МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

И. В. Шафранская, О. А. Хомич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ АПК

КУРС ЛЕКЦИЙ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования I ступени по специальности
1-74 01 01 Экономика и организация производства
в отраслях агропромышленного комплекса*

Горки
БГСХА
2022

УДК 338.436.33(075.8)
ББК 65.32я73
Ш30

Рекомендовано методической комиссией
экономического факультета 22.02.2022 (*протокол № 6*)
и Научно-методическим советом БГСХА
28.04.2022 (*протокол № 8*)

Авторы:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*;
старший преподаватель *О. А. Хомич*

Рецензенты:
кандидат экономических наук, доцент *А. П. Такун*;
кандидат педагогических наук, доцент *О. Л. Сапун*

Шафранская, И. В.
Ш30 Методы оптимизации в управлении АПК. Курс лекций : учебно-методическое пособие / И. В. Шафранская, О. А. Хомич. – Горки : БГСХА, 2022. – 227 с.
ISBN 978-985-882-281-1.

Приведены основные понятия и принципы построения моделей задач математического программирования.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования I ступени по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса.

УДК 338.436.33(075.8)
ББК 65.32я73

ISBN 978-985-882-281-1

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация решений в сложных экономических системах, работающих в разнообразных условиях, связана с анализом и переработкой большого объема разнородной, неполной и противоречивой информации. И лицо, принимающее управленческое решение, должно рассматривать не одну, а сразу несколько противоречивых целей, ориентируясь на повышение эффективности функционирования сложных систем.

Своевременный и качественный прогноз, оценка уровня эффективности и надежности функционирования сложных экономических систем оказывают непосредственное влияние на финансовое состояние, конкурентоспособность предприятия, благосостояние и качество жизни населения региона.

Вышеизложенное требует применения персональных компьютеров и комплекса экономико-математических методов и моделей, формализующих неопределенность, неполноту информации, которые характерны для конкретных хозяйственных ситуаций. Поэтому важно, чтобы в процессе обучения студент освоил современные методы оптимизации, приобрел практические навыки анализа и планирования экономических систем в производственной и коммерческой деятельности.

Освоение учебной дисциплины базируется на компетенциях, приобретенных при изучении учебных дисциплин «Высшая математика», «Экономическая теория», «Математическая экономика».

В свою очередь, учебная дисциплина «Методы оптимизации в управлении АПК» используется при изучении последующих учебных дисциплин: «Эконометрика и экономико-математические методы и модели», «Организация производства на перерабатывающих предприятиях АПК», «Организация производства на сельскохозяйственных предприятиях», «Моделирование и оптимизация в АПК».

Цель учебной дисциплины состоит в том, чтобы студент овладел приемами и методами оптимизации для изучения особенностей функционирования и обеспечения устойчивости производства; научился выделять существенные стороны функционирования производственных объектов в терминах математического программирования; изучил особенности методов оптимизации и алгоритмы их применения при решении практических задач.

Задачи изучения учебной дисциплины:

- применение приемов и методов оптимизации экономических процессов предприятий, формирований;
- умение составлять важнейшие математические модели принятия решений применительно к реальным условиям объектов агропромышленного комплекса;
- умение использовать пакеты прикладных программ для решения задач, сформированных в терминах дисциплины;
- умение проводить научный экономический анализ полученных оптимальных решений.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации в управлении АПК» относится к компоненту учреждения высшего образования вариативному модулю 2 «Менеджмент в АПК».

В результате изучения учебной дисциплины «Методы оптимизации в управлении АПК» у студента специальности 1-74 01 01 «Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса» должна сформироваться следующая компетенция: быть способным использовать приемы и методы оптимизации для изучения особенностей функционирования и обеспечения устойчивости производственных процессов и экономических систем при управлении АПК.

Для дневной формы получения высшего образования общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в управлении АПК» по специальности 1-74 01 01 «Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса» и в соответствии с учебным планом С-01-32-18у от 27.09.2018 г., составляет 110 часов, в том числе аудиторных 52 часа, из них 18 часов – лекции, 34 часа – практические занятия. Для самостоятельной работы отведено 58 часов. Рекомендуемая форма текущей аттестации – зачет. Учебная дисциплина изучается студентами на 3-м курсе в 5-м семестре.

Для дневной формы получения высшего образования на основе среднего специального образования общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в управлении АПК» в соответствии с учебным планом С-01-34-19у от 28.02.2019 г., составляет 110 часов, в том числе аудиторных 52 часа, из них 18 часов – лекции, 34 часа – практические занятия. Для самостоятельной работы отведено 58 часов. Рекомендуемая форма текущей аттестации – зачет. Учебная дисциплина изучается студентами на 2-м курсе в 3-м семестре.

Для заочной формы получения высшего образования общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в управлении АПК» в соответствии с учебным планом З-01-46-18у от 01.11.2018 г., составляет 110 часов, в том числе аудиторных 12 часов, из них 4 часа – лекции, 8 часов – практические занятия. Для самостоятельной работы отведено 98 часов. Рекомендуемая форма текущей аттестации – зачет. Учебная дисциплина изучается студентами на 4-м курсе.

Для заочной формы получения высшего образования на основе среднего специального образования общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в управлении АПК» в соответствии с учебным планом З-01-48-19у от 27.03.2019 г., составляет 110 часов, в том числе аудиторных 12 часов, из них 4 часа – лекции, 8 часов – практические занятия. Для самостоятельной работы отведено 98 часов. Рекомендуемая форма текущей аттестации – зачет. Учебная дисциплина изучается студентами на 3-м курсе.

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА

1.1. Предмет, история и перспективы развития дисциплины

Математические методы оптимизации в управлении АПК, известные также под названием «математическое программирование», – важнейшая составляющая математического аппарата, используемого в экономико-математическом моделировании.

Так, в экономике сельского хозяйства имеется очень много задач из области планирования и экономических расчетов, для решения которых необходимо исследование многофакторных зависимостей и нахождение на этой основе наилучших решений. Однако с задачами оптимизации приходится встречаться не только в экономике, но и в технике, медицине, военном деле. Ведь каждое разумное действие является в определенном смысле оптимальным, так как оно выбирается после сравнения с другими вариантами (с учетом ограничений, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности).

С математической точки зрения речь идет об исследовании специального класса задач, в которых находят max или min некоторой целевой установки, при этом область существования max или min ограничена экономическими, зоотехническими, агрономическими или другими условиями, которые записываются в виде уравнений или неравенств.

Задача математического программирования формулируется следующим образом: требуется найти значение n-переменных, которые удовлетворяют m-условиям (уравнениям, неравенствам) и максимизируют или минимизируют функцию.

Таким образом, *предметом* математического программирования является исследование и нахождение метода решения экстремальных задач.

Задача курса – научить студентов знанию математического аппарата и методов, используемых при решении экстремальных задач.

До недавнего времени большинство таких многовариантных задач решалось исходя из здравого смысла и опыта лиц, принимающих решения или просто «на глаз». Но при таком подходе не было и не могло быть никакой уверенности, что найденный вариант – наилучший. А при современных масштабах производства даже незначительные ошибки оборачиваются громадными потерями. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику.

Необходимость использования математического моделирования в условиях рынка обусловлена следующими положениями:

1) все предприятия АПК заинтересованы в наиболее эффективном использовании ресурсов, а размеры их ограничены. Следовательно, надо искать наилучшие варианты использования ресурсов;

2) чтобы исключить огромные потери на пути «поле – прилавок» необходима тесная производственная увязка 3 сфер экономики (производство, переработка, хранение), а рассчитать оптимальную программу развития для увязки этих сфер традиционными методами невозможно;

3) общие тенденции развития АПК состоят в том, что между предприятиями устанавливаются тесные кооперативные связи. А для того, чтобы обосновать форму связи, месторасположение, необходимо произвести массу сложных расчетов, что возможно только с использованием современных методов и ЭВМ;

4) на развитие экономики существенное влияние оказывает социальная сфера. При развитии предприятий необходимо осуществить тесную увязку производственной и социальной программ, а это означает, что проблема управления экономикой – очень сложный процесс;

5) переход на рыночные отношения меняет многие представления о положительных путях развития производства и, чтобы обосновать нужную форму хозяйствований, необходимо учитывать множество различных факторов, учесть которые традиционными методами невозможно;

6) важным моментом, побуждающим использование математического моделирования, является развитие науки.

Исторически с задачами оптимизации человечество столкнулось уже в древние века. Так, уже давно были решены разнообразные задачи геометрического типа, связанные со свойствами элементарных фигур. Со времени открытия И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем дифференциального исчисления аппарат прикладной математики создавался в основном под влиянием запросов естесственных наук (в первую очередь физики) и техники. И хотя для конкретного численного решения типичных задач, возникающих в экономике, он оказался недостаточным, все же появилась возможность исследования более сложных задач. Первые результаты по минимизации функций и функционалов были получены Л. Эйлером и Ж. Л. Лагранжем. В XIX и начале XX в. полностью сформировалось вариационное исчисление, в котором изучаются задачи минимизации функционалов. В конце 40-х гг. начался новый этап развития методов оптимизации. Как всегда, толчком послужили задачи, поставленные практикой. Так, в 40–50-х гг. XX в. как отдельный раздел прикладной математики сформировалось *линейное программирование*, когда советским математиком Л. В. Канторовичем в 1939 г. был разработан метод разрешающих множителей, в 1940 г. предложен метод потенциалов, а американским ученым Джоном Данцигом в 1949 г. разработан симплексный метод. Дальнейшее развитие теория линейного программирования получила в работах В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, а также в трудах зарубежных ученых: Г. Форда, Д. Р. Фалкерсона, Т. Куна, С. Гасса, Г. Билла и др.

Независимые друг от друга разработки Л. В. Канторовича и Д. Данцига явились началом широких исследований и в области решения многих других видов экстремальных задач.

Начиная с 1955 г. опубликовано множество работ по нелинейному, в частности, квадратическому программированию. Кроме того, возникли теория игр, динамическое программирование, теория оптимального управления, теория дифференциальных игр. В создании и развитии новых разделов дисциплины большую роль сыграли советские ученые Л. С. Понтрягин, Н. Н. Моисеев, Р. Беллман, Р. Гомори, А. А. Милютин, А. Я. Дубовицкий и др.

В настоящее время также создается широко разветвленная теория оптимизации. При этом последние достижения теории оптимизации, особенно в математическом программировании и в теории управления, находят многие важные области применения и обещают стать еще более широко используемыми в будущем.

1.2. Основные понятия и принципы построения моделей

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой, показателем эффективности* или *критерием оптимальности*.

Экономические возможности формализуются в виде *системы ограничений*.

Все это составляет математическую модель. Термин «модель» происходит от латинского слова *modulus* – образец, норма, мера.

Математическая модель задачи – это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. При этом все модели обладают рядом свойств:

– отражают наиболее существенные стороны изучаемого объекта;

– дают информацию о фактическом состоянии моделируемого объекта, а также о его предполагаемом поведении.

Таким образом, основное назначение модели – служить средством познания оригинала. Наиболее широкое распространение математических моделей по сравнению с графическими, геометрическими и физическими объясняется следующими факторами:

1) их использование обходится значительно дешевле и требует меньших затрат времени;

2) в математической модели любое явление, процесс, объект могут быть представлены без воздействия внешних факторов (особенно природных), что исключает вероятность получения непредсказуемых результатов.

Модель задачи математического программирования включает:

1) *совокупность неизвестных величин* $x = (x_1, \dots, \dots, x_{n1})$, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (вектором управления, решением, стратегией и т. д.);

2) *целевую функцию* (критерий оптимальности, показатель эффективности, функционал задачи и т. д.). Она позволяет выбирать наилучший вариант множества возможных. Целевую функцию обозначим буквой Z ($Z = z(x)$). Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства и т. д.;

3) *условия* (или систему ограничений), налагаемые на неизвестные величины.

Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения потребностей, из условий производственных и технологических процессов. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует *область допустимых решений* (область экономических возможностей), которую обозначим буквой $\Omega(x \in \Omega)$.

При таких обозначениях модель задачи математического программирования примет вид

$$\max(\min) Z = z(x),\ (x \in \Omega),$$

или найти

$$\text{extremum}\, Z = z(x),\ (x \in \Omega).$$

В развернутом виде: найти план $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n1})$, доставляющий экстремальное значение целевой функции Z, т. е.

$$\max(\min) Z = z(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n1})$$

при ограничениях

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n1}).\ \{\leq, =, \geq\} b_i (i = \overline{1, m}).$$

Из экономических или физических соображений на план задачи или некоторые его компоненты (координаты) налагаются условия неотрицательности:

$$x_j \geq 0, j \in \Omega_1 \subset \Omega,$$

иногда – целочисленности.

При этом план x, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым* $(x \in \Omega)$.

Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется *оптимальным*, который будем обозначать x^*, а экстремальное значение целевой функции – $Z(x^*) = Z^*$.

Оптимальное решение не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесконечное множество оптимальных решений.

Таким образом, можно отметить, что математические методы представляют собой программу вычислений, обеспечивающую нахождение оптимального варианта решения задачи, условия которой заданы количественно. Суть применения этих методов состоит в использовании алгоритма последовательных приближений: вначале идет поиск произвольного допустимого плана, а затем его улучшение до оптимального варианта. Поэтапно выполняются следующие операции:

1) словесно излагается суть задачи, устанавливается перечень неизвестных переменных; определяются известные параметры; уточняется перечень ограничений и цель решения;

2) формируется математическая модель, т. е. происходит абстрактное отображение реальных процессов в виде системы математических

уравнений или неравенств, а также включают и критерий эффективности, выражающий поставленную цель;

3) реализация модели осуществляется одним из множества методов математического программирования в соответствии с разработанными алгоритмами.

Рассмотрим основные требования к задачам анализа, планирования и управления:

1) четкая их постановка, т. е. строгая формулировка того, что требуется, в какое время, на каком объекте, при каких условиях и с какой целью;

2) возможность в соответствии с постановкой задачи собрать необходимую информацию, так как без соответствующей базы никакое математическое решение невозможно. Информация должна отвечать предъявляемым требованиям (достоверность, репрезентативность и др.);

3) экономическая задача должна быть сформулирована и поставлена так, чтобы она могла быть описана математически. В противном случае математическое решение ее будет невозможно;

4) задача должна быть поставлена с таким расчетом, чтобы для ее решения можно было подобрать соответствующий математический аппарат. Другими словами, экономическая задача должна подходить под общую задачу математического программирования;

5) задача должна иметь те пределы своей разности, которые позволяют ее решить или вручную, или на ЭВМ;

6) любая задача должна иметь практическую значимость.

1.3. Применение методов теории оптимальных решений: линейного программирования, нелинейного программирования, динамического программирования, дискретного программирования в экономике АПК

По качеству получаемых решений методы, применяемые для решения широкого круга задач в АПК, можно подразделить на две группы:

1) *оптимальные* (симплексный метод, метод потенциалов, дельта-метод, венгерский метод и др.);

2) *неоптимальные*, т. е. позволяющие получать решения, близкие к оптимальным (индексный метод, метод аппроксимации или Фогеля).

По своим возможностям методы можно разделить:

1) на универсальные, позволяющие решать задачи любого типа (симплексный метод);

2) специальные, решающие задачи определенного типа (задачи транспортного характера решаются методом потенциалов, а задача о назначениях реализуется венгерским методом).

Выбор методов решения задач определяется рядом причин и зависит от того, в какой математической форме представлены эти условия.

Методы линейного программирования (ЛП) используют для решения плановых экономических задач, в которых количественные зависимости выражены только линейно.

Методы и модели линейного программирования применяются:

– при разработке производственной программы предприятия;

– распределении работ по исполнителям;

– размещении заказов между исполнителями и по временным интервалам;

– определении наилучшего ассортимента выпуска продукции;

– планировании грузопотоков;

– определении плана товарооборота и его распределении;

– в задачах развития и размещения производительных сил, баз и складов систем обращения материальных ресурсов и т. д.

Особенно широкое применение эти методы и модели получили при решении задач экономии ресурсов, производственно-транспортных задач.

Если в задаче математического программирования целевая функция или хотя бы одна из функций системы ограничений нелинейна, то такой раздел называется нелинейным программированием (НЛП). Методы и модели НЛП могут применяться при решении вышеперечисленных задач. Кроме того, они получили широкое распространение:

– при расчете экономически выгодных партий запуска деталей в производство;

– определении экономически выгодной партии поставки, размеров запасов;

– распределении ограниченных ресурсов;

– решении многих производственно-экономических задач и т. д.

Из множества нелинейных задач математического программирования выделяются задачи выпуклого программирования, где требуется определить максимум вогнутой функции на выпуклом множестве. Частным видом такой постановки является квадратическое программирование (данным методом решается задача о размещении складов).

Если при решении задач требуется, чтобы искомые величины (количество машин, агрегатов) были в целых числах (т. е. речь идет о целочисленной оптимизации), то используют методы дискретного программирования. Данными методами решается широкий круг задач:

– оптимизации с неделимостями;

– комбинаторного типа;

– с логическими условиями и т. д.

В частности,

– задачи выбора (о назначениях);

– о контейнерных перевозках (о рюкзаке);

– задачи теории расписаний;

– комплектных поставок и комплектования;

– размещения производственно-складской структуры и т. п.

Методы динамического программирования (ДП) позволяют находить оптимальные решения многошаговых задач (характерным примером является задача о коммивояжере). Суть ее состоит в нахождении наилучшего маршрута для торгового агента, который должен объехать все порученные ему города и вернуться назад за кратчайший срок или с наименьшими затратами на проезд. В современных условиях методами ДП решают задачи:

– оптимального распределения инвестиций для сельскохозяйственных организаций;

– оптимальной загрузки оборудования с учетом его износа;

– оптимального решения по сохранению или замене оборудования с целью получения максимума прибыли от его эксплуатации;

– выбора наиболее экономичного маршрута доставки груза и др.

В ряде случаев исходные параметры задач могут изменяться в определенных пределах и тогда используют методы параметрического программирования (произведенная предприятием продукция подлежит хранению).

В случае если исходные параметры выражаются не точно определенными числами, тогда применяются методы стохастического программирования. Например,

– урожайность в задаче по оптимизации сочетания отраслей сельскохозяйственной организации (зависит от погодных условий);

– количество поступающих заказов на ремонт оборудования за какой-то период времени в задаче массового обслуживания (МО) и др.

Задачи, в которых находят решение по нескольким целевым функциям, относятся к векторной оптимизации (т. е. задачи многокритериального подхода). Например, дать продукции больше, высокого качества и с меньшими затратами.

Различают особенности в сельском хозяйстве, которые способствуют применению математических методов:

1) относительная обособленность сельскохозяйственных организаций;

2) относительно большая, чем в промышленности, технологическая однородность.

К особенностям, затрудняющим применение, относятся:

1) в расчетах по сельскому хозяйству мы имеем дело с биологическими объектами, и предвидеть их изменение весьма сложно;

2) существенное влияние на развитие сельского хозяйства оказывают природные условия, а это требует расчета нескольких вариантов задач и тщательного обоснования исходной информации;

3) в связи с тем что основное средство сельскохозяйственного производства – земля, ее использование требует в каждом хозяйстве развития нескольких культур, отраслей, что приводит опять же к необходимости тщательного обоснования исходной информации.

2. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Постановка транспортной задачи

Транспортная задача (ТЗ) – одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т. д.

Экономическая постановка транспортной задачи линейного программирования сводится к следующему:

1. Из нескольких пунктов отправления необходимо перевезти определенное количество груза в ряд пунктов назначения.

2. Для решения задачи обязательно должно быть известно: сколько груза имеется в каждом пункте отправления и сколько его требуется в каждом пункте назначения. Должны быть также известны расстояния или другие экономические оценки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения.

3. Требуется определить: сколько груза необходимо перевезти и по какому маршруту, чтобы общие затраты на его транспортировку были минимальными.

Математическая постановка транспортной задачи (по критерию стоимости) будет иметь вид

Имеются m поставщиков, n потребителей.

Индексация:

i – индекс поставщиков, $(i = \overline{1, m})$;

j – индекс потребителей, $(j = \overline{1, n})$.

Неизвестные переменные:

x_i – количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

Известные величины:

A_i – количество груза, имеющегося у i-го поставщика;

B_j – потребность в грузе j-го потребителя;

C_{ij} – издержки по перевозке груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Требуется найти

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

При этом должны выполняться следующие условия:

1) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = A_i, (i = \overline{1, m}),$

т. е. все грузы должны быть вывезены;

2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = B_j, (j = \overline{1, n}),$

т. е. все потребители должны быть удовлетворены;

3) $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j,$

т. е. ресурсы равны потребностям;

4) $x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}); \ (j = \overline{1, n}).$

т. е. существует условие неотрицательности, исключающее обратные перевозки.

Первое ограничение структурной модели означает, что к каким бы пунктам назначения груз не перевозился, его суммарная перевозка от поставщика должна быть равна наличию его у этого поставщика.

Второе условие – общий объем груза, несмотря на то, из каких бы пунктов его не отправляли, в сумме обязательно должен удовлетворять спрос потребителя.

Третье условие показывает, что сумма наличия груза у поставщиков должна быть равна сумме всего того, что перевозится потребителям. Это ограничение называют балансом спроса и предложения.

Четвертое условие является обязательным для всех задач линейного программирования. В данном случае оно показывает, что величина перевозимого груза от любого поставщика к любому потребителю не может быть отрицательной.

Можно от сокращенной записи задачи перейти к развернутой, тогда условия и критерий оптимальности задачи будет иметь вид системы уравнений.

Найти

$$F_{\min} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + \\ + c_{mn}x_{mn}.$$

При условиях:

$$1) \begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = A_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = A_m; \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = B_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = B_n; \end{array}$$

3) $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$;

4) $\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}\} \geq 0$.

Для наглядности условия транспортной задачи можно представить табл. 1, которую называют распределительной. Распределительную таблицу называют иногда табличной или матричной моделью транспортной задачи, в которой потребители однородного груза обычно размещаются по столбцам, а поставщики – по строкам.

Таблица 1. **Исходная информация транспортной задачи**

Поставщик	Потребитель				Запас груза A_i
	1	2	…	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	A_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	A_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	A_m
Потребность в грузе B_j	B_1	B_2	…	B_n	$\sum A_i = \sum B_j$

При этом матрицу

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = [x_{ij}]_{mn}$$

называют матрицей перевозок, а матрицу $C = [c_{ij}]_{mn}$ – матрицей тарифов.

План перевозок $X = [x_{ij}]_{mn}$ называют допустимым, если он удовлетворяет ограничениям:

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = A_i, (i = \overline{1,m}),$

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = B_j, (j = \overline{1,n}),$

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i = \sum\limits_{j=1}^{n} B_j,$

4) $x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,m});\ (j = \overline{1,n}).$

Допустимый план перевозок, доставляющий минимум целевой функции, называется оптимальным.

Согласно теореме о существовании допустимого плана, для того, чтобы транспортная задача имела допустимое решение, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j.$$

В таком случае, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, модель транспортной задачи называют закрытой.

Если для транспортной задачи выполняется одно из условий

$$\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j,$$

то модель задачи называют открытой.

Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую. Так, при выполнении первого условия необходимо ввести фиктивный $(n + 1)$-й пункт назначения (т. е. в матрице задачи предусматривается дополнительный столбец). Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, т. е.

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j,$$

а все тарифы одинаковыми, равными нулю, т. е.

$$C_{i,\, n+1} = 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Аналогично при выполнении второго условия вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запас груза у которого

$$A_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i,$$

а тарифы

$$C_{m+1,\, j} = 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

2.2. Построение исходного опорного плана

Построение опорных планов, а также преобразование их будем производить непосредственно в распределительной таблице.

Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки – незанятые, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы.

Заполнение первой таблицы может быть осуществлено с помощью различных приемов, включая и так называемый произвольный выбор. Следует иметь в виду, что от того, насколько удачно подобрано опорное решение, зависят количество промежуточных расчетов и быстрота нахождения оптимального решения.

Общим правилом при любом способе заполнения таблицы является следующее: число занятых клеток (ЧЗК) в таблице должно быть всегда равно числу строк и столбцов таблицы без единицы:

$$\text{ЧЗК} = m + n - 1.$$

Данный принцип должен соблюдаться, так как он обеспечивает возможность улучшения опорного плана. Если это правило не соблюдается необходимо исправить опорный план.

1. Если число занятых клеток меньше чем $m + n - 1$, то задача имеет вырожденное решение. Для его исключения целесообразно поменять местами поставщиков и потребителей или ввести в свободную клетку с наименьшим тарифом нулевую поставку. Нуль помещают в такую клетку, чтобы в каждой строке и столбце было не менее одной занятой клетки.

2. Если заполненных клеток больше, чем надо, первоначальное решение пытаются получить, заполняя таблицу другим способом, соблюдая строго правило: в клетку ставят максимально возможную поставку.

Рассмотрим основные способы или методы нахождения опорного решения:

1) ***правило минимума по строке.*** Суть: заполняют таблицу по строкам, начиная с первой. В каждой строке максимально возможную поставку осуществляют в ту клетку, оценочный коэффициент в которой наименьший (если решают на минимум), или клетку с наибольшим оценочным коэффициентом (если решают на максимум);

2) ***правило минимума по столбцу.*** По этому правилу заполняют таблицу по столбцам. В столбце ищут лучшую клетку, ставят туда максимально возможную поставку. Затем в данном столбце снова ищут наилучший коэффициент и осуществляют поставку и т. д.;

3) ***правило минимального (наилучшего) элемента (способ предпочтительных оценок).*** Согласно этому методу составление опорного плана начинается с той клетки таблицы, в которой находится минимальный тариф перевозок. При этом в эту клетку ставят максимально возможную поставку. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен.

Примечание:

а) если в таблице имеются запрещенные клетки (т. е. клетки, в которые поставка невозможна), то построение плана начинают со строки или столбца с наибольшим количеством таких клеток. Причем поставку осуществляют в те клетки, которые имеют лучшие коэффициенты с точки зрения поставленной цели в той строке или столбце;

б) если в таблице имеются нуль-строка или нуль-столбец, то при решении задачи на минимум, поставку ставят в ту клетку, которая имеет наибольшую по модулю разность между нулем и минимальным оценочным коэффициентом столбца или строки, а при решении на максимум – за основу принимают нуль с соответствующей меньшей разностью;

4) ***правило северо-западного угла.*** Суть метода заключается в том, что распределение груза начинают с верхней левой клетки таблицы, условно принятой «северо-западной» (с координатами 1;1). В нее записывают объем груза, равный меньшему из значений столбца или строки этой клетки. Если груз недоиспользован, его распределяют потребителю B_2, если груза A_1 не хватило для удовлетворения конкретного потребителя B_1, используют груз поставщика A_2. По такому принципу распределяют все грузы.

Проиллюстрируем правило северо-западного угла и способ предпочтительных оценок на примере.

В трех хранилищах A_1, A_2, A_3 имеется соответственно 70, 90 и 50 ц овощей. Требуется спланировать перевозку овощей четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, спрос которых равен соответственно 50, 70, 40 и

40 ц, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Дана стоимость перевозки 1 ц.

Решение. Поскольку запасы овощей в хранилищах превышают спрос потребителей, вводится фиктивный потребитель, спрос которого равен

$$B_5 = \sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{j=1}^{4} B_j = (70 + 90 + 50) - (50 + 70 + 40 + 40) =$$
$$= 210 - 200 = 10.$$

Все затраты для фиктивного потребителя $C_{i,\,5} = 0$ $(i = \overline{1,3})$.

Таким образом, открытая модель задачи преобразовалась в закрытую, а распределительная таблица принимает следующий вид:

а) I способ (способ северо-западного угла) (табл. 2).

Таблица 2. **Распределение ресурсов способом северо-западного угла**

Хранилище	Потребитель					Запас овощей, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	$<B_5>$	
A_1	5 50	2 20	3	6	0	70
A_2	4	3 50	5 40	7	0	90
A_3	2	4	1	5 40	0 10	50
Потребность в овощах, ц	50	70	40	40	10	210

$F_{\min} = 50 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 10 \cdot 0 = 250 +$
$+ 40 + 150 + 200 + 200 = 840$ у. д. е.;

б) II способ (способ предпочтительных оценок) (табл. 3).

Таблица 3. **Распределение ресурсов способом предпочтительных оценок**

Хранилище	Потребитель					Запас овощей, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	$<B_5>$	
A_1	5	2 70	3	6	0	70
A_2	4 40	3	5	7 40	0 10	90
A_3	2 10	4	1 40	5	0 10	50
Потребность в овощах, ц	50	70	40	40	10	210

$$F_{\min} = 70 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 7 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 10 \cdot 0 =$$
$$= 140 + 160 + 280 + 20 + 40 = 640 \text{ у. д. е.}$$

Сравнивая значения целевых функций, полученные по правилам северо-западного угла и предпочтительных оценок, замечаем, что транспортные расходы по II способу меньше на 200 у. д. е.

2.3. Метод потенциалов

Опорное решение, полученное любым из известных методов, как правило, не является оптимальным. Для определения оптимального решения транспортной задачи чаще всего используют метод потенциалов.

Система потенциалов – это произвольная система чисел, взятая таким образом, что для всех заполненных клеток таблицы выполняется следующее условие:

$$V_j - U_i = c_{ij},$$

где V_j – потенциал j-го столбца;

U_i – потенциал i-й строки;

c_{ij} – оценочный коэффициент для заполненной клетки.

Откуда:

$$V_j = U_i + c_{ij};$$

$$U_i = V_j - c_{ij}.$$

Поскольку в уравнении два неизвестных, одному из потенциалов придают произвольное значение. Например, $U_1 = 0$, а затем, опираясь на заполненные клетки, по вышеприведенным формулам рассчитывают величины остальных потенциалов.

Данное распределение ресурсов будет оптимальным в том случае, если для всех свободных клеток таблицы будет выполняться условие потенциальности.

При решении задачи:

– на минимум –

$$V_j - U_i \le c_{ij};$$

– на максимум –

$$V_j - U_i \ge c_{ij}.$$

Если условие не выполняется, то для этих клеток рассчитывают нарушение по следующей формуле:

$$k_{ij} = V_j - U_i - c_{ij}.$$

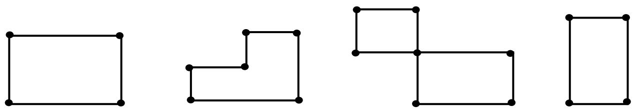
С экономической точки зрения величина нарушения представляет собой то значение, на которое улучшится план (целевая функция), если в данную клетку ввести задание в размере 1. Если клеток с нарушением несколько, выбирают наибольшее по абсолютной величине. Из этой клетки (с наибольшим нарушением) начинают строить цикл по следующим правилам:

1) линии цикла должны быть прямыми;

2) повороты следует осуществлять под прямым углом и только в занятых клетках;

3) цикл должен быть всегда замкнутым.

Цикл может быть представлен в следующем виде:



В клетке с началом цикла ставят «+», в следующей – «–» и чередуют. Из клеток, в которых стоят «–», выбирают наименьшее число по абсолютной величине и проводят его по циклу, т. е. там, где стоят «+» – прибавляют, где «–» – отнимают.

Таким образом, получают новое решение, которое снова нужно проверить на потенциальность, рассчитав величины потенциалов по вышеизложенному алгоритму. Расчеты продолжают до тех пор, пока в свободных клетках не будет нарушений.

Для рассмотрения данного метода воспользуемся опорным планом вышеприведенной задачи, полученным по правилу предпочтительных оценок. В результате распределения овощей по потребителям получим вырожденный план – $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 \neq 6$, т. е. $7 \neq 6$ (табл. 4).

В одну из свободных клеток помещаем 0 и считаем ее занятой.

Определим потенциалы:

$$U_3 = 0;$$

$$V_3 = 0 + 1 = 1;$$

$$U_1 = 5 - 6 = 1;$$

$$V_1 = 0 + 2 = 2;$$

$$V_4 = –2 + 7 = 5;$$

$$U_2 = –1 + 2 = 1;$$

$$U_2 = 2 – 4 = –2;$$

$$V_5 = –2 + 0 = –2.$$

Таблица 4. **Распределение овощей по потребителям**

Хранилище (U_i)	Потребитель (V_j)					Запас овощей, ц
	B_1 2	B_2 1	B_3 1	B_4 5	<B_5> –2	
A_1 –1	5	2 70	3	6 0	0	70
A_2 –2	4 40	3	5	7 10	0 10	90
A_3 0	2 10	4	1 40	5	0	50
Потребность в овощах, ц	50	70	40	40	10	210

Проверим свободные клетки на потенциальность:

$$V_1 – U_1 = 2 – (–1) \le 5;$$

$$V_2 – U_2 = 1 – (–2) \le 3;$$

$$V_2 – U_3 = 1 – 0 \le 4;$$

$$V_3 – U_1 = 1 – (–1) \le 3;$$

$$V_3 – U_2 = 1 – (–2) \le 5;$$

$$V_4 – U_3 = 5 – 0 \le 5;$$

$$V_5 – U_1 = – 2 – (–1) \le 0;$$

$$V_5 – U_3 = –2 – 0 \le 0.$$

Так как нарушений нет, следовательно, получен оптимальный план.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значение целевой функции $F(x^*) = 640$ у. д. е., 10 ц овощей, находящихся в хранилище A_2, осталось нераспределенным.

2.4. Метод аппроксимации (Фогеля)

Если задача имеет довольно большой объем строк и столбцов, то для получения оптимального решения необходимо построение множества промежуточных таблиц. Есть методы, которые позволяют уже при построении опорного решения добиться высокой близости его к оптимальному. А в ряде случаев сразу же и получить оптимальное. Автором метода аппроксимации является американский математик Роберт Фогель, который разработал алгоритм этого метода. Алгоритм решения задачи методом аппроксимации:

1) строят расчетную таблицу;

2) в данной таблице дополнительно вычеркивают справа и снизу два дополнительных столбца и строки;

3) в эти дополнительные строки и столбцы заносят разницу между двумя наименьшими (если решаем на минимум) оценками эффективности. Эту разницу называют разностью I порядка.

Во вторые строки и столбцы заносят так называемые вторые разности между первым и третьим наименьшими коэффициентами. После заполнения строк и столбцов начинают заполнение таблицы. Среди первых разностей по строке и столбцу выбирают наибольшую и заполняют эту строку или столбец. Максимально возможную поставку ставят в наилучшую клетку строки или столбца;

4) далее ищут следующую наибольшую разность и заполняют следующий столбец или строку и т. д.

Примечание. *Если среди первых разностей есть одинаковые, тогда используют вторые разности. Среди них находят максимальный и заполняют определенную строку или столбец.*

Проиллюстрируем правило Фогеля на примере. Необходимо определить оптимальный план перевозки семенного картофеля из мест производства в торговые пункты. Цель – минимум затрат.

1. Наличие картофеля в местах его производства (ц):

A – 500;

B – 3000;

C – 600;

D – 900.

2. Потребность торговых организаций в семенном картофеле (ц):

I – 1000;

II – 1500;

III – 1750;

IV – 750.

Себестоимость перевозки дана.

Решение. Используя исходную информацию, строим расчетную таблицу. Начиная с пункта 2, выполняем распределение ресурсов методом аппроксимации, используя вышеизложенный алгоритм (табл. 5).

Таблица 5. **Распределение ресурсов методом аппроксимации**

Поставщик, U_i	Потребитель, V_j				Запас	I	II	III
	I 28	II 20	III 19	IV 15				
A 0	50	40	20	15 500	500	5	25	
B 8	20 1000	12 1500	11 250	7 250	3000	4	5	13
C 9	22 10	15	10 600	9	600	1	6	
D 13	28	10	6 900	4	900	2	6	
Потребность	1000	1500	1750	750	5000			
I	2	2	4	3				
II	8	5	5	5				
III			14					

Метод аппроксимации является приближенным. Поэтому проверку оптимальности полученного плана производим с помощью метода потенциалов.

Проверим, насколько первая таблица метода аппроксимации (табл. 5) оказалась удачной. Рассчитаем, нарушается ли условие потенциальности в этой таблице, если решение проверить методом потенциалов.

Проверка показала, что методом аппроксимации в первой таблице (табл. 5) получено оптимальное решение задачи.

Из пункта производства *A* требуется 500 ц семенного картофеля поставить в IV торговую организацию. Из пункта производства *B* необходимо поставить 1000 ц семенного картофеля в I торговую организацию, 1500 ц – в II, по 250 ц – в III и IV торговые организации.

Затраты на перевозку составят:

$$F_{\min} = 500 \cdot 15 + 1000 \cdot 20 + 1500 \cdot 12 + 250 \cdot 7 + 600 \cdot 10 + \\ + 900 \cdot 6 = 7500 + 20000 + 18000 + 1750 + 6000 + 5400 = \\ = 58650 \text{ у. д. е.}$$

3. МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТИРОВКИ ГРУЗОВ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ТРАНСПОРТА

3.1. Транспортировка однородного груза различными видами транспорта

Для решения задач оптимизации транспортировки грузов различными видами транспорта используют приближенные методы решения транспортных задач. Как правило, их решают в два этапа.

1. На I этапе определяют оптимальный вариант закрепления поставщиков за потребителями. При этом в качестве критерия оптимальности используют минимум тонна-километров перевозки груза. Оценочными коэффициентами являются расстояния между поставщиками и потребителями.

2. На II этапе решают задачу о распределении различных видов транспортных средств для транспортировки грузов.

Предварительно должна быть задана информация:

1) о количестве различных транспортных средств;

2) их грузоподъемности;

3) технических возможностях (число рейсов).

За оценочный коэффициент принимают стоимость перевозки 1 т · км груза различными видами автомобильного транспорта.

Решение общей задачи получают приближенным, но достаточно близким к оптимальному.

Для построения математической модели задачи применяют следующую систему обозначений:

1) индексы:

i – индекс (номер) отправителя груза (поставщика), $(i = \overline{1, m})$;

j – индекс потребителя груза, $\left(j = \overline{1, n}\right)$;

k – индекс транспортного средства, $\left(k = \overline{1, p}\right)$;

2) неизвестные величины:

k_{ijk} – объем перевозки груза от i-го поставщика к j-му потребителю k-м транспортным средством;

3) известные величины:

а) ресурсы:

A_i – объем груза у i-го поставщика;

B_j – спрос (потребность) в грузе у j-го потребителя;

D_k – возможный ресурс перевозки груза k-м транспортным средством;

б) коэффициенты:

c_{ijk} – стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю k-м транспортным средством.

Данную задачу решают с использованием критерия оптимальности на минимум затрат.

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} x_{ijk}.$$

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Общая перевозка груза от любых i-х поставщиков любыми k-ми транспортными средствами в сумме должна удовлетворять потребность в грузе j-го потребителя.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = B_j, (j = \overline{1,n}).$$

Данное ограничение может быть записано в другой форме:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = B_j, (j \in J),$$

где i – множество потребителей;

j – множество поставщиков;

k – множество транспортных средств.

2. Объем перевозок от i-го поставщика ко всем j-м потребителям любыми k-ми транспортными средствами не может превышать наличие груза у этого поставщика:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \le A_i, (i = \overline{1,m}).$$

3. Разовый объем грузоперевозок всем j-м потребителям от всех i-х поставщиков k-м видом транспорта не должен превышать общей грузоподъемности этого k-го транспортного средства:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = D_k, (k = \overline{1,p}).$$

4. Объем груза, имеющийся у всех i-х поставщиков, должен быть не ниже спроса всех j-х потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \geq \sum_{j=1}^{n} B_j.$$

5. Должно соблюдаться условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,m});\ (j = \overline{1,n}); (k = \overline{1,p}).$$

Пример. Задача о транспортировке однородного груза различными видами транспортных средств.

Из 4 баз в 4 магазина необходимо завезти товар.

Наличие товара на базах: I – 650; II – 550; III – 400; IV – 700.

Потребность магазинов: 1 – 450; 2 – 600; 3 – 450; 4 – 500.

Расстояние от баз до магазинов приведено в табл. 6.

Перевозка груза будет осуществляться 3 видами автомобилей: МАЗ, КаМАЗ, ЗИЛ-130. Количество автомобилей задано.

Таблица 6. **Расстояние от баз до магазинов, км**

База	Магазин			
	1	2	3	4
I	5	6	11	–
II	11	13	5	6
III	7	5	9	–
IV	10	8	7	8

Работу необходимо осуществить в течение 2 рабочих дней. Автобаза имеет 6 автомобилей МАЗ, 8 – КаМАЗ и 8 – ЗИЛ-130. Один МАЗ может выполнить 500 т · км перевозки, КаМАЗ – 750 т · км, ЗИЛ-130 – 300 т · км.

1 т · км перевозки составляет для МАЗа – 8 у. д. е., КаМАЗа – 10 у. д. е., ЗИЛа-130 – 14 у. д. е.

Решение. Задача решается в 2 этапа.

1-й этап. Решаем задачу об оптимальных перевозках груза одним видом транспорта, т. е. обычную транспортную задачу. Так как груза у поставщиков больше, вводим 5-й фиктивный магазин (табл. 7).

Таблица 7. **Распределение грузов в 1-й таблице**

База	Магазин					Запас
	1 $V_1 = 5$	2 $V_2 = 6$	3 $V_3 = 11$	4 $V_4 = 12$	<5> $V_5 = 4$	
I $U_1 = 0$	5 450	6 200	11 0 –		0 +	650
II $U_2 = 6$	11	13	5 50	6 500	0	550
III $U_3 = 1$	7	5 400	9		0	400
IV $U_4 = 4$	10	8	7+ 400	8	– 0 300	700
Потребность	450	600	450	500	300	2300

Рассчитаем оценочные коэффициенты:

$$\boldsymbol{k_{15} = 4 - 0 - 0 = 4};\ k_{33} = 11 - 1 - 9 = 1;\ k_{35} = 4 - 1 - 0 = 3.$$

Оптимальный вариант закрепления поставщиков за потребителями приведен в табл. 8.

Таблица 8. **Оптимальный вариант закрепления поставщиков за потребителями в 2-й таблице**

База	Магазин					Запас
	1 $V_1 = 5$	2 $V_2 = 6$	3 $V_3 = 11$	4 $V_4 = 12$	<5> $V_5 = 4$	
I $U_1 = 0$	5 450	6 200	11		0 0	650
II $U_2 = 2$	11	13	5 50	6 500	0	550
III $U_3 = 1$	7	5 400	9		0	400
IV $U_4 = 0$	10	8	7 400	8	0 300	700
Потребность	450	600	450	500	300	2300

$$F_{\min} = 450 \cdot 5 + 200 \cdot 6 + 0 \cdot 0 + 50 \cdot 5 + 500 \cdot 6 + 400 \cdot 5 + 400 \cdot 7 + \\ + 300 \cdot 0 = 2250 + 1200 + 250 + 3000 + 2000 + 2800 = 11500.$$

В результате решения получили следующие объемы перевозок:
в 1-й магазин – 450 · 5 = 2250 т · км;
2-й магазин – 200 · 6 + 400 · 5 = 3200 т · км;
3-й магазин – 50 · 5 + 400 · 7 = 3050 т · км;
4-й магазин – 500 · 6 = 3000 т · км.
Итого – 11500 т · км.
2-й этап. Рассчитаем ресурс автопарка:
МАЗ: 500 · 6 = 3000 т · км
КаМАЗ: 750 · 8 = 6000 т · км
ЗИЛ-130: 300 · 8 = 2400 т · км.
Итого – 11400 т · км.

Ресурсы меньше потребностей (11400 < 11500). Это означает, что в какой-то магазин часть груза будет завезена транспортом другой организации. Рассчитаем оценочные коэффициенты для 2-го этапа. Второй и четвертый магазины имеют эстакады для полуавтоматической разгрузки. Наличие эстакады снижает затраты на 0,5 у. д. е. Задача открытого типа, поэтому необходимо ввести дополнительную потребность в размере 100 ед. (табл. 9).

Таблица 9. **Распределение различных видов транспортных средств для транспортировки грузов в 3-й таблице**

Автомобиль	Магазин				Ресурсы
	1 $V_1 = 8$	2 $V_2 = 7,5$	3 $V_3 = 8$	4 $V_4 = 7,5$	
МАЗ $U_1 = 0$	8 2250	7,5 750	8	7,5	3000
КаМАЗ $U_2 = -2$	10	9,5 2450	10 3050 –	9,5 500 +	6000
ЗИЛ-130 $U_3 = -6$	14	13,5	14	13,5 2400	2400
4 авто $U_4 = 7,5$	0	0	0 400 +	0 – 100	100
Потребность	2250	3200	3050	3000	11500

Рассчитаем оценочные коэффициенты:

$$k_{41} = 8 - 7,5 - 0 = 0,5;\ k_{43} = 8 - 7,5 - 0 = 0,5.$$

Проверка на потенциальность свободных клеток показала, что в 4-й таблице на 2-м этапе получено оптимальное решение (табл. 10).

Таблица 10. **Оптимальное решение задачи в 4-й таблице**

Автомобиль	Магазин				Ресурсы
	1 $V_1 = 8$	2 $V_2 = 7{,}5$	3 $V_3 = 8$	4 $V_4 = 7{,}5$	
МАЗ $U_1 = 0$	8 2250	7,5 750	8	7,5	3000
КаМАЗ $U_2 = -2$	10	9,5 2450	10 2950	9,5 600	6000
ЗИЛ-130 $U_3 = -6$	14	13,5	14	13,5 2400	2400
4 авто $U_4 = 8$	0	0	0 100	0	100
Потребность	2250	3200	3050	3000	11500

В результате решения задачи получили, что затраты на транспортировку грузов составят:

$$F_{\min} = 2250 \cdot 8 + 750 \cdot 7{,}5 + 2490 \cdot 9{,}5 + 2950 \cdot 10 + 600 \cdot 9{,}5 + \\ + 2400 \cdot 13{,}5 + 100 \cdot 0 = 18000 + 5625 + 23275 + 29500 + 5700 + \\ + 32400 = 114500 \text{ у. д. е.}$$

Проведем полный анализ решения задачи.

1-й магазин: все количество груза 450 т будет перевезено с базы № 1. Для перевозки данного груза будет использован автомобиль МАЗ. Объем грузоперевозки равен 2250 т · км. За 1 день автомобиль МАЗ способен выполнить объем 500 т · км. Следовательно, необходимое количество автомобилей МАЗ равно 4,5 авто. Это значит, что 4 автомобиля будут работать 2 дня, а 1 автомобиль – 1 день.

2-й магазин: 200 т груза будет перевезено с 1-й базы и 400 т – с 3-й базы. Объемы грузоперевозок составят: с 1-й базы 1200 т · км, с 3-й – 2000 т · км. Будут использоваться автомобили МАЗ (750 т·км) и КаМАЗ (2450 т · км). С 1-й базы из возможного объема 1200 т МАЗ забирает 750. Этот объем доберут 1,5 автомобиля МАЗ, т. е. 1 автомобиль будет работать 2 дня, 2-й – 1 день.

Остаток груза с 1-й базы (1200 – 750 = 450) и (2000) с 3-й базы (2450) будет перевезен автомобилем КаМАЗ. Количество автомобилей равно 3,3, т. е. 3 автомобиля будут работать 2 дня, а 1 автомобиль – 1 неполный день.

3-й магазин: с 2-й базы объемы грузоперевозок составят 250 т · км и с 4-й базы – 2800 т · км. Для перевозки будут использованы автомобили КаМАЗ в объеме 2950 т · км и 100 т · км будут выполнены автотранспортом других организаций. Потребность в автомобиле КаМАЗ равна 3,9 автомобиля и т. д.

3.2. Транспортировка различного груза различным транспортом

Смысл подобной задачи достаточно ясен. В практике такие задачи возникают часто, но одновременно с этим их решение представляет наибольшую трудность. Хотя именно такие задачи дают наибольший экономический эффект при нахождении оптимального решения.

При математической записи такого вида модели вводят следующие обозначения:

1. Индексация:

i – индекс поставщика, ($i = \overline{1, m}$);

j – индекс потребителя, ($j = \overline{1, n}$);

k – индекс вида транспортных средств, ($k = \overline{1, p}$);

r – индекс вида груза, ($r = \overline{1, q}$).

2. Неизвестные величины:

k_{ijkr} – объем перевозки груза r-го груза k-м транспортным средством от i-го поставщика к j-му потребителю.

3. Известные величины:

а) ресурсы:

A_{ir} – количество груза вида r у i-го поставщика;

B_{jr} – потребность в грузе вида r j-го потребителя;

D_{kr} – наличие k-х транспортных средств, пригодных для перевозки груза вида r;

б) коэффициенты:

c_{ijkr} – стоимость перевозки единицы груза вида r k-м транспортным средством от i-го поставщика к j-му потребителю.

Критерий оптимальности: минимум затрат на перевозку:

$$F_{\min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{q} c_{ijkr} k_{ijkr} .$$

При этом должны выполняться следующие условия:

1) объем перевозок груза вида r k-м транспортом от всех i-х поставщиков должен удовлетворять спрос j-го потребителя в грузе вида r:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ijkr} = B_{jr}, (j = \overline{1, n}; r = \overline{1, q});$$

2) объем перевозок r-го груза k-ми видами транспорта от i-го поставщика всем j-м потребителям не должен превышать наличие груза вида r у этого поставщика:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijkr} = A_{ir}, (i = \overline{1,m}; r = \overline{1,q});$$

3) объем грузоперевозок r-го груза k-м видом транспорта от всех поставщиков ко всем потребителям не должно превышать грузоподъемность k-х транспортных средств, пригодных для перевозки груза вида r:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijkr} = D_{kr}, (k = \overline{1,p}; r = \overline{1,q});$$

4) объем r-го груза у поставщиков должен удовлетворять спрос в этом грузе у потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ir} \geq \sum_{j=1}^{n} B_{jr}\,, (r = \overline{1,q});$$

5) условие неотрицательности переменных:

$$x_{ijkr} \geq 0.$$

4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

4.1. Задача о перевозках с перегрузкой

В транспортной задаче предполагается, что ни в одном маршруте, соединяющим поставщика с некоторым потребителем, другие поставщики и потребители не могут быть использованы в качестве промежуточных пунктов; если допустить обратное (т. е. перевозку грузов от поставщика к потребителю через других поставщиков и потребителей), то новая задача сводится к обычной транспортной задаче. Причем объем вычислений значительно увеличится, так как в сеть будут включены дополнительные маршруты. Считается, что транспортные затраты c_{ij}, соответствующие дополнительным маршрутам, заранее известны.

Такая задача называется модифицированной транспортной задачей, в которой предложение и спрос, соответствующие дополнительным маршрутам, заданы таким образом, что они не влияют на выбор маршрута, осуществляемый в основном алгоритме.

Выполнение последнего требования необходимо, так как ограничения на поток по дополнительным маршрутам являются фиктивными и вводятся только для вычислительных целей.

При выборе величины потока, протекающего по реальной сети модифицированной транспортной задачи, нужно исходить из того, что весь поток груза может протекать через одного поставщика к одному потребителю.

Поэтому необходимо увеличить спрос и предложение на какую-то величину d. Значение этой величины выбирается минимальным из суммарного спроса или суммарного предложения. Эту величину прибавляют к каждому потребителю и каждому поставщику, т. е. делается предположение, что исходные поставщики могут стать потребителями за счет перевозки через них, а исходные потребители могут стать поставщиками за счет перевозки грузов через них.

Следовательно, новая задача о перевозках может быть сведена к традиционной путем добавления новых поставщиков и новых потребителей.

Если каждый узел (пункт) может стать и поставщиком и потребителем, то в модифицированной транспортной задаче новую потребность и новый запас необходимо увеличить на величину d.

Модифицированная задача решается обычным методом потенциалов и методом аппроксимации.

Рассмотрим обычную транспортную задачу.

Имеются два поставщика – A_1, A_2 и три потребителя – B_1, B_2, B_3.

Исходная матрица задачи приведена в табл. 11.

Таблица 11. **Исходная матрица задачи**

Поставщик	Потребитель			Запас
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	4	7	40
A_2	6	3	2	20
Потребность	20	24	16	60

Решение. В данной задаче суммарные ресурсы и суммарные потребности равны 60, следовательно, из этих двух величин выбираем одно наименьшее – 60 (в модифицированной транспортной задаче $d = 60$) и добавляем это значение к каждому поставщику и потребителю. В то же время в модифицированной транспортной задаче поставщиков будет уже не 2, а 5, и потребителей – не 3, а 5 (табл. 12).

Теперь данную задачу можно решить, используя любой из ранее рассмотренных методов решений.

Таблица 12. **Матрица модифицированной транспортной задачи**

Поставщик	Потребитель					Запас
	B_1	B_2	B_3	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	
A_1	3 20	4 20	7	0 30	5	70
A_2	6	3 4	2 16	3	0 30	50
$\overline{B_1}$	0 30	5	4	2	5	30
$\overline{B_2}$	9	0 30	1	3	2	30
$\overline{B_3}$	2	4	0 30	2	6	30
Потребность	50	54	46	30	30	210

4.2. Задача о назначениях (венгерский метод)

Задача о назначении (проблема выбора, задача о женихах и невестах) является исторически первой задачей дискретного программирования. Как задача транспортного типа она опубликована венгерским математиком Е. Эгервари в 1932 г. и имеет самое широкое применение, например, при закреплении машин за маршрутами; распределении инструментов для обработки различных марок стали; работников по рабочим местам; размещении приборов по объектам и т. д.

Экономическая постановка задачи следующая: имеется n-исполнителей, которые могут выполнять m различных работ. Известна полезность c_{ij}, связанная с выполнением j-исполнителем i-й работы. Особенностью данной задачи является то, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Необходимо так назначить исполнителей на работы, чтобы добиться максимума полезности (или минимума общей стоимости назначений).

Для составления математической задачи предположим, что задана матрица $[a_{ij}]_{mn}$, элементы которой характеризуют возможности исполнителей, т. е.:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-я работа может выполняться } j\text{-исполнителем;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через x_{ij} факт назначения или неназначения j-го исполнителя на i-ю работу:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j\text{-исполнитель назначается на } i\text{-ю работу;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такие переменные называют булевыми. Таким образом, приходим к задаче: найти план назначения x_{ij}, который максимизирует суммарную полезность (или минимизирует общую стоимость) назначений:

$$F_{\min(\max)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при следующих ограничениях:

1) каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, (j = \overline{1, n});$$

2) на каждую работу назначается только один исполнитель:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = \overline{1, m});$$

3) должны соблюдаться условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0, \;\; x_{ij} \in \{0; 1\}.$$

Задача о назначениях – частный случай транспортной задачи при

$$A_i = 1;$$

$$\text{В}_j = 1.$$

Важно отметить, что если задача о назначениях ставится при условии получения максимального эффекта, то ее сводят к задаче на минимум.

Задача

$$F_{\max}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,,\ \ x_{ij}\ \in\ \Omega$$

эквивалентна задаче

$$F'_{\min}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(l_j-c_{ij})x_{ij}\,,\ \ x_{ij}\ \in\Omega,$$

где $l_j=\max_j c_{ij}$ (т. е. максимальный элемент столбца матрицы эффективности $C=[c_j]$).

Точное решение задачи о назначениях можно найти венгерским методом, методом динамического программирования, обычным методом потенциалов и др. Хорошее приближение дает метод Фогеля.

Пример. Требуется разместить 4 датчика на 4 объектах таким образом, чтобы общая стоимость затрат по размещению была минимальной. Матрица стоимостей имеет вид (табл. 13).

Таблица 13. **Матрица стоимостей**

Датчик	Объект			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	10	9	7
A_2	15	4	14	8
A_3	13	14	16	11
A_4	4	15	13	19

Решение. Специфику подобного вида задач учитывает венгерский метод. В процессе решения задачи о назначениях используется тот факт, что если каждому элементу i-й строки добавить какое-то действительное число α_i, а к каждому элементу j-го столбца – действительное число β_j, то минимизация целевой функции

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

эквивалентна минимизации функции

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \to \min,$$

если

$$d_{ij} = c_{ij} + \beta_j + \alpha_i.$$

Алгоритм решения.

Шаг 1. Редукция строк и столбцов.

Этот шаг предназначен для получения в матрице стоимостей как можно большего количества нулевых элементов c_{ij}. Для этого в каждой строке из всех элементов вычитают минимальный

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{vmatrix}.$$

Минимальные элементы по строкам соответственно равны: 2, 4, 11, 4.

Получим редуцированную матрицу следующего вида:

$$\left\|c_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{vmatrix}.$$

Теперь в каждом столбце вычтем минимальные элементы соответствующего столбца (0, 0, 5, 0)

$$\left\|c_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Определение назначений.

Правило. Если в полученной матрице стоимостей можно выбрать по одному нулевому элементу так, чтобы соответствующее этим элементам решение было допустимым, то данное нулевое назначение и будет оптимальным.

Рассмотрим строки матрицы. Строки 1, 2, 4 – содержат по одному нулю. Если расставлять назначение по данным клеткам, опорное решение не получим, так как при рассмотрении столбцов имеем в 1-м столбце 2 назначения. Поскольку полного назначения нулевой стоимости в данной матрице не может быть получено, необходимо произвести дальнейшую модификацию редуцированной матричной стоимости.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы.

Необходимо получить новые нулевые элементы. Для этого поступают следующим образом: определяют минимальное множество строк и столбцов, содержащих нулевые элементы, и находят минимальный элемент вне данного множества.

Если рассмотрим: по строкам число нулей – 1, 1, 2, 1; по столбцам – 2, 1, 1, 1. Следовательно, максимальное число нулей (по 2) содержит 3-я строка и 1-й столбец. Вычеркиваем из матрицы 3-ю строку. Тогда число невычеркнутых нулей по строкам равно: 1, 1, 1, а для столбцов число невычеркнутых нулей будет равно: 2, 1, 0, 0. Вычеркиваем 1-й столбец. Остается только один невычеркнутый ноль (элемент (2,2)). Поэтому можно вычеркивать либо 2-ю строку, либо 2-й столбец. Вычеркиваем 2-ю строку. Получим следующую матрицу:

$$\left\|c_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 15 \end{vmatrix}.$$

Правило. Если число линий, необходимых для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равны числу строк или столбцов матрицы стоимости, то существует назначение нулевой стоимости.

Минимальное значение невычеркнутого множества равно 2. Вычитаем его из всех оставшихся элементов. Тогда получим следующую матрицу:

$$\left\|c_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

Теперь для получения новой редуцированной матрицы стоимостей необходимо сложить полученное значение (2) с элементами, расположенными на пересечении вычеркнутых строк и столбцов. Это элементы с координатами (2,1) и (3,1).

Примечание. *Остальные элементы предыдущей матрицы стоимости остаются без изменений.*

$$\left\|c_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

Логика последней операции заключается в том, что если минимальный элемент (2) вычитать из всех остальных элементов матрицы, то на месте нулей будут стоять отрицательные величины и, по крайней мере, один элемент, не принадлежащий вычеркнутому множеству строк и столбцов, станет равен 0, но нулевое назначение не может быть оптимальным, поскольку матрица содержит отрицательные элементы.

Шаги 2 и 3 повторяют до тех пор, пока не получат оптимальное решение.

Шаг 4. Попытаемся сново произвести назначение. Для того чтобы подсчитать стоимость, необходимо получить назначения, перенести на исходную матрицу стоимости:

$$c_{ij} = 4 + 4 + 9 + 11 = 28 \text{ у. д. е.}$$

Примечание. *Если задача решается на максимум, т. е. необходимо максимизировать критерий эффективности, то в исходной матрице проделывают следующие операции:*

1. Все элементы матрицы умножают на (–1).

2. Затем суммируют их с достаточно большим числом m (m берут таким, чтобы полученная матрица не содержала отрицательных элементов).

3. Дальнейший ход решения аналогичен задаче минимизации.

Пример решения задачи о назначении исполнителей на выполнение работ с целью максимизации функции приведен в прил. А.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К СПЕЦИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ЭКОНОМИКИ

5.1. Понятие линейного программирования. Основные формы записи задачи линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – раздел математики, применяемый при разработке методов нахождения экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

Эта линейная функция называется *целевой*, а ограничения, которые представляют количественные соотношения между переменными, выражающие условия и требования экономической задачи и математически записывающиеся в виде уравнений или неравенств, называются *системой ограничений*.

Математическое выражение целевой функции и ее ограничений называется *математической моделью экономической задачи*.

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования имеет следующий вид:

целевая функция:

$$F_{\max(\min)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n;$$

система ограничений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = A_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m \end{array}\right\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные величины, значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают x_j, где $i = 1\ldots m$ или y_i, где $j = 1\ldots n$. Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;

$a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты при переменных в ограничениях, которые служат для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с результатами решения задачи. Эти коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индексы при a_{ij} показывают, что коэффициент a стоит в i-й строке (или в ограничении вида i) и в j-м столбце (или при переменной вида j), где $i = 1\ldots n$; $j = 1\ldots m$;

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – коэффициенты целевой функции, или коэффициенты F-строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например, $p_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где $j = 1\ldots n$. Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче;

$A_1, \ldots, A_m$ – свободные члены ограничений. Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например, A_i, где $i = 1\ldots m$. Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче.

Требование неотрицательности неизвестных переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Симметричной формой записи линейного программирования называют задачу

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$$

или задачу

$$F_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i, (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

Если все ограничения задачи заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то модель такого вида называется канонической:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = A_i, (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель – неканоническая. Переход от неканонической формы модели к канонической осуществляется введением в каждое неравенство балансовой переменной x_{n+1} (при знаке неравенства $\leq$ балансовая переменная вводится в неравенство со знаком плюс, если знак неравенства $\geq$ – со знаком минус). В целевой функции балансовые переменные не вводятся.

Выделяют еще два вида записи – матричную и векторную.

Введем обозначения:

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n];$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix},$$

где C – матрица-строка;

A – матрица системы уравнений;

X – матрица-столбец переменных;

A_0 – матрица-столбец свободных членов.

Тогда каноническая форма задачи примет вид

$$F_{\max} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n][x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix}, \; X \geq 0$$

или

$$F_{\max} = CX, \; AX = A_0, X \geq 0.$$

Важной является также векторная форма задачи линейного программирования:

$$F_{\max} = cx;$$

$$A_1x_1 + \dots + A_jx_j + \dots + A_nx_n = A_0, x \geq 0,$$

где cx – скалярное произведение векторов:

$$c = c_1, \dots, c_n; \; x = x_1, \dots, x_n.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Задачи линейного программирования имеют следующие свойства, сформулированные теоремами.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений и, наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Из теорем 2 и 3 следует, что если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.

Следовательно, особенностью задач линейного программирования является достижение целевой функции своего экстремума на границе области допустимых решений системы ограничений.

Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений.

5.2. Примеры прикладных задач линейного программирования

Число задач, возникающих в практической деятельности, которые достаточно точно можно моделировать задачами линейного программирования, очень велико.

Рассмотрим несколько типичных задач.

1. Задача о выборе оптимальных технологий.

Допустим, что для создания некоторого продукта требуется m видов ресурсов и можно использовать n способов (технологий) производства. Обозначим через a_{ij} расход ресурса вида i при единичной интенсивности использования технологии вида j, а через c_j – количество производимой при этом продукции (будем считать, что зависимость расходов и выпусков от интенсивностей линейна). Предположим, что производству выделено A_i единиц i-го ресурса, и обозначим через x_j интенсивность исполнения j-й технологии. Тогда под оптимизацией плана можно понимать поиск максимума объема выпуска продукции в стоимостном выражении:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,;$$

при ограничениях на лимитируемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, (i = \overline{1,m}).$$

Интенсивности использования технологий по смыслу неотрицательны, т. е.

$$x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0.$$

2. Задача о смесях.

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами.

К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить пропорцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Модель задачи о наилучшем составе смеси рассмотрим на примере *задачи о диете*. Нужно приготовить пищу, которая должна содержать m питательных веществ (углеводы, белки, жиры, витамины, минеральные соли и т. д.). Они в разных пропорциях имеются в n продуктах. Единица j-го продукта содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени нужно потреблять не менее A_i единиц i-го питательного вещества.

Обозначим через c_j стоимость единицы продукта j-го вида. Требуется выбрать рацион минимальной стоимости, содержащий необходимое количество питательных веществ. План задачи – это количество x_j продуктов каждого вида, обеспечивающих необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на исходные продукты:

$$F_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i, (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

3. Задача о наилучшем использовании ресурсов.

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод и т. д.) может выпускать n различных видов продукции (товаров). Ее будем обозначать $П_j$. Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий и других производственных факторов (ингредиентов) R_i. Пусть их число равно m. Они ограничены и их количества равны $A_1 \dots A_m$ условных единиц. Известна экономическая выгода производства продукции каждого вида. Например, цена реализации c_j. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Обозначим через x_j план производства, показывающий какие виды товаров $П_j$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

4. Задача о раскрое материалов.

Сущность задачи состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, отходы (по длине, площади, объему, массе) сводятся к минимуму. Рассмотрим простейшую модель раскроя по одному измерению длинномерных материалов (прутков, труб). Пусть имеется N штук исходного материала, длина каждой штуки равна L. Нужны заготовки m видов, длина которых равна l_i. Известна потребность в заготовках каждого вида – A_i.

Изучение вопроса раскроя показывает, что можно выделить n приемлемых вариантов раскроя исходного материала длиной L на заготовки длиной l_i. Обозначим через a_{ij} количество заготовок i-го вида, получаемое при раскрое единицы исходного материала по j-му варианту, c_j – отходы при раскрое единицы исходного материала по j-му варианту, x_j – количество единиц исходного материала, планируемое к раскрою по j-му варианту.

Целевая функция – минимум отходов, полученных при раскрое:

$$F_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при следующих ограничениях:

на число единиц исходного материала:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = N,$$

на удовлетворение ассортиментного спроса потребителей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i, (i = \overline{1,m}),$$

и условие неотрицательности:

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}).$$

Примерами прикладных задач линейного программирования являются также:

– транспортная задача;

– задача о размещении заказа и др.

5.3. Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования

Геометрическая интерпретация экономических задач дает возможность наглядно представить их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования более сложных свойств. Применение графического метода для решения задач линейного программирования крайне ограничено, так как имеет практическое применение при решении задач линейного программирования с двумя неизвестными переменными, уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическое решение вообще невозможно.

Дадим геометрическую интерпретацию элементов задач линейного программирования, каждое из ограничений задает на плоскости $x_1 0 x_2$ необходимую полуплоскость.

Полуплоскость – выпуклое множество. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Следовательно, область допустимых решений задачи – выпуклое множество (рис. 1).

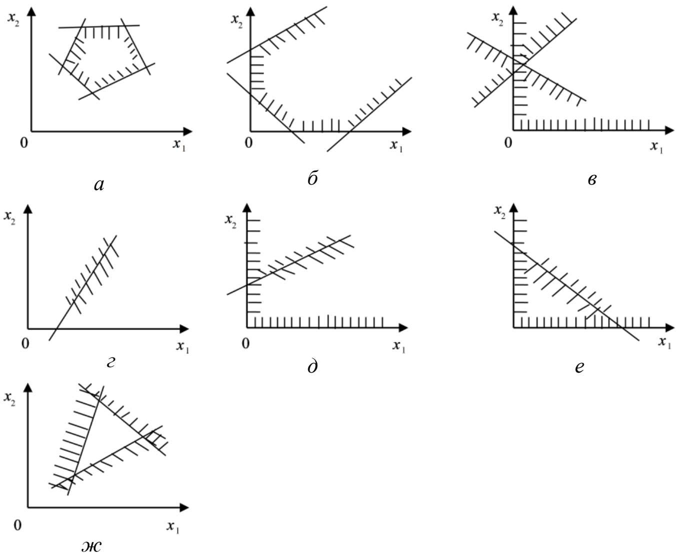


Рис. 1. Область допустимых решений задач линейного программирования: *а* – выпуклый многоугольник; *б* – неограниченный выпуклый многоугольник; *в* – единственная точка; *г* – прямая линия; *д* – луч; *е* – отрезок; *ж* – пустое множество

Рассмотрим интерпретацию целевой функции.

Пусть область допустимых решений задачи линейного программирования: например, многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 2).

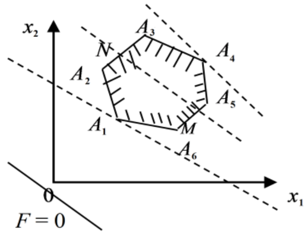


Рис. 2. Область допустимых решений задачи линейного программирования – выпуклый замкнутый многоугольник

Выберем произвольное значение целевой функции – $F = F_0$.

Получим

$$C_1X_1 + C_2X_2 = F_0.$$

В точках прямой NM целевая функция сохраняет одно и тоже постоянное значение F_0. Считая в равенстве F параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции (линиями постоянного значения).

Частная производная:

$$\frac{dF}{dx_1} = C_1; \ \frac{dF}{dx_2} = C_2$$

функции показывает скорость ее возрастания вдоль данной оси. Следовательно, C_1 и C_2 – скорости возрастания F соответственно вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$.

Вектор $C = (C_1; C_2)$ называется градиентом функции. Он перпендикулярен к прямым

$$F = \text{const семейства } C_1X_1 + C_2X_2 = F.$$

Из геометрической интерпретации элементов задач линейного программирования вытекает порядок ее графического значения.

1. Отображение области допустимых решений задачи на основе составленных ограничений.

2. Построение вектора $C = (C_1; C_2)$ найскорейшего возрастания целевой функции – вектора градиентного направления.

3. Проведение произвольной линии уровня $F = F_0$ (проще всего провести линию $F = 0$, перпендикулярную к вектору C).

4. При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $F = F_0$ в направлении вектора C так, чтобы она касалась области допустимых решений задачи в ее крайнем положении (крайней точке) (до точки A_4). В случае решения задачи на минимум линию уровня $F = F_0$ перемещают в антиградиентном направлении (до точки A_1).

5. Определяют оптимальный план

$$x^* = (x_1^*; x_2^*)$$

и экстремальное значение целевой функции

$$F^* = f(x^*).$$

При решении задач могут возникать следующие случаи (рис. 3):

1. Оптимальное решение единственно (*а*).

2. Оптимальных решений бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону области допустимых решений задачи (*б*).

3. Целевая функция не ограничена, т. е. сколько бы не перемещали линию уровня, она не может занять разрешающего положения (*в*).

4. Область допустимых решений задачи состоит из точки, в которой целевая функция одновременно достигает и максимального, и минимального значения (*г*).

5. Задача решений не имеет, так как система ограничений несовместна (*д*).

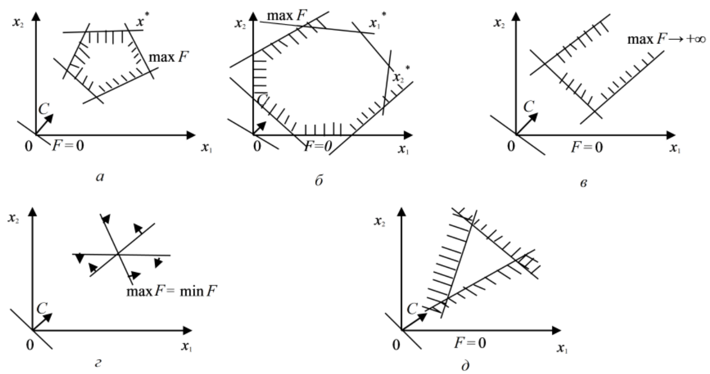


Рис. 3. Варианты решения задач задачи линейного программирования: *а* – решение единственно – точка; *б* – решений бесконечное множество – все точки линии; *в* – целевая функция не ограничена; *г* – точка, в которой целевая функция одновременно достигает максимальное и минимальное значение; *д* – задача решений не имеет

Графический метод решения задач.

Задача 1. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в табл. 14.

Изучение рынка сбыта показало, это суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16ден. ед., шоколадного – 14 ден. ед.

Таблица 14. **Расход сырья на 1 кг мороженого**

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочного	шоколадного	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Требуется определить, какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение. Обозначим:

x_1 – суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг;

x_2 – суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид:

$$F_{\max} = 16x_1 + 14x_2.$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \text{ (ограничение по молоку)}; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365; \\ x_1 - x_2 \le 100; \\ x_2 \le 350; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим задачу графическим методом, для чего найдем область допустимых решений.

Построим ограничениям-неравенствам соответствующие граничные прямые:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365; \\ x_1 - x_2 = 100; \\ x_2 = 350. \end{cases}$$

Определим полуплоскости, в которых выполняются эти неравенства (рис. 4).

Для этого достаточно взять произвольную точку, не лежащую на граничной прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Возьмем, например, начало координат $O(0,0)$. Получим истинные утверждения ($0 \le 100$; $0 \le 365$; $0 \le 100$; $0 \le 350$). Следовательно, неравенства выполняются в полуплоскостях, содержащих точку O.

Поскольку $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$, областью допустимых решений является многоугольник $OABDEF$.

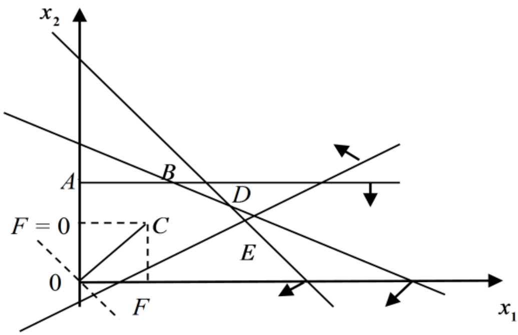


Рис. 4. Область допустимых решений задачи – многоугольник *OABDEF*

Далее надо построить вектор $C = (C_1;\ C_2)$. Так как он необходим лишь для выяснения направления возрастания целевой функции, иногда для большей наглядности можно строить вектор λC ($\lambda > 0$). В нашем примере $C = (16;\ 14)$, возьмем $\lambda = 10$, тогда $\lambda C = (160;\ 140)$.

Перпендикулярно к этому вектору проводим линию уровня $F = 0$. Параллельным перемещением прямой $F = 0$ находим точку D, в которой целевая функция достигает максимума.

Ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных ограничениями:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400; \\ -0{,}8x_1 - 1{,}6x_2 = -730; \\ -1{,}1x_2 = 300; \\ x_2 = 300; \\ 0{,}8x_1 = 400 - 0{,}5 \cdot 300; \\ 0{,}8x_1 = 250; \\ x_1 = 313, \end{cases}$$

получим координаты точки D (313; 300), в которой и будет оптимальное решение, т. е. $X^*(313; 300)$.

При этом

$Z^* = \max Z = z(D) = 16 \cdot 313 + 14 \cdot 300 = 5008 + 4200 = 9208$ ден. ед.

Вывод. Максимальный выход от реализации составит 9208 ден. ед. в сутки при выпуске 313 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого.

6. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА

6.1. Особенности симплексного метода

Если задача линейного программирования содержит более двух переменных, то ее решение требует применения некоторого алгебраического метода. Одним из известных и классических методов является симплексный метод, основанный на принципе последовательного улучшения решения.

Впервые данный метод был разработан Джоном Данцигом в 1949 г. Название метод получил от термина «симплекс» – это выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве с $n + 1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости. Симплекс выделен в отдельный класс потому, что в n-мерном пространстве n точек всегда лежат в одной гиперплоскости, другими словами, он представляет собой простейший многоугольник, содержащий некоторый объем n-мерного пространства.

Идея метода состоит в нахождении какой-либо вершины многогранника допустимых решений, проверки ее координат на оптимальность. Если решение не оптимально, то осуществляют переход к другой вершине многогранника и вновь проверяют решение на оптимальность. При этом при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (при решении задачи на минимум) или возрастает (при решении задачи на максимум). Так как выпуклый многогранник имеет конечное число вершин (вследствие конечности число ограничений задачи), то за конечное число «шагов» точка оптимума будет найдена.

6.2. Методика решения задач симплексным методом

Алгоритм решения задач симплексным методом предполагает несколько этапов.

1. Подготовка информации (введение переменных и формирование ограничений).

2. Преобразование ограничений и занесение информации в симплексную таблицу.

3. Поиск опорного решения.

4. Поиск оптимального решения.

Имеем следующую ЭМЗ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leq A_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \geq A_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = A_m; \end{cases}$$
$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n.$$

Для решения задачи лучше всего ограничения привести к виду неравенства (≤).

Примечание. *Если имеется ограничение типа ≥, то необходимо умножить на –1 левые и правые части ограничений, заменить знак ограничения на противоположный.*

Затем осуществляется приведение задачи к каноническому виду (т. е. превращение неравенств в уравнение за счет использования новых дополнительных переменных y_i, вводимых в ограничение и целевую функцию.

С экономической точки зрения в ограничениях типа ≤ дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, в ограничениях типа ≥ – величину превышения сверх минимума. Дополнительные переменные y_i образуют базис и называются базисными, а основные переменные x_j являются небазисными.

Исходное решение задачи осуществляется из допущения, что $x_j = 0$.

Тогда, подставив эти значения в ограничения задачи, получим, что дополненные переменные (y_i) равны свободным членам:

$$y_1 = A_1;$$

$$y_2 = A_2;$$

$$y_3 = -A_3;$$

$$y_m = A_m;$$

$$F = 0.$$

С экономической точки зрения такое решение означает, что для ограничений типа ≤ ресурсы не используются вовсе, а для ограничений типа ≥ требования этих ограничений не выполняются.

Далее осуществляем проверку исходного решения на допустимость, т. е. является ли решение опорным.

Опорным называется решение, полученное при таких значениях переменных, при которых требования ограничений выполняются, а целевая функция приобретает какое-то значение (может быть и 0).

Признаком опорного решения является:

1) отсутствие в столбце свободных членов отрицательных коэффициентов;

2) отсутствие нулей среди базисных переменных.

Решение симплексным методом производится в таблицах, содержащих $m + 2$ строк (где m – число строк ограничений) и $n + 2$ столбцов (где n – число небазисных переменных). В таблицу заносим матрицу коэффициентов при переменных, при этом коэффициенты целевой строки заносим с противоположным знаком (табл. 15).

Таблица 15. **Первая симплексная таблица задачи**

Базисные переменные (БП)	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные (НБП)				
		X_1	X_2	X_3	…	X_n
Y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
Y_2	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
Y_3	$-A_3$	$-a_{31}$	$-a_{32}$	$-a_{33}$	…	$-a_{3n}$
…	…	…	…	…	…	…
0	A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	…	$-c_n$

Поиск опорного решения начинают с перемещения нуля со столбца базисных переменных в столбец небазисных переменных. Чтобы это осуществить, необходимо найти разрешающую строку и разрешающий столбец. В качестве разрешающей строки берут любую 0-строку, а в качестве разрешающего столбца выбирают тот, где получают наименьшее положительное частное, полученное от деления коэффициентов столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбцов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

В 0-строке берем первый коэффициент – делим столбец свободных членов на соответствующие коэффициенты 1-го столбца. Получаем следующие частные:

$$\frac{A_1}{a_{11}}, \frac{A_2}{a_{21}}, \frac{-A_3}{-a_{31}}, \dots, \frac{A_m}{a_{m1}}.$$

Если получится, что

$$\frac{A_m}{a_{m1}} < \frac{A_1}{a_{11}} : \frac{A_2}{a_{21}} ; \frac{-A_3}{-a_{31}},$$

то коэффициент a_{m1} можно взять за разрешающий. Если же $\frac{A_m}{a_{m1}}$ больше одного и других частных, тогда проверяем коэффициент a_{m2} и т. д.

Допустим a_{mn} – разрешающий элемент, который показывает, что базисное значение нуль (0) и небазисное x_n должны поменяться местами. Замена переменных предполагает поиск нового базиса и требует проведения вычислений. Чтобы записать правила, по которым осуществляют преобразования, введем обозначения:

a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j;

a_{rk} – разрешающий коэффициент, где $r \in i, k \in j$.

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен обратному от него:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}} \ (a_{rk} \neq 0)$$

(в нашем примере $a'_{mn} = \frac{1}{a_{mn}}$ $(a_{mn} \neq 0)$.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \ (k \neq j)$$

или

$$\frac{a_{mj}}{a_{mn}}, j \neq n.$$

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \ (i \neq r)$$

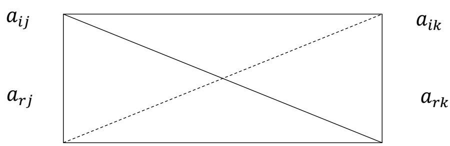
или

$$-\frac{a_{in}}{a_{mn}}, i \neq m.$$

4. Остальные коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и разрешающей строке, определяются по правилу прямоугольника: из произведения коэффициентов главной диагонали вычитают произведение коэффициентов побочной диагонали и делят на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rk} - a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}} \ (r \neq i, k \neq j).$$

Примечание.
1. Главная диагональ это та, где находится разрешающий элемент.



2. Если в побочной диагонали присутствует нуль (0), элемент остается без изменений.

Результаты заносим во вторую симплексную таблицу (табл. 16).

Таблица 16. **Вторая симплексная таблица задачи**

БП	СЧ	НБП				
		X_1	X_2	X_3	…	0
Y_1	A'_1	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	…	$-a'_{1n}$
Y_2	A'_2	a'_{21}	a'_{22}	a'_{23}	…	$-a'_{2n}$
Y_3	$-A'_3$	$-a'_{31}$	$-a'_{32}$	$-a'_{33}$	…	a'_{3n}
…	…	…	…	…	…	…
X_n	A'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	a'_{m3}	…	$-a'_{mn}$
F	F_1	$-c'_1$	$-c'_2$	$-c'_3$	…	c'_n

После этого вычеркиваем нулевой столбец и в дальнейших расчетах он участия не принимает. Опорного решения нет (имеется отрицательный свободный член). Превращение отрицательного свободного члена в положительный связано с нахождением разрешающего элемента, т. е. перемещением дополнительной переменной в небазисные. Разрешающая строка обязательно должна находиться там, где отрицательный свободный член. Для нахождения разрешающего столбца делим свободный член на отрицательный коэффициент в этой же строке. Если полученное положительное частное будет наименьшим по сравнению со всеми остальными положительными частными, полученными от деления остальных свободных членов на элементы этого же столбца, то это говорит о том, что мы нашли разрешающий столбец. Если это условие не выполняется, то необходимо проверить остальные отрицательные коэффициенты этой же строки. После нахождения разрешающей строки и разрешающего столбца мы имеем разрешающий элемент. По вышеприведенным правилам определяем значения следующей симплексной таблицы.

Примечание.

1. Если в симплексной таблице всем без исключения отрицательным свободным членам соответствуют отрицательные коэффициенты столбца, то в качестве разрешающего элемента выбирают наибольшее положительное частное. В этом случае за один шаг удается получить опорное решение.

2. Если в строке с отрицательным свободным членом нет ни одного отрицательного коэффициента, система ограничений несовместна, а задача решения не имеет. Преобразования продолжаем до тех пор, пока не будет найдено опорное решение.

После нахождения опорного решения необходимо проверить, является ли оно оптимальным.

Признаком оптимального решения является наличие всех отрицательных (один или несколько нулей) коэффициентов целевой строки при решении задачи на минимум; и положительных (один или несколько нулей) – при решении на максимум.

Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимальной функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимальной функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим меньшее положительное частное.

Затем по вышеизложенным правилам определим коэффициенты новой симплексной таблицы.

Примечание. *Если при решении задачи на максимум в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент, а в разрешающем столбце нет ни одного положительного коэффициента, то это говорит о неограниченности функции. Если при решении задачи на минимум в строке целевой функции имеется положительный коэффициент, а в разрешающем столбце все коэффициенты отрицательные, то это приводит к подобному результату.*

Расчеты продолжают до тех пор, пока не получим оптимальное решение (прил. В).

6.3. Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности

Выполнение расчетов по симплексному методу предполагает нахождение параметров переменной в какой-то новой крайней угловой точке многогранника решений.

Процесс поиска требует расчетов по таблице с использованием определенных правил. Эти расчеты отличаются строго определенным экономическим содержанием.

Чтобы это выяснить, проследим изменение коэффициентов первой и второй симплексных таблиц.

Рассмотрим конкретную *экономико-математическую задачу*.

Ассоциация фермерских хозяйств возделывает зерновые культуры, однолетние травы, картофель и содержит поголовье коров высокопродуктивной породы. В наличии имеется 1000 га пашни, 20000 чел.-дн. трудовых ресурсов, 5000 ц к. ед. кормов природных кормовых угодий (сенокосов и пастбищ). Экономические показатели расхода ресурсов и выход продукции даны в табл. 17.

Таблица 17. **Параметры ассоциации хозяйств**

Показатели	Приходится на 1 га (гол.)				Прибыль, у. д. е.
	Пашня, га	Трудовые ресурсы, чел.-дн.	Выход кормов, ц к. ед.	Расход кормов, ц к. ед.	
Зерновые	1	9	15	–	30
Картофель	1	22	20	–	60
Однолетние травы	1	8	30	–	–
Коровы	–	20	–	50	100

Цель: рассчитать размеры отраслей с целью получения максимума прибыли.

Решение.

1. Введем неизвестные величины:

x_1 – площадь зерновых культур, га;

x_2 – площадь картофеля, га;

x_3 – площадь однолетних трав, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

2. Составим условия задачи:

1) по использованию пашни:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1000;$$

2) по использованию трудовых ресурсов:

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 \le 20000;$$

3) по балансу кормовых единиц:

$$50x_4 \le 15x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 5000;$$

Целевая функция:

$$F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4.$$

Используя определенные приемы преобразований, составим первую симплексную таблицу (табл. 18) и вторую симплексную таблицу (табл. 19).

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 1000;$$

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 + y_2 = 20000;$$

$$50x_4 - 15x_1 - 20x_2 - 30x_3 + y_3 = 5000;$$

$$F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4.$$

Таблица 18. **Первая симплексная таблица по оптимизации размеров отраслей ассоциации хозяйств**

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	X_4
Y_1	1000	1	1	1	0
Y_2	20000	9	22	8	20
Y_3	5000	–15	–20	–30	50
$F_{\max}$	0	–30	–60	0	–100

Таблица 19. **Вторая симплексная таблица по оптимизации размеров отраслей ассоциации хозяйств**

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	Y_3
Y_1	1000	1	1	1	0
Y_2	18000	15	30	20	–0,4
X_4	100	–0,3	–0,4	–0,6	0,02
$F_{\max}$	10000	–60	–100	–60	2

Коэффициенты, полученные во 2-й симплексной таблице, называют коэффициентами пропорциональности. Они устанавливают соотношения между вошедшими в базис и не вошедшими в базис переменными.

Их экономический смысл заключается в следующем:

1. Новый коэффициент вместо разрешающего старого (0,02) показывает, сколько единиц вошедших в базис переменной (т. е. x_4) можем иметь за счет единицы наиболее лимитированного ресурса (y_3) (т. е. можем содержать 0,02 коров за счет 1 ц к. ед.). Тот факт, что разрешающий элемент определяется наименьшим положительным частным, свидетельствует о том, что это частное получено по наиболее лимитированному ресурсу.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки показывают, на сколько единиц возрастет (при знаке «–») или уменьшится (при знаке «+») введенная в базис переменная (x_4), если в базисные переменные ввести небазисную в размере единицы.

Например. Если в базис ввести переменную x_1 (площадь посева зерновых культур) в размере 1 га, то x_4 (поголовье коров) возрастет на 0,3 гол.

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца показывают, сколько единиц ресурсов требуется (при знаке «+») или сколько их получим (при знаке «–»), если в план или в базис введем небазисные переменные в размере, равном значению нового коэффициента вместо разрешающего (0,02).

Например. Если введем в базис поголовье коров $x_4 = 0,02$, то затраты труда увеличатся на 0,4 чел.-дн., а прибыль уменьшится на 2 у. д. е.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и в разрешающей строке, показывают, сколько ресурсов расходуется при знаке «+» или поступает при знаке «–», если в план введем небазисные переменные в размере единицы и при этом произойдет изменение размера ранее введенных в план переменных.

Например. Если введем в план переменную x_1 в размере единицы, то целевая функция задачи возрастет на 60 ед. за счет того, что переменная x_4 тоже возрастет на 0,3 ед.

6.4. Корректировка оптимальных решений задач линейного программирования

Необходимость корректировки полученного ранее решения задачи вызывается несколькими причинами.

1. Появляются дополнительные источники ограниченных ресурсов (земли, труда, кормов и т. д.) или, наоборот, ресурсная база уменьшается. Подобные изменения могут стать следствием преобразований экономики, реформирования производства или же возможного выделения в рамках существующего предприятия кооперативов, фермерских хозяйств, что приводит к изменению ресурсов.

2. Вследствие изменения конъюнктуры рынка окупаемость отдельных видов продукции может изменяться. Доходность вошедших в план отраслей может уменьшаться, а доходность не вошедших отраслей может увеличиваться. Чтобы оперативно отреагировать на изменившуюся конъюнктуру, предприятию требуется изменить размеры отраслей.

3. Необходимость корректировки может быть вызвана также нехваткой каких-либо ресурсов (семена, тракторы и т. д.) и, как следствие, необходимостью изменения размеров отраслей в хозяйстве.

Корректировка оптимального решения проводится на основе коэффициентов пропорциональности последней симплексной таблицы по общей формуле

$$x_j^k\left(y_i^k\right) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_0} a_{ij} - \Delta x_j(\Delta y_i),$$

где $x_j^k\left(y_i^k\right)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных до корректировки;

j – номер столбца переменной, участвующей в корректировке;

J_0 – множество столбцов переменных, участвующих в корректировке;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности i-х строк j-х столбцов, участвующих в корректировке;

$\Delta x_j(\Delta y_i)$ – соответственно величина корректировки по основной и дополнительной переменным $(\Delta x_j > 0, \Delta y_i > 0)$.

Рассмотрим последнюю симплексную таблицу предыдущей задачи (табл. 20).

Таблица 20. **Последняя симплексная таблица по оптимизации размеров отраслей ассоциации хозяйств**

БП	СЧ	НБП			
		Y_1	Y_2	X_3	Y_3
X_1	800	2	–0,066	0,66	0,026
X_2	200	–1	0,066	0,34	–0,026
X_4	420	0,56	–0,017	–0,85	0,032
F_{max}	78000	20	2,67	13,6	0,93

Существует несколько видов корректировки оптимального решения.

1. Корректировка по основным небазисным переменным (т. е. по x_j, которое находится среди НБП).

Если x_j находится среди небазисных переменных, то $x_j = 0$. Вследствие корректировки получаем значение $x_j > 0$.

Алгоритм корректировки.

1. Среди основных небазисных переменных выбираем ту, по которой будем проводить корректировку (т. е. которая в новых экономических условиях должна войти в базис). В нашем случае возьмем x_3.

2. Определяем максимально возможную величину корректировки (предельную). Она равна минимальному положительно частному от деления коэффициентов столбца свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которой проводим корректировку:

$$\max\Delta x_j = \min(+)\frac{A_i}{a_{ij}} \text{ при } \Delta x_j > 0,$$

где A_i – коэффициент столбца свободных членов.

Примечание. *Коэффициенты целевой функции в расчетах не участвуют.*
В нашем случае

$$\max\Delta x_3 = \min\begin{Bmatrix}\frac{800}{0,66} \approx 1212\\ \frac{200}{0,34} \approx 588\end{Bmatrix} = 588,$$

следовательно, интервал корректировки [*0; 588*].

Интервал корректировки показывает, до какого значения можно увеличивать значение переменной и при этом получить новое оптимальное решение, не решая задачу вновь.

3. Если желаемая величина корректировки Δx_j превышает максимально возможную величину $\max\Delta x_j$, то корректировку оптимального решения осуществляем по общей формуле корректировки. Если же $\Delta x_j > \max\Delta x_j$, то в первоначальную задачу вводим новое условие и решаем задачу заново.

Пример. Площадь посева картофеля должна быть 200 га. Необходимо скорректировать решение.

Следовательно,

$$\Delta x_3^{\text{треб}} = 200;$$

$$\max\Delta x_3 = 588;$$

$$\Delta x_3^{\text{треб}} < \max\Delta x_3;$$

т. е. 200 < 588.

Проводим корректировку на желаемую величину:

$$\Delta x_3 = 200;$$

$$\Delta x_1^k = 800 - 0{,}66 \cdot 200 = 688;$$

$$\Delta x_2^k = 200 - 0{,}34 \cdot 200 = 132;$$

$$\Delta x_4^k = 420 - (-0{,}85) \cdot 200 = 590;$$

$$F_{\max}^k = 48000 - 13{,}6 \cdot 200 = 45280.$$

Остальные небазисные переменные как были равны 0, так и останутся равны 0.

$$y_1^k = y_1 = 0;$$

$$y_2^k = y_2 = 0;$$

$$y_3^k = y_3 = 0.$$

2. Корректировка по дополнительным небазисным переменным (т. е. по y_i, стоящем среди небазисных переменных).

Y – это ресурс. Корректировка по ресурсу предполагает два варианта: либо ресурс уменьшается, либо увеличивается.

1-й случай: ресурсы уменьшаются: $\Delta y_i = y_i > 0$.

Алгоритм корректировки.

1. Выбираем дополнительные небазисные переменные, по которым будем производить корректировку (т. е. определяем, какой из ресурсов будет уменьшаться), и находим желаемую величину корректировки $\Delta y_i^{\text{треб}}$.

2. Определяем максимально возможную величину корректировки. Она равна минимальному положительному частному от деления столбца свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому производим корректировку:

$$\max\Delta y_i = \min(+)\frac{A_i}{a_{ij}} \text{ при } \Delta y_i > 0.$$

3. Если желаемая величина корректировки не превышает максимально возможную, то корректировку осуществляем по общей формуле корректировки.

Если

$$\Delta y_i^{\text{треб}} > \max\Delta y_i, \text{ корректировка невозможна.}$$

Пример. Ресурс пашни уменьшается на 100 га. Требуется скорректировать решение.

$$\Delta y_i^{\text{треб}} = 100;$$

$$\max\Delta y_i = \min\begin{Bmatrix} \frac{800}{2} = 400 \\ \frac{420}{0{,}56} = 750 \end{Bmatrix} = 400,$$

интервал корректировки [0; 400].

$$\Delta y_i^{\text{треб}} < \max\Delta y_i.$$

Получаем новое оптимальное решение:

$$\Delta x_1^k = 800 - 2 \cdot 100 = 600;$$

$$\Delta x_2^k = 200 - (-1) \cdot 100 = 300;$$

$$\Delta x_4^k = 420 - 0{,}56 \cdot 100 = 364;$$

$$F_{\max}^k = 48000 - 20 \cdot 100 = 46000.$$

Остальные небазисные переменные как были равны 0, так и останутся равны 0.

$$y_2^k = x_3^k = y_3^k.$$

2-й случай: ресурсы увеличиваются: $\Delta y_i = y_i < 0$.

Алгоритм корректировки.

1. Среди небазисных переменных выбираем столбец, по которому будем корректировать (y_i) (т. е. по которому возможно увеличение). Определяем желаемую величину корректировки:

$$\Delta y_i^{\text{треб}} < 0.$$

2. Определяем максимально возможную величину корректировки, которая равна минимальному по модулю отрицательному частному от деления столбца СЧ на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку:

$$\max\Delta y_i = \min\left|-\frac{A_i}{a_{ij}}\right| \text{ при } \Delta y_i < 0.$$

3. Если $\left|\Delta y_i^{\text{треб}}\right| \geq |\max\Delta y_i|$, то корректировку проводим на желаемую величину по общей формуле корректировки, в противном случае задачу с учетом введенных изменений решают заново.

Пример. Ресурс пашни увеличивается на 50 га. Требуется скорректировать решение.

$$\Delta y_i^{\text{треб}} = -50;$$

$$\max\Delta y_i = \min\left|\frac{200}{-1}\right| = -200,$$

интервал корректировки [–200; 0].

$$\left|\Delta y_i^{\text{треб}}\right| \leq |\max\Delta y_i|, \text{ т. е. } 50 < 200.$$

Следовательно, корректировка возможна.

Получаем новое оптимальное решение:

$$\Delta x_1^k = 800 - 2 \cdot (-50) = 900;$$

$$\Delta x_2^k = 200 - (-1) \cdot (-50) = 150;$$

$$\Delta x_4^k = 420 - 0{,}56 \cdot (-50) = 448;$$

$$F_{\max}^k = 48000 - 20 \cdot (-50) = 49000.$$

Остальные небазисные переменные как были равны 0, так и останутся равны 0.

$$y_2^k = x_3^k = y_3^k.$$

3. Корректировка по базисным переменным.

Корректировка по базисным переменным сводится к корректировке по небазисным переменным (основным или дополнительным переменным).

Алгоритм корректировки.

1. Из числа небазисных переменных выбираем ту, которую целесообразно в новых экономических условиях ввести в базис. Лучше всего корректировку проводить за счет основной небазисной переменной, так как в этом случае для решения задачи не требуется новых ресурсов, а новое решение получаем за счет перераспределения имеющихся.

2. Используя общую формулу корректировки, определяют требуемую величину корректировки по выбранному столбцу:

$$\Delta x_j\ (\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k\left(y_i^k\right)}{a_{ij}},$$

при этом

$$\Delta x_j > 0, \Delta y_i > 0, \Delta y_i < 0.$$

3. Используя вышеизложенные правила, определяем максимально возможную (предельную) величину корректировки.

4. Если желаемая величина корректировки по небазисным переменным меньше предельной величины, то корректировку проводим на желаемую величину. В противном случае корректировку проводим на предельную величину за счет выбранной небазисной переменной, а оставшуюся величину корректируем за счет других небазисных переменных.

Пример. Площадь посева зерновых культур (x_1) должна быть 850 га. Проверим, возможна ли корректировка по столбцу основной небазисной переменной x_3. По общей формуле корректировки имеем:

$$850 = 800 - 0{,}66\Delta x_3^{\text{треб}}.$$

Следовательно, $\Delta x_3^{\text{треб}} = \frac{50}{-0{,}66} = -76.$

Это означает, что корректировку по основным небазисным переменным x_3 производить нельзя, так как размер отрасли не может быть отрицательной величиной. Проверим возможность корректировки по остальным столбцам небазисных переменных. Допустим y_1

$$850 = 800 - 2\Delta x_1^{\text{треб}}.$$

Следовательно, $\Delta x_1^{\text{треб}} = 25$, т. е. ресурс пашни ($y_1$) должен быть увеличен на 25 га.

Найдем $\max\Delta y_1 = -200$.
Сравниваем $\Delta x_1^{\text{треб}} = 25$ и $\max\Delta y_1 = -200$.
Следовательно, корректировка возможна.

$$\Delta x_1^k = 800 - 2 \cdot (-25) = 850;$$

$$\Delta x_2^k = 200 - 1 \cdot (-25) = 225;$$

$$\Delta x_4^k = 420 - 0{,}56 \cdot (-25) = 434;$$

$$F_{\max}^k = 48000 - 20 \cdot (-25) = 48500.$$

Остальные небазисные переменные как были равны 0, так и останутся равны 0.

$$y_2^k = x_3^k = y_3^k.$$

7. ДВОЙСТВЕННАЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ ОЦЕНКИ

7.1. Сущность двойственных оценок, их значение

В процессе получения конечной продукции в агропромышленном производстве используются многие ресурсы. Сырьем для получения конечной продукции становятся конечные продукты отрасли более низкого ранга (например, корма поступают в кормопроизводящую отрасль и затем используются как сырье для получения продукции животноводства). Для получения конечных продуктов используются живой и прошлый труд. В силу различий технологий, техники показатели использования ресурсов и их окупаемость в различных предприятиях неодинаковы. Поэтому перед предприятиями постоянно возникают проблемы выяснения: какие ресурсы в данных условиях наиболее важны и роль каких менее важна.

Часть ресурсов предприятия могут воспроизводить самостоятельно, некоторые приобретаются со стороны. При этом издержки собственного производства и цена приобретенных ресурсов различны. Возникает проблема, что выгоднее в данных экономических условиях: производить самостоятельно или покупать. Какова очередность освоения многих ресурсов.

Ответы на эти вопросы с учетом сложной взаимосвязи отраслей, участвующих в производстве, дают двойственные оценки. Ответ на вопрос об эффективности ресурсов дают также и корреляционные модели. Отличие коэффициентов корреляционной модели в том, что они дают усредненную информацию, а двойственные оценки – полностью учитывают особенности данного предприятия. Ценность двойственных оценок заключена в их свойствах:

а) индивидуальность или конкретность. Двойственные оценки показывают влияние отдельных ресурсов на формирование конечного продукта конкретного предприятия в данных экономических условиях;

б) определенность и устойчивость. Двойственные оценки имеют точно такие же единицы измерения, как и целевая функция. Их величина определяется на базе информации в конкретной задаче.

Поскольку ресурсы, используемые предприятием для выпуска продукции, подразделяются на дефицитные и избыточные, то двойственные оценки получают только дефицитные ресурсы. Избыточные же ресурсы имеют нулевую оценку. Данный факт не означает отсутствия хозяйственной ценности таких ресурсов, а лишь указывает на их нерациональное и неполное использование.

В изменившихся условиях избыточный ресурс может стать недостающим и иметь двойственные оценки. Чтобы получить двойственную оценку по участвующему в производстве ресурсу, в ограничениях задачи необходимо поставить условие по этому ресурсу. Чем более полно учтены условия и факторы, определяющие функционирование объекта, тем более точно будут двойственные оценки.

Поскольку у различных предприятий технологии и окупаемость ресурсов неодинаковы, то будут отличаться и двойственные оценки. Двойственные оценки будут приближаться к объективным в том случае, если расход ресурсов и их окупаемость будут приближаться к объективно-необходимому.

Если допустить задачу, в которой все коэффициенты будут совпадать с объективно-необходимыми, то двойственные оценки станут оценками оптимального плана, т. е. получим оптимальные цены на продукцию, оптимальные данные о расходах и окупаемости ресурсов.

Расчет двойственных оценок для ресурсов и продуктов по каждому предприятию позволяет провести детальный экономический анализ:

1) оценки позволяют соизмерять разнокачественные затраты и результаты, с их помощью можно оценивать последовательность проведения различных мероприятий с учетом их влияния на критерий оптимальности;

2) двойственные оценки позволяют определить нормы заменяемости между ресурсами и продукцией; речь идет об относительной заменяемости с учетом влияния на конечный результат;

3) оценки дают возможность расположить продукты по степени их эффективности.

7.2. Методика построения двойственной задачи

Двойственные оценки получают в результате решения двойственной задачи (ДЗ), которую составляют на основании прямой задачи (ПЗ).

Допустим, что имеем прямую экономико-математическую задачу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le A_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le A_m; \end{cases}$$

$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Для построения двойственной задачи необходимо:

1. Записать условия прямой экономико-математической задачи, предварительно все неизвестные величины перенести в левую часть ограничения, известные – в правую, сделать приведение подобных. Все ограничения прямой задачи привести к одному знаку (обычно $\le$).

Примечание. *Если в прямой задаче есть ограничение со знаком «=», то при составлении двойственной задачи знак ограничения выбирается, исходя из условий двойственной задачи, т. е., если целевая функция двойственной задачи минимизируется, то знаки ограничения будут $\ge$, если целевая функция максимизируется, то знак будет $\le$.*

2. Ввести двойственные экономико-математические оценки. Их будет столько, сколько ограничений: U_1, U_2, …, U_m.

Следует отметить, что U_1 показывает, на сколько единиц возрастет целевая функция, если первый ресурс увеличится на единицу. Другими словами, двойственная оценка по смысловому содержанию противоположна знаку ограничения: если знак $\le$, она предполагает прибавку, увеличивается F-значение, если ресурс возрастает на единицу, и уменьшается значение F, если знак ограничения $\ge$ и ресурс уменьшится на единицу.

3. Составляем двойственную экономико-математическую задачу, используя следующие *правила*:

1) коэффициентами строк двойственной задачи будут являться коэффициенты столбцов прямой задачи, т. е. матрица коэффициентов двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов прямой задачи;

2) знаки ограничений двойственной задачи противоположны знакам ограничений прямой задачи;

3) свободными членами двойственной задачи будут коэффициенты целевой функции прямой задачи;

4) коэффициентами целевой функции двойственной задачи будут являться свободные члены прямой задачи;

5) смысловое содержание целевой функции двойственной и прямой задач противоположно.

Таким образом, имеем двойственную экономико-математическую задачу

$$\begin{cases} a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + \cdots + a_{m1}U_m \geq C_1; \\ a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + \cdots + a_{m2}U_m \geq C_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{1n}U_1 + a_{2n}U_2 + \cdots + a_{mn}U_m \geq C_n; \end{cases}$$

$$F_{\min} = A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_mU_m.$$

С экономической точки зрения первое ограничение двойственной задачи обозначает: расход 1-го ресурса a_{11} на единицу отрасли x_1, умноженный на оценку первого ресурса U_1, плюс расход 2-го ресурса на оценку второго ресурса U_2 + … и т. д., плюс расход m-го ресурса на единицу отрасли, умноженный на оценку m-го ресурса U_m, будут не меньше коэффициента целевой функции первой отрасли x_1.

Таким образом, определяется доля каждого ресурса в формировании целевой функции. Сформулируем задачу в общем виде.

Прямая задача имеет вид:

найти x_j при условии

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij}x_j \leq A_i, i \in I_0;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j.$$

Двойственная задача имеет вид:

найти U_i при условии

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} U_i \geq c_j, j \in J_0;$$

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i U_i.$$

где i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных);

a_{ij} – коэффициент строки i столбца j;

A_i – наличие ресурсов строки i;

c_j – оценочный коэффициент в столбце j.

Содержание двойственных оценок вытекает из основных *теорем двойственности*:

1) если одна из задач, или прямая, или двойственная, имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевой функции равны, т. е., если целевая функция прямой задачи записана в виде

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j,$$

а двойственная задача в виде

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i U_i,$$

то, согласно I теории двойственности,

$$\max \sum_{j \in J_0} c_j x_j = \min \sum_{i \in I_0} A_i U_i \,;$$

2) если двойственная оценка больше 0, то производственный ресурс, для которого она рассчитана, используется полностью, т. е. если

$$U_i > 0, \text{то} \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0;$$

3) если двойственная оценка ресурса равна 0, то производственный ресурс недоиспользуется, т. е. если

$$U_i = 0, \text{то} \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i, i \ \in I_0.$$

Пример. Пусть имеется прямая экономико-математическая задача и нам необходимо определить размеры отраслей, обеспечивающие максимум прибыли.

Отрасли:

x_1 – площадь зерновых, га;

x_2 – площадь однолетних трав, га;

x_3 – площадь картофеля, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

Ограничения:

1) по использованию пашни:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5000;$$

2) по использованию трудовых ресурсов:

$$6x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 50000;$$

3) по балансу кормовых единиц –

$$40x_4 \leq 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 12000;$$

4) по минимальному поголовью коров:

$$x_4 \geq 200.$$

Целевая функция

$$F_{\max} = 100x_1 + 250x_3 + 150x_4.$$

Введем двойственные экономико-математические оценки:

U_1 – двойственная оценка или цена I ресурса (1 га пашни);

U_2 – цена II ресурса (труда, 1 чел.-дн.);

U_3 – цена III ресурса (кормов, ц к. ед.);

U_4 – цена 1 гол. животных при минимальном поголовье, у. д. е.

Составим двойственную экономико-математическую задачу:

$$\begin{cases} 1U_1 + 6U_2 - 20U_3 \geq 100; \\ 1U_1 + 12U_2 - 10U_3 \geq 0; \\ 1U_1 + 10U_2 - 15U_3 \geq 250; \\ 20U_2 + 40U_3 - 1U_4 \geq 150; \end{cases}$$

$$F_{\min} = 5000U_1 + 50000U_2 + 12000U_3 - 200U_4.$$

После решения двойственной задачи симплексным методом получим оптимальное решение (табл. 21).

Таблица 21. **Оптимальное решение задачи – последняя симплексная таблица**

БП	СЧ	НБП			
		Y_3	Y_4	U_3	U_1
U_4	350	–2	1	–70	2
Y_2	300	–1,2	0	–8	0,2
Y_1	50	–0,6	0	11	–0,4
U_2	25	–0,1	0	–1,5	0,1
$F_{\min}$	1180000	–4600	–200	–73000	–400

Приведем значения неизвестных величин:

$U_1 = 0$ – оценка пашни, равная 0, т. е. данный ресурс является избыточным;

$U_2 = 25$ – это значит, что при увеличении II ресурса (труда) на 1 ед. (чел.-дн.) значение целевой функции возрастет на 25 у. д. е.;

$U_3 = 0$ – данный ресурс (корма) является избыточным;

$U_4 = 350$ – при увеличении поголовья сверх минимума на 1 гол. значение целевой функции возрастет на 350 у. д. е.;

$F_{\min} = 1180000$ – суммарная количественная оценка ограниченных производство ресурсов равна 1180000 у. д. е.

По результатам решения прямой задачи можно получить результат решения двойственной задачи и наоборот:

1) основная переменная в прямой задаче равна дополнительным переменным двойственной задачи, а ее значение берем из строки целевой функции со знаком «+»:

$$X_j^{\text{п}} = Y_i^{\text{д}} = (+)C_j;$$

$$Y_3^{\text{д}} = X_3^{\text{п}} = 4600;$$

$$Y_4^{\text{д}} = X_4^{\text{п}} = 200;$$

$$Y_2^{\text{д}} = X_2^{\text{п}} = 0;$$

$$Y_1^{\text{д}} = X_1^{\text{п}} = 0;$$

2) дополнительные переменные в прямой задаче равны двойственной оценке двойственной задачи, а ее значение берем из строки целевой функции со знаком «+»:

$$Y_i^{\text{п}} = U_j^{\text{д}} = (+)C_j;$$

$$U_3^{\text{д}} = Y_3^{\text{п}} = 73000;$$

$$U_1^{\text{д}} = X_1^{\text{п}} = 400;$$

$$U_4^{\text{д}} = Y_4^{\text{п}} = 0;$$

$$U_2^{\text{д}} = Y_2^{\text{п}} = 0;$$

3) значение целевой функции прямой задачи противоположно по смыслу двойственной задаче и совпадает:

$$F_{\max}^{\text{п}} = F_{\min}^{\text{д}};$$

$$F_{\max}^{\text{п}} = F_{\min}^{\text{д}} = 1180000.$$

Примеры решения прямой и двойственной задач приведены в прил. C и D.

Следует отметить, что двойственные оценки могут быть использованы для обоснования наибольших целесообразных вариантов капиталовложений. Методика выполнения этой работы заключается в следующем:

1) определяем объемы производственных фондов, необходимых для увеличения лимитированного ресурса на единицу;

2) сравниваем стоимость фондов с окупаемостью единицы ресурса, т. е. с двойственной оценкой, и находим срок окупаемости;

3) выбираем наилучший вариант.

Допустим, в какой-то задаче двойственная оценка пашни равна 12000 руб., а двойственная оценка 1 ц к. ед. – 8000 руб. В соответствии с нормативами на освоение 1 га неиспользованных земель требуется 60000 руб. Для увеличения производства кормов требуется наращивание мощностей фондов в размере 30000 руб. Тогда срок окупаемости будет составлять:

по земельным ресурсам: 60 : 12 = 5 лет;

по кормам: 30 : 8 = 3,7 года.

Таким образом, в условиях дефицита этих ресурсов наиболее целесообразным вариантом использования денежных средств будет следующее: наращивать производство кормов и затем увеличивать площадь пашни.

8. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

8.1. Общая задача нелинейного программирования

Нелинейное программирование – это раздел математического программирования, объединяющий теорию и методы решения задач нахождения экстремальных значений, в которых целевая функция или система ограничений (или та и другая) содержат выражения, нелинейные относительно искомых величин.

Задачей нелинейного программирования называется задача математического программирования, в которой нелинейны или целевая функция, или функции, задающие ограничения.

Общий вид задачи нелинейного программирования следующий:

$$\left.\begin{array}{c} \max(\min) Z = f(x) \\ \varphi_i(x)\{\leq, =, \geq\}b_i \ (i = \overline{1,m}) \\ x \geq 0, x = (x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\},$$

в которой либо $f(x)$, либо хотя бы одна из функций $\varphi_i(x)$ нелинейны.

Нелинейность функций вызывает существенные отличия данного типа задач от задач линейной оптимизации.

Если в задаче линейного программирования экстремальная точка является крайней точкой многогранника допустимых решений, то в задаче нелинейного программирования она может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри ее. Нелинейная целевая функция может иметь несколько экстремальных точек, если на графике изобразить функцию одной переменной, то можем столкнуться со следующими ситуациями:

а) экстремальная точка находится на границе области допустимых решений (рис. 5);

б) экстремальная точка (x_1) находится внутри области допустимых решений (рис. 6);

в) функция имеет три минимума: один внутри области и два на границе (рис. 7). Глобальный минимум расположен в граничной точке a.

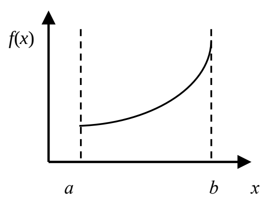


Рис. 5. Экстремальная точка находится
на границе области допустимых решений

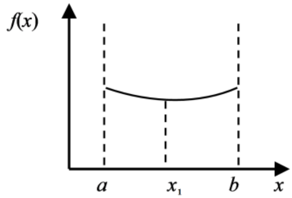


Рис. 6. Экстремальная точка находится внутри области допустимых решений

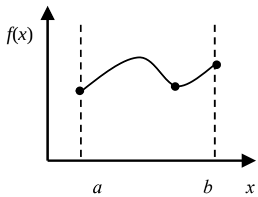


Рис. 7. Функция имеет три минимума: один внутри области и два на границе

Если изобразить многокритериальную функцию двух переменных, то на рисунке можно использовать линии разных уровней (рис. 8).

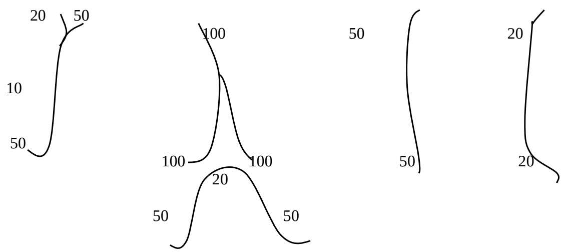


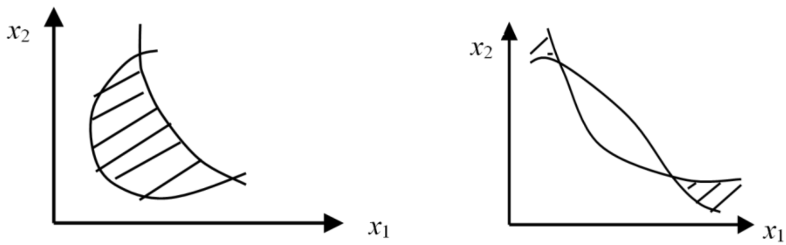
Рис. 8. Функция имеет два локальных минимума и один глобальный

На рис. 8 видно, что функция имеет два локальных минимума и один глобальный.

Вывод. Многокритериальность целевой функции создает значительные вычислительные трудности, так как среди всех минимумов при решении практических задач невозможно найти точку глобального минимума.

Нелинейность ограничений также налагает свои особенности. Если в задачах линейного программирования оптимальное решение находится на конечном множестве крайних точек выпуклой области, то для задач нелинейного программирования эти условия в общем случае могут не сохраняться, а именно: область допустимых решений может быть невыпуклой.

Нелинейность ограничений может приводить к невыпуклости или несвязности области допустимых решений, которая к тому же может иметь бесконечное множество крайних точек (рис. 9).



Область допустимых решений невыпуклая Свойство несвязности

Рис. 9. Нелинейность ограничений привела к невыпуклости или несвязности области допустимых решений

Эти особенности, отличающие нелинейные задачи от линейных, весьма существенно усложняют их решение и приводят к тому, что, если для задачи линейного программирования имеется признак оптимальности, то для общей задачи нелинейного программирования (где функция $f(x)$ и ограничения произвольного типа) такого признака нет. Даже если на каком-то этапе был получен план, являющийся оптимальным, установить это можно только путем вычисления $f(x)$ во всех остальных точках и сравнением их между собой.

Отмеченные признаки решения задач нелинейного программирования заставляют подразделить их на отдельные классы со своими методами решения.

Так, в зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

8.2. Выпуклое и невыпуклое программирование

Определение 1.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X и любого $0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Если в данном соотношении при $0 < \lambda < 1$ и любых x_1, $x_2 \in X(x_1 \neq x_2)$ имеет место строгое неравенство, то $f(x)$ называется строго выпуклой.

Определение 2.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется вогнутой, если для любых точек x_1 и x_2 из этого множества и любого $0 < \lambda < 1$ справедливо неравенство:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Если в данном соотношении при $0 < \lambda < 1$ и любых x_1, $x_2 \in X(x_1 \neq x_2)$ имеет место строгое неравенство, то $f(x)$ называется строго вогнутой. Проведем геометрическую интерпретацию для двухмерного пространства (рис. 10 и 11).

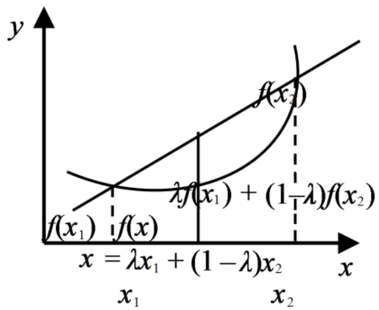


Рис. 10. Выпуклая функция

Выпуклая функция (рис. 10) на отрезке $[x_1; x_2]$ не может принимать больших значений, чем линейная функция, интерполирующая значение $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

В свою очередь, вогнутая функция $f(x)$ (рис. 11) не может принимать меньших значений, чем линейная функция, интерполирующая значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

От выпуклой функции к вогнутой можно перейти следующим образом: если $f(x)$ – выпуклая, то $-f(x)$ – вогнутая и наоборот.

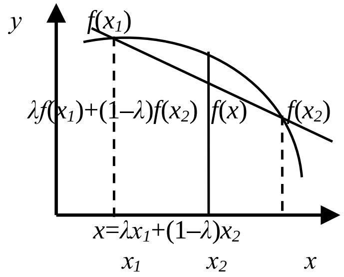


Рис. 11. Вогнутая функция

Приведенное определение выпуклых и вогнутых функций дают одновременно и правило для устранения их выпуклости.

Если условие выпуклости выполняется для всех $x \in X$, а не только в одной точке, то функция $f(x)$ является строго выпуклой везде на множестве точек X.

Во многих случаях проверка функций на выпуклость отличается благодаря следующему утверждению: «Сумма выпуклых на множестве X функций является выпуклой функцией, сумма вогнутых функций – есть вогнутая функция».

В нелинейном программировании выделяют два основных типа задач:

1) выпуклого программирования;

2) невыпуклого программирования.

В задачах выпуклого программирования минимизируемая целевая функция выпуклая (если решаем на максимум – вогнутая), а ограничения задают выпуклое множество допустимых решений. Все остальные задачи охватывают невыпуклое программирование.

Важнейшим свойством задач выпуклого программирования является совпадение локального и глобального минимумов. Эта особенность упрощает решение задач.

Особый класс задач в выпуклом программировании образуют задачи квадратичного программирования. К этому классу относят все задачи, где целевая функция представляет собой полином II степени, а область допустимых решений задается точно так же, как и в задачах линейного программирования системой линейных ограничений.

Если обозначить выпуклую квадратичную функцию через $Q(x)$, то задача квадратичного программирования будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}).$$

Квадратичную форму Q можно записать в общем виде следующим образом:

$$Q(x) = (d_{11}x_1 + d_{12}x_1 + \cdots + d_{1n}x_n)x_1 + (d_{21}x_1 + d_{22}x_1 + \cdots +$$
$$+ d_{2n}x_n)x_2 + \cdots + (d_{m1}x_1 + d_{m2}x_1 + \cdots + d_{mn}x_n)x_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j.$$

Определение 3.

Квадратичная форма Q называется положительно (отрицательно) определенной, если $Q(X) > 0.$ ($[Q(X) < 0]$) для всех значений переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, кроме $X = 0$.

Определение 4.

Квадратичная форма Q называется положительно (отрицательно) полуопределенной, если $Q(x) \ge 0.$ ($[Q(x) \le 0]$) для любого набора значений переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и, кроме того, существует такой набор переменных $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$, где не все значения переменных одновременно равны нулю, что $F(x^*) = 0$.

Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она положительно-полуопределенная, и вогнутой функцией, если она отрицательно-полуопределенная.

Задачи квадратичного программирования близки к задачам линейного программирования. Если в окрестностях некоторой точки заменить квадратичную форму целевой функции линейной, то можно перейти к решению задачи линейного программирования. На основании этого утверждения разработаны специальные методы, посредством которых решают ряд задач линейного программирования и в итоге находят точку оптимума квадратичной задачи.

Классическая задача безусловной минимизации функции $f(x)$ обычно использует необходимые и достаточные условия экстремума функции.

Необходимое условие состоит в том, что все ее частные производные в этой точке равны 0.

Достаточным условием является постоянство знака второго дифференциала функции в некоторой окрестности рассматриваемой точки. При этом знак «–» второго дифференциала является признаком максимума функции, а знак «+» – признаком минимума.

Таким образом, поиск экстремумов дважды дифференциальной функции $f(x)$ вне ограниченной области осуществляется в два этапа.

На I этапе определяется множество стационарных точек, где возможен экстремум, а на II – выявляется экстремум точки и устанавливается вид экстремума по знаку (или «–», или «+»).

8.3. Вычислительные методы нелинейного программирования

Одномерная минимизация

Рассмотрим задачу в следующей постановке: на интервале $[a;\ b]$ найти точку X, в которой заданная функция $f(x)$ принимает минимальное значение:

$$f(x) \to \min, x \in [a, b],$$

где $a, b \in R, a < b, f\colon [a, b] \to R.$

В таком случае способ решения задачи во многом определяется информацией о свойствах функции на рассматриваемом отрезке. Если о поведении функции ничего заранее неизвестно, то минимум можно найти только с помощью перебора ее значений. Сравнение получаемых значений $f(x)$ позволяет определить некую точку x и значения функции, где она принимает минимальное значение.

Однако здесь возникает сложность: если в условии дано, что ε – заданная точность определения x на $[a, b]$, количество точек n, в которых потребуется вычислить значение $f(x)$ будет следующее:

$$n = [(b - a)/\varepsilon] + 1$$

(скобки обозначают целую часть заключенного в них числа).

Число n может быть весьма значительным. Поэтому основным недостатком метода является трудоемкость, измеряемая количеством вычислений.

На практике чаще всего исходят из предположения об унимодальности функции, что означает существование единственного экстремума на рассматриваемом интервале. Понятие охватывает не только гладкие выпуклые функции, но и недифференцируемые функции. Этого свойства достаточно для построения методов минимизации, превосходящих простой перебор.

Применяют 2 основных метода для решения задач одномерной минимизации:

1-й метод: метод золотого сечения.

Золотым сечением отрезка называется такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части (рис. 12).

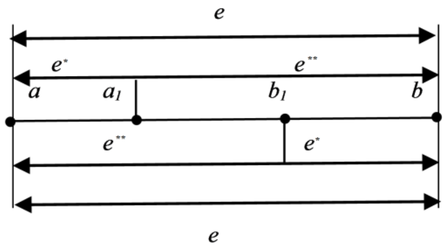


Рис. 12. Иллюстрация метода золотого сечения отрезка

Эта пропорция с древности использовалась в разных областях человеческой деятельности.

Отрезок e разбит точками a_1 и b_1. Расстояния e^* и e^{**} можно рассчитать по следующим формулам:

$$e^* = \frac{(3-\sqrt{5})e}{2},$$

$$e^{**} = \frac{(\sqrt{5}-1)e}{2}.$$

По определению золотого сечения

$$\frac{e}{e^{**}} = \frac{e^{**}}{e^*}.$$

Определим, чему будет равно это соотношение:

$$\frac{e^{**}}{e^{*}}=\frac{(\sqrt{5}-1)\frac{e}{2}}{(3-\sqrt{5})\frac{e}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+3}=\frac{5+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-3}{4}=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$\frac{e^{*}}{e^{**}}=\frac{e}{(\sqrt{5}-1)\frac{e}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Найдем значение выражения $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618$.

Далее на этом же отрезке $[a,\ b]$ найдем точку a_1, причем a_1 будет расположена таким образом, что:

$$aa_1=e^{*}, a_1b=e^{**}.$$

Опираясь на рисунок, определим значение переменной в точках a_1 и b_1.

$$a_1=b-e^{**},$$
$$b_1=b-e^{*}=a+e^{**}.$$

Теперь найдем значение функции в точках a_1 и b_1.

Точка с большим значением функции укажет отрезок либо $[a,\ a_1]$, либо $[b_1,\ b]$, где в силу унимодальности функции не может быть точки минимума. Точка с меньшим значением функции укажет отрезок либо $[a,\ b_1]$, либо $[a_1,\ b]$ длины e^{**}, где содержится искомая точка минимума. Если мы будем рассматривать, например, отрезок $[a,\ b_1]$, то на этом отрезке положение точки a_1 таково, что $aa_1 > a_1b_1$. На этом отрезке мы имеем уже значение функции в точке a_1, второе значение функции на этом отрезке измеряется в точке, отстоящей на расстоянии $(\sqrt{5}-1)e^{**}$ от имеющейся точки золотого сечения. Таким образом, мы снова получаем отрезок $[a,\ b_1]$, где имеем 2 точки, делящие этот отрезок в тех же пропорциях, в каких делили отрезок $[a,\ b]$ точки a_1 и b_1.

На основании этих рассуждений мы можем сформулировать алгоритм минимизации унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, с какой-то заданной точностью ε:

1) на $[a,\ b]$ вычисляют координаты точек a_1 и b_1:

$$a_1=b-\frac{(\sqrt{5}-1)e}{2}=b-\frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2};$$

$$b_1 = a + \frac{(\sqrt{5}-1)e}{2} = a + \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2};$$

2) находят значение функции в точках a_1 и b_1, т. е. $f(a_1)$ и $f(b_1)$;

3) сравнивают значения $f(a_1)$ и $f(b_1)$. Если $f(a_1) > f(b_1)$, то переходим к п. 7. Если $f(a_1) < f(b_1)$ – переходят к п. 4;

4) полагают, что b_1 – это b, а a_1 – это a;

5) если $(b - a) \leq \varepsilon$, то переходят к п. 10, если нет – к п. 6;

6) вычисляют значение новой точки a_1:

$$a_1 = b_1 - (\sqrt{5}-2)(b-a),$$

затем рассчитывают $f(a_1)$ и возвращаются к п. 3;

7) пусть a_1 – это a, а b_1 – это a_1, $f(b_1)$ – это $f(a_1)$;

8) делают проверку: если $(b - a) \leq \varepsilon$, то переходят к п. 10, если нет – к п. 9;

9) вычисляют значение точки b_1:

$$b_1 = a_1 + (\sqrt{5}-2)(b-a),$$

затем рассчитывают $f(b_1)$ и переходят к п. 3;

10) выполняют заключительные операции по оценке положения минимума и находят значение функции $f(x)$.

Пример. Найти на интервале (a, b) точку x, в которой заданная унимодальная функция $f(x)$ принимает минимальное значение:

$$f(x) = x + 9x^2$$

$$a = 2$$

$$b = 8$$

$$\varepsilon = 0{,}9.$$

Использовать метод золотого сечения.

Решение.

$$a_1 = b - \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2} = 8 - \frac{(\sqrt{5}-1)(8-2)}{2} \approx 4{,}29;$$

$$b_1 = a + \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2} = 2 + \frac{(\sqrt{5}-1)(8-2)}{2} \approx 5{,}71.$$

Найдем:

$$f(a_1) = 4{,}29 + 9 \cdot 4{,}29^2 = 169{,}9;$$

$$f(b_1) = 5{,}71 + 9 \cdot 5{,}71^2 = 299{,}2.$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1).$$

Предположим, что $b_1 = b, a_1 = b_1, b = 5{,}71, b_1 = 4{,}29.$

$$(b - a) = (5{,}71 - 2) = 3{,}71 > \varepsilon\ (\varepsilon = 0{,}9).$$

Рассчитаем:

$$a_1 = b_1 - \left(\sqrt{5} - 2\right)(b - a) = 4{,}29 - \left(\sqrt{5} - 2\right)(5{,}71 - 2) = 3{,}41$$

Найдем:

$$f(a_1) = 3{,}41 + 9 \cdot 3{,}41^2 = 108{,}1;$$

$$f(b_1) = 169{,}9.$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1).$$

Предположим, что:

$$b_1 = b, a_1 = b_1, b = 4{,}29, b_1 = 3{,}41.$$

$$(b - a) = (4{,}29 - 2) = 2{,}29 > \varepsilon\ (\varepsilon = 0{,}9).$$

Рассчитаем:

$$a_1 = b_1 - \left(\sqrt{5} - 2\right)(b - a) = 3{,}41 - \left(\sqrt{5} - 2\right)(4{,}29 - 2) = 2{,}87.$$

Найдем:

$$f(a_1) = 2{,}87 + 9 \cdot 2{,}87^2 = 77;$$

$$f(b_1) = 108{,}1.$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1).$$

Предположим, что:

$$b_1 = b, a_1 = b_1, b = 3{,}41, b_1 = 2{,}87.$$

$$(b - a) = (3{,}41 - 2) = 1{,}41 > \varepsilon(\varepsilon = 0{,}9).$$

Рассчитаем:

$$a_1 = b_1 - (\sqrt{5} - 2)(b - a) = 2{,}87 - (\sqrt{5} - 2)(3{,}41 - 2) = 2{,}54.$$

Найдем:

$$f(a_1) = 2{,}54 + 9 \cdot 2{,}54^2 = 60{,}6;$$

$$f(b_1) = 77.$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1).$$

Предположим, что:

$$b_1 = b, a_1 = b_1, b = 2{,}87, b_1 = 2{,}54.$$

$$(b - a) = (2{,}87 - 2) = 0{,}87 < \varepsilon(\varepsilon = 0{,}9).$$

Следовательно, точка минимума расположена в отрезке [2; 2,87].

2 метод: метод дихотомии.

Аналогично рассмотрим ситуацию, когда мы находим минимум унимодальной функции на отрезке $[a, b]$ длины e. На этом отрезке $[a, b]$ определим 2 точки a_1 и b_1, причем $a_1 < b_1$. При рассмотрении этой ситуации возможны три случая:

1) $f(a_1) > f(b_1)$ (рис. 13).

На рис. 13 видно, что в силу унимодальности функции искомая точка минимума должна быть в отрезке $[a_1, b]$;

2) $f(a_1) < f(b_1)$ (рис. 14).

В случае, изображенном на рис. 14, точка минимума должна быть в отрезке $[a, b_1]$;

3) $f(a_1) = f(b_1)$ (рис. 15).

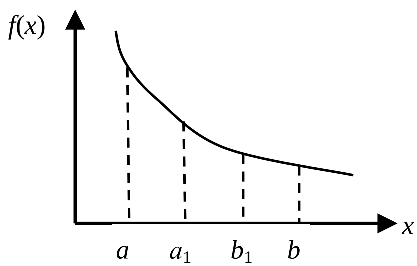


Рис. 13. Точка минимума должна быть в отрезке $[a_1, b]$

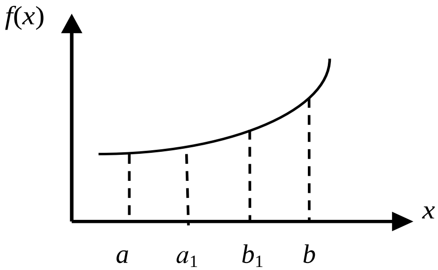


Рис. 14. Точка минимума должна быть в отрезке [a, b_1]

В случае, изображенном на рис. 15, точка минимум должна быть в отрезке [a_1, b_1].

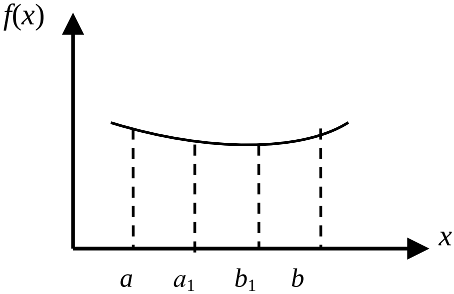


Рис. 15. Точка минимума должна быть в отрезке [a_1, b_1]

Поскольку на практике может встретиться любой из случаев, то оценкой длины отрезка l, содержащей искомую точку, будет величина наибольшего из интервалов:

$$l = \max(b - a_1)\,;(b_1 - a);(b_1 - a_1).$$

Для сокращения отрезка b необходимо увеличить a_1 и уменьшить b_1 при соблюдении условия: $a_1 < b_1$.

Точки a_1 и b_1 надо брать как можно ближе к середине исходного интервала, оставляя между ними лишь расстояние ε, на котором еще можно отличить значение f в соседних точках. Отсюда следует, что a_1 и b_1 берут следующие:

$$a_1 = \frac{c - \varepsilon}{2};\ b_1 = \frac{c + \varepsilon}{2}.$$

Точка с меньшим значением функции укажет ту часть интервала, в которой будет минимум.

Таким образом, за 1 шаг дихотомии исходный интервал сокращается вдвое. Аналогичным образом поступают с новым интервалом. Снова делают 2 шага измерений и т. д. Процесс заканчивается тогда, когда длина интервала станет не более заданной точности ε определения точки минимума.

Метод дихотомии прост и надежен. Он гораздо эффективнее простого перебора.

Пример. Найти на интервале $(a,\ b)$ точку x, в которой заданная унимодальная функция $f(x)$ принимает минимальное значение:

$$f(x) = -x^2 + 14x - 1$$

$$a = 1$$

$$b = 9$$

$$\varepsilon = 0{,}4.$$

Использовать метод дихотомии (сделать 2 шага дихотомии).

Решение.

Вычислим:

$$f(a_1) = -2{,}3^2 + 14 \cdot 2{,}3 - 1 = 25{,}91;$$

$$f(b_1) = -2{,}7^2 + 14 \cdot 2{,}7 - 1 = 29{,}51;$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1), [a, b_1] = [1; 2{,}7]$$

$$a_1 = \frac{1{,}85 - 0{,}4}{2} = 0{,}73;$$

$$b_1 = \frac{1{,}85 + 0{,}4}{2} = 1{,}13.$$

Вычислим:

$$f(a_1) = -0{,}73^2 + 14 \cdot 0{,}73 - 1 = 8{,}69;$$

$$f(b_1) = -1{,}13^2 + 14 \cdot 1{,}13 - 1 = 13{,}54.$$

Сравним:

$$f(a_1) < f(b_1), [a, b_1] = [1; 1{,}13],$$

т. е. точка минимума находится в отрезке [1; 1,13].

Многомерная минимизация

1. Признаки оптимальности (теорема Куна-Таккера).

Для задачи выпуклого программирования условия многомерной минимизации можно записать следующим образом:

$$f(x_j) \to \min;$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n});$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, (i = \overline{1,n}).$$

В отличие от общей задачи нелинейного программирования при математическом моделировании существует критерий оптимальности решения. Это так называемые условия Куна-Таккера, распространяющие метод неопределенных множителей Лагранжа на случай, когда среди ограничений имеются не только равенства, но и неравенства. С их помощью устанавливается эквивалентность задачи выпуклого программирования и задачи нахождения седловой точки функции Лагранжа.

Понятие седловой точки следующее: если точка (x^0y^0) для функции $\alpha(x,y)$ выполняет следующее неравенство:

$$\alpha(x^0,y) \leq \alpha(x^0y^0) \leq \alpha(x,y^0)$$

и при любых значениях $x \geq 0, y \geq 0$ данное условие выполняется, то эта точка называется седловой.

Таким образом, седловой точкой называется такая точка с координатами (x^0y^0), в которой функция $\alpha(x,y)$ по направлению переменной x имеет минимум, а по направлению переменной y – максимум.

Поскольку точка с координатами (x^0y^0) есть точка минимума функции, для этой точки применяют условия Куна-Таккера.

Теорема Куна-Таккера устанавливает признак оптимальности для задач выпуклого программирования. Она формулируется следующим образом:

для оптимальности вектора x^0 достаточно, чтобы при некотором векторе y^0 точка (x^0y^0) была седловой для функции Лагранжа.

В своей теореме Кун и Таккер привели доказательство тому, что приведенный признак оптимальности является не только достаточным, но и оптимальным.

Таким образом, задача выпуклого программирования эквивалентна задаче о седловой точке.

Рассмотрим применение метода множителей Лагранжа в экономике.

Пример. Мукомольный комбинат реализует муку 2 способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x_1 кг муки через магазин расходы на реализацию составляют ${x_1}^2$ ден. ед., а при продаже x_2 кг муки посредством торговых агентов – ${x_2}^2$ ден. ед. Определить, сколько килограммов муки следует продавать каждым способом, чтобы затраты на реализацтю были минимальными, если в сутки для продажи выделяется 5000 кг муки.

Решение. Составим математическую модель задачи. Найдем минимум суммарных расходов:

$$L = x_1^2 + x_2^2,$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 5000;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Для расчета модели используем метод множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1,\ x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5000).$$

Найдем частные производные функции F по x_1, x_2 и λ, приравняем к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0; \\ 2x_2 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 - 5000 = 0. \end{cases}$$

Откуда:

$$\lambda = -5000, x_1 = 2500, x_2 = 2500, L = 12500 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Выбирая значения x_1 больше или меньше 2500, находим L и из определения экстремума функции получаем, что L при $x_1 = x_2 = 2500$ достигает минимума.

Таким образом, для получения минимальных расходов необходимо в сутки реализовывать через магазин и торговых агентов по 2500 кг муки, при этом расходы на реализацию составят 12500 тыс. ден. ед.

2. Методы минимизации, применяемые при многомерной минимизации.

Методы минимизации являются обычно итерационными. Точные методы, позволяющие находить решение за конечное число шагов, разработаны только для минимизации квадратичной функции.

Итерационные или пошаговые методы сводят задачу минимизации заданной функции $f(x)$ к построению последовательности точек $x_1, x_2, \dots, x^k$, причем к последовательности такой, что на каждом следующем шаге значение функции убывает:

$$f(x^{k-1}) < f(x^k),$$

где $k = 1, \dots$.

Вычисление точки x^{k+1} разбивается на 2 этапа.

На первом этапе выбирают направление движения из точки x^k в сторону уменьшения функции $f(x)$.

На втором этапе определяют шаг спуска и находят λ_k.

Поэтому все различия между методами определяются *способами выбора соответствующих направлений и выбором* λ_k.

Градиентные методы (методы первого порядка).

Градиентным методом можно решать любую нелинейную задачу. Однако при этом находится лишь локальный экстремум. Поэтому целесообразнее применять этот метод при решении задач выпуклого программирования, в котором любой локальный экстремум является одновременно и глобальным.

Если рассмотреть задачу минимизации нелинейной функции $f(x)$ без ограничений на вектор переменных x, то предполагают, что $f(x)$ дифференцируема по всем направлениям переменных x. В итоге находят:

$$f'(x^k) \text{ и } \left(\Delta f(x^k)\right),$$

который называют градиентом функции $f(x)$.

Он представляет собой вектор, компонентами которого являются частные производные функции в некоторой точке x^k.

Если $f'(x^k) \neq 0$, направление найскорейшего возрастания функции в точке x^k совпадает с направлением градиента, а направление найскорейшего убывания совпадает с направлением антиградиента $-f'(x^k)$. Это свойство градиента лежит в основе градиентных методов.

В каждом из этих методов процесс начинается с некоторой точки начального приближения x^0. Удачный выбор точки x^0 может существенно ускорить сходимость метода. Общих правил выбора начального приближения нет. Допустим мы выбрали некоторую начальную точку x^0, методы градиента минимизируют функцию $f(x)$ построением последовательности (x^k).

Элементы этой последовательности определяются следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k f'(x^k)$$

или

$$\Delta f(x^k)$$

$$\lambda_k > 0, k = 0, 1, 2, \ldots, .$$

Если в точке x^k градиент отличен от 0, всегда можно выбрать такое число λ_k, чтобы перейти в точку x^{k+1}.

λ_k называют длиной шага.

Если $f'(x^k) = 0$, то в случае выпуклости функции $f(x)$ точка x^k является точкой ее минимума.

Существует много **способов выбора градиентного шага $\boldsymbol{\lambda_k}$.**

Наиболее простой состоит в следующем: на каждой итерации берут одно и тоже значение шага ($\lambda_k = \lambda$), но при этом должно соблюдаться условие монотонности.

Если монотонность нарушается, число λ уменьшают. На практике очень часто применяют другой метод определения λ_k – метод торможения и разгона: величина шага увеличивается или уменьшается в зависимости от поведения функции в ходе поиска.

Для повышения быстродействия метода целесообразно каждую итерацию выполнять с максимально возможным шагом.

Метод, реализующий данную идею, называется методом наискорейшего спуска. Его суть заключается в следующем:

допустим в начальной точке x^0,

вычислим градиент $f'(x^0)$.

Если двигаться в направлении $-f'(x^0)$, то это движение возможно до тех пор, пока это приводит к убыванию функции.

Точка x, в которой функция перестает уменьшаться, является точкой минимума функции в направлении $-f'(x^0)$. Обозначим эту ку x^1. В точке x^1 вычисляют новый градиент, в направлении, обратном вычисленному градиенту, снова делаем максимально возможный шаг λ_1, приходим в точку x^2. Таким образом, движение осуществляется по направлениям, ортогональным движениям равного уровня.

Траектория поиска для функции 2 переменных показана на рис. 16.

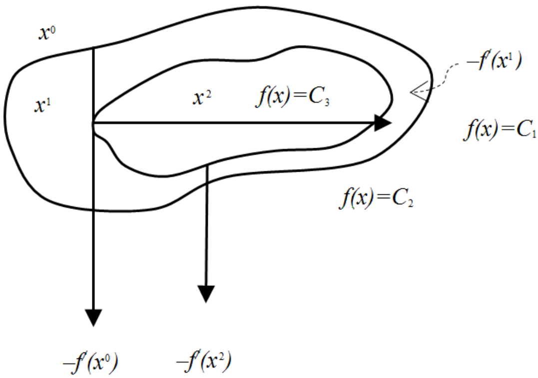


Рис. 16. Траектория поиска для функции 2 переменных

Подводя итог, можно определить следующий алгоритм последовательности операций в методе найскорейшего спуска:

1) в точке x^0 определяют $f'(x^0)$ (градиент), определяют направление $-f'(x^0)$;

2) в направлении $-f'(x^0)$ определяют и выполняют одномерный поиск минимума, находят длину шага λ;

3) вычисляют величину смещения и находят точку x^1;

4) в точке x^1 находят $f'(x^1)$ и далее повторяют операции 1, 2, 3;

5) операции повторяют до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания поиска.

Рассмотрим реализацию градиентного метода в задаче без ограничений.

Пример. Определить максимум функции:

$$f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2,$$

начав оптимизационный поиск с точки $x_0 = (5; 10)$.

Решение. Находим градиент данной функции:

$$\Delta f(x) = \nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}\right) = (-4x_1 + 4; -4x_2 + 8).$$

I шаг. Вычислим:

$$\Delta f(x_0) = \nabla f(5{,}10) = (-4 \cdot 5 + 4; -4 \cdot 10 + 8) = (-16, -32).$$

На рис. 17 с началом в точке с $(x_0) = (5;\ 10)$ построен вектор

$$\frac{1}{16}\nabla f(x_0) = (-1; -2),$$

указывающий направление найскорейшего возрастания функции в точке x_0. На этом направлении расположена следующая точка:
$$x_1 = x_0 + \lambda_0 \nabla f(x_0) = (5; 10) + \lambda_0(-16; -32) = (5 - 16\lambda_0; 10 - 32\lambda_0)$$

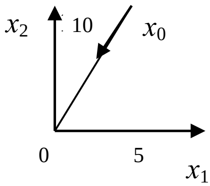


Рис. 17. Реализация градиентного метода
в задаче без ограничений

В этой точке

$$\Delta f(x_1) = (-4(5 - 16\lambda_0) + 4; -4(10 - 32\lambda_0) + 8) = (-16 + \\ + 64\lambda_0; -32 + 128\lambda_0).$$

Используя следующее условие, получим:

$$\frac{d(\nabla f(\lambda_0))}{d\lambda_0} = \nabla f(x_1)\nabla f(x_0) = (-16 + 64\lambda_0; -32 + 128\lambda_0)(-16; -32) = 0$$

или

$$1 - 4\lambda_0 = 0, \lambda_0 = 1/4.$$

Так как

$$d^2(\nabla f(\lambda_0))/d\lambda_0{}^2 < 0,$$

найденное значение λ_0 является точкой максимума $\nabla f(x)$.

Находим:

$$x_1 = (5 - 16/4; 10 - 32/4) = (1; 2).$$

II шаг. Начальная точка для второго шага: $x_1 = (1; 2)$.

Вычислим:

$$\Delta f(x_1) = (-4 \cdot 1 + 4; -4 \cdot 2 + 8) = (0; 0);\ x_1 = (1; 2).$$

Следует отметить, что точка x_1 является стационарной точкой.

Метод нулевого порядка.

Суть метода заключается в том, что пуск осуществляется по направлению одной из координат осей. Направление выбора движения (какой из осей двигаться) устанавливают различными способами:

а) способ Гаусса-Зейделя, суть которого состоит в том, что все оси выбирают поочередно в фиксированном порядке;

б) направление поиска остается неизменимым в течение всех вычислений;

в) метод, в котором направление осей меняется в зависимости от результатов предыдущих шагов.

Метод случайного поиска.

При минимизации сложных функций, зависящих от большого числа аргументов, часто применяются методы случайного поиска. При использовании данного метода не требуется вычисление производных, используют лишь значение функции, т. е. перемещение к точке минимума осуществляют случайным способом.

Суть метода: из начальной точки x^0 совершают в случайном направлении перемещение на расстоянии λ. Если значение $f(x)$ в новой точке не уменьшилось, то возвращаемся в точку x^0 и осуществляем в случайном направлении новый шаг на такое же расстояние λ. В случае неудачи опять возвращаемся к точке x^0. Процесс продолжаем до тех пор, пока очередное перемещение не приведет к уменьшению $f(x)$.

Из найденной точки x^1 по направлению последнего перемещения делаем шаги величиной λ до тех пор, пока приращение функции $f(x)$ не изменит знак. Если из очередной точки по направлению выбранного перемещения значение функции $f(x)$ не уменьшилось, направление меняем случайным образом. Процесс продолжаем до тех пор, пока в какой-то точке x^k случайное перемещение на λ из этой точки не будет меньше.

Преимущество метода: относительная простота; отсутствие ограничений на $f(x)$.

Недостаток метода: большой объем вычислений; медленная сходимость.

Для ускорения процедуры поиска иногда анализируют результаты промежуточных операций и выделяют направление с большей вероятностью убывания функции. Методы такого типа называют методами случайного поиска с обучением.

Метод штрафных и барьерных функций.

Методы решения задач нелинейного программирования (в частности, выпуклого программирования), при использовании которых данную задачу можно свести к задаче минимизации некоторой специальной функции, представляющей собой сумму данной минимизируемой функции и некоторой другой функции (называемой штрафной), сформированной из ограничительных условий задачи, называют методами штрафных функций.

Первые из методов появились в самом начале 50-х гг.

Идея этих методов состоит в замене целевой функции данной задачи некоторой обобщенной функцией, значения которой совпадают со значениями исходной функции внутри допустимой области, но при приближении к границе области или выходе из нее резко возрастают за счет второго слагаемого обобщенной функции штрафной функции.

Штрафные функции строятся таким образом, что обеспечивают либо быстрое возвращение в допустимую область, либо невозможность выхода из нее.

В методе штрафных функций исходная задача на условный минимум заменяется на последовательность задач на безусловный минимум.

В зависимости от способа формирования штрафных функций различают метод штрафных и метод барьерных функций.

Рассмотрим **метод штрафных функций**. Пусть требуется минимизировать функцию

$$Z = f(x)$$

при ограничениях

$$\varphi_i(x) \leq 0, (i = \overline{1, m}).$$

Предположим, что ограничения $x \geq 0$ включены в ограничения. Тогда функция $T(x, t)$, обобщенная для целевой функции, имеет вид

$$T(x, t) = f(x) + t\Theta(x),$$

где t – некоторое положительное число, называемое коэффициентом штрафа;

$\Theta(x)$ – непрерывная функция штрафа, удовлетворяемая условиям: $\Theta(x) = 0$ для всех точек x допустимой области, и $\Theta(x) > 0$ для всех остальных точек.

Процедура оптимизационного поиска по данному методу состоит в следующем: рассматривается некоторая неограниченная, монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{t_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Для первого числа t_1 этой последовательности находится точка x_1^*, доставляющая минимум функции.

Точка x_1^* используется как начальное приближение для решения задачи поиска минимума функции $T(x, t_2)$, где $t_2 > t_1$ и т. д.

Таким образом, решается последовательность задач минимизации функции $T(x, t_2)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем результат предыдущей оптимизации x_k^* используется в качестве начального приближения для поиска x_{k+1}^*.

Так как для бесконечно возрастающей последовательности $\{t_k\}$ локальные минимумы приближаются к допустимой области, то последовательность $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится к локальному оптимуму функции $f(x)$, расположенному внутри или на границе допустимой области. Точки x_k^* расположены выше допустимой области, поэтому метод штрафных функций называют также методом внешней точки.

Рассмотрим **метод барьерных функций**. Если ограничения имеют вид строгих неравенств ($\varphi_i(x) < 0$), то для формирования обобщенной функции используются так называемые барьерные функции $I(x)$, значения которых неограниченно возрастают при приближении к границе допустимой области. Обобщенная функция $U(x, r)$ имеет вид

$$U(x, r) = f(x) + rI(x),$$

где r – некоторое положительное число.

Барьерная функция $I(x)$ должна быть непрерывной во всех точках, лежащих внутри допустимой области, и если $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – последовательность внутренних точек, сходящихся к граничной точке допустимой области, то последовательность $\{I(x_{k)}\}$ значений барьерных функций неограниченно возрастает. Так как все точки последовательности лежат в допустимой области, метод барьерных функций называют также методом внутренней точки.

Штрафная добавка $rI(x)$ к целевой функции $f(x)$ в равенстве образует как бы барьер, препятствующий выходу из допустимой области.

В алгоритме оптимального поиска используется последовательность $\{x_k\}$ положительных чисел r_k $(k = 1, 2, \ldots)$, монотонно сходящихся к нулю.

В качестве начальной точки берут произвольную внутреннюю точку x_0 допустимой области. Она является исходной для поиска точки минимума x_1^* обобщенной функции $U(x, r_1)$. Точка x_1^* используется также в качестве начального приближения для поиска точки x_2^* минимума функции $U(x, r_2)$ и т. д. Последовательность $\{x_k^*\}$ полученных таким образом точек безусловных минимумов функций $U(x, r_k$, сходится к точке минимума x^* функции $f(x)$ задачи. Приближение точек $x_1^*, x_2^*, \dots$ к оптимальной точке x^* осуществляется внутри допустимой области. При уменьшении r убывает влияние штрафной добавки $rI(x)$ в равенстве и возрастает влияние целевой функции $f(x)$ задачи. Поэтому последовательность функций $U(x, r_k)$ дает сколь угодно точное приближение к локальному минимуму функции $f(x)$.

Если искомый экстремум лежит внутри допустимой области, то решение может быть получено после нескольких первых значений параметра r.

Метод кусочно-линейной аппроксимации.

Метод является приближенным и в принципе применимым к любой задаче математического программирования. Однако он наиболее эффективен при решении задач выпуклого программирования с сепарабельной целевой функцией. Этот метод основан на замене заданной функции кусочно-линейной функцией, благодаря чему задача приближенно сводится к линейной задаче.

Функция n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ называется сепарабельной, если для нее справедливо представление

$$f(x_1, \dots x_s) = f_1(x_1) + \dots + f_s(x_s) = \sum_{j=1}^{s} f_j(x_j).$$

Очевидно, если функции $f_j(x_j)$ выпуклые (вогнутые), то и $f(x_1, \dots, x_s)$ тоже будет выпуклой (вогнутой).

В таком случае будем рассматривать задачу, в которой все функции сепарабельные:

$$\min(\max) f = \sum_{j=1}^{s} f_j(x_j)$$

$$\sum_{j=1}^{s} q_{ij}(x_j) \{\le, =, \ge\} b_i (i = \overline{1, m}).$$

Приближенное решение задачи довольно просто: для всех функций f_j и q_j строятся их кусочно-линейные аппроксимации и нелинейная задача заменяется приближенной задачей линейного программирования, которая решается симплексным методом.

Поясним метод кусочно-линейной аппроксимации на **примере**: пусть функция $f(x)$ задана на каком-то отрезке $[a,\ b]$ (рис. 18).

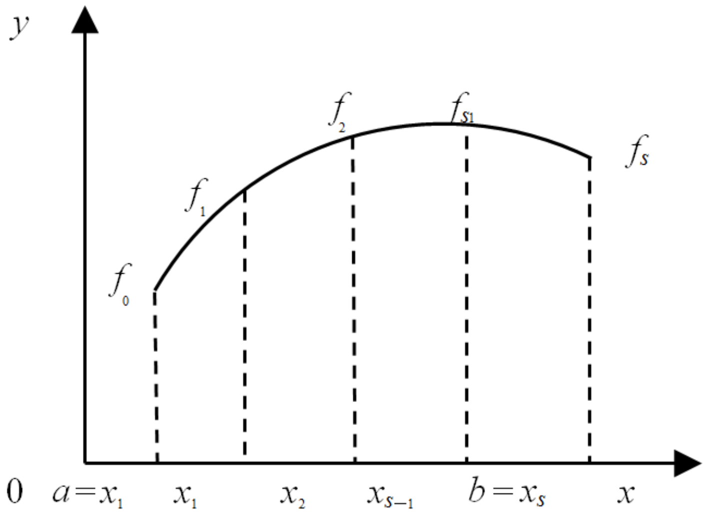


Рис. 18. Кусочно-линейная аппроксимация функции $f(x)$

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ точками на n частей и обозначим значение конца каждого отрезка.

Причем точка $x_0 = a, x_1 > a, x_s > x_{s-1}$. Соответственно:

$$f(x_0) = f(a) = f_0, f(x_s) = f_s.$$

Кусочно-линейная аппроксимация функции $f(x)$ на рис. 18 представлена ломаной линией, которая может быть выражена в структурном виде следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j\, x_j, \sum_{j=0}^{s} \lambda_j = 1\,, \text{где } x = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j\, x_j.$$

Все $\lambda_j \geq 0$. Иногда бывают дополнительные условия. Только одно λ_j или два соседних (λ_{j-1} и λ_j) могут быть положительны.

Например, записать аналитически кусочно-линейную аппроксимацию $f(x) = x^2/4$ на $[0; 4\}$, разбив отрезок на 3 интервала.

Имеем 4 точки:

$$x_0 = 0;$$

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = 3;$$

$$x_4 = 4.$$

Вычислим соответствие значения f:

$$f_0 = 0, f_1 = \frac{1}{4}, f_2 = 2\frac{1}{4}, f_3 = 4.$$

В результате будем иметь

$$f(x) = 0\lambda_0 + \frac{1}{4}\lambda_1 + 2\frac{1}{4}\lambda_2 + 4\lambda_3,$$

где $\sum_{j=0}^{3} \lambda_j = 1{,}0.$

Дополнительно можно найти точное и приближенное значения функции в середине интервалов разбиения, взяв еще одну точку $x = 2$. Для определения значения λ, если известны интервал $(j, j+1)$ и срединное значение x, которое имеет в этом интервале существования функции

$$\lambda_j = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j},$$

где x – середина.

Рассчитаем λ для середины первого интервала

$$\lambda_0 = \frac{1 - 0{,}5}{1 - 0} = 0{,}5.$$

Аналогично можно рассчитать $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

9. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

9.1. Математическая постановка, основные типы задач дискретного программирования. Сущность методов дискретной оптимизации

Дискретное программирование – раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные налагается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна.

Таким образом, к задачам дискретного программирования относятся задачи математического программирования, в которых требуется найти максимум (минимум) целевой функции, определенной на некотором дискретном множестве $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Причем для решения задачи надо определить элемент $P^* \in P$ и он должен быть таким, что

$$F(P^*) = \max(\min) F\,(P_i).$$

Частным случаем является задача линейного целочисленного программирования, которая в общем виде формируется как задача линейного программирования, но дополненная требованием целочисленности всех или некоторых переменных.

В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_0 = 0, j = \overline{1, n}, j = Y, x_j \text{ – целые,}$$

где j – некоторое число подмножества индексов. $j \in \{1,2, \dots, n\} = N$. Если $j = N$, то задачу называют полностью целочисленной, если $j \subset N$ – частично целочисленной (знаки некоторых или всех неравенств могут быть $\leq, \geq$).

В задачах дискретного программирования конечное множество Д может быть задано не только линейной системой неравенств и уравнений, но и другими способами, например, сетями.

К моделям дискретного программирования приводит рассмотрение многих задач: календарного планирования, задача теории расписаний, маршрутизации и перевоза, синхронизации конвейера.

Так как решение задач дискретного программирования обычно сводим с построением и анализом последовательностей элементов допустимого множества, то такие задачи называют еще комбинаторными.

Рассмотрим **классификацию математических моделей дискретного программирования**.

I тип. В экономической практике существуют задачи, которые формально к целочисленным не относятся. Требование целочисленности в них в явном виде не налагается. Но при целочисленных значениях некоторых исходных данных они обладают целочисленным оптимальным планом. Например, транспортная задача и ее модификации.

II тип. Задачи с неделимостями – это задачи, где дробное значение переменных противоречит физическому свойству задачи (распределение станков по цехам, автомобилей по маршрутам). Например, нельзя построить 3,2 завода или поставить 1,6 автомобиля.

Система ограничений для этих задач отличается от ограничений обычной задачи линейного программирования лишь дополнительным требованием целочисленности, т. е. решается обычная задача с дополнительными ограничениями. Примером таких задач является задача о рюкзаке.

III тип. Модели с булевыми переменными, т. е. задачи с логическими переменными, принимающими только два значения – нуль или единицу (вариант отвергается или принимается).

Примерами таких задач могут быть задача о назначениях, вариантные задачи размещения производительных сил.

IV тип. Модели задач комбинаторского типа (например, задача о коммивояжере). Из комбинаторных задач иногда выделяют класс задач о покрытии. Они касаются нахождения линии, подмножества множества ребер данного графа, содержащего все вершины графа.

В двухмерном случае планы целочисленной задачи определяются конечным множеством целых точек, лежащих внутри и на границе многогранника ограничений обычной задачи линейного программирования. Если крайние точки многогранника решений нецелочисленны, то найти оптимальный план методами линейного программирования в общем случае нельзя.

Не дает большой вероятности, что округление решения до целых чисел может быть надежным способом решения целочисленной задачи. Ограничения целочисленности указывают на необходимость применения специальных методов для их решения.

В первом приближении методы целочисленной оптимизации можно разделить на 2 основные группы:

– точные;

– приближенные.

К точным относятся:

– методы отсечения;

– комбинаторные (метод ветвей и границ).

Это универсальные методы дискретной оптимизации. Кроме универсальных, имеется много специальных точных методов, учитывающих специфику задачи. Однако точные методы имеют слабую сходимость.

Трудности машинной реализации точных методов привели к появлению различного рода приближенных методов, среди которых наметились два направления:

1) разработка детерминированных эвристических алгоритмов, учитывающих специфику задачи;

2) использование случайного поиска в сочетании с локальной оптимизацией.

1. Основная идея метода отсечений состоит в том, что строится новая оболочка за счет последовательного отбрасывания некоторых подмножеств области, не содержащих целых точек исходного множества.

2. Комбинаторные методы основаны на выделении и упорядочении последовательности подмножеств. Их общая идея состоит в замене полного перебора всех подмножеств частичными переборами. Это осуществляется за счет обнаружения и исключения некоторых подмножеств, заведомо не содержащих искомого решения, и таким образом сужения области перспективных вариантов.

3. На практике довольно часто используют приближенные методы, характерной чертой которых является нахождение решения задачи линейного программирования традиционными методами с последующим округлением некоторых переменных.

9.2. Метод отсечения

Рассмотрим идею и порядок решения задач методом отсечений. Пусть даны ограничения какой-то задачи линейного программирования, они определяют выпуклую область $0ABC$ в n-мерном пространстве (рис. 19).

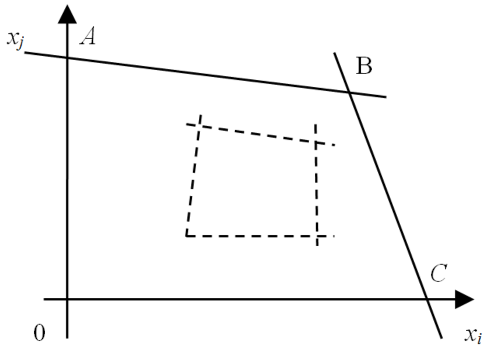


Рис. 19. Область допустимых решений задачи линейного программирования – выпуклая область $0ABC$

Внутри этой области находятся узлы целочисленной решетки, изображенной точками. Они являются допустимыми решениями задачи целочисленного программирования.

Оптимальные решения задачи линейного программирования всегда располагаются на границе области решения. В данном случае граничные точки не являются допустимыми решениями, поскольку ни одна из них не целочисленна.

Предположим, что область допустимых решений будет сужена до выпуклой оболочки допустимых целых точек внутри допустимой области. Штриховую область можно рассмотреть как область допустимых решений некоторой другой задачи линейного программирования. Эта область обладает двумя важными свойствами:

1) содержит все допустимые целочисленные точки исходной задачи;

2) все крайние точки новой области целочисленны.

Поэтому любое базисное решение модицированной задачи имеет своими компонентами целые числа и является оптимальным решением исходной задачи.

Как только будут введены дополнительные ограничения, новую (модифицированную) задачу можно решить любым обычным методом линейного программирования (симплексным методом).

Рассмотрим алгоритм для полностью целочисленных задач (первый алгоритм Гомори).

Шаг 1. Решается задача целочисленного программирования как задача линейного программирования с помощью прямого или двойственного симплексного метода. Если получено оптимальное решение задачи, то свободные члены в таблице всегда положительные числа, т. е. $a_{i0} \geq 0, a_{0i} \geq 0$.

Шаг 2. Если все свободные члены (a_{i0}) – целые числа, то задача решена без использования дополнительных ограничений. В противном случае, если имеются нецелочисленные свободные члены a_{i0}^t (нецелочисленная компонента), где t – номер таблицы, полученной на t-шаге, а i-строка i-я, где находится это нецелочисленное значение в таблице t. Эту строку называют производящей. Уравнение этой строки будет следующее:

$$x_i^t = a_{i0} + \sum a_{ij} \left(-x_j^t\right),$$

где x_i^t – текущая небазисная переменная в таблице t;

$$a_{i0} = [a_{i0}] + f_{i0},$$

здесь a_{i0} – ближайшее целое число, не превосходящее a_{i0}. Например, $x_1 = \frac{18}{10}$, т. е. возьмем $a_{i0} = \frac{18}{10}$, тогда $[a_{i0}] = 1$.

Отсюда можно получить уравнение отсечения. Значение f_{i0} определяем, исходя из вышеприведенного уравнения.

Пример. Пусть дана исходная задача линейного программирования:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11;$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13;$$

$$F_{\max} = 4x_1 + 5x_2 + x_3.$$

Дополнительное условие: значение переменной должно быть целочисленным. Решаем данную задачу, используя обычный симплексный метод (табл. 22–25).

Таблица 22. **Первая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	x_2	x_3
y_1	10	3	2	0
y_2	11	1	<4>	0
y_3	13	3	3	1
$F_{\max}$	0	–4	–5	–1

Таблица 23. **Вторая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	y_2	x_3
y_1	9/2	<5/2>	–1/2	0
x_2	11/4	1/4	1/4	0
y_3	19/4	9/4	–3/4	1
$F_{\max}$	55/4	–11/4	5/4	–1

Таблица 24. **Третья симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		y_1	y_2	x_3
x_1	9/5	2/5	–1/5	0
x_2	23/10	–1/10	3/10	0
y_3	7/10	–9/10	–3/10	<1>
$F_{\max}$	187/10	10/11	7/10	–1

Таблица 25. **Четвертая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		y_1	y_2	y_3
x_1	9/5	2/5	–1/5	0
x_2	23/10	–1/10	3/10	0
x_3	7/10	–9/10	–3/10	1
$F_{\max}$	97/5	1/110	2/5	1

Шаг 3. В конце последней таблицы записывают новое уравнение: вводят новую переменную S, которую называют слабой переменной Гомори. В последней таблице делают итерацию симплексного метода, используя в качестве разрешающей строки отсечение Гомори (т. е. последнюю строку, которую дописывают).

Шаг 4. Если в новой таблице значения переменных получились целыми, то на этом решение прекращают, если нет, то вводят следующие отсечения, и так повторяют до тех пор, пока все переменные основной задачи не получаются целочисленными.

На практике сходимость метода отсечений доказана, но известны случаи, когда эффективность применения данного метода весьма невелика, т. е. время на перебор всех допустимых значений гораздо меньше, чем решение задачи с использованием метода отсечений.

Пример. Задача, решенная обычным симплексным методом, не дала целочисленного решения. Следовательно, необходимо приступить к шагу 2 (табл. 26–27).

Вычертим последнюю симплексную таблицу (табл. 25), оставив при этом свободную строку для уравнения отсечений (табл. 26).

Таблица 26. **Пятая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		y_1	y_2	y_3
x_1	9/5	2/5	–1/5	0
x_2	23/10	–1/10	3/10	0
x_3	7/10	–9/10	–3/10	1
S_1	–7/10	–1/10	<–7/10>	0
$F_{\max}$	97/5	1/110	2/5	1

В качестве производящей строки выберем строку основной переменной x_3. Исходя из этой строки, заполним строку уравнения отсечения. В столбец записываем найденное f_{i0} со знаком «–» (табл. 27).

Полученное решение – целочисленно. В случае необходимости нужно выбрать другую производящую строку и продолжить решение.

Таблица 27. **Шестая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом отсечений**

БП	СЧ	НБП		
		y_1	S_1	y_3
x_1	2	3/7	–2/7	0
x_2	2	–1/7	3/7	0
x_3	1	–6/7	–3/7	1
y_2	1	1/7	–10/7	0
$F_{\max}$	19	1/7	4/7	1

Пример решения задачи целочисленного линейного программирования методом отсечения приведен в прил. Е.

9.3. Метод ветвей и границ

Другим методом поиска целочисленных значений задачи является метод ветвей и границ. Если обозначить исходную задачу через I, а ее допустимые множества значений через P, то метод ветвей и границ предусматривает замену задачи I последовательности подзадач $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Совокупность, таким образом, состоит из множества задач-кандидатов, а множество P при этом разбивается на подмножества $P_1, P_2, \dots, P_i$.

Таким образом, значение вспомогательной задачи дает верхнюю границу целевой функции, и в соответствии со смыслом верхних границ мы получаем какой-то оптимальный план.

Полученное решение объявляется решением-претендентом, а полученные значения целевой функции называют рекордом. Если в процессе ветвления и оценивания находится новый план с большим значением целевой функции, то он становится новым планом-претендентом, а связанное с ним значение целевой функции – новым рекордом. Процесс ветвления подмножеств может быть представлен в виде дерева специального графа, все вершины которого, за исключением одной, имеют единственную входящую дугу.

Вершина, не имеющая входящей дуги (корневая), соответствует множеству P и определенной на ней задаче I. Остальные вершины – подмножеству P и соотношению задачи P_j. Каждая полученная в процессе ветвления подмножеств вспомогательная задача считается задачей-кандидатом и будет находиться в списке задач-кандидатов до тех пор, пока не будет прозондирована (или удалена из текущего списка задач-кандидатов (ЗК)) или разветвлена – заменена в списке новыми подзадачами для дальнейшего оценивания.

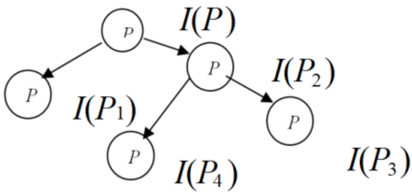


Рис. 20. Процесс поиска целочисленных значений задачи методом ветвей и границ

Задача-кандидат считается прозондированной, если в результате решения задачи-кандидата выполнен один из трех критериев зондирования.

1. Задача-кандидат не имеет допустимого решения. В таком случае ее исключают из дальнейшего рассмотрения.

2. Оптимальное значение целевой функции задачи-кандидата меньше или равно текущему рекорду. В этом случае ни на одном из допустимых решений не может быть достигнуто больше, чем имею-

щийся рекорд. Следовательно, задача-кандидат тоже исключается из дальнейшего рассмотрения.

3. Оптимальное решение задачи-кандидата – целочисленно. В этом случае дальнейшее ветвление задачи-кандидата не дает целочисленного решения с большим, чем имеется, значением целевой функции. Если старое значение целевой функции больше, чем полученное, то старое решение и становится решением-претендентом.

Таким образом, задача-кандидат, удовлетворяющая любому из этих критериев, полностью исследована и удаляется из списка без дальнейшего ветвления.

Общий алгоритм вычислений для метода ветвей и границ можно представить следующими блоками.

1 блок. В список включается исходная задача и устанавливается начальное значение рекорда (значение целевой функции).

2 блок. Выбирают одну из задач текущего списка в качестве задачи-кандидата.

3 блок. Задача-кандидат заменяется ее релоксацией, т. е. вспомогательной задачей с ослаблением некоторых условий исходной задачи без изменений ее целевой функции.

4 блок. Находим решение задачи-кандидата с релоксацией (ЗКР) и переходим к его анализу с использованием критериев зондирования.

5 блок. Если задача-кандидат с релоксацией не имеет допустимого решения (критерий 1), то переходим к пункту 10 (исключаем ЗК из списка).

6 блок. Если максимум целевой функции задачи-кандидата с релоксацией не превышает текущий рекорд (критерий 2), снова переходим к шагу 10.

7 блок. Если оптимальное решение задачи-кандидата с релоксацией целочисленно (критерий 3), оно является допустимым. Переходим к шагу 9. Если решение задачи-кандидата с релоксацией нецелочисленно, переходим к шагу 8.

8 блок. Разветвляем задачу-кандидата и заменяем ее в списке новыми задачами (задачи-потомки), возвращаемся к шагу 2.

9 блок. Запоминаем решение задачи-кандидата, полученное в результате решения задачи-кандидата с релоксацией в качестве нового решения-претендента. Заменяем рекорд на новый и переходим к шагу 10, где исключаем из списка эту задачу-кандидата и все остальные задачи-кандидаты, для которых верхняя граница не больше нового рекорда.

10 блок. По результатам зондирования задача-кандидат удаляется из текущего списка.

11 блок. Проверяем пустой ли весь список задач. Если он пустой, вычисления закончены, если при этом рекорд конечен, то имеющееся решение-претендент и соответствующий ему рекорд является оптимальным решением задачи. Если же он не пуст, то переходим к шагу 2. Если рекорд равен бесконечности, то вообще не имеет допустимого решения.

Блок-схема решения задачи методом ветвей и границ представлена на рис. 21.

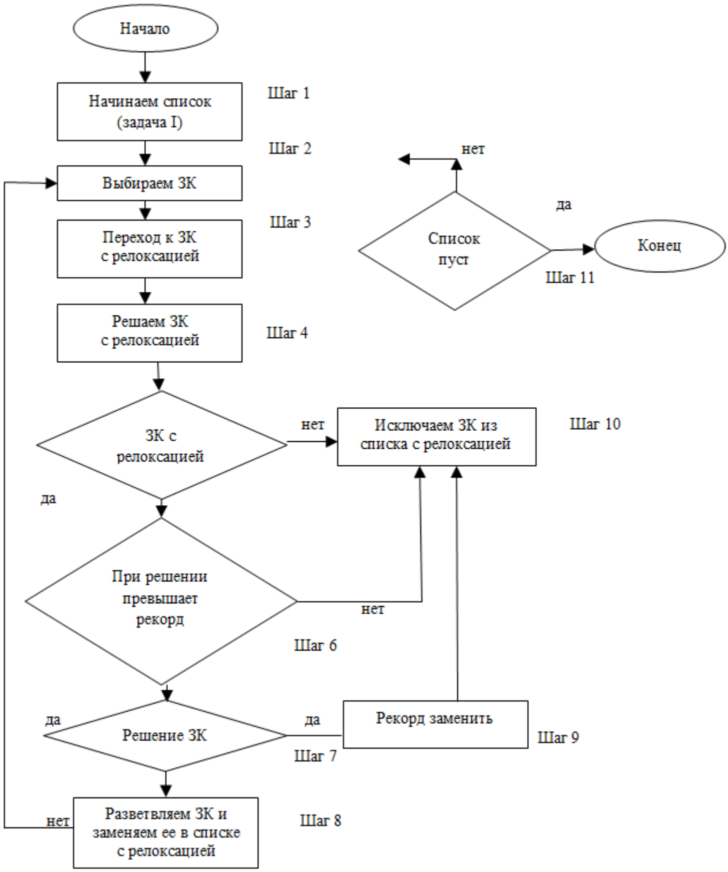


Рис. 21. Блок-схема решения задачи методом ветвей и границ

Для пояснения приведенной блок-схемы решим конкретную задачу, используя метод ветвей и границ.

Пример.

Условия:

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2;$$

$$2x_2 - 3x_1 + x_3 \leq 3;$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4;$$

$$F_{\max} = x_1 - 3x_2 + 3x_3.$$

Должны выполняться условия неотрицательности переменных $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$, условия целочисленности x_1, x_2, x_3 – целые числа.

Задачу начинаем решать с того, что исходная задача включается в список. Выбираем ее в качестве задачи-кандидата (шаг 2). Переходим к шагу 3, т. е. к ее релоксации, а именно: задаче линейного программирования, которую получаем, ослабляем требование целочисленности. Следовательно, можем решить данную задачу обычным симплексным методом (табл. 28–30).

Таблица 28. **Первая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	x_2	x_3
y_1	2	4	–3	0
y_2	3	–3	2	<1>
y_3	4	2	1	–1
$F_{\max}$	0	–1	3	–3

Таблица 29. **Вторая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	x_2	y_2
y_1	2	<4>	–3	0
x_3	0	–3	2	1
y_3	7	–1	3	1
$F_{\max}$	9	–10	9	3

Таблица 30. **Третья симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		y_1	x_2	y_2
x_1	1/2	1/4	–3/4	0
x_3	9/4	3/4	–1/4	1
y_3	30/4	1/4	9/4	1
F_{max}	14	10/4	6/4	3

Результат решения задачи-кандидата дал следующее значение:

$$F_{\max} = 14 \text{ (это и есть рекорд).}$$

$$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 4{,}5.$$

Данное решение нецелочисленно. Следовательно, осуществляем проверку критериев зондирования (шаги 5, 6, 7). В результате получаем, что множество P задачи I разбивается на два подмножества P_1 и P_2, т. е. получаем две задачи-потомка I_1 и I_2.

Выбираем одну из нецелочисленных переменных. Допустим x_3 и определяем задачу I_1, для которой x_3 меньше либо равно 4:

$$x_3 \leq 4$$

и задачу I_2, для которой

$$x_3 \geq 5.$$

Обе задачи включаются в список, т. е. теперь список ЗК содержит две задачи. Релоксации задач I_1 и I_2 отличаются от первоначальной задачи одним дополнительным ограничением.

Решим задачи I_1 и I_2. Для этого составляется новая симплексная таблица, и задача решается обычным симплексным методом.

Задача I_1 включает $x_3 \leq 4$ (табл. 31–34).

Таблица 31. **Четвертая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	x_2	x_3
y_1	2	4	–3	0
y_2	3	–3	2	<1>
y_3	4	2	1	–1
y_4	4	0	0	1
F_{max}	0	–1	3	–3

Таблица 32. **Пятая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		x_1	x_2	y_2
y_1	2	4	–3	0
x_3	3	–3	2	1
y_3	7	–1	3	1
y_4	1	<3>	–2	–1
$F_{\max}$	9	–10	9	3

Таблица 33. **Шестая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		y_4	x_2	y_2
y_1	2/3	–4/3	–1/3	<4/3>
x_3	4	1	0	0
y_3	22/3	1/3	7/3	2/3
x_1	1/3	1/3	–2/3	–1/3
$F_{\max}$	37/3	10/3	7/3	–1/3

Таблица 34. **Седьмая симплексная таблица задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ**

БП	СЧ	НБП		
		y_4	x_2	y_1
y_2	1/2	–1	–1/4	3/4
x_3	4	1	0	0
y_3	2/7	3	5/2	–1/2
x_1	3/2	0	–3/4	1/4
$F_{\max}$	25/2	3	9/4	1/4

Оптимальное решение задачи I_1 дало следующие результаты:

$$x_1 = 1/2;$$

$$x_2 = 0;$$

$$x_3 = 4;$$

$$F_{\max} = 12{,}5.$$

Задача I_2 дала следующие результаты:

$$x_1 = 2;$$

$$x_2 = 2;$$

$$x_3 = 5;$$

$$F_{\max} = 11.$$

Следовательно, $F_{\max 1}$ и $F_{\max 2}$ становятся верхними границами целевой функции задач I_1 и I_2.

Поскольку решение задачи I_2 целочисленно, следовательно, это решение принадлежит множеству P. Тогда критерий зондирования для задачи I_2 выполняется, а значение целевой функции (11) становится рекордом. А сама задача I_2 становится задачей-претендентом, и она из списка удаляется.

Для задачи I_1 не выполняется ни один из критериев значения, но так как целевая функция этой задачи больше рекорда (12,5), следовательно, не исключено, что, может быть, в этом множестве также имеется задача-претендент. Поэтому анализ множества P_1 необходимо продолжить. Следовательно, задачу I_1 разбиваем на две подзадачи I_3 и I_4, используя для этого единственную нецелочисленную переменную ($x_1 = 0{,}5$).

Задача I_3 будет отличаться от задачи дополнительным условием:

$$x_1 = 1/2;$$

$$x_1 \leq 0(I_3);$$

$$x_1 \geq 1(I_4).$$

Задача I_3 будет отличаться от I_1 условием $x_1 \leq 0$, а задача I_4 от I_1 дополнительным требованием $x_1 \geq 1$.

Решив задачу I_3, получено следующее решение:

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 0;$$

$$x_3 = 3;$$

$$F_{\max} = 9.$$

Задача I_4 дала следующий результат:

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = 2/3;$$

$$x_3 = 4;$$

$$F_{\max} = 11.$$

Для обеих задач выполняется критерий зондирования № 2. Следовательно, задачи I_3 и I_4 можно исключить из списка. В списке больше нет задач.

Таким образом, получим, что задача-претендент ($x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$) является оптимальным решением задачи I со значением целевой функции, равной 11. Любое другое допустимое решение данной задачи будет иметь целевую функцию меньше 11. Следовательно, дальнейшее решение можно не производить. Примеры решения задач методом ветвей и границ приведены в прил. F.

10. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

10.1. Задача о брахистохроне и простейшая задача вариационного исчисления

Первой в вариационном исчислении, содержащей в четкой формулировке основные черты нового круга задач на экстремум, является задача о брахистохроне, поставленная Бернулли в 1699 г. (греч. «брахистос» – кратчайший, «хронос» – время). Сущность метода заключается в следующем: в вертикальной плоскости заданы две точки A и B, расположенные на разных уровнях. Требуется соединить точки такой гладкой линией, двигаясь по которой тяжелый материальный шарик пройдет путь от A до B за минимальное время (рис. 22).

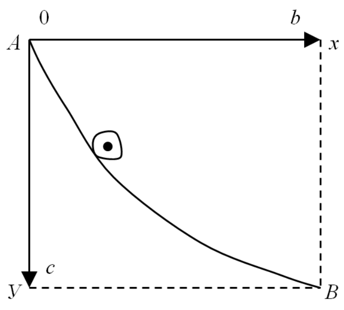


Рис. 22. Графическое изображение задачи о брахистохроне

Задача о брахистохроне сводится в поиску такой гладкой функции $y = y(x)$, $0 \leq x \leq b$, которая принимает заданные значения на концах отрезка $[0, b]$: минимум $y(0) = 0$, $y(b) = c$ и доставляет минимум функционалу.

В данной задаче, в отличие от ранее рассматриваемых задач, находится не конечномерный вектор, а минимизирующий функцию, функция, на которой достигает минимума функционал.

Рассмотрим постановку простейшей задачи. Среди скалярных функций одной переменной $y = y(x)$ класса $C^{(1)}$, определенных на отрезке $[x^1, x^2]$ и принимающих на концах отрезка заданного значения

$$y(x^1) = C_1, y(x^2) = C_2. \tag{1}$$

Найдем ту, на которой функционал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y_x) dx \tag{2}$$

принимает минимальное значение.

Задача (1), (2) называется простейшей задачей вариационного исчисления. Кривые (функции, линии) $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$ называются допустимыми в задаче, если они принадлежат классу $C^{(1)}$ и удовлетворяют условиям (1).

При этом говорят, что на допустимой кривой $y = y(x)$ функционал достигает сильного минимума, если найдется число ε, $\varepsilon > 0$, такое, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq \varepsilon, x \in [x^1, x^2], \tag{3}$$

выполняется неравенство

$$I(\tilde{y}) \geq I(y). \tag{4}$$

Если неравенство (4) выполняется для всех допустимых функций, которые кроме (3) удовлетворяют и условию $|\tilde{y}_x(x) - y_x(x)| \leq \varepsilon$, $x \in [x^1, x^2]$, то говорят, что на допустимой кривой $y = y(x)$ достигается слабый минимум.

При определении сильного минимума с кривой $y = y(x)$ сравниваются все допустимые кривые $y(x)$, близкие к исходной по значениям. При определении же слабого минимума из уравнения исключаются допустимые кривые, производные которых значительно отличаются от производной функции $y(x)$. Следовательно, если на кривой $y = y(x)$ достигается сильный минимум, то на ней будет достигаться и слабый минимум. Поэтому все необходимые условия слабого минимума будут и необходимыми условиями сильного минимума, но не наоборот.

10.2. Метод вариаций. Исследования первой и второй вариаций функционала

Универсальный метод исследования задач минимизации функционалов был предложен в 1760 г. Лагранжем и получил название метода вариаций. Другой метод, основанный на аппроксимации функционалов функциями, предложен Эйлером.

1. Вариация допустимой кривой.

Предположим, что на минимум испытывается допустимая кривая

$$y = y(x), x \in [x^1, x^2].$$

Все другие допустимые кривые $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ можно представить в виде суммы

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x),$$

где $h(x), x^1 \leq x \leq x^2$ – функция класса $C^{(1)}$, удовлетворяющая условиям $h(x^1) = 0, \varepsilon h(x^2) = 0$;

ε – числовой параметр.

Функцию $\lambda y(x) = \varepsilon h(x)$ называют вариацией допустимой кривой.

2. Вариацию функционала.

Вычислим приращение функционала

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y_x) dx$$

на допустимых x_1 кривых

$$y = y(x), x \in [x^1, x^2];$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x).$$

Имеем

$$\Delta I(y) = I(\tilde{y}) - I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F\{(x, y, y_x) - F(x, y, y_x)\} dx.$$

При фиксированных функциях $y(x)$, $h(x)$ приращение является функцией параметра ε и может быть представлено в виде:

$$\Delta I = \varepsilon\lambda I + \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda^2 I + 0(\varepsilon^2).$$

Коэффициент λI при первой степени параметра ε называется первой вариацией функционала $I(y)$ на кривой $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$. Коэффициент $\lambda^2 I$ при $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ – второй вариацией функционала $I(y)$.

Получим явные выражения для вариаций функционала:

$$\Delta I\ (y) = \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y + \varepsilon h, y_x + \varepsilon h) - F(x, y, y_x)]dx = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} h +$$
$$+ \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h_x]dx + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} h h_x +$$
$$+ \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2]dx + 0(\varepsilon^2).$$

Отсюда

$$\lambda I = \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} h(x) + h(x) + \frac{F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h_x(x)]\, dx,$$

$$\lambda^2 I = \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2(x) + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2(x)]\, dx.$$

Данные формулы для вариаций функционала можно записать и таким образом:

$$\lambda I(y) = \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon h)|\varepsilon = 0;$$

$$\lambda^2 I(y) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I(y + \varepsilon h)|\varepsilon = 0.$$

Следовательно, дело сводится к вычислению производных от функций одной переменной.

Рассмотрим необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций.

Пусть $y = y(x)$ – допустимая функция, на которой достигается слабый минимум функционала

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y, y_x)]dx.$$

Теорема. Справедливы следующие необходимые условия слабого минимума:

1) условие стационарности

$$\lambda I(y) = 0;$$

2) неотрицательность второй вариации

$$\lambda^2 I(y) \geq 0.$$

10.3. Условия Эйлера, Лежандра и Якоби

Решением задачи вариационного исчисления является допустимая траектория, на которой достигается оптимальное значение интегрального целевого функционала. Если такое решение существует, то оно должно удовлетворять некоторым необходимым условиям, которые можно считать динамическими аналогами необходимых условий в классических задачах математического программирования при отсутствии ограничений.

Необходимым условием, аналогично условию первого порядка – нулевая первая производная – является выполнение условия Эйлера.

Предварительно сформулируем основную лемму Лагранжа.

Если равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)\eta(x)dx = 0$$

выполняется для непрерывной функции $a(x),\ x \in [x^1, x^2]$ и для всех функций $\eta(x),\ x \in [x^1, x^2]$ класса C^1, удовлетворяющих условиям $\eta(x^2) = 0$, то необходимо, чтобы $a(x),\ x \in [x^1, x^2]$.

1. Первый вывод уравнения Эйлера.

Пусть $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$ – допустимая кривая, на которой достигается слабый минимум функционала

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2}[F(x, y, y_x)]dx,$$

на этой кривой

$$\lambda I(y) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}h(x) + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}h_x(x)\right]dx = 0. \tag{5}$$

Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}h_x(x)dx = \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}h_x\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}\right]h(x)dx. \tag{6}$$

Первое слагаемое справа равно 0, в силу того, что

$$h(x^1) = h(x^2) = 0,$$

подставив (6) в (5), получим:

$$\lambda I(y) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}h_x\right]h(x)dx = 0. \tag{7}$$

Это равенство должно выполняться для всех функций $y = y(x)$, $x \in [x^1, x^2]$ класса C^1, удовлетворяющих условиям

$$h(x^1) = h(x^2) = 0.$$

По лемме Лагранжа для этого необходимо, чтобы коэффициент при $h(x)$ в (7) был тождественно равен 0:

$$\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} \equiv 0. \quad (8)$$

Таким образом, рассмотрим **теорему.** Для того чтобы допустимая кривая $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$ доставляла слабый минимум функционалу простейшей задачи вариационного исчисления, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера (8).

В подробной записи уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial_x \partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} y_x - \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} y_x = 0.$$

Уравнение является дифференциальным уравнением II порядка относительно искомой функции $y = y(x)$. Общее решение данного уравнения зависит от двух произвольных постоянных, для нахождения которых используются два краевых условия: $y(x^1) = C_1, y(x^2) = C_2$.

Каждая допустимая кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, называется экстремалью.

Первый вывод уравнения Эйлера имеет недостаток, на который впервые обратил внимание Дюбуа-Реймон, так как был обоснован лишь для узкого класса задач.

Строгое доказательство необходимого условия слабого минимума в виде уравнения Эйлера основывается на следующей лемме (Дюбуа-Реймона) или равенстве:

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)\nu(x)dx = 0.$$

Используется для непрерывной функции $a(x), x \in [x^1, x^2]$ и для всех непрерывных функций $\nu(x), x \in [x^1, x^2]$, удовлетворяющих условию $\int_{x_1}^{x_2} \nu(x)dx = 0$, то необходимо, чтобы $a(x) = \text{const},\ x \in [x^1, x^2]$.

Второй вывод уравнения Эйлера.

Возьмем за исходное условие неравенство о первой вариации функционала на кривой, доставляющий слабый минимум:

$$\lambda I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h_x(x)\right] dx = 0.$$

Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\bar{x},y,y_x)}{\partial y_x} d\bar{x} h(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} h_x(x) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\bar{x},y,y_x)}{\partial y} d\bar{x} dx.$$

Сейчас операция законна, ибо функция $h(x)$ принадлежит классу C^1. Первое слагаемое справа равно нулю.

С учетом чего получаем выражение

$$\lambda I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\bar{x},y,y_x)}{\partial y} d(\bar{x}) + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}\right] h_x(x) dx = 0\,;$$

которое выполняется для всех непрерывных функций $h_x(x)$ и удовлетворяет условию:

$$\int_{x_1}^{x_2} h_x(x) dx = h(x^2) - h(x^1) = 0.$$

Следовательно, по лемме Дюбуа-Реймона следует тождество:

$$- \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F(\bar{x},y,y_x)}{\partial y} d\bar{x} + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} = \text{const}. \qquad (9)$$

Уравнение (9) называется уравнением Эйлера в интегральной форме. Ему удовлетворяет каждая допустимая кривая, доставляющая слабый минимум функционалу:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y_x) dx.$$

Тождество (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\bar{x},y,y_x)}{\partial y} d\bar{x} + \text{const}.$$

Условие Лежандра и Якоби доказывает два необходимых условия слабого минимума, следующие из неотрицательности второй вариации функционала простейшей задачи.

Условие Лежандра.

Ранее было рассмотрено, что на кривой $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$, доставляющей слабый минимум функционалу $I(y)$, вторая вариация $\lambda^2 I(y)$ неотрицательна:

$$\lambda^2 I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2(x) + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2(x)\right] dx \geq 0. \qquad (10)$$

Теорема 1. Если на допустимой кривой $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$ достигает слабого минимума функционал простейшей задачи вариации исчисления, то вдоль этой кривой должно выполняться условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} \geq 0.$$

Условие Якоби.

Продолжим исследование второй вариации функционала (10) в предположении, что вдоль кривой $y = y(x)$ выполняется усиленное условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} > 0.$$

Обратимся к неравенству (10). При $h(x) = 0$ его левая часть равна нулю, а при других $h(x)$, $x \in [x^1, x^2]$, удовлетворяющих условиям

$h(x^1) = h(x^2) = 0$, она неотрицательна.

Следовательно, при $h(x) = 0$ вторая вариация достигает минимума.

Задача о минимальной второй вариации

$$\lambda^2 I(y) \int_{x_1}^{x_2} W(x, h, h_x) dx,$$

где $W(x,h,h_x) = \frac{\partial^2 F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y^2} h^2(x) + 2\frac{\partial^2 F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) +$
$$+ \frac{\partial^2 F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y_x^2} h_x^2(x)$$

на функциях $h(x) \in C^1$, удовлетворяющих равенствам

$$h(x^1) = h(x^2) = 0,$$

называется присоединенной задачей о минимуме.

Уравнение Эйлера для присоединенной задачи о минимуме имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial W}{\partial h_x} = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) называется уравнением Якоби. Говорят, что точка $\bar{x}$ является сопряженной с точкой x^1, если существует нетривиальное решение $h(x)$ уравнения Якоби, равное нулю в точке $x^1, \bar{x}$:

$$h(x^1) = 0, h(\bar{x}) = 0.$$

Теорема 2 (необходимое условие Якоби слабого минимума).

Если $y = y(x), x \in [x^1, x^2]$ доставляет минимум функционалу простейшей задачи и является неособой экстремалью, то на интервале (x^1, x^2) нет точек, сопряженных с точкой x^1.

11. ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

11.1. Постановка задачи векторной оптимизации

Во многих реальных задачах не удается оценить решение с помощью одного числа, вычисления на этом решении значения лишь одной функции, одного критерия качества.

Для практического использования полученное решение может представить интерес с разных точек зрения. Задачи выбора решений в подобных ситуациях математически формулируются в виде задачи минимизации векторных функций. Рассмотрим постановку задачи векторной оптимизации.

Пусть в пространстве R_n заданы скалярные функции:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_e(x),$$

которые называются критериями качества.

Векторная функция $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_e(x)\}$ называется векторным критерием качества.

Пусть даны скалярные функции $q_1(x), \dots, q_m(x)$, определяющие ограничения задачи:

$$q_1(x) \le 0;$$

$$q_2(x) \le 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots;$$

$$q_m(x) \le 0.$$

Вектор $x \in R_n$, удовлетворяющий неравенствам, называется допустимым вектором.

На каждом допустимом векторе x функция $f(x)$ принимает некоторое значение из e-мерного пространства. В отличие от скалярного случая, теперь трудно сравнить два допустимых вектора x^1 и x^2. А лишь в исключительных случаях найдется точка x, на которой все функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_e(x)$ достигают минимума (рис. 23).

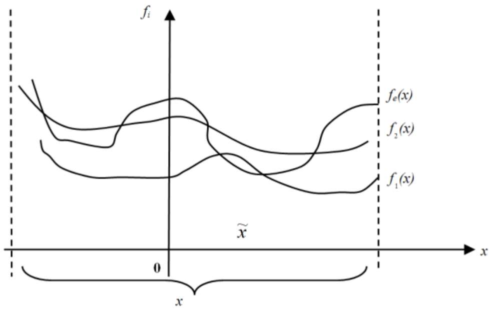


Рис. 23. Первый вариант решения задачи векторной оптимизации

Общей является ситуация, когда уменьшение значения одной из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_e(x)$ увеличивает значение какой-нибудь другой функций (рис. 24). Поэтому в задаче минимизации векторных функций сама постановка задачи вызывает серьезные трудности и не может быть выполнена однозначно.

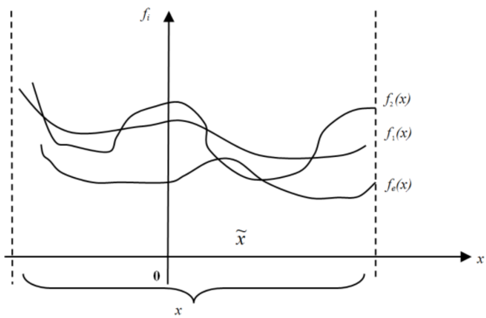


Рис. 24. Второй вариант решения задачи векторной оптимизации

Рассмотрим три **постановки задачи векторной оптимизации**.

1. Минимизация иерархической системы критериев качества.

При этой постановке считается, что критерии качества $f_1(x), f_2(x), \dots, f_e(x)$ упорядочены в иерархическом порядке, т. е. первый критерий самый важный, второй критерий важнее третьего и т. д. Решением задачи минимизации векторной функции $f(x)$ при ограничениях $q_1(x) \leq 0, q_2(x) \leq 0, \dots, q_m(x) \leq 0$ называется допустимый вектор x^0, удовлетворяющий соотношениям

$$f_1\,(x^0) = \min_{x \in X_1} f_1(x)\,;$$
$$f_2\,(x^0) = \min_{x \in X_2} f_2(x)\,;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,;$$
$$f_e\,(x^0) = \min_{x \in X_e} f_e(x)\,,$$

где $X_1 = X$ – множество допустимых векторов, а множества X_i определяется по индукции

$$X_i = \{x: f_{i-1}\,(x) = f_{i-1}\,(x^0), x\ \in X_{i-1}\}, i = \overline{2, e}.$$

Физический смысл процедуры состоит в следующем: находится минимум первого наиболее важного критерия $f_1\,(x)$, если он достигается не в единственной точке, а на множестве X_2, то на этом множестве ищется минимум второго критерия и т. д.

В некоторых случаях целесообразно обобщить приведенную постановку задачи. Осуществим следующую последовательность операций. Найдем точку x^1 из условия

$$f_1(x^1) = \min_{x \in X_1} f_1(x).$$

Исходя из значения $f_1(x^1)$ и поведения функции $f_1(x)$ в окрестности точки x^1, задаем число ε_1 и строим множество

$$X_2 = \{x: f_1(x) \geq (1 + \varepsilon_1) f_1\,(x^1), x\ \in X_1\}.$$

Определяем x^2 из условия

$$f_2(x^2) = \min_{x \in X_2} f_2(x).$$

По значению $f_2(x^2)$ и поведению функции $f_2(x)$ в окрестности точки x^2 задаем число ε_2 и строим множество

$$X_3 = \{x: f_2(x) \geq (1 + \varepsilon_2) f_2(x^2), x\ \in X_2\} \text{ и т. д.}$$

Через $l-1$ шагов будет построено множество X_e. После этого находим точку x^e

$$f_e(x^e) = \min_{x \in X_e} f_e(x).$$

Точку $x^0 = x^e$ называют решением задачи минимизации векторной функции по обобщенной иерархической системе критериев качества.

Обобщенная задача отличается от первой тем, что она позволяет более точно учитывать все критерии качества. Если в окрестности точки x^1 функция изменяется незначительно, то, сознательно незначительно проигрывая (введением числа ε_1) по первому критерию, можно добиться существенного улучшения по второму и т. д. (рис. 25).

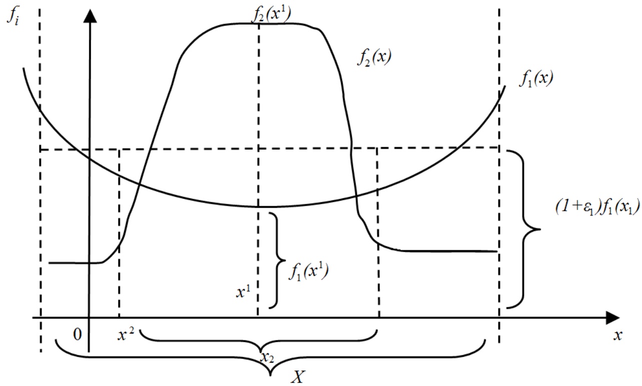


Рис. 25. Третий вариант решения задачи векторной оптимизации

2. Минимизация взвешенных критериев.

Исходя из физической сущности критериев качества и их важности, каждому критерию $f_i(x)$ приписывается его «вес», число λ_i,

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, l}, \sum_{i=1}^{e} \lambda_i = 1.$$

Составляется скалярная функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{e} \lambda_i f_i(x),$$

точка минимума x^0 которой называется решением задачи минимизации векторного критерия качества.

Как видно из постановок задач 1, 2, в каждом случае задача минимизации векторной функции сводится к одной или нескольким задачам минимизации скалярных функций.

3. Поиск неулучшаемых точек.

В задаче минимизации системы функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_e(x)$ при ограничениях $q_1(x) \leq 0, q_2(x) \leq 0, \ldots, q_m(x) \leq 0$ точка $x^*, x^* \in X$ называется неулучшаемой, если не существует допустимой точки $x, x \in X$, такой, что $f_i(x) \leq f_i(x^*), i = \overline{1, l}$, и среди этих неравенств одно выполняется со знаком строгого неравенства. Множество неулучшаемых точек обозначим через X^*.

Геометрический смысл данной постановки ясен из анализа рис. 26.

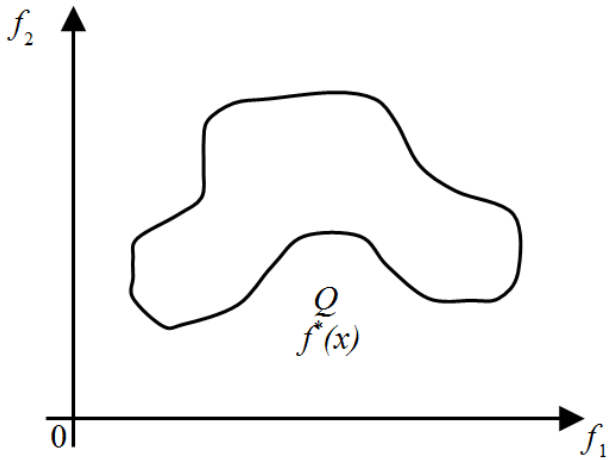


Рис. 26. Четвертый вариант решения задачи векторной оптимизации

На рис. 26 видно, что символом Q обозначен образ множества X при отображении

$$f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x).$$

Прообраз множества $f^*(x)$ является множеством неулучшаемых точек. Нахождение множества неулучшенных точек в общем случае является трудной задачей.

11.2. Методы решения задач векторной оптимизации

Экономические задачи, решаемые математическими методами, часто являются многоцелевыми. Так, производственный план предприятия должен обеспечивать максимально возможный выход продукции, низкие издержки, высокую производительность труда, низкую себестоимость продукции, рентабельность производства, его товарность и т. д. Однако нередко план, оптимизирующий по одному критерию, может оказаться далеко не лучшим, а то и вообще неприемлемым (например, план, максимизирующий объем товарной продукции, дает наибольшее издержки и, как следствие, наименьшую прибыль; в то же время, план, максимизирующий прибыль, значительно снижает объем товарной продукции, следовательно, оба эти плана для непосредственного использования непригодны).

В связи с этим возникает задача нахождения такого плана, в котором значения всех рассмотренных экономических показателей были бы хотя и не экстремальными, но была бы наиболее выгодная совокупность этих значений. Другими словами, план должен быть, хотя и не оптимальным по каждому отдельному критерию, но наилучшим по выполнению всех критериев одновременно.

Таким образом, особенностью задач векторной оптимизации является наличие в области допустимых значений области компромиссов, в которой невозможно одновременное улучшение всех критериев. Принадлежащие области компромиссов планы называют эффективными (или оптимальными по Парето), субоптимальными, компромиссными.

К общей формулировке многокритериальной задачи могут сводиться задачи различного содержания, которые подразделяют на четыре типа:

1) задачи оптимизации на множестве целей;

2) задачи оптимизации на множестве объектов, качество функционирования каждого из которых оценивается самостоятельным критерием;

3) задачи оптимизации на множестве условий функционирования;

4) задачи оптимизации на множестве этапов функционирования.

Многокритериальные задачи можно также классифицировать по другим признакам: по вариантам оптимизации, по числу критериев, по типам критериев, по соотношениям между критериями, наличию фактора неопределенности.

При разработке методов решения векторных задач приходится решать ряд специфических проблем.

1. Проблема нормализации возникает в связи с тем, что локальные критерии имеют, как правило, различные единицы и масштабы измерения, и это делает невозможным их непосредственное сравнение. Операция приведения критериев к единому масштабу и безразмерному виду носит название нормирования. Наибольшее распределение способами нормирования приходит при замене абсолютных значений критериев их безразмерными относительными величинами:

$$\overline{f_i}(x) = \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

или относительными значениями отклонений от оптимальных значений критериев f_i^*

$$\overline{f_i}(x) = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*}.$$

2. Проблема выбора принципа оптимальности связана с определением свойств оптимального решения и решением вопроса, в каком смысле оптимальное решение превосходит все остальные.

3. Проблема учета приоритета критериев встает, если локальные критерии имеют различную значимость. Необходимо найти математическое определением приоритета и степень его влияния на решение задачи.

4. Проблема вычисления оптимума возникает, если традиционные вычислительные схемы и алгоритмы непригодны для решения задач векторной оптимизации.

Решение перечисленных проблем можно осуществить следующими методами:

– основанными на свертывании критериев в единый;
– использующими ограничения на критерии;
– целевого программирования;
– основанными на нахождениии компромиссного решения;
– в основе которых лежат человеко-машинные процедуры принятия решений (интерактивное программирование).

В ***методах, основанных на свертывании критериев***, из локальных критериев формируется один. Наиболее распространенным является метод линейной комбинации частных критериев. Пусть задан вектор весовых коэффициентов критериев $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_e\}$, характеризующих важность соответствующего критерия:

$$\sum_{i=1}^{e} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 (i = \overline{1, e}).$$

Линейная скаляризованная функция представляет собой сумму частных критериев, умноженных на весовые коэффициенты:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x), g_e(x) \leq b_k, (k = \overline{1,m}), x \geq 0.$$

Критерии в свертке могут быть нормированы. Решение, полученное в результате оптимизации скаляризованного критерия эффективно.

К недостатку метода можно отнести то, что малым приращениям коэффициентов соответствуют большие приращения функции, т. е. решение задачи неустойчиво, а также есть необходимость определения весовых коэффициентов.

Направление методов, использующих ограничения на критерии включает два подхода:

1) метод ведущего критерия;

2) методы последовательного применения критериев (метод последних уступок, метод ограничений).

В методе ведущего критерия все целевые функции кроме одной, переводятся в разряд ограничений. Пусть $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{e-1})$ – вектор, компоненты которого представляют собой нижние границы соответствующих критериев. Задача будет иметь вид

$$f = f_1;$$

$$f_i \geq \gamma_i, (i = \overline{2,l});$$

$$q_k(x) \leq b_k, (k = \overline{1,m});$$

$$x \geq 0.$$

Полученное этим методом решение не может быть эффективным, поэтому необходимо проверить его принадлежность области компромиссов.

Алгоритм метода последовательных уступок.

1. Вначале определяется предпочтительность выбранных критериев (т. е. нумеруются в порядке убывания важности).

2. Затем задача решается на 1 критерий, для которой находится оптимальная величина. Лицом, принимающим решение f_1^*, делается одна уступка, т. е. в задачу вводится дополнительное ограничение, по которому оптимизирующий показатель должен быть не менее (или не более) определенного уровня, сниженного (или увеличенного) по сравнению с оптимальным.

3. Решается задача по критерию f_2 с дополнительным ограничением:

$$f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1.$$

Далее новую задачу, уже с двумя дополнительными ограничениями, решаем на третий критерий и т. д., пока все критерии не будут использованы (т. е. п. 2 и 3 повторяются для критерия $(f_2, \ldots, f_e)$. Последний в этом ряду план даст оптимальное решение наименее предпочтительного показателя при условии гарантированных значений всех остальных.

Однако иногда план может оказаться ближе к оптимальному по менее предпочтительному критерию (например, для наиболее важного показателя была сделана попытка на 10 %, а для наименее важного получено отклонение всего на 3 %). Но это можно установить, решив первоначальную задачу на каждый критерий в отдельности. Для исправления плана расчеты повторяются с другими гарантированными уровнями оптимальных критериев.

Геометрическая интерпретация метода последовательных уступок. Пусть область решения задачи представлена на рис. 27, для функций f_1 и f_2 надо найти максимум, для функции f_3 – минимум. Линии уровня этих функций и оптимальные вершины *A*, *B*, *C* также показаны на рис. 27.

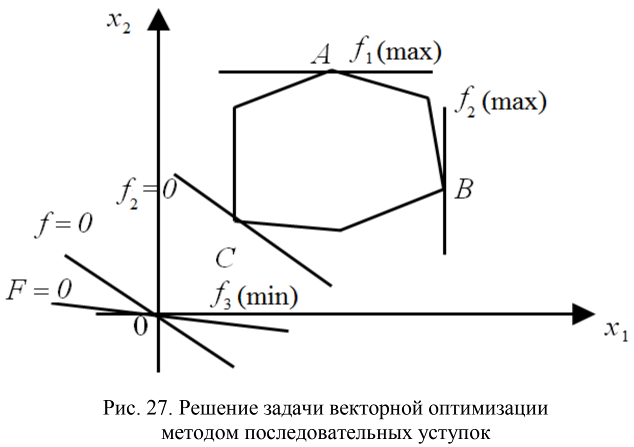


Рис. 27. Решение задачи векторной оптимизации методом последовательных уступок

Определив максимум $f_1 = f_1^*$ в точке A, делаем уступку, т. е. уменьшаем величину f_1 до значения $f_1 = k_1 f_1^*, 0 < k_1 < 1$. Дополнительное условие имеет вид $f_1 \geq k_1 f_1^*$. А соответствующая прямая опускается ниже и отсекает от многогранника какую-то его часть. Область решения задачи значительно сужается (рис. 28).

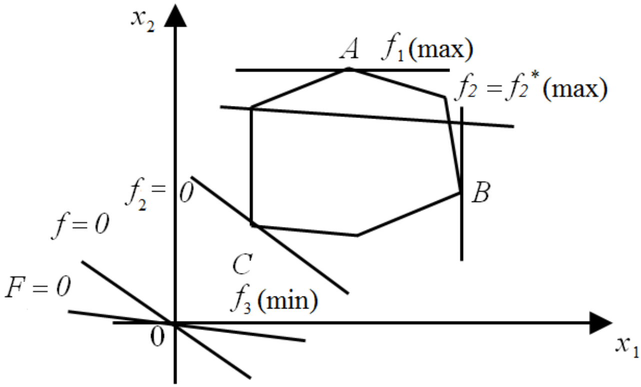


Рис. 28. Геометрическая интерпретация решения задачи векторной оптимизации методом последовательных уступок

На новом многограннике находим максимум функции $f_2 = f_2^*$. Делаем следующую уступку, т. е. $Z_2 = k_2 f_2^*, 0 < k_2 < 1$.

Вторая прямая отодвигается, еще более уменьшается область решений. План, минимизирующий на новой области третий критерий, и будет субоптимальным по всем трем критериям. Уменьшаются коэффициенты k_1 и k_2 (т. е. увеличивая потери по первым двум критериям можно приблизить к точке C, т. е. уменьшить проигрыш по третьему критерию).

Пример. Требуется решить задачу

$$F(x) = \{f_1 = x_1 + 3x_2, f_2 = 40x_1 + 10x_2\}(\max);$$

$$2x_1 + x_2 \leq 90;$$

$$x_1 + x_2 \leq 60;$$

$$x_2 \leq 50;$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10 % от его оптимального значения.

Решение. Решим задачу по критерию f_1. Получим $f_1^* = 160$. В соответствии с условием задачи величина уступки $\nabla_1 = 16$. Дополнительное ограничение будет иметь вид

$$f_1(x) = f_1^* - \nabla_1,$$

т. е.

$$x_1 + 3x_2 \geq 160 - 16.$$

Решим задачу:

$$f_2 = 40x_1 + 10x_2\}(\max);$$

$$2x_1 + x_2 \leq 90;$$

$$x_1 + x_2 \leq 60;$$

$$x_2 \leq 50;$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 144;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Получим $X^* = (18{,}42), f_2(X) = 1440, f_1(X^*) = 144$.

При решении задач ***методами целевого программирования*** предполагается приближение значения каждого критерия к определенной величине $\widetilde{f_\iota}$, т. е. достижение определенной цели.

В самом обще виде задача целевого программирования формулируется как задача минимизации сумм отклонений целевой функции от целевых значений с нормированными весами.

$$d\big(f\ (x), \tilde{f}\big) = (\textstyle\sum_{i=1}^{e} W_i\, |f_i\ (x) - \widetilde{f_\iota}|^p)^{\frac{1}{p}}\ (\min),$$

где $\tilde{f}\ = \{\widetilde{f_1}, \dots\ , \widetilde{f_l}\}$ – вектор целевых значений;

$W\ = \{W_1, \dots\ , W_l\}$ – вектор весов обычно

$$\sum_{i=1}^{e} W_i = 1, W_i \geq 0, (i\ = \overline{1, e}),$$

значение p находится в пределах $1 \leq p \leq \infty$;

$d\big(f\ (x), \tilde{f}\big)$ – расстояние (мера отклонения) между $f\ (x)$ и $\tilde{f}$. Во многих случаях принимают $p = 1$.

В задачах ***лексикографического программирования*** критерии строго упорядочены по важности, таким образом, что при сравнении пары решений в первую очередь используется критерий f_1 и лучшим считается то решение, для которого значение этого критерия больше, если значение первого критерия для обоих решений оказывается равным, то применяется критерий f_2 и предпочтение отдается тому решению, для которого значение f_2 больше, если и второй критерий не позволяет определить лучшее решение, то привлекается f_3 и т. д. до f_i.

Часто в лексикографическом программировании $\tilde{f} = f^*, p = 1$. Точка $\tilde{f}$ обычно не принадлежит области допустимого значения и поэтому иногда ее называют идеальной или утопической точкой. В некоторых методах целевого программирования допускается задание утопического множества. В ***методах, основанных на нахождении компромиссного решения***, используется принцип гарантированного результата (максимин, минимакс). Задача формулируется следующим образом:

$$\max_x \min_i f(x) = \{f_1, \dots, f_i\}.$$

Например, рассмотрим модификацию этого метода.

Пусть $\lambda_i(x)$ – величина нормированного критерия

$$\lambda_i(x) = \frac{f_i\,(x)}{f_i^*} \quad (i = \overline{1, e}).$$

Целевая функция будет иметь вид

$$\lambda^0(x) \max_x \min_i \lambda_i(x).$$

Обозначим

$$\lambda = \min_i \lambda_i(x).$$

Очевидно, что

$$\lambda - \lambda_i(x) \le 0.$$

Окончательно λ-задача будет иметь вид

$$\lambda^0 = \lambda(\max);$$

$$\lambda - \lambda_i\,(x) \le 0, (i = \overline{1, e});$$

$$q_k(x) \le b_k, (k = \overline{1, m});$$

$$x \ge 0.$$

Полученное решение является эффективным значением целевой функции $0 \leq \lambda^0 \leq 1$, чем меньше λ^0, тем противоречивее критерии.

При решении задач с неоднородной критерием стандартизация критериев осуществляется по формуле

$$\lambda_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^0}{f_i^* - f_i^0}, (i = \overline{1, e}),$$

где f_i^0 – наихудшее значение, которое принимает целевая функция в области допустимого значения.

Метод равных наименьших относительных отклонений. Относительное отклонение критерия f_i имеет вид

$$P_i = \left|\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*}\right|, (i = \overline{1, e}).$$

Целевая функция будет иметь вид $p = p_i(\min)$, а условие равенства отклонений добавит к системе ограничений $l - 1$ равенство вида

$$\left|\frac{f_1^* - f_1(x)}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*}\right|, (i = \overline{2, l}).$$

Решение может быть неэффективным, потому предварительно необходимо выделить область компромиссов.

Методы, основанные на человеко-машинных процедурах (интерактивное программирование). Решение задачи проходит в интерактивном режиме, обработка входных данных и вычисление производится на ЭВМ, а лицо, принимающее решение, оценивает полученное решение и может ввести или изменить заданные ранее весовые коэффициенты или уступки по критериям, определить направление оптимизации. Эта информация служит для постановки новой задачи оптимизации и получения промежуточных решений.

Диалог продолжается до тех пор, пока решение не будет удовлетворять требованиям лица, принимающего решение. Основным достоинством метода является использование знаний и интуиции лица, принимающего решение, глубоко понимающего смысл задачи.

Пример решения задачи векторной оптимизации на информации конкретного сельскохозяйственного предприятия приведен в прил. G.

12. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.1. Условие применимости динамического программирования

В общем виде динамическое программирование (динамическое планирование) можно определить как метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений, позволяющий указать пути решения целого класса экстремальных задач в теории управления, исследования операций, экономике.

Многошаговые экономические процессы расчленяются на шаги естественным образом. Это все процессы планирования и управления, развиваемые во времени. Естественным шагом в них может быть год, квартал, месяц, декада, неделя, день и т. д. Однако метод динамического программирования может использоваться при решении задач, где время вообще не фигурирует, разделение на шаги в них вводится искусственно. Поэтому «динамика» задач динамического программирования заключается в методе решения.

В экономической практике встречаются *два типа задач динамического программирования*:

1) задачи оптимального перспективного и текущего планирования во времени (их решают либо путем составления комплекса взаимосвязанных статических моделей для каждого периода, либо путем составления единой динамической задачи оптимального программирования с применением многошаговой процедуры принятия решений;

2) задачи многошагового нахождения оптимума при размещении производственных сил, а также оптимального быстродействия. Сущность: известна некоторая оптимальная структура производства с эффективностью z_1. В начальный момент времени существует неоптимальная структура с эффективностью z_0. Необходимо определить такие управляющие воздействия, которые за кратчайший период переведут структуру из начального положения в оптимальное.

Таким образом, идея метода заключается в том, что отыскание точек экстремума целевой функции многих переменных заменяют многократным поиском точек экстремума функции одной или небольшого числа переменных. Значение целевой функции для всего процесса динамического программирования получают простым суммированием частных значений того же критерия на каждом отдельном шаге:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x).$$

Определение. Если целевая функция $f(x)$ обладает этим свойством, то такой критерий называют аддитивным.

Во многих задачах, если в первоначальной постановке критерий оптимальности неаддитивен, постановку задачи надо видоизменить. Например, если критерий $f(x)$ представлен в виде произведений выигрышей, достигаемых на последнем этапе:

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \dots f_m(x)$$

(такой критерий называют мультиплексным), то этот критерий преобразовывают к аддитивному, прологарифмировав его. Таким образом, получают новый критерий, обладающий свойством аддитивности.

Общая схема решения задач с аддитивным критерием заключается в следующем. Пусть процесс управления состоит из m-шагов, на каждом шаге управление переменными X_i переводит всю систему из предыдущего состояния S_{i-1} в состояние S_i. Причем состояние S_i зависит только от состояния S_{i-1} и выбранного управления переменной x_i. Здесь наиболее существенно то, что новое состояние S_i не зависит от того, каким образом система пришла в состояние S_{i-1}, т. е. в теории динамического программирования рассматривают стратегии, зависящие только от текущего состояния (такие процессы называются процессами без последствия). В основе динамического программирования лежат два важных принципа.

1. *Принцип оптимальности* при решении задач динамического программирования характеризуют следующим образом: оптимальная стратегия обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальные состояния и решения, последующее решение должно определять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.

Таким образом, если рассматривать задачи о максимальном выигрыше функции $f(x)$ на m-шаговом процессе управления переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$ система перейдет из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{\text{конечное}}$, при этом было получено следующее функциональное уравнение динамического программирования (*уравнение Беллмана*):

$$f_m S_0 = \max f(x) = \max\left[f_1(s_0, x_1) + S_{m-1}[S_{m-1}(s_0, x_1)]\right].$$

Согласно этому выражению алгоритм полученного оптимального решения определяется как последовательность функций выигрыша на каждом шаге. Эти последовательности определяют друг друга, на каждом шаге выбирают управление с учетом будущего, и только на последнем шаге (состояние S_m) такой необходимости нет. Планируя оптимальным образом последний шаг, к нему присоединяют предпоследний и находят наибольший выигрыш на этих двух шагах. Затем к выигрышу на этих двух шагах присоединяют выигрыш на предыдущем шаге и т. д. (в динамическом программировании процесс разворачивается от конца к новому). Такое оптимальное управление, выбранное при определенном условии, что закончится предыдущий шаг, называют условным оптимальным управлением.

2. Второй основной *принцип погружения* утверждает, что природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов N, т. е. форма такой задачи инвариантна относительно N. В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным числом шагов оказывается как бы погруженным в семейство подобных ему процессов и может рассматриваться с позиции более широкого класса задач.

Реализация названных принципов дает гарантию того, что решение, принимаемое на очередном шаге, окажется наилучшим, оптимальным для всего процесса в целом, а не узких интересов данного этапа. Последовательность пошаговых решений приводит к решению исходной N-шаговой задачи.

Алгоритм решения задачи динамического программирования.

1. На выбранном шаге задачи имеется набор значений переменной, характеризующей последний шаг. При этом учитываем возможное состояние системы на предпоследнем шаге. Для каждого возможного состояния и для каждого значения выбранной переменной вычисляем значение целевой функции. Из них для каждого исхода предпоследнего шага выбираем оптимальное значение целевой функции и соответствие значения переменной. Запоминаем оптимальное значение переменной и соответствующее значение функции. Лучше всего составить таблицу (первоначальную).

2. Переходим к оптимизации на следующем шаге, которая определяется исходя из предыдущего шага, т. е. мы рассчитываем оптимизацию при любом значении новой переменной, но при оптимизационных значениях следующих переменных. Оптимизационное значение целевой функции на последующих шагах (при оптимизационных значениях последующих переменных) считывают из таблицы.

Если новая переменная характеризует первый, то переходим к п. 3, в противном случае повторяем п. 2 для следующей переменной.

3. При заданном в задаче исходном условии для каждого возможного значения первой переменной вычисляем значение целевой функ-

ции. Выбираем оптимальное значение функции и соответствующее оптимальное значение новой переменной.

4. При известном оптимальном значении первой переменной определяем исходные данные для второго шага и определяем в последней таблице остальное значение следующей переменной.

5. Если следующая переменная не характеризует последний шаг, то возвращаемся к п. 4, в противном случае переходим к п. 6.

6. Формируем (описываем) оптимальное значение.

12.2. Задача о «рюкзаке»

Рассмотрим конкретный **пример** задачи динамического программирования.

В самолет необходимо погрузить 4 вида различных изделий. Грузоподъемность самолета W, а масса каждого из предметов (контейнеров) составляет P_1, P_2, P_3, P_4. Ценность каждого из предметов определяется значениями V_1, V_2, V_3, V_4.

Определить, сколько и каких предметов необходимо загрузить в самолет, чтобы получить максимальную ценность всего груза.

Решение. Предположим, что в данной задаче имеются следующие цифровые данные. Объем (грузоподъемность) самолета $W = 83$. Масса единицы каждого груза составит:

$$P_1 = 24,\ P_2 = 22,\ P_3 = 16,\ P_4 = 10.$$

Ценность единицы каждого груза составит:

$$V_1 = 96,\ V_2 = 85,\ V_3 = 50,\ V_4 = 20 \text{ у. д. е.}$$

Очевидно, что эта задача относится к задачам целочисленного программирования.

I этап. *Шаг 1.* Найдем все возможные оптимальные варианты загрузки самолета только предметами I типа. Лучше всего использовать табличную форму записи (табл. 35): $P_1 = 24$, $V_1 = 96$.

Таблица 35. **Первая таблица задачи динамического программирования**

W	$f_1(W)$ – эффективность загрузки	x_1
0–23	0	0
24–47	96	1
48–71	192	2
72–83	288	3

Теперь приступим к *шагу 2*. Рассмотрим эффективность груза, если загружать самолет предметами I и II типов. Эффективность загрузки обозначим $f_2(W)$. При этом, если предметов II типа взято количество x_2, то масса предметов I типа должна быть не больше чем

$$W - P_2X_2,$$

а максимальная эффективность груза составит

$$f_{12} = X_2V_2 + f_1(W - P_2X_2).$$

Количество предметов x_2 должно быть больше или равно нулю, но меньше или равно $W/_{P_2}$; снова составим таблицу (табл. 36), где отразим все возможные варианты загрузки самолета предметами II и I типов:

$$P_1 = 24,\ P_2 = 22,\ V_1 = 96,\ V_2 = 85.$$

Таблица 36. **Вторая таблица задачи динамического программирования**

W	$f_2(W)$	x_2
0–21	0	0
22–23	85	1
24–43	96	0
44–45	170	2
46–47	181	1
48–65	192	0
66–67	255	3
68–69	266	2
70–71	277	1
72–83	288	0

Шаг 3. В самолет загружаем предметы x_3. Составляем таблицу (табл. 37):

$$P_1 = 24,\ P_2 = 22,\ P_3 = 16,\ V_1 = 96,\ V_2 = 85,\ V_3 = 50.$$

Таблица 37. **Третья таблица задачи динамического программирования**

W	$f_3(W)$	x_3
1	2	3
0–15	0	0
16–21	50	1
22–23	85	0
24–31	96	0
32–37	100	2

Окончание табл. 37

1	2	3
38–39	135	1
40–43	146	1
44–45	170	0
46–47	181	0
48–63	192	0
64–69	242	1
70–71	277	0
72–83	288	0

Шаг 4. Самолет загружается предметами x_4. Составляем таблицу (табл. 38):

$$P_4 = 10,\ P_1 = 24,\ P_2 = 22,\ P_3 = 16,\ V_4 = 20,\ V_1 = 96,\ V_2 = 85,\ V_3 = 50.$$

Таблица 38. **Четвертая таблица задачи динамического программирования**

W	$f_4(W)$	x_4
…	…	…
58–63	212	1
64–69	242	0
70–71	277	0
72–81	288	0
82–83	308	1

После расчета табл. 35–38 приступают к **II этапу** – поиску оптимального решения. В этом случае опираются на значения $f(W)$.

Если посмотреть по всем таблицам и найти максимально возможное $f(W)$, это и будет оптимальным решением.

В первой таблице – $f_1(W) = 288$ (табл. 35).

Во второй таблице – $f_2(W) = 288$ (табл. 36).

В третьей таблице – $f_3(W) = 288$ (табл. 37).

В четвертой таблице – $f_4(W) = 308$ (табл. 38).

Следовательно, $f_4(W) = 308$ – это и есть оптимальное решение. По этому решению выходит, что $x_4 = 1$. Следовательно, на остальные три предмета осталось 83 – 10 = 73.

Переходим к табл. 37. Видим, что $x_3 = 0$, остаток составляет 73.

Просматриваем табл. 36, $x_2 = 0$, остаток для табл. 35 равен 73. Из табл. 35 следует, что $x_1 = 3$.

При [83 – (24 · 3 + 10) = 1].

При таком варианте загрузки остаток недоиспользованной грузоподъемности составляет 1.

Если просмотреть все четыре таблицы (табл. 35–38), не сложно заметить, что решили задачу для любых самолетов с грузоподъемностью до W = 83. В принципе, если задача будет более сложная (количество разных предметов больше, грузоподъемность больше), то решать такие задачи вручную весьма проблематично из-за больших объемов вычислений.

13. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

13.1. Задача быстродействия

Задача быстродействия для управляемого объекта была поставлена специалистами по автоматическому регулированию в начале 50-х гг.

Постановка задачи. Тяжелая материальная точка движется по прямой под действием целенаправленных воздействий (рис. 28).

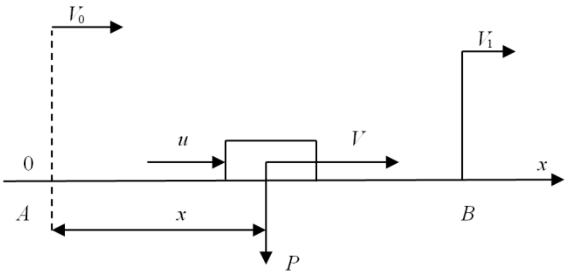


Рис. 28. Графическая интерпретация задачи быстродействия для управляемого объекта

Требуется найти такой закон управления воздействиями, при котором точка, находящаяся в начальный момент в заданном положении A и имеющая определенное значение скорости, за минимальное время проходит с заданной скоростью через заданное положение B.

Составим математическую модель задачи. Согласно закону Ньютона уравнение движения точки без учета сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} = u, \tag{12}$$

где x – расстояние точки от начального положения A;

m – масса точки;

$\ddot{x}$ – ускорение;

u – сила, приложенная к точке, величиной и направлением которой можно распоряжаться.

Материальную точку, движением которой управляем, назовем объектом управления; внешнюю силу u, выбором которой можно распоряжаться, – управлением (входным воздействием, входной переменной); положение точки $x_1 = x$ и ее скорость $x_2 = \dot{x}$ – выходными переменными. За изменением выходных переменных x_1, x_2 удобно следить на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ (рис. 29). Начальное их значение изобразится точкой A, конечное – точкой B.

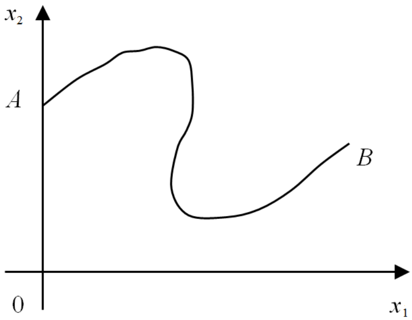


Рис. 29. Движение управляемого объекта – материальной точки

В новых обозначениях уравнение (12) эквивалентно системе:

$$\dot{x_1} = x_2;$$

$$\dot{x_2} = \frac{u}{m}. \qquad (13)$$

Задача быстродействия звучит теперь так: найти закон изменения управления $u = u(t)$, при котором траектория системы (13) за кратчайшее время переходит из точки A в точку B фазовой плоскости.

Приведенная модель не адекватна реальной задаче. В любой конкретной задаче управляющие воздействия так или иначе ограничены. Поэтому в дополнение к уравнениям (13) нужно записать ограничения, наложенные на управление. Будем считать, что величина силы, которую можно в каждый момент времени прикладывать к материальной точке, ограничена заданным числом:

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0. \qquad (14)$$

С учетом сделанного дополнения задачу быстродействия сформулируем таким образом: найти функцию управления $u(t), t \geq 0$, удовлетворяющую ограничению (14), при которой фазовая траектория системы (13) за кратчайшее время приходит из точки A в точку B (см. рис. 29). Приведенная формулировка станет точной математической моделью задачи быстродействия, если укажем класс функций $u(t), t \geq 0$, среди которых выбирается управление. Для большинства практических и теоретических задач достаточно ограничиться классом кусочно-непрерывных функций.

Нетрудно заметить, что приведенная задача быстродействия созвучна задаче о брахистохроне. В обоих случаях рассматриваются траектории тяжелой материальной точки. Движение точки между заданными положениями оценивается с точки зрения времени, и поэтому задачи называются почти одинаково. Однако между ними имеются и различия, которые привели к появлению теории оптимальных процессов. Прежде всего в этих задачах различен способ воздействия на материальную точку. В задаче о брахистохроне для движения используется естественная сила тяжести, в задаче быстродействия – подчиненная нам искусственная или естественная сила, называемая управлением.

Формулировка задачи о брахистохроне есть прямое обобщение задач о минимуме функций конечного числа переменных и о выборе элемента среди заданного множества. В постановке задачи о быстродействии подчеркивается мысль о поэтапном воздействии на движение определенного объекта, идея управления им.

С математической точки зрения в задаче о брахистохроне находится траектория точки, в задаче быстродействия – управление (сила, ускорение). Значит, изменились пространства функций, среди которых ищется наилучшая.

Наиболее существенное различие между рассматриваемыми задачами состоит в том, что в задаче о брахистохроне не накладываются ограничения на выбор траекторий, в задаче же быстродействия наличие ограничения (14) принципиально, ибо без него задача не будет иметь решения.

Обобщение задачи быстродействия. Задача быстродействия (13), (14) является одной из простейших в теории оптимальных процессов. Непосредственное ее обобщение на многомерный случай таково: в n-мерном пространстве заданы две точки x^1 и x^2. Требуется траекторию $x(t)$ n-мерной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{15}$$

с помощью r-мерных кусочно-непрерывных управлений $u(t)$ со значениями из заданного множества U

$$u(t) \in U \tag{16}$$

перевести за кратчайшее время из точки x^1 в точку x^2.

13.2. Принцип максимума Понтрягина

Простейшей задачей оптимального управления является задача терминального управления со свободным правым концом.

Постановка задачи. Основные определения. Пусть движение некоторого объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \;\; x(t_0) = x_0, \tag{17}$$

где x – n-вектор;

u – r-вектор;

t – скаляр;

$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$.

Относительно функции $f(x, u, t)$ будем предполагать, что она непрерывна по аргументам вместе с функцией $\partial f(x, u, t)/\,\partial x$.

Допустимым уравнением назовем r-мерную кусочно-непрерывную функцию $u(t), t \in T$, принимающую значения из заданного множества U r-мерного пространства $u(t), t \in T$.

Каждому допустимому $u(t), t \in T$ соответствует некоторое решение $x(t), t \in T$, (допустимая траектория) уравнения (17) (рис. 30).

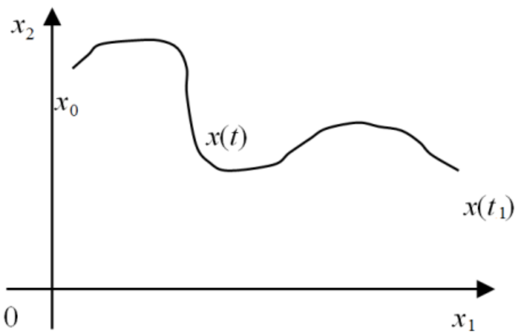


Рис. 30. Допустимая траектория r-мерной кусочно-непрерывной функции

Качество процесса $x(t), t \in T$, оценим величиной:

$$I(x) = \varphi\big(x(t_1)\big). \tag{18}$$

где $\varphi(x)$ – скалярная функция класса $C^{(1)}$.

Функцию (18) назовем критерием качества процесса.

Простейшая задача оптимального управления: среди допустимых управлений найти то, на котором критерий качества (18) достигает минимального значения.

Решение задачи: управление $u^0(t), t \in T$ называется оптимальным управлением, траектория $x^0(t), t \in T$ системы (17), соответствующая управлению $u^0(t)$, – оптимальной траекторией.

Из-за того что критерий качества задачи определен на конечных состояниях $x(t_1)$ системы (17), простейшая задача оптимального управления называется еще задачей терминального управления, или задачей управления конечным состоянием системы. Геометрически простейшая задача заключается в том, чтобы достичь вдоль допустимых траекторий системы (17) линию минимального уровня функции $\varphi(x)$ (рис. 31).

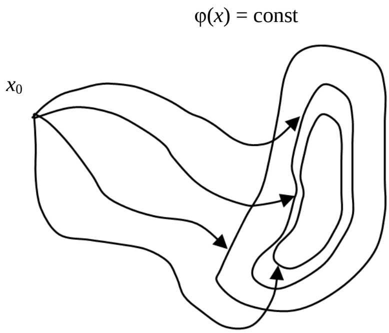


Рис. 31. Геометрическая интерпретация простейшей задачи оптимального управления

Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина).

Пусть $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление простейшей задачи (17), (18), $x^0(t), t \in T$ – оптимальная траектория, $\varphi^0(t), t \in T$ – решение уравнения

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial H\,(x^0, \varphi, u^0,\ t)}{\partial x}, \quad \varphi(t_1) = -\frac{\partial \varphi\left(x^0(t_1)\right)}{\partial x}. \tag{19}$$

Тогда выполняется условие максимума

$$H(x^0\,(t), \varphi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0\,(t), \varphi^0(t), u, t, \ \ t \ \in T. \quad (20)$$

Замечание. Можно сказать, что, несмотря на то, что оптимальное управление $u^0(t), t \ \in \ T$, может оказаться кусочно-непрерывной функцией, функция $H(t) = H(x^0(t), \varphi^0(t), u^0(t), t)$ непрерывна на отрезке *T*.

13.3. Синтез линейных систем, оптимальных по быстродействию

Для ряда задач оптимизации линейных систем принцип максимума является и достаточным условием оптимальности.

1. Постановка задачи. Принцип максимума – достаточное условие оптимальности. Рассмотрим линейный вариант задачи быстродействия

$$\dot{x} = Ax + Bu, \dot{x}(0) = x_0, x(t) = 0; \quad (21)$$

$$u(t) \ \in \ U, t_1 \rightarrow \min,$$

где A – постоянная n×n-матрица;

B – постоянная n×r-матрица;

x – n-вектор;

U – множество r-мерного пространства, содержащее начало координат в качестве внутренней точки.

Гамильтониан системы (21) имеет вид

$$H(x, \varphi, u) = \varphi' Ax + \varphi' Bu.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\varphi} = -A'\varphi. \quad (22)$$

Согласно результату оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума, т. е. найдется такое ненулевое решение $\varphi^0(t)$ уравнения (22), что

$$\varphi^{0'}(t) B u^0(t) = \max_{u \in U} \varphi^{0'}\,(t) Bu. \quad (23)$$

Условие (23) следует, очевидно, из условия максимума теоремы (24).

Докажем, что принцип максимума для линейных систем является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Будем предполагать, что система (12) управляема (18), т. е.

$$\operatorname{rank}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n. \tag{24}$$

Здесь в фигурных скобках стоит $n \times nr$-матрица.

Ниже используется следующее свойство управляемых систем:

$$\varphi'(\tau)B \neq 0, \tau \geq 0,$$

если

$$\varphi(\tau) \neq 0.$$

Теорема. Пусть $u(t), t \in [0, t_1]$ – допустимое управление, вдоль которого выполняется условие максимума:

$$\varphi'(t)Bu\,(t) = \max_{u \in U} \varphi'\,(t)\,Bu, t \in [0, t_1],$$

где $x(t), t \in [0, t_1]$ – решение уравнения (21), соответствующее управлению $u(t)$ и удовлетворяющее условию $x(t_1) = 0$; $\varphi(t)$;

$t \in [0, t_1]$ – некоторое ненулевое решение уравнения (22).

Тогда $u(t)$; $t \in [0, t_1]$ – оптимальное управление, переводящее траекторию $x(t)$ из x_0 в $x = 0$ за наименьшее время.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Своевременный и качественный прогноз, оценка уровня эффективности и надежности функционирования сложных экономических систем оказывают непосредственное влияние на финансовое состояние, конкурентоспособность предприятия, благосостояние и качество жизни населения региона.

В курсе лекций рассмотрены предмет и задачи курса; транспортные задачи; применение линейного программирования к специальным задачам экономики; нелинейное программирование; динамическое программирование; методы дискретной оптимизации; векторная оптимизация; вариационное исчисление; теория оптимальных процессов.

Вышеизложенное требует применения персональных компьютеров и комплекса экономико-математических методов и моделей, формализующих неопределенность, неполноту информации, которые характерны для конкретных экономических систем в различных хозяйственных ситуациях. Поэтому важно, чтобы в процессе обучения студент освоил современные методы оптимизации, приобрел практические навыки анализа и планирования экономических систем в производственной и коммерческой деятельности.

Потребность в действенном механизме планирования в сельском хозяйстве ведет к поиску новых подходов для обновления нормативной базы планирования, в том числе путем совершенствования существующих методик с использованием экономико-математических методов.

Экономико-математическая задача для обоснования оптимальной специализации сельскохозяйственного предприятия включает систему переменных, перечень ограничений, подготовку входной информации, развернутую ЭМЗ в форме линейных уравнений и неравенств, матрицу и распечатку решения. Экономико-математическая модель является типовой и доступной для студентов, будущих специалистов планово-экономических служб. Математическое обеспечение представляет собой пакет прикладной программы LPX88 или Excel, с помощью которой можно решать оптимизационные задачи симплексным методом.

Применение разработанной модели позволит определить плановые показатели на базе современных методов моделирования и прогнозирования и будет доступно для студентов, будущих специалистов предприятий.

Конечный эффект будет зависеть от того, насколько менеджеры сельскохозяйственных организаций смогут наладить рентабельное производство при оптимальном использовании земельных, трудовых, материальных и финансовых ресурсов в процессе реализации результатов решения экономико-математической задачи.

Расчет параметров при решении задачи для определения оптимального сочетания отраслей растениеводства и животноводства при четко заданных ограничениях и целевой функции неизбежно ведет к росту эффективности производства, т. е. к высокому уровню рентабельности продаж и производительности труда, низкой себестоимости, максимально возможным объемам реализуемой продукции на внутренних и внешних рынках. Поэтому составление наилучшего проекта – многоцелевая задача, которая должна обеспечивать получение максимального количества прибыли и способствовать снижению (минимизации) издержек производства. Следовательно, качество программы развития предприятия, получаемого в результате решения экономико-математической задачи только по одному критерию, может оказаться не лучшим. Использование других критериев оптимальности в отдельности создает аналогичную ситуацию, так как в каждом оптимальном плане значение выбранного в качестве целевой функции показателя экстремальное, а значения других – хуже, чем могли бы быть. В связи с этим возникает задача поиска компромиссного или субоптимального решения, которое учитывает одновременно действие всех критериев оптимальности и отражает все реально поставленные условия.

Получение субоптимальных планов в экономике называют многоцелевой оптимизацией, или решением многокритериальных задач (т. е. векторной оптимизацией). При многокритериальной оптимизации возникают три основные проблемы: выбор самого принципа оптимальности, т. е. что считать оптимальным решением, и в каком смысле это оптимальное решение превосходит все остальные; частные (локальные) критерии оптимальности часто имеют различные единицы и масштабы измерения, что делает невозможным их непосредственное сравнение и ведет к поиску нужного решения; во многих случаях необходимо учесть степень важности (приоритета) локальных критериев.

Поэтому на информации конкретной сельскохозяйственной организации была отработана практическая задача по установлению оптимального сочетания отраслей на перспективу с учетом множества методов решения векторной оптимизации:

– линейной свертки;
– ведущего критерия;
– последовательных уступок;
– равных и наименьших относительных отклонений;
– минимакса.

Полученные варианты решения экономико-математической задачи должны подвергаться тщательному анализу. Так как вычисления производятся на персональном компьютере, то экономист или менеджер, оценивая результаты, может ввести или изменить заданные ранее весовые коэффициенты или уступки по критериям, определить направление оптимизации. Эта информация служит основой для получения нового промежуточного решения. Интерактивный режим работы должен продолжаться до тех пор, пока решение не будет удовлетворять требованиям работника планово-экономической службы.

Рассмотренные в курсе лекций экономико-математические методы и модели в разных постановках используются для анализа и планирования деятельности аграрных организаций. Используя предлагаемые экономико-математические методы и модели, адекватно описывающие функционирование предприятий и организаций в современных условиях, можно обосновать мероприятия, позволяющие значительно увеличить конечные результаты их работы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Определите необходимость использования математических методов в условиях рынка.

2. Раскройте применение методов динамического программирования в экономике АПК.

3. Приведите основные моменты истории развития дисциплины.

4. Дайте определение целевой функции.

5. Назовите требования к задачам, решаемым методами оптимального планирования.

6. Проанализируйте применение методов линейного программирования в экономике АПК.

7. Раскройте сущность, предмет и задачи дисциплины.

8. Что понимается под математическим программированием?

9. Раскройте понятие математической модели задачи и ее составляющие.

10. Раскройте применение методов нелинейного программирования в экономике АПК.

11. Назовите специфические особенности применения математического моделирования для расчетов в сельском хозяйстве.

12. Что понимается под допустимым и оптимальным планом задачи?

13. Какие исходные данные необходимы для постановки транспортной задачи?

14. Каким образом рассчитывается система потенциалов?

15. В каком случае модель транспортной задачи называют закрытой?

16. Перечислите правила построения цикла.

17. Каковы основные этапы схемы решения транспортной задачи?

18. Каковы признаки оптимального решения при использовании метода потенциалов?

19. Назовите разновидности способов нахождения допустимого (опорного) решения.

20. Раскройте математическую постановку транспортной задачи.

21. Приведите табличную (матричную) модель транспортной задачи.

22. Раскройте алгоритм решения задачи методом Фогеля.

23. Приведите условие баланса спроса и предложения для задачи транспортировки различного груза различными видами транспорта.

24. Продолжите: «На 1-м и 2-м этапах решения задач транспортировки груза различными видами транспорта оценочными коэффициентами соответственно выступают … .

25. Назовите этапы решения задачи транспортировки однородного груза различными видами транспорта.

26. Какой критерий оптимальности используют при решении задачи транспортировки однородного груза различными видами транспорта?

27. Определите сущность 1-го этапа задачи транспортировки однородного груза различными видами транспорта.

28. Назовите сущность 2-го этапа задачи транспортировки однородного груза различными видами транспорта.

29. Назовите перечень информации, необходимой для решения задачи транспортировки однородного груза различными видами транспорта.

30. Перечислите перечень информации, необходимой для решения задачи транспортировки различного груза различными видами транспорта.

31. Какая задача называется модифицированной?

32. Каким образом задача о перевозках с перегрузкой сводится к традиционной?

33. Какими методами решается модифицированная задача?

34. Кем и когда впервые была опубликована задача о назначениях?

35. Раскройте экономическую постановку задачи о назначениях.

36. Определите особенность задачи о назначениях.

37. Какая взаимосвязь традиционной транспортной задачи и задачи о назначениях?

38. Какими методами можно найти точное решение задачи о назначениях?

39. Раскройте алгоритм решения задачи о назначениях.

40. Каким образом можно получить новые нулевые элементы?

41. Приведите симметричную форму записи задачи линейного программирования.

42. Раскройте сущность задачи о смесях.

43. Что может являться областью допустимых решений задачи линейного программирования?

44. Раскройте геометрическую интерпретацию элементов задачи линейного программирования.

45. Приведите общий вид математической модели задачи линейного программирования.

46. Раскройте сущность задачи о выборе оптимальных технологий.

47. Что называют линиями уровня целевой функции?

48. Перечислите случаи, возникающие при решении задач графическим способом.

49. Приведите каноническую форму записи задачи линейного программирования.

50. Раскройте сущность задачи о наилучшем использовании ресурсов организации.

51. Что называют градиентом функции?

52. Назовите основные этапы решения задач графическим методом.

53. Назовите основные этапы решения задач симплексным методом.

54. Какова процедура построения первой симплексной таблицы?

55. Каковы признаки оптимального решения при использовании симплексного метода?

56. Перечислите основные действия при корректировке оптимального решения по основным небазисным переменным.

57. Раскройте экономический смысл новых коэффициентов разрешающей строки при использовании симплексного метода.

58. Раскройте экономический смысл дополнительных переменных.

59. Каковы признаки опорного решения при использовании симплексного метода?

60. В чем состоит идея симплексного метода?

61. Перечислите основные действия при корректировке оптимального решения по дополнительным небазисным переменным.

62. Раскройте экономический смысл новых коэффициентов разрешающего столбца.

63. Каким образом задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду?

64. Приведите формулы для расчета элементов новой симплексной таблицы.

65. В каких случаях может оказаться необходима корректировка оптимального плана задачи линейного программирования?

66. Какой экономический смысл и процедура корректировки по базисным переменным?

67. Раскройте экономический смысл нового разрешающего коэффициента.

68. Какой задачей называют двойственную задачу линейного программирования?

69. Каковы правила построения двойственной задачи?

70. Раскройте экономический смысл двойственных оценок.

71. Как связаны между собой решения прямой и двойственной задач?

72. Что показывают двойственные оценки?

73. Раскройте сущность второй теоремы двойственности.

74. Приведите общий вид двойственной задачи.

75. Назовите основные свойства двойственных оценок.

76. Раскройте сущность первой теоремы двойственности.

77. Каковы отличия коэффициентов корреляционных моделей от двойственных оценок?

78. Дайте определение вогнутой (строго вогнутой) функции.

79. Назовите основные свойства выпуклых функций.

80. Дайте определение седловой точки.

81. Перечислите основные этапы реализации итерационных методов.

82. Раскройте сущность метода случайного поиска.

83. Раскройте сущность метода штрафных функций.

84. Приведите общий вид задачи нелинейного программирования.

85. Дайте определение положительно (отрицательно)-определенной (полуопределенной) квадратичной формы.

86. Какую функцию называют унимодальной?

87. Приведите теорему Куна-Таккера.

88. Назовите сущность градиентных методов.

89. Раскройте сущность метода кусочно-линейной аппроксимации.

90. Дайте определение выпуклой (строго выпуклой) функции.

91. Приведите общий вид задачи квадратичного программирования.

92. Что называют золотым сечением отрезка?

93. Перечислите основные методы многомерной минимизации.

94. Раскройте сущность метода нулевого порядка.

95. Определите сущность метода барьерных функций.

96. Что понимают под дискретным программированием?

97. Назовите классификацию методов целочисленной оптимизации.

98. В чем заключается основная идея комбинаторных методов?

99. Определите основные свойства области допустимых решений задач целочисленнного программирования.

100. Назовите первый критерий зондирования.

101. Что понимают под решением-претендентом и рекордом?

102. Какую задачу называют целочисленной (полностью или частично целочисленной)?

103. Приведите классификацию задач динамического программирования.

104. В чем заключается основная идея метода отсечений?

105. В чем заключается 1-й этап алгоритма Гомори?

106. Назовите второй критерий зондирования.

107. Приведите общий вид математической модели задачи целочисленного программирования.

108. Какие задачи называют комбинаторными?

109. Перечислите основные направления приближенных методов дискретной оптимизации.

110. В чем заключается 3-й этап алгоритма Гомори?

111. Назовите третий критерий зондирования.

112. Кем впервые была поставлена задача о брахистохроне?

113. В каком году была разработана задача о брахистохроне?

114. В чем заключается особенность задачи о брахистохроне?

115. Раскройте определение простейшей задачи вариационного исчисления.

116. В каком случае функционал на допустимой кривой достигает сильного минимума?

117. В каком случае функционал на допустимой кривой достигает слабого минимума?

118. Дайте определение вариации допустимой кривой.

119. Дайте опреление первой и второй вариации функционала.

120. Назовите необходимые условия слабого минимума.

121. Сформулируйте основную лемму Лагранжа.

122. В чем отличие первого и второго уравнений Эйлера?

123. Дайте определение экстремали.

124. Сформулируйте лемму Дюбуа-Реймона.

125. В чем заключается сущность условий Лежандра и Якоби?

126. Сформулируйте понятия «векторный критерий качества» и «допустимый вектор».

127. Приведите математическую формулировку задачи векторной оптимизации.

128. Перечислите основные типы постановок задач векторной оптимизации.

129. Перечислите основные типы многокритериальных задач.

130. Какие основные проблемы возникают при разработке методов решения векторных задач?

131. Приведите общий вид задачи целевого программирования.

132. В чем заключается сущность минимизации иерархической системы критериев качества?

133. Раскройте сущность минимизации взвешенных критериев качества в задачах векторной оптимизации.

134. Дайте определение неулучшаемой точки.

135. Какова особенность задач векторной оптимизации?

136. Дайте определение понятию «нормирование».

137. В чем заключается основная идея метода линейной комбинации частных критериев?

138. Назовите подходы направлений методов, использующих ограничения на критерии.

139. Приведите алгоритм метода ведущего критерия.

140. Раскройте алгоритм метода последовательных уступок.

141. Раскройте сущность методов целевого программирования.

142. Какую точку называют идеальной, или утопической?

143. Раскройте сущность методов интерактивного программирования.

144. Что понимают под динамическим программированием?

145. Перечислите основные типы задач динамического программирования.

146. В чем заключается сущность принципа погружения?

147. Приведите общую схему решения задач с аддитивным критерием.

148. Какой критерий оптимальности называют аддитивным?

149. Назовите основные принципы динамического программирования.

150. В чем состоит идея метода динамического программирования.

151. Приведите функциональное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана).

152. Какой критерий оптимальности называют мультиплексным?

153. Раскройте сущность задачи многошагового нахождения оптимума при размещении производительных сил.

154. В чем заключается сущность принципа оптимальности?

155. Что понимают под условным оптимальным управлением?

156. Сформулируйте постановку задачи быстродействия.

157. Дайте определение объекту управления.

158. Назовите отличие задачи быстродействия от задачи о брахистохроне.

159. Кем был сформулирован принцип максимума?

160. Что находится с математической точки зрения в задаче быстродействия?

161. Какая задача является простейшей задачей оптимального управления?

162. В чем заключается сущность простейшей задачи оптимального управления?

163. Сформулируйте принцип максимума Понтрягина.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азарнова, Т. В. Методы оптимизации: учеб. пособие / Т. В. Азарнова, И. Л. Каширина, Г. Д. Чернышова. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 87 с.

2. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие / И. Л. Акулич. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2012. – 352 с.

3. Аттетков, А. В. Введение в методы оптимизации: учеб. пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. – Москва: Финансы и статистика, 2014. – 270 с.

4. Гребенникова, И. В. Методы оптимизации: учеб. пособие / И. В. Гребенникова. – Екатеринбург: УрФУ, 2017. – 148 с.

5. Дорохина, Е. Ю. Моделирование микроэкономики: учеб. пособие / Е. Ю. Дорохина, М. А. Халиков; под общ. ред. Н. П. Тихомирова. – Москва: Экзамен, 2003. – 222 с.

6. Казанская, О. В. Модели и методы оптимизации: практикум / О. В. Казанская, С. Г. Юн, О. К. Альсова. – Новосибирск: НГТУ, 2012. – 204 с.

7. Кириллов, Ю. В. Прикладные методы оптимизации: учеб. пособие. В 2 ч. / Ю. В. Кириллов, С. О. Веселовская. – Новосибирск: НГТУ, 2012. – Ч. 1: Методы решения задач линейного программирования. – 235 с.

8. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учеб. / В. А. Колемаев. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 399 с.

9. Колеснев, В. И. Компьютерное моделирование для анализа и планирования АПК: монография / В. И. Колеснев, И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2014. – 292 с.

10. Колеснев, В. И. Экономико-математические методы и модели в сфере АПК: пособие. В 4 ч. / В. И. Колеснев. – Минск: 2009. – Ч. 4. – 102 с.

11. Леньков, И. И. Моделирование и прогнозирование экономики агропромышленного комплекса: учеб. пособие / И. И. Леньков. – Минск: БГАТУ, 2011. – 228 с.

12. Ленькова, Р. К. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Р. К. Ленькова, Е. В. Гончарова. – Горки: БГСХА, 2011. – 220 с.

13. Летова, Т. А. Методы оптимизации. Практический курс: учеб. пособие / Т. А. Летова, А. В. Пантелеев. – Москва: Логос, 2011. – 424 с.

14. Лутманов, С. В. Линейные задачи оптимизации: учеб. пособие. В 2 ч. / С. В. Лутманов. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2004. – Ч. 1. Линейное программирование. – 128 с.

15. Лутманов, С. В. Линейные задачи оптимизации: учеб. пособие. В 2 ч. / С. В. Лутманов. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2005. – Ч. 2. Оптимальное управление линейными динамическими объектами. – 195 с.

16. Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов [и др.]. – Минск: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

17. Мицель, А. А. Методы оптимизации: учеб. пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов, В. В. Романенко. – Томск: ТУСУР, 2017. – 198 с.

18. Экономическое моделирование в Microsoft Excel: пособие / Д. Х. Мур [и др.]. – Москва: Вильямс, 2004. – 1024 с.

19. Новикова, Н. В. Экономико-математические методы и модели: конспект лекций / Н. В. Новикова. – Минск, 2010. – 46 с.

20. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – Москва: Вузовский учебник, 2013. – 140 с.

21. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учеб. пособие / И. В. Орлова. – Москва: Вузовский учебник, 2013. – 389 с.

22. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – Москва: Высш. шк., 2005. – 544 с.

23. Рейзлин, В. И. Численные методы оптимизации: учеб. пособие / В. И. Рейзлин; Томский политех. ун-т. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 105 с.

24. Ренин, С. В. Методы оптимизации. Сборник задач и упражнений / С. В. Ренин, Н. Д. Ганелина. – Новосибирск: НГТУ, 2011. – 52 с.

25. Ромашова, О. Ю. Методы оптимизации и расчеты на ЭВМ технико-экономических задач: учеб. пособие / О. Ю. Ромашова. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 210 с.

26. Струченков, В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах / В. И. Струченков. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 434 с.

27. Струченков, В. И. Методы оптимизации: основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы / В. И. Струченков. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 266 с.

28. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации: учеб. пособие / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – 2-е изд. – Москва: Физматлит, 2011. – 368 с.

29. Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, И. В. Орлова. – Москва: Юрайт, 2013. – 328 с.

30. Анализ работы и обоснование перспективной программы развития сельскохозяйственных организаций на основе эконометрических и оптимизационных моделей: рекомендации / И. В. Шафранская [и др.]. – Горки: БГСХА, 2016. – 101 с.

31. Шафранская, И. В. Исследование операций: пособие / И. В. Шафранская. – Дюссельдорф: LAP LAMBERT Academic Publishing PU, 2016. – 324 с.

32. Шафранская, И. В. Исследование операций: практикум / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2013. – 160 с.

33. Шафранская, И. В. Оптимизация экономических систем: курс лекций / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2012. – 140 с.

34. Шафранская, И. В. Системный анализ и моделирование программы развития аграрных организаций: монография / И. В. Шафранская, О. М. Недюхина, И. Н. Шафранский. – Горки: БГСХА, 2016. – 290 с.

35. Экономико-математические методы и модели: практикум / С. Ф. Миксюк [и др.]; под общ. ред. С. Ф. Миксюк. – Минск: БГЭУ, 2008. – 310 с.

36. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / С. Ф. Миксюк [и др.]; под общ. ред. С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова. – Минск: БГЭУ, 2006. – 218 с.

37. Экономико-математическое моделирование: учеб. / И. Н. Дрогобыцкий [и др.]; под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. – Москва: Экзамен, 2004. – 800 с.

38. Юферева, О. Д. Экономико-математические методы и модели: сб. задач / О. Д. Юферева. – Минск: БГЭУ, 2002. – 180 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Задача о назначениях

Пример. Необходимо распределить 8 исполнителей на выполнение 8 работ с целью максимизации производительности труда. Производительность труда работников приведена в табл. А1.

Работников A_5, A_6 и A_7 не целесообразно использовать при выполнении работ B_2 и B_3, а на работах B_6 и B_7 нельзя использовать работников A_2, A_3 и A_4.

Таблица А1. **Производительность труда работников**

Исполнитель, A_i	Работа, у. д. е.							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	4	6	5	1	7	2	9	13
A_2	7	8	12	5	4	–	–	10
A_3	1	3	5	8	9	–	–	14
A_4	15	13	10	6	3	–	–	2
A_5	3	–	–	2	10	8	12	5
A_6	8	–	–	7	12	6	1	3
A_7	7	–	–	4	8	5	6	1
A_8	2	5	9	10	13	1	16	4

Решим задачу симплексным методом на персональном компьютере.

Составим ограничения развернутой экономико-математической задачи:

I. По распределению работ для выполнения:

1) работа $B_1 - x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} = 1$;

2) работа $B_2 - x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{82} = 1$;

3) работа $B_3 - x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{83} = 1$;

4) работа $B_4 - x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} = 1$;

5) работа $B_5 - x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} + x_{85} = 1$;

6) работа $B_6 - x_{16} + x_{56} + x_{66} + x_{76} + x_{86} = 1$;

7) работа $B_7 - x_{17} + x_{57} + x_{67} + x_{77} + x_{87} = 1$;

8) работа $B_8 - x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{88} = 1$.

II. По распределению исполнителей по работам

9) исполнитель $A_1 - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1$;

10) исполнитель $A_2 - x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{28} = 1$;

11) исполнитель $A_3 - x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{38} = 1$;

12) исполнитель $A_4 - x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{48} = 1$;

13) исполнитель $A_5 - x_{51} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 1$;

14) исполнитель $A_6 - x_{61} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} = 1$;

15) исполнитель $A_7 - x_{71} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} = 1$;

16) исполнитель $A_8 - x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} + x_{87} + x_{88} = 1$.

Целевая функция – максимизация производительности труда работников при выполнении работ.

$$F_{\max} = 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 1x_{14} + 7x_{15} + 2x_{16} + 9x_{17} + 13x_{18} + 7x_{21} +$$
$$+8x_{22} + 12x_{23} + 5x_{24} + 4x_{25} + 10x_{28} + 1x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 8x_{34} +$$
$$+9x_{35} + 14x_{38} + 15x_{41} + 13x_{42} + 10x_{43} + 6x_{44} + 3x_{45} + 2x_{48} + 3x_{51} +$$
$$+2x_{54} + 10x_{53} + 8x_{56} + 12x_{57} + 5x_{58} + 8x_{61} + 7x_{64} + 12x_{65} + 6x_{66} +$$
$$+1x_{67} + 3x_{68} + 7x_{71} + 4x_{74} + 8x_{75} + 5x_{76} + 6x_{77} + 1x_{78} + 2x_{81} + 5x_{82} +$$
$$+9x_{83} + 10x_{84} + 13x_{85} + 1x_{86} + 16x_{87} + 4x_{88}.$$

Для решения задачи используем «Поиск решения» в электронных таблицах Excel. При этом x_{ij} – двоичные, т. е. принимают значение 1 или 0.

После решения задачи на компьютере получены следующие значения:

$$x_{15} = 1; \quad x_{56} = 1;$$
$$x_{23} = 1; \quad x_{61} = 1;$$
$$x_{44} = 1; \quad x_{78} = 1;$$
$$x_{52} = 1; \quad x_{87} = 1;$$
$$F_{\max} = 115.$$

Первый индекс x_{ij} указывает номер исполнителя, второй индекс – номер работы, при таком распределении исполнителей по работам выполненная стоимость работ будет максимальной и равной 115 у. д. е.

Для решения задач о назначениях можно использовать *венгерский метод*, названный в честь венгерского математика Дениша Кёнига.

Пример. Требуется пятерых работников распределить между пятью работами с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. А2.

Таблица А2. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в строках**

A_i	B_j					$\min c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	6	7	9	6	8	6
A_2	8	9	7	8	9	7
A_3	9	7	8	7	8	7
A_4	7	8	9	8	9	7
A_5	10	7	8	7	10	7

Алгоритм венгерского метода.

1. Среди элементов каждой строки матрицы c_{ij} (табл. А2) находим наименьшие элементы ($\min\limits_{j} c_{ij}$).

2. Из элементов каждой строки матрицы c_{ij} вычитаем выбранные минимальные элементы, результаты заносим в новую матрицу (табл. А3).

3. Выбираем среди элементов каждого столбца новой матрицы (табл. А3) наименьшие элементы ($\min\limits_{i} c_{ij}$).

4. Из элементов каждого столбца матрицы почленно вычитаем выбранные минимальные элементы, в результате получим таблицу, в которой каждая строка и каждый столбец содержит хотя бы по одному нулевому значению (табл. А4).

5. Используя нулевые значения элементов, получаем допустимое решение задачи о назначениях.

6. Анализируя допустимое решение, находим оптимальное решение задачи о назначениях.

Таблица А3. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в столбцах**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	0	2
A_2	1	2	0	1	2
A_3	2	0	1	0	1
A_4	0	1	2	1	2
A_5	3	0	1	0	3
$\min c_{ij}$	0	0	0	0	1

Таблица А4. **Допустимое решение задачи о назначениях**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	$\underline{0}$	1
A_2	1	2	$\underline{0}$	1	1
A_3	2	0	1	0	$\underline{0}$
A_4	$\underline{0}$	1	2	1	1
A_5	3	$\underline{0}$	1	0	2

Проанализируем данные табл. А4. Строки A_2 и A_4 содержат по одному нулю, выделим их и примем $x_{23} = 1$ и $x_{41} = 1$. Строки и столбцы, содержащие эти элементы, исключим из рассмотрения. Это строки A_2 и A_4 и столбцы B_1 и B_3. Среди оставшихся строк находим строку с минимальным количеством нулей. В нашем примере это строка A_1, содержащая один нуль, следовательно, принимаем $x_{14} = 1$ и исключаем из анализа первую строку и четвертый столбец.

Строка A_5 содержит один нуль, поэтому положим, что $x_{52} = 1$. В оставшейся строке A_3 нулевой элемент укажет на $x_{35} = 1$. Переменные x_{14}, x_{23}, x_{35}, x_{41}, x_{52}, равные единице, укажут на оптимальную расстановку работников по работам, которой соответствуют суммарные затраты:

$$F_{\min} = 6 + 7 + 8 + 7 + 7 = 35 \text{ у. д. е.}$$

Рассмотрим различные ситуации при решении задачи о назначениях:

а) допустим, после проведения алгоритма венгерского метода имеется столбец или строка, не содержащие нулевых элементов. Это является признаком недопустимого решения задачи.

Для его поиска необходимо выполнить следующее:

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (кроме диагоналей) таким образом, чтобы они проходили через все нулевые элементы таблицы.

2. Найти наименьший элемент среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Скорректировать элементы матрицы на величину выбранного элемента:

а) вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые;

б) прибавить выбранный наименьший элемент ко всем элементам таблицы, которые находятся на пересечении прямых;

в) все элементы, которые пересекает только одна прямая, оставить без изменения.

4. Используя полученное допустимое значение, найти оптимальное решение задачи.

Пример. Получено следующее решение задачи (табл. А5).

Таблица А5. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Так, в столбце B_2 и B_4 нулевые элементы стоят только в строке A_4, следовательно, можно из четырех назначений выполнить только три. Для выполнения всех назначений необходимо иметь нулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце таблицы, так как данное условие не соблюдается, то проводим наименьшее число прямых через нулевые элементы таблицы (табл. А6). Наименьшим элементом, через который не прошли прямые, является число 1, используя вышеизложенные правила, рассчитываем элементы новой таблицы (табл. А7).

Таблица А6. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Таблица А7. **Скорректированные элементы таблицы**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	$\underline{0}$	5	5
A_2	$\underline{0}$	1	3	6
A_3	7	3	$\underline{0}$	1
A_4	4	0	1	$\underline{0}$

Осуществляем назначения. Оптимальное решение будет равно $x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1$.

1. Алгоритм венгерского метода предполагает минимизацию целевой функции задачи о назначениях. Если же целевую функцию требуется максимизировать, то все элементы первой таблицы умножают на (–1) и минимальный (наибольший по модулю отрицательный) элемент вычитают из элементов соответствующих строк, получая положительные элементы скорректированной таблицы. Далее задача о назначениях решается с использованием вышеизложенного алгоритма.

2. Если в задаче имеются недопустимые назначения, то в соответствующую клетку таблицы заносят максимальный элемент c_{ij}, который позволяет избежать этого назначения.

3. Если число работников m не равно числу работ n, то для решения задачи вводят фиктивных исполнителей или фиктивные работы.

Приложение В

Решение прямой задачи линейного программирования симплексным методом

Дана следующая задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60; \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800; \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808; \\ x_1 \le 36; \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Решим задачу, используя алгоритм симплексного метода (табл. В1).

Таблица В1. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1800	6	26	2	25
y_3	808	–12	–15	–25	$\boxed{50}$
y_4	36	1	0	0	0
$F_{\max}$	0	–50	–20	0	–70

Следует отметить, что признаком опорного решения является отсутствие в столбце свободных членов отрицательных коэффициентов и нулей среди базисных переменных. Следовательно, в табл. В1 имеется опорное или допустимое решение задачи. Приступаем к поиску оптимального решения. Опорное решение будет оптимальным, если коэффициенты целевой функции (F-строки) будут отрицательными (или один, несколько нулей) при решении задачи на минимум и положительными (или один, несколько нулей) при решении на максимум. Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимума функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимума функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент. Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим наименьшее положительное частное. В нашем случае разрешающим элементом будет 50.

Определяем коэффициенты новой симплексной таблицы (табл. В2).

Рассчеты продолжаем таким образом до тех пор, пока не получим оптимальное решение задачи (табл. В3 и В4).

Таблица В2. **Вторая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	y_3
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1396	12	33,5	14,5	–0,5
x_4	16,16	–0,24	–0,3	–0,5	0,02
y_4	36	$\boxed{1}$	0	0	0
F_{max}	1131,2	–66,8	–41,0	–35	1,4

Таблица В3. **Третья симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	x_2	x_3	y_3
y_1	24	–1	$\boxed{1}$	1	0
y_2	964	–12	33,5	14,5	–0,5
x_4	24,8	0,24	–0,3	–0,5	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	3536	66,8	–41,0	–35	1,4

Таблица В4. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	y_1	x_3	y_3
x_2	24	–1	1	1	0
y_2	160	21,5	–33,5	–19	–0,5
x_4	32	–0,06	0,3	–0,2	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	4520	25,8	41,0	6,0	1,4

Приложение С

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе LPX.88

F SOLUTION IS OPTIMAL DATE 02-01-2022 TIME 12:17:05
ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДАТА ВРЕМЯ

MAXIMUM ENTERS: BASIS X: 3 VARIABLES: 4
ПЕРЕМЕННЫЕ
PIVOTS: 3 LEAVES: BASIS S: 1 SLACKS: 4
ИТЕРАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
LAST INV: 0 DELTA 0 RETURN 4520 CONSTRAINTS: 4
КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕНИЯ

BASIS X.2 S.2 X.4 X.1
БАЗИС
PRIMAL 24 160 32 36
ПРЯМАЯ
DUAL 41 0 1.4 25.8
ДВОЙСТВЕННАЯ

F_1 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2022
PRIMAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННЫЕ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	VALUE/UNIT *ВЛИЯНИЕ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	NET RETURN *ИЗМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ*
X.1	BASIS (*БАЗИС*)	36	50	50	0
X.2	BASIS	24	20	20	0
X.3	NONBASIS (*НЕБАЗИС*)	0	0	6	-6
X.4	BASIS	32	70	70	0
S.1	NONBASIS	0	0	41	-41
S.2	BASIS	160	0	0	0
S.3	NONBASIS	0	0	1.4	-1.4
S.4	NONBASIS	0	0	25.8	-25.8

F_2 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2022
DUAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	USAGE *РАСХОД*	SLACK *ОСТАТОК*
Y.1	BINDING (*ДЕФИЦИТ*)	41	60	60	0
Y.2	NONBINDING (*НЕДИФИЦИТ*)	0	1800	1640	160
Y.3	BINDING	1.4	808	808	0
Y.4	BINDING	25.8	36	36	0

F_3 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2022

OBJECTIVE ROW RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:27
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КРИТЕРИЮ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННАЯ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
X.1	BASIS	36	50	24.2	NONE
X.2	BASIS	24	20	14	45.8
X.3	NONBASIS	0	0	NONE	6
X.4	BASIS	32	70	0	100

F_4 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2022
RIGHT HAND SIDE RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:28
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО РЕСУРСАМ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
Y.1	BINDING	41	60	36	64.77612
Y.2	NONBINDING	0	1800	1640	NONE
Y.3	BINDING	1.4	808	-792	1128
Y.4	BINDING	25.8	36	28.55814	60

F_5 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2022
INVERSE COEFFICIENTS *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:29
ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

	RETURN	X.2	S.2	X.4	X.1
X.1	0	0	0	0	1
X.2	0	1	0	0	-1
X.4	0	.3	0	.02	-.06
S.2	0	-33.5	1	-5	21.5

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе «Поиск решения» в Excel

Пусть имеем прямую задачу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60; \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800; \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808; \\ x_1 \le 36; \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	60
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=6*B3	=26*C3	=2*D3	=25*E4	=СУММ(B5:E5)	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	=12*B3	=15*C3	=25*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+808
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Прибыль, у.д.е.	=50*B3	=20*C3		=70*E4	=B8+C8+E8	=F8
9							

Изначально ячейки, значение которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо, установив табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение (в рассматриваемом случае это ячейка G8 (прибыль)), выполнить команду Сервис → Поиск решения. Появится диалоговое окно Поиск решения, Ввод целевой ячейки (рис. D1).

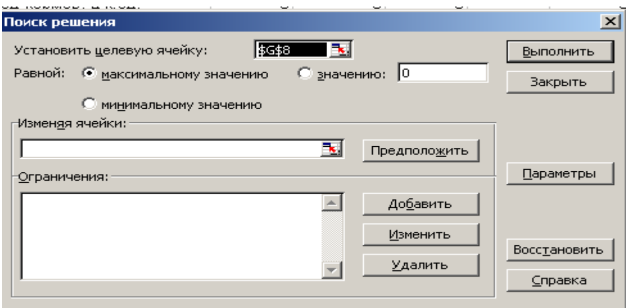


Рис. D1. Диалоговое окно Поиск решения. Ввод целевой ячейки

В поле Изменяя ячейки указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно Добавление ограничения (рис. D2), щелкнув по кнопке Добавить.

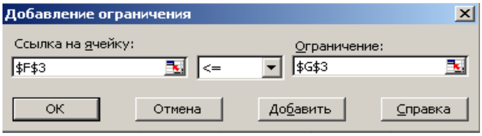


Рис. D2. Диалоговое окно Добавление ограничения

В нашем случае необходимо учесть ограничения

Ограничение	Описание
B3:D3 ≥ 0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3 ≤ G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5 ≤ G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
E4 ≥ 0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7 ≤ G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выхода этих кормов с отрасли растениеводства
B3 ≤ 36	Площадь посева зерновых культур не может быть больше 40 % от площади пашни (36 га)

После ввода последнего ограничения, щелкнув на кнопке ОК, получим диалоговое окно Поиск решения, Ввод ограничений следующего вида (рис. D3).

Щелкнув по кнопке Выполнить, получим оптимальное решение задачи (рис. D4).

Из рис. D4 видны значения неизвестных величин задачи:

$$x_1 = 36; \qquad y_1 = 0;$$
$$x_2 = 24; \qquad y_2 = 160;$$
$$x_3 = 0; \qquad y_3 = 0;$$
$$x_4 = 32; \qquad y_4 = 0;$$
$$F_{\max} = 4520.$$

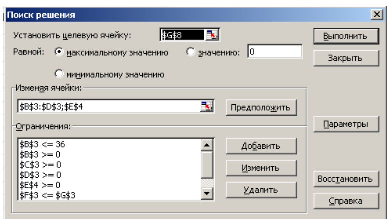


Рис. D3. Диалоговое окно Поиск решения. Ввод ограничений

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	36	24	0		60	60
4	Поголовье, гол.				32		
5	Затраты труда, чел.-дн.	216	624	0	800	1640	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	432	360	0		792	1600
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				1600	1600	
8	Прибыль, у.д.е.	1800	480		2240	4520	4520
9							

Рис. D4. Результаты решения задачи

В диалоговом окне Результаты поиска решения (рис. D5) указывают тип отчета

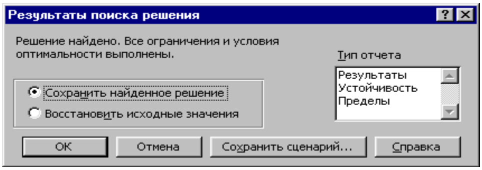


Рис. D5. Диалоговое окно Результаты поиска решения

1. **Результаты.** Этот тип используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

2. **Устойчивость.** Этот тип используется для создания отчета, содержащего сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений (рис. D6). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B3	Площадь, га Зерновые	36	25,8
C3	Площадь, га Картофель	24	0
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	–6
E4	Поголовье, гол.	32	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F3	Итого	60	41
F5	Затраты труда, чел.-дн. Итого	1640	0
F7	Потребность в кормах, ц к.ед. Итого	1600	1,4

Рис. D6. Отчет по устойчивости

3. **Пределы.** Данный тип используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ (рис. D7). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно, верхним пределом называется наибольшее значение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Свете5.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Ячейка	Целевое Имя	Значение
G8	Прибыль, у. д. е. Имеется	4520

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
B3	Площадь, га Зерновые	36	36	4520	36	4520
C3	Площадь, га Картофель	24	24	4520	24	4520
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	0	4520	0	4520
E4	Поголовье, гол.	32	0	2280	32	4520

Рис. D7. Отчет по пределам

Приложение Е

Метод отсечения

Алгоритм Р. Гомори позволяет за конечное число шагов (итераций) прийти к оптимальному целочисленному решению, если оно существует. Главное – сформировать дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением.

Для решения задач целочисленного линейного программирования *методом Гомори* используется следующий алгоритм:

1. Решают искомую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все переменные задачи целочисленные, то получено искомое решение. Если задача без условия целочисленности не имеет решения, то и целочисленная задача решения не имеет.

2. Если среди оптимальных значений переменных есть нецелые, то выбирают компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы формируют правильное отсечение.

3. В неравенство, формирующее правильное отсечение, вводят дополнительную переменную и, превращая его в равенство, включают его в систему ограничений задачи.

4. Полученную расширенную задачу решают симплексным методом до тех пор, начиная с пункта 2, пока значения базисных переменных не будут целочисленными.

Пример. Фермер имеет 680 тыс. у. д. е. для приобретения оборудования по очистке и сортировке зерна, которое предполагает разместить на площади не более 60 м^2. Фермер может заказать оборудование двух типов (табл. Е1).

Таблица Е1. **Характеристика оборудования по очистке и сортировке зерна**

Характеристика	Оборудование	
	типа *A*	типа *B*
Производительность за смену, т	4	3
Производственная площадь, м^2	5	3
Стоимость оборудования, тыс. у. д. е.	80	60

При этом фермер может приобрести не более 8 ед. оборудования типа *B*.

Требуется обосновать стратегию покупки оборудования по очистке и сортировке зерна с целью максимизации его производительности.

Решение. Введем неизвестные величины задачи:

x_1 и x_2 – соответственно количество единиц оборудования типа *A* и *B*.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2.$$

При условиях:

по использованию производственной площади:

$$5x_1 + 3x_2 \le 60;$$

по стоимости оборудования:

$$80x_1 + 60x_2 \le 680;$$

по количеству второго оборудования:

$$x_2 \le 8;$$

по неотрицательности переменных:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

по целочисленности переменных:

x_1, x_2 – целые числа.

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные. Получим:

$$5x_1 + 3x_2 + y_1 = 60;$$

$$80x_1 + 60x_2 y_2 = 680;$$

$$x_2 + y_3 = 8;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2 .$$

Запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. Е2).

Воспользуемся алгоритмом симплексного метода, получим табл. Е3.

Таблица Е2. **Первая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
y_1	60	5	3
y_2	680	$\boxed{80}$	60
y_3	8	0	1
F_{max}	0	–4	–3

Во второй симплексной таблице (табл. Е3) получено оптимальное решение задачи, но значение переменной x_1 не является целым ($x_1 = 8{,}5$).

Найдем дробную часть числа 8,5 ($8{,}5 - 8 = 0{,}5$). Учитывая дробные части чисел 0,0125 и 0,75 (второй строки табл. Е3) ($0{,}0125 - 0 = 0{,}0125$; $0{,}75 - 0 = 0{,}75$), составляем дополнительное ограничение целочисленности для второй строки табл. Е3:

$$0{,}0125y_2 + 0{,}75x_2 \geq 0{,}5.$$

Таблица Е3. **Вторая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,0125	0,75
y_3	8	0	1
F_{max}	34	0,05	0

Ограничение отсечения преобразуем в равенство:

$$-0{,}0125y_2 - 0{,}75x_2 + y_4 = -0{,}5.$$

Добавим его во вторую симплексную таблицу, получим табл. Е4.

Так как с дополнительным ограничением полученное решение недопустимо, то ищем опорное решение задачи. Взяв за разрешающий коэффициент (–0,0125), находим новые коэффициенты симплексной таблицы (табл. Е5).

Таблица Е4. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,125	0,75
y_3	8	0	1
y_4	–0,5	$\boxed{-0{,}0125}$	–0,75
F_{max}	34	0,05	0

Таблица Е5. **Вторая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	x_2
y_1	17,25	–5	3
x_1	8	1	0
y_3	8	0	1
y_2	40	–80	$\boxed{60}$
F_{max}	32	4	–3

В табл. Е5 нет оптимального решения, ищем его, взяв за разрешающий коэффициент 60 (табл. Е6). В табл. Е6 получено оптимальное решение, но базисная переменная $x_2 = 0{,}667$ не является целой. В табл. Е6 вводим ограничение отсечения, сформированное по коэффициентам четвертой строки.

Таблица Е6. **Третья симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
F_{max}	34	0	0,05

Найдем дробные части чисел: 0,667; –1,333; 0,0167, получим:

$$0{,}667 - 0 = 0{,}667;$$

$$-1{,}333 + 2 = 0{,}667;$$

$$0{,}0167 - 0 = 0{,}0167.$$

Сформируем дополнительное ограничение целочисленности для четвертой строки табл. Е6:

$$0{,}667y_4 + 0{,}0167y_2 \geq 0{,}667,$$

представим его в канонической форме:

$$-0{,}667y_4 - 0{,}0167y_2 + y_5 = -0{,}667$$

и внесем его в табл. Е6 и получим табл. Е7.

Таблица Е7. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
y_5	–0,667	$\boxed{-0{,}667}$	–0,0167
F_{max}	34	0	0,05

В табл. Е7 нет опорного решения, найдем его (табл. Е8).

Таблица Е8. **Вторая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_5	y_2
y_1	16,25	–1,499	0,025
x_1	7	1,499	–0,025
y_3	6	1,999	–0,050
x_2	2	–1,999	0,050
y_4	1	–1,499	0,025
F_{max}	34	0	0,05

В табл. Е8 получено целочисленное значение переменных:

$$x_1 = 7;\ x_2 = 2;$$

$$F_{max} = 34 \text{ т за смену.}$$

Приложение F

Метод ветвей и границ

Суть метода ветвей и границ состоит в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении только перспективных, отбрасывая бесперспективные варианты.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Решаем искомую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности.

2. Если в полученном симплексном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из них и по ней строим два ограничения.

3. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значение дробной переменной в оптимальном решении, в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не

меньше значения дробной переменной (например: x_1 = 3,5, первое ограничение будет $x_1 \leq 3$, а второе $x_1 \geq 4$, что исключает промежуток с дробным значением x_1).

4. В каждую из искомых задач добавляем по вышеизложенному ограничению, в результате получаем две задачи (подзадачи) линейного программирования и решаем их.

5. Если снова получены оптимальные решения с дробным значением переменной, то, сравнив значения целевых функций задач, выбираем задачу с большим значением целевой функции и с пункта 2 продолжаем до тех пор, пока не получим целочисленные значения переменных.

В результате получим ветви (рис. F1).

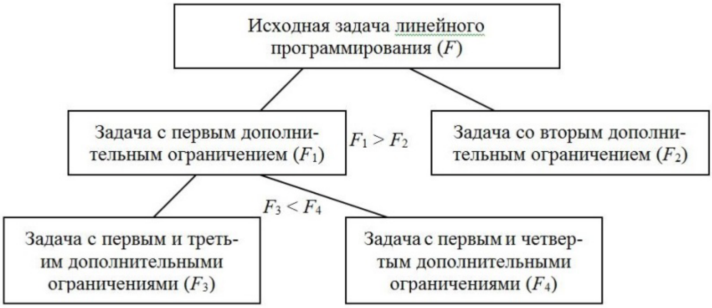


Рис. F1. Алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ

Решение линейной задачи целочисленного программирования можно найти средствами Excel.

Пример. Необходимо обосновать размеры отраслей фермерского хозяйства, т. е. определить оптимальную площадь посева зерновых культур, картофеля, многолетних трав на сено и поголовье коров, обеспечивающих получение максимального маржинального дохода.

Исходная информация:

1. Ресурсы фермерского хозяйства составляют: площадь пашни – 40 га, запасы годового труда – 1400 чел.-дн., запасы кормов – 1000 ц к. ед.

2. Расход ресурсов на единицу отрасли приведен в табл. F1.

Таблица F1. **Расход ресурсов и выход продукции на единицу отрасли**

Показатели	Отрасли			
	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы
Годовой труд, чел.-дн.	8	25	5	20
Потребность в кормах, ц к. ед.	–	–	–	50
Выход кормов с 1 га, ц к. ед.	10	8	15	–
Переменные издержки, у. д. е.	600	3500	200	1300
Выход товарной продукции, ц	30	250	–	40

3. Фермерское хозяйство заключило договоры на поставку продукции в следующих объемах, ц: зерно – 500; картофель – 4000; молоко – 800.

4. Цены реализации, у. д. е/ц: зерно – 30; картофель – 20; молоко – 60.

5. Имеется помещение для содержания 30 коров.

Для составления экономико-математической модели вводим переменные:

x_1 – площадь посева зерновых культур, га;

x_2 – площадь посева картофеля, га;

x_3 – площадь посева многолетних трав на сено, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

Цель решения задачи:

$F_{max} = 30 \cdot 30x_1 + 250 \cdot 20x_2 + 40 \cdot 60x_3 - 600x_1 - 3500x_2 - 200x_3 - 1300x_4$.

При условиях:

1) по использованию пашни, га:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$;

2) по использованию трудовых ресурсов, чел.-дн.:

$8x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 20x_4 \leq 1400$;

3) по балансу кормов, ц к. ед.:

$50x_4 \leq 10x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 1000$;

4) по реализации зерна, ц:

$30x_1 \geq 500$;

5) по реализации картофеля, ц:

$250x_2 \geq 4000$;

6) по реализации молока, ц:

$40x_4 \geq 800$;

7) по поголовью коров, чел.:

$x_4 \leq 30$.

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	40
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=8*B3	=25*C3	=5*D3	=20*E4	=СУММ(B5:E5)	1400
6	Выход кормов, ц к.ед.	=10*B3	=8*C3	=20*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+1000
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Реализация зерна, ц	=30*B3				=B8	
9	Реализация картофеля, ц		=250*C3			=C9	
10	Реализация молока, ц				=40*E4	=E10	
11	Переменные издержки, у. д. е.	=600*B3	=3500*C3	=200*D3	=1300*E4	=СУММ(B11:E11)	
12	Выручка от реализации,у. д. е.	=30*B8	=20*C9		=60*E10	=B12+C12+E12	
13	Маржинальный доход, у. д. е.					=F12-F11	

Изначально ячейки, значение которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого следует установить табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значения. В рассматриваемом случае это ячейка F13 (маржинальный доход). Необходимо выполнить команду Сервис → Поиск решения… Появится диалоговое окно Поиск решения.

В поле, изменяя ячейки, указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно Добавление ограничения, щелкнув на кнопке Добавить. Командой Добавить вводим условия целочисленности переменных величин. Для этого в диалоговом окне Добавление ограничения вводим в окно Ссылка на ячейку адреса ячеек B3:D3; E4, далее курсор переводим в среднее окно, в котором находятся виды ограничений и требования (целое и двоичное), и устанавливаем курсор на требование Целое.

В нашем случае необходимо учесть ограничения.

Ограничение	Описание
B3:D3 $\geq$ 0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3 $\leq$ G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5 $\leq$ G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
F8 $\geq$ 500 F9 $\geq$ 4000 F10 $\geq$ 800	Фермерское хозяйство должно произвести продукцию каждого вида не менее объемов, на которые были заключены договоры
E4 $\geq$ 0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7 $\leq$ G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выход этих кормов с отрасли растениеводства
E4 $\leq$ 30	Поголовье коров не может превышать имеющиеся ското-места
B3:D3; E4	Площадь посева сельскохозяйственных культур и поголовье коров характеризуются целыми числами

После ввода последнего ограничения, щелкнув на кнопку ОК, получим диалоговое окно Поиск решения (рис. F2).

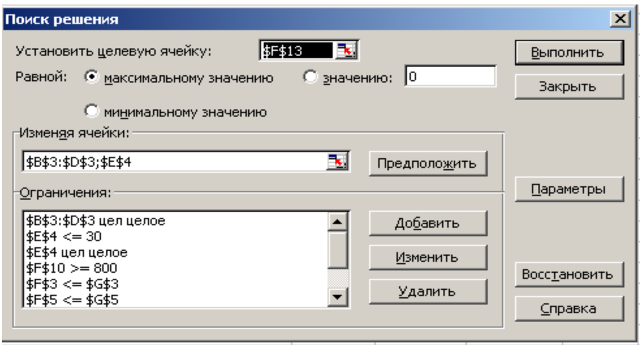


Рис. F2. Диалоговое окно Поиск решения

Щелкнув на кнопку Выполнить, получим оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования (табл. F2).

Таблица F2. **Результаты решения целочисленной задачи линейного программирования**

Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
Площадь, га	17	23	0		40	40
Поголовье, гол.				27		
Затраты труда, чел.-дн.	136	575	0	540	1251	1400
Выход кормов, ц к. ед.	170	184	0		354	1354
Потребность в кормах, ц к. ед.				1350	1350	
Реализация зерна, ц	510				510	
Реализация картофеля, ц		5750			5750	
Реализация молока, ц				1080	1080	
Переменные издержки, у. д. е.	10200	80500	0	35100	125800	
Выручка от реализации, у. д. е.	15300	115000		64800	195100	
Маржинальный доход, у. д. е.					69300	

В табл. F2 видны значения неизвестных величин задачи:

$$x_1 = 17;\ x_2 = 23;\ x_3 = 0;\ x_4 = 27,$$

$$F_{\max} = 69300 \text{ у. д. е.}$$

Пример. Для реконструкции перерабатывающего предприятия были разработаны три проекта, каждый из которых характеризуется показателями (табл. F3).

Таблица F3. **Характеристика проектов по реконструкции предприятия**

Показатели	Проекты			Ресурсы
	1	2	3	
Затраты труда, чел.-ч	100	120	130	250
Материально-денежные затраты, тыс. у. д. е.	80	60	100	180
Прибыль, тыс. у. д. е.	80	85	90	–

Требуется обосновать выбор проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия с целью максимизации прибыли.

Решение. Введем неизвестные величины задачи: x_1, x_2 и x_3 – соответственно первый, второй и третий проекты.

Математическая модель имеет вид

$$F_{\max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3.$$

При условиях:

по использованию труда:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \leq 250;$$

по использованию материально-денежных средств:

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \leq 180;$$

по неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;$$

по целочисленности переменных:

$$x_1, x_2, x_3 \text{ – целые числа.}$$

Отбросив условие целочисленности, запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. F4).

Таблица F4. **Первая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	$\boxed{100}$
F_{max}	0	–80	–85	–90

Решим задачу симплексным методом (табл. F5–F7).

Таблица F5. **Вторая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F6. **Третья симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	$\boxed{0,857}$	–0,014	0,029
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Таблица F7. **Четвертая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_2
x_2	0,555	0,111	0,022	–0,028
x_1	1,833	1,667	–0,016	0,034
F_{max}	193,889	12,779	0,559	0,311

В табл. F7 получено оптимальное решение задачи: x_1 = 1,8; x_2 = 0,6; F_{max} = 183,06 тыс. у. д. е.

Значения переменных x_1 и x_2 – дробные.

Так как x_2 = 0,555, то из области решения исключим полосу, содержащую дробное оптимальное значение x_2 и разобьем задачу на две задачи, добавив в каждую по дополнительному ограничению.

Задача № 2.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3;$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \le 250;$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \le 180;$$

$$x_2 \le 0.$$

Задача № 3.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \le 250;$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \le 180;$$

$$x_2 \ge 1.$$

Поочередно включим дополнительные ограничения во вторую симплексную таблицу (табл. F5) и решим задачи № 2 и № 3 (табл. F8–F11 и F12–F15).

Таблица F8. **Первая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	0	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F9. **Вторая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_3	–0,381	0,095	$\boxed{-0{,}024}$	0,031
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Таблица F10. **Третья симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_3	1,793	$\boxed{0{,}802}$	–0,583	0,011
y_1	15,875	–3,958	–41,667	–1,292
F_{max}	162,094	–8,031	30,750	0,893

Таблица F11. **Четвертая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_1	2,25	1,247	–0,727	0,014
y_1	24,724	4,935	–44,544	–1,238
F_{max}	180	10	25	1

Решим задачу № 3 (табл. F12–F15).

Таблица F12. **Первая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F13. **Вторая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_4	–0,619	–0,095	0,024	$\boxed{–0,031}$
F_{max}	173,81	–10,952	0,738	–0,06

В табл. F11 и F15 получены оптимальные решения задач № 2 и № 3. Сравниваем значения их целевых функций.

Таблица F14. **Третья симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	$\boxed{0,768}$	0,0085	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Таблица F15. **Четвертая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_1	1,3	1,302	0,011	1,217
y_2	16	–3,991	70,774	–35,989
F_{max}	189,0	14	0,8	11

Сравнение значений целевых функций задач № 2 и № 3 (табл. F11 и F15) показывает, что $F_{2\max} < F_{3\max}$, следовательно, для дальнейших расчетов выбираем задачу № 3 и по переменной x_1 с дробным ее значением снова строим два дополнительных ограничения и разбиваем задачу № 3 еще на две новые задачи:

Задача № 4.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \le 250;$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \le 180;$$

$$x_1 \le 1.$$

Задача № 5.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \leq 250;$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \leq 180;$$

$$x_1 \geq 2.$$

Поочередно включаем дополнительные ограничения в табл. F13 и решаем задачу № 4 и № 5 (табл. F16–F18 и F19–F20).

Таблица F16. **Первая симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Таблица F17. **Вторая симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,224	–0,768	0,009	$\boxed{0,935}$
y_2	16,903	3,065	0,774	–32,258
x_1	1	1	0	0
F_{max}	185,776	–10,768	0,692	–1,935

Таблица F18. **Третья симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	x_3
x_2	1,25	0	0	1,07
y_4	0,24	–0,82	0,01	1,07
y_2	24,63	–3,065	0,77	34,5
x_1	1	1	0	0
F_{max}	186,25	9,17	0,708	2,083

Таблица F19. **Первая симплексная таблица задачи № 5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_6	–2	$\boxed{-1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Таблица F20. **Вторая симплексная таблица задачи № 5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	–0,544	0,768	0,009	0,935
y_2	13,838	3,065	0,774	–32,258
x_1	2	–1	0	0
F_{max}	196,544	10,768	0,692	–1,935

Допустимого решения задачи № 5 найти нельзя, так как система ограничений задачи несовместна. Проанализируем оптимальное решение задачи № 4: $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}25$; $x_3 = 0$, следовательно, в задачу необходимо поочередно ввести ограничения, позволяющие исключить дробную часть значения переменной x_2, т. е. $x_2 \leq 1$ и $x_2 \geq 2$, и решить задачи № 6 (табл. F21–F24) и № 7 (табл. F25–F29).

Таблица F21. **Первая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F22. **Вторая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	$\boxed{-1,3}$
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	193	–8	–31	0,9

Таблица F23. **Третья симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_1
y_2	20	3,077	–32,308	–0,769
x_3	1	0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	175	–10,769	1,923	0,692

Таблица F24. **Четвертая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_4	y_1
y_2	16,923	–3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,231	–0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
x_1	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	185,769	10,769	1,923	0,692

Таблица F25. **Первая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_4	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–2	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F26. **Вторая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	–1,3
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–1	0	$\boxed{-1}$	0
F_{max}	131	–8	–31	0,9

Таблица F27. **Третья симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_2
y_1	–68	–4	42	$\boxed{-1{,}3}$
x_3	0,6	0,8	0,6	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Таблица F28. **Четвертая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_1
y_2	52,308	3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,077	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	1	0
F_{max}	114,923	–10,769	1,923	0,692

Таблица F29. **Пятая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_7	y_1
y_2	52,0	–4	–36	–0,8
x_1	0,1	1,3	1,2	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	0,9	–1,3	–1,2	–0,01
y_4	1	0	1	0
F_{max}	178	14	11	0,8

В табл. F24 и F29 получены оптимальные решения задач № 6 и № 7. Сравниваем значения их целевых функций, так как

$$F_{6\,\max} > F_{7\,\max},$$

то для дальнейших расчетов выбираем задачу № 6 и по переменной x_3 строим два дополнительных ограничения, позволяющих исключить дробную часть значения переменной x_3, т. е. в задачу вводим ранее введенные ограничения и ограничения

$$x_3 \leq 0 \text{ и } x_3 \geq 1,$$

и получаем две новые задачи: № 8 (табл. F30–F34) и № 9 (табл. F35–F39).

Таблица F30. **Первая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	0	0	0	1
$F_{\max}$	0	–80	–85	–90

Таблица F31. **Вторая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	0	0	0	$\boxed{1}$
$F_{\max}$	85	–80	–85	–90

Таблица F32. **Третья симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
1	2	3	4	5
y_1	130	100	120	–130
y_2	120	80	60	–100
x_2	1	0	–1	0

Окончание табл. F32

1	2	3	4	5
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	$\boxed{1}$	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	–85	90

Таблица F33. **Четвертая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_5	y_6
y_1	130	100	–120	–130
y_2	120	80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
y_4	1	$\boxed{1}$	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	85	90

Таблица F34. **Пятая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_4	y_5	y_6
y_1	30	–100	–120	–130
y_2	40	–80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
x_1	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	165	80	85	90

Задача № 8 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. 32):

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = 1;$$

$$x_3 = 0;$$

$$F_{\max} = 165.$$

Таблица F35. **Первая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	–1	0	0	–1
F_{max}	0	–80	–85	–90

Таблица F36. **Вторая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	–1	0	0	$\boxed{-1}$
F_{max}	85	–80	–85	–90

Таблица F37. **Третья симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
y_1	0	100	120	$\boxed{130}$
y_2	20	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0	0	–1
F_{max}	175	–80	–85	–90

Таблица F38. **Четвертая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_1
y_6	0	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
y_2	20	80	60	–0,769
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0,769	0,923	0,008
$F_{\max}$	175	–10,769	–1,923	0,692

Таблица F39. **Пятая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_3	y_1
x_1	0	1,30	1,20	0,01
y_2	20	–104,031	–36,021	–1,601
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	–1,30	–1,20	–0,01
y_5	0	0	1	0
x_3	1	–1	0	0
$F_{\max}$	175	14	11	0,8

Задача № 9 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. F39):

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;$$

$$F_{\max} = 175.$$

Сравниваем значения целевых функций задач № 8 и № 9. Так как $F_{9\max} > F_{8\max}$, то решением задачи является выбор второго и третьего проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия, позволяющий получить максимальную прибыль равную 175 тыс. у. д. е.

Приложение G

Методы векторной оптимизации

При управлении сложными социально-экономическими системами имеем следующую постановку задачи: требуется найти числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе ограничений $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le A_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, для которых функции $F_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n$ достигают максимального значения. Множество точек $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих данной системе, образует допустимую область $D \subset R^n$. Элементы множества D являются допустимыми решениями или альтернативами, а числовые функции f_k, $k = 1, 2, \dots, n$ – целевыми функциями, или критериями, заданными на множестве D.

Выделяют приведенные ниже типы задач, которые могут быть сведены к общей формулировке многокритериальной задачи:

1) задачи оптимизации на множестве целей, которые должны быть учтены при выборе оптимального решения;

2) задачи оптимизации на множестве объектов, качество функционирования которых оценивается самостоятельными критериями;

3) задачи оптимизации на множестве условий функционирования и применительно к каждому условию. Качество функционирования объекта оценивается частным критерием;

4) задачи оптимизации на множестве этапов функционирования. Качество управления на каждом этапе (интервале времени) оценивается частным критерием, а на множестве этапов – общим векторным критерием.

Таким образом, решение экономико-математических задач требует учета множества критериев, что ведет к обоснованию задач векторной оптимизации. Особенностью их является наличие в области допустимых значений области компромиссов, в которой невозможно одновременное улучшение всех критериев. Принадлежащие области компромиссов решения получили название «оптимальные по Парето» по имени итальянского ученого Вильфредо Парето, сформулировавшего проблему векторной оптимизации и принцип оптимальности решения. Поэтому поиск такого решения, которое было бы наилучшим или компромиссным при выполнении всех критериев оптимальности, приведет к более обоснованным плановым расчетам в практической работе сельскохозяйственных организаций.

Многокритериальные оптимизационные задачи (МКО) требуют учета и соблюдения следующих условий:

а) *обоснование набора (перечня) критериев, подлежащих рассмотрению в данной модели*. Такой подход предполагает определение характера исследуемого процесса, где на основе логического анализа устанавливаются возможные показатели экономической эффективности. На практике редко встречаются задачи, когда необходимо одновременно рассматривать более трех-четырех критериев;

б) *оценка относительной предпочтительности критериев или построение некоторой шкалы*. Такая проблема решается на основе экспертных оценок, где условия предпочтительности могут быть выражены в баллах оценки каждого критерия или в виде некоторых весовых коэффициентов. В некоторых случаях (при экономической равнозначности критериев) их ранжирование не производится;

в) *определение условий возможного компромисса и выбор схемы расчета обобщенного критерия*. Условия возможного компромисса могут быть сформулированы поразному:

– минимизация относительных отклонений от оптимальных значений по всем рассматриваемым критериям;

– фиксирование одного из критериев на некотором заданном уровне и оптимизация по следующему критерию. В соответствии с этим разработаны различные методы решения многокритериальных задач.

Основные методы, применяемые при решении задач МКО, представлены на рис. G1.

Например, выбор наилучшего варианта развития сельскохозяйственной организации из возможных альтернатив целесообразнее осуществлять с помощью оптимизационной экономико-математической модели. Наиболее приемлемые критерии оптимальности на современном этапе развития экономики следующие:

а) максимум прибыли;

б) максимум выручки от реализации продукции;

в) минимум материально-денежных затрат.

Поэтому вначале была решена экономико-математическая задача для обоснования прогнозного развития конкретного сельскохозяйственного предприятия по каждому из представленных критериев в отдельности. Экономико-математическая задача оптимизации специализации и сочетания отраслей сельскохозяйственного предприятия размерностью $m \times n = 55 \times 80$ имеет типичные ограничения. Структурная экономико-математическая модель представлена в прил. H.

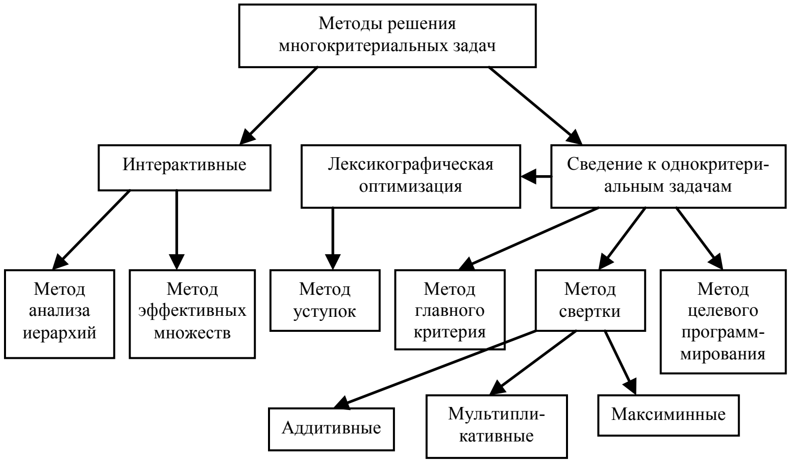


Рис. G1. Классификация методов решения многокритериальных задач

Вариант решения задачи с целевой функцией – максимум прибыли от реализации продукции – показал следующие конечные результаты: прибыль – в объеме 802,65 тыс. руб., рентабельность – 20,2 % (прил. I). Вариант решения задачи с целевой функцией – максимум выручки от реализации продукции – показал наибольшее значение денежной выручки в объеме 5456,93 тыс. руб. (прил. J). Вариант решения задачи с целевой функцией – минимум материально-денежных затрат – приводит к таким итоговым цифрам: издержки – в сумме 3645,55 тыс. руб. с рентабельностью 10,5 % (прил. K). Таким образом, при решении одной и той же задачи по разным критериям (максимум прибыли, максимум выручки от реализации продукции, минимум материально-денежных затрат) результаты существенно отличаются размером производства (интенсивностью), показателями эффективности. Поэтому требуется использование и других способов решения многокритериальных задач (прил. L, N, P, R, T).

Приложение H

Базовая структурная экономико-математическая модель оптимизации специализации и сочетания отраслей сельскохозяйственного предприятия

Цель решения задачи: получение максимума прибыли за вычетом издержек на приобретение ресурсов.

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_1} p_j x_j + \sum_{j \in J_2} \tilde{p}_j x_j - \sum_{j \in J_1} \sum_{h \in H_4} d_{hj} x_j c_h - \sum_{h \in H_1} x_h c_h - \sum_{h \in H_2} \tilde{x}_h c_h -$$

$$- \sum_{i \in I_4} c_i x_i + \sum_{k \in K_0} \sum_{i \in I_3} p_{ik} x_{ik}.$$

При условиях:

1) по использованию земельных угодий:

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le A_i, \ \ i \in I_1.$$

Сумма площадей сельскохозяйственных культур, возделываемых на данном виде сельхозугодий, не должна превышать площади этих угодий;

2) по использованию трудовых ресурсов:

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i + x_i, \ \ i \in I_2.$$

Затраты труда на развитие отраслей растениеводства и животноводства не должны превышать наличие труда в организации с учетом его привлечения;

3) по привлечению трудовых ресурсов:

$$x_i \le \tilde{B}_i, \ \ i \in I_4.$$

Привлеченный труд должен быть ограниченным;

4) по балансу основных видов кормов:

$$\sum_{j \in J_2} W_{hj}^{\min} x_j + \sum_{j \in J_2} x_{hj} \le \sum_{j \in J_1} d_{hj} x_j - W_h + x_h, \ \ h \in H_4.$$

Суммы норм расхода отдельного вида корма, умноженные на поголовье соответствующих групп животных по всем видам и половозрастным группам животных, с учетом скользящих переменных (добавок корма), не должны превышать объема собственного производства корма, с учетом возможной покупки и расхода его для развития личных подсобных хозяйств населения;

5) по балансу покупных кормов и кормов животного происхождения:

$$\sum_{j \in J_2} W_{hj}^{\min} x_j + \sum_{j \in J_2} x_{hj} = \tilde{x}_h, \ \ h \in H_2.$$

Баланс кормов животного происхождения, являющихся покупными ресурсами, записывается со знаком равно;

6) по производству побочных кормов:

$$\hat{x}_h \le \sum_{j \in J_1} d_{hj} x_j - W_h, \ \ h \in H_3.$$

Количество побочных кормов, используемых на корм скоту, не должно превышать производство побочных кормов за вычетом их расхода на внутрихозяйственные нужды;

7) по покупке кормов:

$$x_h \le E_h, \quad h \in H_1.$$

Объем покупки кормов ограничен;

8) по величине скользящей переменной:

$$x_{hj} \le (W_{hj}^{\max} - W_{hj}^{\min}) x_j, \quad h \in H_0, \quad j \in J_2.$$

Величина скользящей переменной, т. е. добавка корма для животных, не должна превышать разности между максимальной и минимальной нормами кормления на голову, умноженной на поголовье животных данного вида;

9) по балансу питательных веществ:

$$\sum_{j \in J_2} W_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_1} \sum_{h \in H_4} d_{hj} x_j k_{ih} + \sum_{h \in H_1} k_{ih} x_h + \sum_{h \in H_2} k_{ih} \tilde{x}_h + \sum_{h \in H_3} k_{ih} \hat{x}_h -$$
$$- \sum_{h \in H_5} k_{ih} W_h, i \in I_5.$$

Сумма питательных веществ для всего поголовья животных не должна превышать содержания питательных веществ в нормах собственного производства, покупных, побочных кормах, кормах животного происхождения без учета питательных веществ, находящихся в кормах, предназначенных для внутрихозяйственных нужд (для развития личных подсобных хозяйств населения);

10) по содержанию питательных веществ в дополнительных кормах, обозначенных скользящими переменными:

$$(W_{ij} - \sum_{h \in H_0} W_{hj}^{\min} k_{ih}) x_j \le \sum_{h \in H_0} k_{ih} x_{hj}, \quad j \in J_2, \quad i \in I_5.$$

Разность между потребностью в питательном веществе на 1 голову животного и содержанием этого вещества в рационе по минимальной норме, умноженная на поголовье животных данного вида, не должна превышать содержания питательного вещества в добавках кормов для этого вида животных;

11) технологические ограничения по площади отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей:

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j, \quad j \in J_0.$$

Размеры отраслей предприятия находятся в пределах от минимального до максимального уровней;

12) технологические ограничения по площади посева однородных сельскохозяйственных культур:

$$\bar{r}_{ij} A_i \le \sum_{j^0 \in J_3} a_{ijj^0} x_{jj^0} \le r_{ij} A_i, \quad i = 1, \quad j \in J_4.$$

Сумма площадей сельскохозяйственных культур однородной группы должна находиться в пределах от минимальной до максимальной долей этих культур в площади пашни;

13) по продаже продукции государству:

$$б) \sum_{j \in J_0} d_{ij} x_j - \hat{x}_i = P_i + \sum_{k \in N_0} x_{ik}, \quad i \in I_3.$$

Сумма произведений выхода товарной продукции с единицы отрасли на размер отрасли без учета товарной продукции, которая может быть использована на корм скоту, должна быть не менее объема реализации продукции государству или равна плану сбыта продукции государству с учетом реализации продукции по другим каналам сбыта;

14) по предельным объемам сбыта продукции:

$$\widetilde{D}_{ik} \le x_{ik} \le D_{ik}, i \in I_3, k \in K_0.$$

Объем реализации продукции по конкретному каналу сбыта должен находиться от минимально возможного до максимального уровней реализации;

15) неотрицательность переменных:

$$x_j, x_{jj^0}, x_h, \tilde{x}_h, \hat{x}_h, x_i, \hat{x}_i, x_{ik}, x_{hj} \ge 0.$$

Переменные экономико-математической модели не должны принимать отрицательные значения.

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_1 – множество отраслей растениеводства, $J_1 \in J_0$;

J_2 – множество отраслей животноводства, $J_2 \in J_0$;

j^0 – номер сельскохозяйственных культур однородной группы, $j^0 \in j$;

J_3 – множество сельскохозяйственных культур однородной группы, $J_3 \in J_1$;

J_4 – множество групп однородных сельскохозяйственных культур, $J_4 \in J_1$;

j – номер ресурса (видов земельных угодий, труда, питательных веществ, видов продукции);

I_1 – множество видов земельных угодий;

I_2 – множество видов труда;

I_3 – множество видов товарной продукции;

I_4 – множество видов привлеченного труда;

I_5 – множество видов питательных веществ;

k – номер вида канала реализации продукции;

K_0 – множество каналов реализации продукции;

h – номер вида корма;

H_0 – множество видов кормов;

H_1 – множество покупных кормов, $H_1 \in H_0$;

H_2 – множество кормов животного происхождения, покупных кормов, $H_2 \in H_0$;

H_3 – множество побочных кормов, $H_3 \in H_2$;

H_4 – множество собственных основных кормов, $H_4 \in H_0$;

H_5 – множество собственных основных кормов, выделяемых на внутрихозяйственные нужды, $H_5 \in H_4$.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j;

x_{jj^0} – площадь сельскохозяйственной культуры вида j, принадлежащей к группе культур вида j^0;

x_h – количество покупных кормов вида h;

$\tilde{x}_h$ – количество кормов животного происхождения и покупных вида h;

$\hat{x}_i$ – количество товарной продукции вида i, которая одновременно может быть реализована и использована на корм скоту;

x_{ik} – количество товарной продукции вида i, реализуемой по каналу сбыта вида k;

$\hat{x}_h$ – количество побочных кормов вида h;

x_i – количество привлеченного труда вида i;

x_{hj} – скользящая переменная по корму вида h, для животных или половозрастной группы скота вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы земельного угодья вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

P_i – план продажи продукции вида i;

W_h – расход корма вида h на внутрихозяйственные нужды;

$\tilde{B}_i$ – привлеченный труд вида i;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

E_h – максимальное количество покупки корма вида h;

$\tilde{D}_{ik}, D_{ik}$ – соответственно минимальный и максимальный объемы продукции вида i, реализованной по каналу сбыта вида k;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

a_{ijj^0} – расход земельного угодья вида i на единицу сельскохозяйственной культуры вида j, относящейся к однородной группе сельскохозяйственных культур вида j^0;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

d_{hj} – выход корма вида h от единицы отрасли (растениеводства) вида j;

$W_{hj}^{\min}, W_{hj}^{\max}$ – соответственно минимальный и максимальный расходы корма вида h, на единицу отрасли животноводства вида j;

d_{ij} – выход товарной продукции вида i с единицы отрасли вида j;

W_{ij} – расход питательного вещества вида i на единицу отрасли животноводства вида j;

k_{ih} – содержание питательного вещества вида i в единице корма вида h;

$\tilde{r}_{ij}, r_{ij}$ – соответственно минимальная и максимальная доли культур вида j по земельному угодью вида i;

p_j – прибыль в расчете на единицу отрасли растениеводства вида j;

$\tilde{p}_j$ – прибыль без учета стоимости кормов на единицу отрасли животноводства вида j;

c_h – себестоимость (цена) единицы корма вида h;

c_i – дополнительные затраты на единицу привлеченного труда вида i;

p_{ik} – превышение цены реализации товарной продукции вида i при сбыте ее по каналу вида k.

Приложение I

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: максимум прибыли от реализации продукции

Таблица I1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	763,0	97,7
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	344,5	98,0

Таблица I2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	3927	55,9	118,1
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1254	17,8	94,6
яровые	1850	26,4	2461	35,1	133,0
зернобобовые	150	2,1	212	3,0	141,3
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	180	2,6	в 3,6 раза
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	389	5,4	44,1
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	64	0,9	в 3,2 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0

Таблица I3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2150	106,1
Молодняк КРС	5593	5593	100,0
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5658,8	102,0

Таблица I4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	58141	106,0
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	77862	318,0
Молоко	114380	142155	124,3
Мясо КРС	13440	14206	105,7
Мясо свиней	875	910	103,6

Таблица I5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	58141	173,84	7,6	106,0
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,41	2,5	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,49	6,3	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	77862	79,96	3,5	318,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	454,70	19,9	132,5
Молоко	114380	977,26	51,4	142155	1214,57	53,2	124,3
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14206	569,19	24,9	105,7
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,45	2,0	103,6
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1828,21	80,1	117,5
Всего	–	1901,69	100	–	2282,91	100	120,0

Таблица I6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	3104,7	123,7
рапса	219,5	260,0	118,5
сахарной свеклы	342,1	1233,3	360,5
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	104,0
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1429,3	107,9
прироста живой массы КРС	133,5	138,5	103,7
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	22,25	120,0
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	2,99	123,0

Таблица I7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	4772,56	145,1
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	3969,91	140,1
Прибыль, тыс. руб.	455,45	802,65	176,2
Уровень рентабельности, %	16,1	20,2	4,1 п. п.

Приложение J

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: максимум выручки от реализации продукции

Таблица J1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	781,0	100,0
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	350,5	99,7

Таблица J2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	4156	59,2	125,0
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1987	28,3	150,0
яровые	1850	26,4	1945	27,7	105,1
зернобобовые	150	2,1	224	3,2	149,3
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	180	2,6	в 3,6 раза
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	160	2,3	18,1
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	64	0,9	В 3,2 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0
Озимая рожь на зеленый корм	–	–	216	–	–
Пожнивные культуры	–	–	32	–	–

Таблица J3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2150	106,1
Молодняк КРС	5593	5890	105,3
Основные свиноматки	104	56	53,8
Молодняк свиней	404	436	107,9
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5844,8	105,3

Таблица J4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	116072	211,6
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	77862	318,0
Молоко	114380	143685	125,6
Мясо КРС	13440	14961	111,3
Мясо свиней	875	964	110,2

Таблица J5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	116072	347,06	13,9	211,6
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,41	2,3	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	5,8	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	77862	79,96	3,1	318,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	627,91	25,1	183,0
Молоко	114380	977,26	51,4	143685	1227,65	49,0	125,6
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14961	599,44	24,0	111,3
Мясо свиней	875	42,74	2,3	964	47,09	1,9	110,2
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1874,18	74,9	120,3
Всего	–	1901,69	100	–	2502,09	100	131,6

Таблица J6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
1	2	3	4
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	3285,7	130,9
рапса	219,5	260,0	118,5

Окончание табл. J6

1	2	3	4
сахарной свеклы	342,1	1233,3	360,5
прироста живой массы свиней	12,5	13,7	109,6
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1429,3	107,9
прироста живой массы КРС	133,5	145,8	109,2
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	24,39	131,6
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	3,20	131,6

Таблица J7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	5456,93	165,9
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	4116,33	145,3
Прибыль, тыс. руб.	455,45	1340,60	294,3
Уровень рентабельности, %	16,1	32,6	16,5 п. п.

Приложение К

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: минимум материально-денежных затрат

Таблица К1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	743,5	95,2
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	339,9	96,7

Таблица К2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
1	2	3	4	5	6
Зерновые, всего	3325	47,4	2808	40,0	84,5
В т. ч.: озимые	1325	18,9	896	12,8	67,6
яровые	1850	26,4	1761	25,1	95,2
зернобобовые	150	2,1	151	2,1	100,7
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	100	1,4	200,0

Окончание табл. К2

1	2	3	4	5	6
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	1582	22,5	179,3
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	70	1,0	в 3,5 раза
Итого...	7020	100,0	7020	100,0	100,0

Таблица К3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2027	100,0
Молодняк КРС	5593	5593	100,0
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5535,8	99,8

Таблица К4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	58141	106,0
Кукуруза	3210	10197	317,7
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	43300	176,8
Молоко	114380	133767	116,9
Мясо КРС	13440	14206	105,7
Мясо свиней	875	910	104,0

Таблица К5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	58141	173,84	8,0	106,0
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10197	56,35	2,6	317,7
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	6,7	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	43300	44,47	2,0	176,8
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	419,14	19,3	122,1
Молоко	114380	977,26	51,4	133767	1142,91	52,5	116,9
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14206	569,19	26,2	105,7
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,45	2,0	104,0
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1756,55	80,7	112,7
Всего	–	1901,69	100	–	2175,69	100	114,4

Таблица К6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	2220,0	88,4
рапса	219,5	260,0	118,5
сахарной свеклы	342,1	685,2	200,3
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	103,8
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1347,5	101,7
прироста живой массы КРС	133,5	138,5	103,7
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	21,21	114,4
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	2,93	120,4

Таблица К7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	4028,43	122,5
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	3645,55	128,7
Прибыль, тыс. руб.	455,45	382,88	84,1
Уровень рентабельности, %	16,1	10,5	–5,6 п. п.

Приложение L

Метод линейной свертки критериев

Рассмотрим метод линейной свертки, суть которого сводится к сведению многокритериальной задачи к однокритериальной путем введения суперкритерия. Речь идет о свертывании критериев в единый. Другими словами его можно назвать методом линейной комбинации частных критериев. Прием скаляризации векторного критерия (приведения его к скаляру) может быть осуществлен следующими способами:

1) аддитивная свертка критериев:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i f_i;$$

2) мультипликативная свертка:

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\upsilon_i};$$

3) логарифмически-аддитивная свертка:

$$\ln F = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \ln f_i;$$

где f_i – локальный критерий вида i, $i = \overline{i, n}$;

υ_i – вес критерия вида i, $i = \overline{i, n}$.

При этом $\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 1$ и $\upsilon_i \geq 0,\ i = \overline{i, n}.$

Вектор весов критериев $\upsilon_i = (\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \ldots,\ \upsilon_n)$ обычно определяется на основе экспертных оценок.

Сущность экспертных методов заключается в выработке коллективного мнения группы специалистов (экспертов). Формируется экспертная группа из специалистов в конкретной области. Путем анонимного анкетирования может быть сделан отбор специалистов, которые, по мнению большинства, не могут выступать экспертами в данной области. Опрос экспертов является существенным элементом получения качественной информации. В зависимости от целей и методов обработки результатов опроса применяются различные способы организации работы экспертов, касающиеся их взаимных контактов, анонимности опроса, дозирования информации и т. п. Коллективно выбираются критерии эффективности, характеризующие цель исследуемой системы. В практике наиболее часто применяются следующие методы установления весов критериев.

1. **Метод непосредственной оценки** – состоит в том, что эксперт каждому критерию присваивает определенную оценку (балл), например, от 1 до 10. Балльные оценки нормируются, для этого определяется сумма оценок, выставленных каждым экспертом, по всем критериям, а затем каждая из оценок делится на полученную сумму. Далее нормированные оценки всех экспертов по каждому критерию суммируются, а полученная сумма делится на число экспертов.

2. **Метод последовательных сравнений** – позволяет не только оценить вес каждого критерия, но и выявить зависимости между их количественными оценками. Процедура последовательных сравнений состоит в следующем: эксперт должен оценить исследуемые критерии по их относительной важности. При этом наиболее важному критерию дается оценка $v_i = 1$, а остальным критериям присваиваются оценки v_i в пределах от 0 до 1 в зависимости от относительной важности критериев.

Далее эксперт сравнивает значимость более важного критерия (критерия, получившего оценку 1) с комбинацией остальных критериев. Если этот критерий более значим, то его оценка увеличивается так, чтобы она была больше, чем суммарная оценка остальных критериев:

$$\upsilon_1 > \sum_{i=2}^{n} \upsilon_i .$$

Далее аналогичную процедуру проделывают со вторым и последующими критериями, получившими более низкие оценки. Последовательное сравнение продолжается до (n – 1)-го критерия.

Информация, полученная от экспертов, может считаться достаточно надежной только при условии хорошей согласованности оценок экспертов.

Степень согласованности оценок 2 экспертов или 2 групп экспертов характеризуется **коэффициентом ранговой корреляции Ч. Спирмена** (p):

$$p = 1 - \left(\frac{6 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} \right),$$

где $x_i - y_i$ – разность между рангами (оценками); n – число критериев.

Коэффициент корреляции рангов Спирмена (p) равен +1, если все ранги совпадают, и равен –1, если ранговые ряды имеют обратное направление. Чем ближе p к единице, тем более согласованы решения. Обычно согласованность считается удовлетворительной при p = 0,85 – 0,9 и хорошей при $p \geq 0{,}95$.

Для оценки согласованности мнений группы из m экспертов n применяется **коэффициент конкордации Кендалла *W*** (общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов).

В случае отсутствия равных рангов (оценок) в оценках любого из экспертов коэффициент конкордации определяется по формуле

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{m^2(n^3-n)},$$

где m – число экспертов;

n – число критериев;

x_{ij} – оценка i-м экспертом j-го критерия.

В случае если какой-либо эксперт не может установить ранговое различие между несколькими критериями и присваивает им одинаковые ранги (баллы), коэффициент конкордации определяется по формуле

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{\left(m^2(n^3-n) - m\sum_{i=1}^{m}T_i\right)},$$

где $T_i = 1/12\sum_{i=1}^{h}(t_1^3 - t_i)$;

здесь t_i – число равных рангов в оценках i-го эксперта,

h – число групп равных рангов в оценках i-го эксперта.

Коэффициент конкордации принимает значения в интервале от 0 до 1. При отсутствии согласованности мнений экспертов $W = 0$, при полной согласованности $W = 1$. Практически согласованность считается удовлетворительной, если $W \geq 0{,}5$, и хорошей, если $W \geq 0{,}7$.

Для проверки значимости коэффициента конкордации вычислим статистику x^2 с числом степеней свободы $\nu = n - 1$:

$$x^2 = Wm(n-1).$$

Сравнение расчетного значения $x^2_{\text{расч}}$ с его табличным значением $x^2_{\text{табл}}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}005$ позволяет признать, что коэффициент конкордации значим (так как $x^2_{\text{расч}} > x^2_{\text{табл}}$) (прил. М) и мнения экспертов согласованы.

Таким образом, линейная скаляризованная функция представляет собой сумму частных критериев, умноженных на весовые коэффициенты. К недостаткам метода можно отнести то, что малым приращениям коэффициентов (весов критериев) соответствуют большие приращения функции, что может привести к неустойчивости полученного решения задачи.

Далее покажем решение задачи, в которой целевая функция – сумма произведений прибыли и выручки от реализации продукции на соответствующие им веса.

Рассматривались два однонаправленных критерия: прибыль и выручка от реализации продукции. Вес каждого критерия определялся экспертным путем. Были сформированы три экспертные группы из руководителей сельскохозяйственных организаций Горецкого района, которые каждому критерию присвоили определенную оценку (балл) от 1 до 5. Балльные оценки были нормированы, для этого определили сумму оценок, выставленных каждой экспертной группой, по всем критериям, а затем каждая из оценок была поделена на полученную сумму. Далее нормированные оценки всех экспертных групп по каждому критерию были суммированы, а полученная сумма поделена на число экспертных групп. В результате расчетов получили следующие веса: прибыль – 0,62; выручка от реализации продукции – 0,38. Данный вариант позволит организации получить наивысшую прибыль, равную 1369,97 тыс. руб. При этом уровень рентабельности составит 33,6 % (прил. М).

Приложение М

**Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией:
максимум суммы произведений прибыли
и выручки от реализации продукции на соответствующие их веса**

Таблица М1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	781,0	100,0
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	346,6	98,6

Таблица М2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	4156	59,2	125,0
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1987	28,3	150,0
яровые	1850	26,4	1945	27,7	105,1
зернобобовые	150	2,1	224	3,2	149,3
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	180	2,6	в 3,6 раза
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	160	2,3	18,1
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	64	0,9	в 3,2 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0
Пожнивные культуры	–	–	160	–	–

Таблица М3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2150	106,1
Молодняк КРС	5593	5890	105,3
Основные свиноматки	104	56	53,8
Молодняк свиней	404	436	107,9
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5844,8	105,3

Таблица М4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	116072	211,6
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	77862	318,0
Молоко	114380	143685	125,6
Мясо КРС	13440	14961	111,3
Мясо свиней	875	964	110,2

Таблица М5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	116072	347,06	13,9	211,6
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,41	2,2	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	5,8	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	77862	79,96	3,2	318,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	627,91	25,1	183,0
Молоко	114380	977,26	51,4	143685	1227,64	49,0	125,6
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14961	599,45	24,0	111,3
Мясо свиней	875	42,74	2,3	964	47,09	1,9	110,2
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1874,18	74,9	120,3
Всего	–	1901,69	100	–	2502,09	100	131,6

Таблица М6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	3285,7	130,9
рапса	219,5	260,0	118,5
сахарной свеклы	342,1	1233,3	360,5
прироста живой массы свиней	12,5	13,7	109,8
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1429,3	107,9
прироста живой массы КРС	133,5	145,8	109,2
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	24,39	131,6
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	3,20	131,6

Таблица М7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	5449,62	165,7
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	4079,65	144,0
Прибыль, тыс. руб.	455,45	1369,97	300,8
Уровень рентабельности, %	16,1	33,6	17,5 п. п.

Приложение N

Метод ведущего критерия

Рассмотрим метод ведущего критерия, суть которого сводится к тому, что один из наиболее предпочтительных критериев используется в качестве целевой функции задачи, а требования всех оптимальных учитываются при составлении ограничений задачи. Исходя из требований, предъявляемых к предприятиям АПК, функционирующим в условиях рынка, можно назвать следующие альтернативные показатели, которые могут быть использованы в качестве критерия:

– минимум совокупных затрат;
– максимум производительности труда;
– минимум материалоемкости производства;
– минимум загрязнений окружающей среды;
– максимум валового дохода;
– максимум выручки от реализации продукции предприятия;
– максимум рентабельности производства;
– максимум маржинальной прибыли;
– максимум чистой прибыли и др.

Рассмотрим эти показатели с позиций их возможной конкуренции в отражении конечных результатов производства. Так, показатели, характеризующие какие-либо затраты, могут отражать интересы отдельных производственных подразделений и при этом не отвечать интересам предприятия в целом. Поэтому их нельзя рассматривать в качестве альтернативного критерия, способного отразить конечные результаты производства.

Наиболее обобщающими показателями, отражающими конечные результаты производства, могут быть: выручка от реализации продукции предприятия; рентабельность производства; маржинальная и чистая прибыль предприятия.

Показатель выручки от реализации продукции хоть и важен для предприятия, но может выполнять роль критерия только в исключительных случаях и то временно, до изменения рыночной и производственной ситуации. Главный его недостаток заключается в том, что он не отражает затрат, которые предприятие понесло, чтобы эту выручку получить.

Но полная себестоимость конкретной продукции предприятия включает в себя и долю постоянных издержек, размер которых (в расчете на конкретную продукцию) оказывает влияние на конечные результаты деятельности предприятия. Поэтому в качестве критерия экономико-математической модели может использоваться и показатель максимума маржинальной прибыли.

Показатель рентабельности производства также выполняет важную для предприятия роль, так как характеризует эффективность производства. Однако он не отражает «живых» денег. Кроме того, в нем не находят отражения капитальные вложения и инвестиции, а также налоговые платежи предприятия. Поэтому принять данный показатель в качестве критерия также не представляется возможным.

Показатель чистой прибыли предприятия полностью соответствует требованиям рыночной экономики, отражает реальный конечный результат производства на данном предприятии, более полно отвечает интересам не только предприятия, но и национальной экономики, так как в нем присутствуют налоговые платежи. Поэтому именно максимум чистой прибыли предприятия может рассматриваться как основной критерий решения ЭММ для оптимизации программы развития конкретного предприятия.

Вследствие этого один из наиболее предпочтительных критериев – прибыль сельскохозяйственной организации – выберем в качестве ведущего.

В соответствии с требованиями на все критерии накладываются определенные ограничения, которым они должны удовлетворять. Вводится система контрольных показателей $\tilde{f}_k$, относительно которых по всем критериям должны быть достигнуты значения, не меньше заданных значений $\tilde{f}_k$.

$$f_k(X) \geq \tilde{f}_k, \; k = 1,2,\ldots,K \cdot$$

После выбора основного критерия и установления нижних границ для остальных критериев решается задача однокритериальной оптимизации

$$f_1(X) \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} f_k(X) \geq f_k, k = 1, 2, \ldots, K, \\ X \in D. \end{cases}$$

Требования критериев выручки от реализации продукции и материально-денежных затрат запишем в виде ограничений экономико-математической задачи, задав им нижние границы, равные 5184,08 и 3827,83 тыс. руб. Далее покажем итоговые показатели решения задачи, в которой целевая функция: максимум прибыли от реализации продукции с ограничениями на выручку от сбыта и материально-денежными затратами. Значение прибыли составит 1356,25 тыс. руб., рентабельность – 35,4 % (прил. О).

Приложение О

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: максимум прибыли от реализации продукции с ограничениями на выручку от реализации и материально-денежными затратами

Таблица О1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	759,9	97,3
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	336,7	95,8

Таблица О2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	4212	60,0	126,7
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1344	19,1	101,4
яровые	1850	26,4	2641	37,6	142,8
зернобобовые	150	2,1	227	3,2	151,3
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	60	0,9	120,0
Однолетние травы	593	8,4	451	6,4	76,1
Многолетние травы	883	12,6	160	2,3	18,1
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	875	12,5	79,5
Корнеплоды	20	0,3	77	1,0	в 3,9 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0

Таблица О3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2062	101,7
Молодняк КРС	5593	5593	100,0
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5570,8	100,4

Таблица О4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	114604	208,9
Кукуруза	3210	10197	317,7
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	25954	106,0
Молоко	114380	137836	120,5
Мясо КРС	13440	14206	105,7
Мясо свиней	875	910	104,0

Таблица О5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	114604	342,67	14,5	208,9
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10197	56,35	2,4	317,7
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	6,1	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	25954	26,65	1,1	106,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	570,15	24,1	166,1
Молоко	114380	977,26	51,4	137836	1177,67	49,9	120,5
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14206	569,19	24,1	105,7
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,46	1,9	104,0
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1791,32	75,9	114,9
Всего	–	1901,69	100	–	2361,47	100	124,2

Таблица О6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц:			
зерна	2510,3	3330,0	132,7
рапса	219,5	260,0	118,5
сахарной свеклы	342,1	411,1	120,2
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	104,0
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц:			
молока	1325,0	1370,8	103,5
прироста живой массы КРС	133,5	138,5	103,7
Произведено товарной продукции:			
на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	23,02	124,2
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	3,11	127,9

Таблица О7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	5184,08	157,6
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	3827,83	135,1
Прибыль, тыс. руб.	455,45	1356,25	297,8
Уровень рентабельности, %	16,1	35,4	19,3 п. п.

Приложение Р

Метод последовательных уступок

Далее рассмотрим метод последовательных уступок. Его сущность состоит в замене многокритериальной задачи оптимизации последовательностью однокритериальных задач. Вначале исследуемые критерии ранжируются в порядке убывания их значимости. Задача решается с первым по значимости критерием f_1 и определяется его экстремальное значение f_1^*. Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от его оптимального значения, т. е. уступка Δf_1, и решается задача еще раз, но уже со вторым по значимости критерием f_2 при условии, что отклонение первого критерия от его оптимального значения не превзойдет величины уступки:

$$f_2^* = \max_{X \in D} f_2(X)\,;$$

$$f_1 \geq (X) f_1^* - \Delta f_1;$$

Далее назначается уступка для второго критерия, и задача решается с третьим критерием и т. д.:

$$f_K^* = \max_{X \in D} f_K(X)\,;$$

$$f_1 \geq (X) f_1^* - \Delta f_1;$$

$$f_2 \geq (X) f_2^* - \Delta f_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.;$$

$$f_{K-1} \geq (X) f_{K-1}^* - \Delta f_{K-1}.$$

Таким образом, решение каждой исследуемой задачи основано на решении предыдущей, так как оно содержит дополнительные ограничения, характеризующие величину уступки по критериям.

Основной недостаток методов, использующих ограничения на критерии, состоит в субъективности выбора контрольных показателей и в субъективности выбора уступок. При использовании метода последовательных уступок следует помнить, что уступки могут быть несоизмеримы между собой, поэтому надо предварительно организовать нормализацию критериев $f_1(X)$, т. е. приведение всех критериев к единому масштабу и безразмерному виду.

Наиболее часто используется замена критериев их безразмерными относительными величинами

$$\upsilon_k(X) = \frac{f_k(X)}{f_k^*},$$

или относительными значениями отклонений от оптимальных значений критериев

$$\upsilon_k(X) = \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*},$$

где $f_k^* = \max_{X \in D} f_k(X)$.

Нормализованные критерии обладают следующими свойствами:

1) являются безразмерными величинами;

2) удовлетворяют неравенству $0 \leq \upsilon_k(X) \leq 1$ для любого $X \in D$.

Эти свойства позволяют сравнивать критерии между собой.

Возьмем первый по значимости критерий – прибыль от реализации продукции. Найдя оптимальное решение по данному критерию, устанавливаем по нему уступку – 272,85 тыс. руб. прибыли, что предполагает прирост данного показателя к фактическому параметру как минимум в 1,16 раза. Далее решаем задачу по второму критерию – денежная выручка от реализации продукции – с учетом первого дополнительного ограничения по получению прибыли не ниже ранее установленного значения. Найдя экстремальное значение второй целевой функции, делаем уступку по второму критерию – денежная выручка – в размере 5,514 тыс. руб. Переходим к следующему этапу, т. е., вводим в задачу еще одно дополнительное ограничение. Новую задачу с двумя дополнительными ограничениями (на размер прибыли и количество денежной выручки) будем решать по третьему критерию – минимуму материально-денежных затрат.

Таким образом, находим экстремальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений более важных критериев. Проанализируем итоги решения экономико-математической задачи с целевой функцией – минимум материально-денежных затрат, который являлся третьим критерием при использовании метода последовательных уступок. Значение прибыли составит 762,52 тыс. руб., рентабельность – 18,9 % (прил. Q).

Следовательно, полученное таким методом решение не является оптимальным по обеспечению экстремума ни по одному из вводимых в модель критериев, но одновременно учитывает их все. Однако проблема в том, что условной является величина принимаемой уступки. Хотя можно обосновать величину уступок, предварительно изучив размах варьирования значений каждого критерия.

Метод последовательных уступок обладает еще и тем недостатком, что степень приближения окончательного решения к каждому отдельному оптимуму, кроме первого, остается неопределенной, и решение может оказаться ближе к экстремуму по менее важному критерию.

Приложение Q

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: минимум материально-денежных затрат, методом уступок по первому и второму критериям

Таблица Q1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	766,2	98,1
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	342,7	97,5

Таблица Q2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	3383	48,2	101,7
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1079	15,4	81,4
яровые	1850	26,4	2122	30,2	114,7
зернобобовые	150	2,1	182	2,6	122,0
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1688	24,0	180,7
Сахарная свекла	50	0,7	100	1,4	200,0
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	356	5,1	40,3
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	70	1,0	в 3,5 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0

Таблица Q3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2027	100,0
Молодняк КРС	5593	5593	100,0
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5535,8	99,8

Таблица Q4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	58141	106,0
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	29712	172,6
Сахарная свекла	24485	43300	176,8
Молоко	114380	133767	116,9
Мясо КРС	13440	14206	105,7
Мясо свиней	875	910	104,0

Таблица Q5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	58141	173,84	7,7	106,0
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,41	2,5	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	29712	235,25	10,3	172,6
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	43300	44,47	2,0	176,8
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	509,97	22,5	148,6
Молоко	114380	977,26	51,4	133767	1142,91	50,4	116,9
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14206	569,19	25,1	105,7
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,45	2,0	104,0
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1756,55	77,5	112,7
Всего	–	1901,69	100	–	2266,52	100	119,2

Таблица Q6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	2674,6	106,5
рапса	219,5	423,2	192,8
сахарной свеклы	342,1	685,2	200,3
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	104,0
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1347,5	101,7
прироста живой массы КРС	133,5	138,5	103,7
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	22,09	119,2
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	2,96	121,8

Таблица Q7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	4789,70	145,7
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	4027,18	142,2
Прибыль, тыс. руб.	455,45	762,52	167,4
Уровень рентабельности, %	16,1	18,9	2,8 п. п.

Метод равных и наименьших относительных отклонений

Метод равных и наименьших относительных отклонений разработан польским ученым И. Ныковским. Его суть состоит в том, что исходная задача решается по каждому критерию отдельно с вычислением для них экстремальных значений. После этого ставится требование, чтобы компромиссному плану соответствовали равные и минимальные относительные отклонения всех критериев от своих экстремальных значений. Равенство отклонений обеспечивается дополнительными ограничениями, вводимыми в задачу. Недостатком метода является то, что наихудший по степени достижения цели критерий определяет результаты по всем остальным компонентам целевой функции.

Итак, нами была решена задача с тремя вариантами целевой функции: f_1 – максимизация прибыли; f_2 – максимизация выручки от реализации продукции; f_3 – минимизация издержек. Далее запишем дополнительные ограничения для ввода критериев (f_1, f_2, f_3) в число неизвестных величин экономико-математической задачи и выполнения требования равных относительных отклонений значений критериев в компромиссном решении от их экстремальных значений с учетом, что

$$1 / f_1^* = 1 / 8026{,}5 = 0{,}000125; \; 1 / f_2^* = 1 / 54569{,}3 = 0{,}000018;$$

$$1 / f_3^* = 1 / 36455{,}5 = 0{,}000027.$$

Следовательно, вводим в задачу три ограничения (равенства), обозначающие значения каждого критерия оптимальности, и два ограничения:

$$0{,}000125 f_1 - 0{,}000018 f_2 = 0;$$

$$0{,}000125 f_1 + 0{,}000027 f_3 = 2.$$

В качестве целевой функции расширенной задачи возьмем первый критерий:

$$F = f_1(\max).$$

Полученное компромиссное решение характеризуется одинаковыми равными и наименьшими относительными отклонениями критериев:

$$(f_1^* - f_1) / f_1^* = (f_2^* - f_2) / f_2^* = (f_3^* - f_3) / f_3^* = 0{,}386.$$

В процессе решения задачи была получена оптимальная программа, конечные результаты следующие: прибыль – в размере 7048,2 млн. руб., уровень рентабельности – 17,2 % (прил. S).

Приложение S

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: максимум прибыли с одинаковыми равными и наименьшими относительными отклонениями критериев

Таблица S1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	770,1	98,6
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	348,3	99,1

Таблица S2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	3989	56,8	119,9
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1272	18,1	96,0
яровые	1850	26,4	2501	35,6	135,2
зернобобовые	150	2,1	216	3,1	144,0
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,7	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	180	2,6	в 3,6 раза
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	280	4,0	31,7
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	111	1,6	в 5,6 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0
Озимая рожь на зеленый корм	–	–	351	–	–
Пожнивные культуры	–	–	157	–	–

Таблица S3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2150	106,1
Молодняк КРС	5593	5854	104,7
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5853,2	105,5

Таблица S4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	58141	106,0
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	77862	318,0
Молоко	114380	141947	124,1
Мясо КРС	13440	14869	110,6
Мясо свиней	875	910	104,0

Таблица S5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
Зерно	54850	164,00	8,6	58141	173,84	7,5	106,0
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,42	2,4	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	6,3	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	77862	79,96	3,5	318,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	454,70	19,7	132,5
Молоко	114380	977,26	51,4	141947	1212,80	52,6	124,1
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14869	595,74	25,8	110,6
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,45	1,9	104,0
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1852,99	80,3	118,9
Всего	–	1901,69	100	–	2307,69	100	121,3

Таблица S6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц:			
зерна	2510,3	3051,4	121,6
рапса	219,5	260,0	118,5
сахарной свеклы	342,1	1233,3	360,5
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	104,0
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц:			
молока	1325,0	1429,3	107,9
прироста живой массы КРС	133,5	144,9	108,6
Произведено товарной продукции:			
на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	22,49	121,3
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	3,00	123,3

Таблица S7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	4798,95	145,9
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	4094,13	144,5
Прибыль, тыс. руб.	455,45	704,82	154,8
Уровень рентабельности, %	16,1	17,2	1,1 п. п.

Приложение Т

Метод минимакса

Для использования метода минимакса необходимо:

– решить экономико-математическую задачу по каждому из критериев (f_1, f_2, f_3);

– ввести в задачу дополнительные ограничения, соответствующие виду целевых функций;

– включить в число неизвестных экономико-математической задачи величину, отражающую максимальное относительное отклонение, которое будем минимизировать.

Для данной задачи были выписаны значения всех критериев (прибыль, выручка, издержки) в трех вариантах оптимальных решений. Для нахождения компромиссного решения методом минимакса к исходной системе ограничений добавляем ограничения по прибыли, выручке, издержкам с учетом новой неизвестной переменной (новый критерий оптимальности), значение которой в целевой функции будет минимизировано.

По данному варианту программы организация получит прибыль в размере 681,6 тыс. руб., при этом уровень рентабельности составит 17,0 %. Таким образом, значения экономических показателей этого компромиссного решения следующие: выручка от реализации продукции – 4681,84 тыс. руб., или 85,8 % от ее максимального значения; материально-денежные затраты – 4000,24 тыс. руб., или 109,7 % от их минимального значения; прибыль – 681,6 тыс. руб., или 84,9 % от ее максимального значения (прил. U).

Приложение U

Результаты решения ЭМЗ с целевой функцией: минимум максимального относительного отклонения критериев

Таблица U1. **Использование производственных ресурсов**

Вид ресурсов	Ресурсы		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Пашня, га	7020	7020	100,0
Сенокосы, га	2539	2539	100,0
Пастбища, га	700	700	100,0
Годовой труд, тыс. чел.-ч	781,0	781,0	100,0
Труд в напряженный период, тыс. чел.-ч	351,5	346,9	98,7

Таблица U2. **Структура посевных площадей**

Культуры	Фактическая		Расчетная		Расчет в % к факту
	га	%	га	%	
Зерновые, всего	3325	47,4	3976	56,6	119,6
В т. ч.: озимые	1325	18,9	1268	18,1	95,7
яровые	1850	26,4	2542	36,2	137,4
зернобобовые	150	2,1	166	2,3	110,7
Кукуруза на зерно	115	1,6	148	2,1	128,7
Рапс	934	13,3	1037	14,8	111,0
Сахарная свекла	50	0,7	180	2,6	в 3,6 раза
Однолетние травы	593	8,4	175	2,5	29,5
Многолетние травы	883	12,6	342	4,9	38,7
Кукуруза на силос и зеленый корм	1100	15,7	1100	15,7	100,0
Корнеплоды	20	0,3	62	0,9	в 3,1 раза
Итого…	7020	100,0	7020	100,0	100,0

Таблица U3. **Поголовье животных**

Вид животных	Поголовье, гол.		Расчет в % к факту
	Факт	Расчет	
Коровы	2027	2117	104,4
Молодняк КРС	5593	5852	104,6
Основные свиноматки	104	54	51,9
Молодняк свиней	404	412	102,0
Лошади	12	12	100,0
Итого условных голов	5548,4	5781,2	104,2

Таблица U4. **Реализация продукции, ц**

Продукция	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Зерно	54850	58141	106,0
Кукуруза	3210	10209	318,0
Рапс	17215	18248	106,0
Сахарная свекла	24485	77862	318,0
Молоко	114380	139698	122,1
Мясо КРС	13440	14864	110,6
Мясо свиней	875	910	104,0

Таблица U5. **Структура товарной продукции**

Продукция	Факт			Расчет			Расчет в % к факту
	ц	тыс. руб.	%	ц	тыс. руб.	%	
1	2	3	4	5	6	7	8
Зерно	54850	164,00	8,6	58141	173,84	7,6	106,0

Окончание табл. U5

1	2	3	4	5	6	7	8
Кукуруза	3210	17,74	0,9	10209	56,42	2,5	318,0
Рапс	17215	136,30	7,2	18248	144,48	6,3	106,0
Сахарная свекла	24485	25,15	1,3	77862	79,96	3,5	318,0
Итого по растениеводству	–	343,19	18,0	–	454,70	19,9	132,5
Молоко	114380	977,26	51,4	139698	1193,58	52,2	122,1
Мясо КРС	13440	538,50	28,3	14864	595,56	26,0	110,6
Мясо свиней	875	42,74	2,3	910	44,45	1,9	104,0
Итого по животноводству	–	1558,50	82,0	–	1833,59	80,1	117,7
Всего	–	1901,69	100	–	2288,29	100	120,3

Таблица U6. **Уровень и эффективность производства**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Произведено на 100 га пашни, ц: зерна	2510,3	3143,4	125,2
рапса	219,5	260,0	118,4
сахарной свеклы	342,1	1233,3	360,5
прироста живой массы свиней	12,5	13,0	104,0
Произведено на 100 га сельхозугодий, ц: молока	1325,0	1407,3	106,2
прироста живой массы КРС	133,5	144,9	108,5
Произведено товарной продукции: на 100 га сельхозугодий, тыс. руб.	18,54	22,31	120,3
на 1 чел.-ч, тыс. руб.	2,43	2,93	120,3

Таблица U7. **Финансовые результаты работы**

Показатели	Факт	Расчет	Расчет в % к факту
Выручка от реализации продукции, тыс. руб.	3288,45	4681,84	142,4
Материально-денежные затраты, тыс. руб.	2833,00	4000,24	141,2
Прибыль, тыс. руб.	455,45	681,60	149,7
Уровень рентабельности, %	16,1	17,0	0,9 п. п.

Критические точки распределения x^2

Число степеней свободы R	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,1	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шафранская Ирина Викторовна
Хомич Ольга Александровна

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
В УПРАВЛЕНИИ АПК

КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. Н. Минакова*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 13.12.2022. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 11,63.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.