vec{a}(2;2;3)$, $\vec{b}(4;-1;4)$, $\vec{c}(1;-1;1)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.29. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(2;4;8)$, $\vec{c}(3;6;5)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.30. $\vec{a}(1;4;2)$, $\vec{b}(-1;6;3)$, $\vec{c}(0;8;4)$.

1) некомпланарные вектора; 2) компланарные вектора;
3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

Задание 14. Найти объем пирамиды *ABCD*.

14.1. $A(6; 1; 4)$, $B(1; –3; 7)$, $C(7; 1; 3)$, $D(2; –2; –5)$.

1) $\frac{25}{2}$; 2) $\frac{23}{3}$; 3) $\frac{23}{2}$; 4) $\frac{25}{3}$.

14.2. $A(2; 1; 3)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; 5; 5)$, $D(3; 2; 5)$.

1) 1; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

14.3. $A(2; –1; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $C(5; 3; 5)$, $D(4; 0; 4)$.

1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) $\frac{17}{3}$.

14.4. $A(–1; 3; 2)$, $B(3; 3; 5)$, $C(2; 5; 1)$, $D(1; 4; 3)$.

1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 3; 4) $\frac{3}{2}$.

14.5. $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 8)$, $C(8; 4; 2)$, $D(3; 3; 4)$.

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

14.6. $A(5; 0; –1)$, $B(9; 1; –1)$, $C(6; 4; 1)$, $D(6; 1; 1)$.

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

14.7. $A(–1; –2; 3)$, $B(0; 0; 8)$, $C(6; 0; 4)$, $D(1; –1; 4)$.

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0.

14.8. $A(5; –3; 1)$, $B(6; –1; 1)$, $C(3; 0; –3)$, $D(2; –2; 3)$.
1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 7.
14.9. $A(0; 1; 2)$, $B(–1; 3; –1)$, $C(4; 4; 7)$, $D(1; 0; 2)$.
1) $\frac{13}{2}$; 2) $\frac{13}{3}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 2.
14.10. $A(1; 2; –3)$, $B(0; 4; –6)$, $C(0; 5; –2)$, $D(2; 3; –3)$.
1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 3; 4) 2.
14.11. $A(–5; 2; 1)$, $B(–1; 4; –2)$, $C(–4; 5; 2)$, $D(–4; 3; 1)$.
1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{2}{3}$.
14.12. $A(2; 1; 0)$, $B(5; 3; –3)$, $C(3; –2; 2)$, $D(0; 2; 0)$.
1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 1.
14.13. $A(1; –1; 2)$, $B(4; 1; 5)$, $C(6; 2; 4)$, $D(–1; 0; 3)$.
1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
14.14. $A(0; –3; 4)$, $B(3; –5; 7)$, $C(9; 0; 4)$, $D(–2; –2; 3)$.
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
14.15. $A(1; 2; 5)$, $B(4; 0; 8)$, $C(–1; 5; 5)$, $D(–1; 3; 11)$.
1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.
14.16. $A(–1; 0; 2)$, $B(2; –2; 4)$, $C(3; 3; 2)$, $D(–3; 1; 4)$.
1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10.
14.17. $A(5; 1; 0)$, $B(4; –1; 2)$, $C(7; 4; 1)$, $D(3; 2; 3)$.
1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
14.18. $A(1; 3; 8)$, $B(0; –1; 10)$, $C(–4; 5; 6)$, $D(2; 4; 4)$.
1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.
14.19. $A(5; 1; 2)$, $B(6; –1; 4)$, $C(10; 3; 0)$, $D(6; 2; 6)$.
1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10.
14.20. $A(8; 1; –1)$, $B(7; –1; 1)$, $C(10; 4; 0)$, $D(6; 2; –4)$.
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
14.21. $A(0; –1; 2)$, $B(–1; –3; 4)$, $C(4; 2; 2)$, $D(–2; 0; 4)$.
1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
14.22. $A(–1; 4; 3)$, $B(0; 2; 5)$, $C(4; 6; 1)$, $D(0; 5; 7)$.
1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11.
14.23. $A(0; 2; 7)$, $B(3; 0; 9)$, $C(4; 5; 7)$, $D(–2; 3; 9)$.
1) 9; 2) 8; 3) 7; 4) 6.
14.24. $A(–4; 2; –3)$, $B(–1; 0; 0)$, $C(–6; 5; –3)$, $D(–6; 3; 3)$.
1) 8; 2) 7; 3) 6; 4) 5.

14.25. $A(1; 8; 1)$, $B(4; 6; 4)$, $C(-1; 11; 1)$, $D(-1; 9; 0)$.
1) 1; 2) $\frac{6}{7}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{7}{6}$.
14.26. $A(-5; -3; -1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(4; 0; -1)$, $D(-7; -2; 2)$.
1) 1; 2) 5; 3) $\frac{51}{2}$; 4) 4.
14.27. $A(5; 1; 2)$, $B(4; -1; 4)$, $C(9; 2; 2)$, $D(3; 2; 4)$.
1) $\frac{13}{3}$; 1) 4; 1) 3; 1) 2.
14.28. $A(-1; 0; 1)$, $B(2; -2; 4)$, $C(6; 3; 1)$, $D(-3; 1; 0)$.
1) 2; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{8}{3}$.
14.29. $A(4; -1; 0)$, $B(7; -3; 4)$, $C(8; 2; 1)$, $D(3; 2; -1)$.
1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3.
14.30. $A(1; 2; 4)$, $B(4; 0; 6)$, $C(5; 5; 4)$, $D(-1; 3; 6)$.
1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7.

Рекомендации к решению заданий 8–14.

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-1;2;5)$ и $\vec{b}(3;-4;-2)$.

Решение. Составим и вычислим определитель:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 5\\ 3 & -4 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=16\vec{i}-$$

$$-(-3)\vec{j}+(-2)\vec{k}=16\vec{i}+13\vec{j}-2\vec{k}.$$

Таким образом, векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{a}\times\vec{b}=16\vec{i}+13\vec{j}-2\vec{k}=(16;13;-2)$. Ответ: (16; 13; –2).

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;-4;1)$ и $\vec{b}(2;1;-1)$.

Решение. Найдем векторное произведение векторов

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=3\vec{i}-(-4)\vec{j}+10\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{k}=(3;4;10).$$

Тогда площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, равна модулю векторного произведения:

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{3^2+4^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Ответ: $5\sqrt{5}$.

Пример 3. Вычислить модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 15$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Решение. Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 15\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 15\cdot 4\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = 15\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 15\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 15\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 30.$$

Ответ: 30.

Пример 4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\left|\vec{a}\right| = 15$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 45°$.

Решение.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 4\cdot\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}.$$

Ответ: $15\sqrt{2}$.

Пример 5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}(-3;2;5)$, $\vec{b}(0;-3;4)$, $\vec{c}(1;-5;-3)$.

Решение. Найдем смешанное произведение данных векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 29 + 1\cdot 23 =$$

$$= -87 + 23 = -64.$$

Ответ: –64.

Пример 6. Проверить, что векторы $\vec{a}(-1;2;-3)$, $\vec{b}(0;-1;5)$, $\vec{c}(-2;3;-1)$ компланарны.

Решение. Найдем смешанное произведение данных векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-14) -$$

$$- 2\cdot 7 = 14 - 14 = 0.$$

Так как смешанное произведение векторов равно 0, значит вектора $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны. Ответ: вектора компланарны.

Пример 7. Найти объем пирамиды *ABCD* с вершинами *A*(–1; 0; 5), *B*(2; –6; 8), *C*(–1; 2; –1), *D*(0; 4; 4).

Решение. Найдем векторы, образующие пирамиду:

$\overrightarrow{AB}(2+1;-6-0;8-5),\ \ \overrightarrow{AB}(3;-6;3);$

$\overrightarrow{AC}(-1+1;2-0;-1-5),\ \ \overrightarrow{AC}(0;2;-6);$

$\overrightarrow{AD}(0+1;4-0;5-5),\ \ \overrightarrow{AC}(1;4;0).$

Тогда объем пирамиды *ABCD* равен шестой части абсолютной величины смешанного произведения этих векторов. Найдем смешанное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3 & -6 & 3\\ 0 & 2 & -6\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2 & -6\\ 4 & 0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-6 & 3\\ 2 & -6\end{vmatrix}=3\cdot 24+1\cdot 30=102.$$

Объем пирамиды *ABCD* равен $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{6}\cdot 102=17.$ Ответ: 17.

5. ПРИМЕР МОДУЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Дан вектор $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Найти вектор $\vec{d}$, коллинеарный вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, если $\left|\vec{d}\right|$ =3.

2. Вычислить $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$, $np_{\vec{a}}(\vec{b}+3\vec{a})$, если $\vec{a}=3\vec{q},\ \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q},$ $\left|\vec{p}\right|=4,\ \left|\vec{q}\right|=4,\ (\vec{p}\,\hat{;}\,\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

3. Сила $\vec{F}$ приложена к вершине *A* треугольника *ABC*. Вычислить работу силы по сторонам *AB* и *AC*, момент силы относительно середины стороны *BC*, если *A*(3; 2; –1), *B*(5; 3; 3), *C*(1; 10;5), *F*(5; 1; 2).

4. Даны координаты точек *A*(0; 3; 0), *B*(–2; 6; 0), *C*(–2; 3;6), *D*(0; 6; 8). Выполнить следующие действия:

а) записать векторы $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ в разложении по базису;

б) найти модули этих векторов и их направляющие косинусы;

в) проверить, лежат ли заданные точки в одной плоскости;

г) если точки не лежат в одной плоскости, то найти высоту пирамиды *ABCD*, опущенную из вершины *B*.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Курзенков Сергей Владимирович
Воронкова Татьяна Борисовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор *А. С. Зайцева*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 14.02.2022. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,74.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.