МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

И. В. Шафранская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства в качестве
учебно-методического пособия для студентов учреждений высшего
образования, обучающихся по специальности
1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях
агропромышленного комплекса*

Горки
БГСХА
2019

УДК 330.45(076.5)
ББК 65 В6
Ш30

Рекомендовано методической комиссией
экономического факультета 23.04.2019 (протокол № 9)
и Научно-методическим советом БГСХА 24.04.2019 (протокол № 8)

Автор:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*

Рецензенты:
кандидат экономических наук, доцент *А. В. Грибов*;
кандидат педагогических наук, доцент *О. Л. Сапун*

Шафранская, И. В.
Ш30 Исследование операций. Пактикум : учебно-методическое пособие / И. В. Шафранская. – Горки : БГСХА, 2019. – 168 с.
ISBN 978-985-467-913-6.

Приведены информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе методов исследования операций осуществляется решение задач по оптимизации управления предприятиями АПК.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса.

УДК 330.45(076.5)
ББК 65 В6

ISBN 978-985-467-913-6

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и возрастающий объем стоящих перед экономистами задач требует использования количественных методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные решения по вопросам управления предприятиями АПК.

В этих условиях важное значение имеет обучение студентов основам моделирования и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, связанных с планированием использования земельных, материальных, трудовых и денежных ресурсов, определения нормативных экономических показателей, параметров работы предприятий, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на предприятиях АПК.

Задания ориентированы на учет реальных производственных ситуаций, предполагают широкое использование персональных компьютеров и учитывают современные достижения в развитии количественных методов и моделей.

Порядок размещения материала предполагает переход от простых к более сложным темам.

Тема 1 посвящена изучению конфликтной ситуации на основе игрового моделирования и разработке рекомендаций по наиболее рациональному действию каждого из участников игры.

Изучение материала темы 2 позволяет на основе экономической информации по предприятиям научиться составлять системы линейных неравенств, находить решение линейных экономико-математических задач.

Задания темы 3 знакомят студентов с основными понятиями систем сетевого планирования и управления. Излагается методика решения сетевых моделей симплексным методом.

Материал темы 4 посвящен изучению моделей теории расписаний, позволяющих минимизировать простои оборудования предприятий.

Темы 5 и 6 посвящены моделям теории массового обслуживания и теории управления запасами.

Порядок выполнения заданий предусматривает индивидуальную работу каждого студента. Содержание индивидуального задания формирует студент. Для того чтобы получить исходные данные заданий, необходимо в формулы, имеющиеся в задании, подставить значения N (равное последней цифре шифра зачетной книжки) и K (равное 1, если фамилия студента начинается с букв А, Б, В, Г; 2 – Д, Е, Ж, З, И, Н; 3 – К, Л, М, П; 4 – С, Т, О, Р; 5 – Ш, Щ, Э, У, Ф, Ц, Ч, Х, Ю, Я).

1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т. е. таких действий, которые обеспечивали бы игроку наилучший результат при многократном повторении игры. При этом *игра* рассматривается как упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам, которые устанавливают:

– выбор действий игроков на каждом этапе игры;

– информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении своих выборов;

– выигрыши или проигрыши каждого игрока после завершения игры.

Суть игры состоит в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший ход игры, т. е. величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

При этом оптимальной считается та стратегия, которая обеспечивает игроку при многократном повторении игры максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш.

Принятие решений может происходить в условиях определенности, неопределенности и риска.

1.1. Статистические игры

Игра – это формализованное описание (модель) конфликтной ситуации (или ситуации с неполным совпадением интересов сторон, имеющих общие цели), включающее четко определенные правила действий участников (игроков), добивающихся выигрыша в результате принятия той или иной стратегии.

Статистическая игра (игра с «природой») – это игра, в которой имеется только один игрок, причем исход игры зависит не только от его решения, но и от состояния «природы», т. е. не от сознательно противодействующего противника, а от объективной, невраждебной действительности. При обосновании оптимальной стратегии игрока используются различные критерии.

Задача 1.1. Требуется дать рекомендации сельскохозяйственной организации по выращиванию картофеля в зависимости от почвенного состава полей и погодных условий с целью достижения максимальной урожайности.

Исходная информация.

1. Имеются три поля с различным почвенным плодородием: A_1, A_2, A_3.

2. Погодные условия характеризуются тремя состояниями: $П_1$ – неблагоприятные, $П_2$ – средние, $П_3$ – благоприятные.

3. Вероятность появления погодных условий составит: $p_{П_1} = 0{,}45$; $p_{П_2} = 0{,}35$; $p_{П_3} = 0{,}20$.

4. Средняя урожайность картофеля в зависимости от погодных условий и качества почв приведена в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1. **Урожайность картофеля, ц/га**

Поля с разным почвенным плодородием	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	290	300	320
A_2	270 + 2K	280	340 – 2K
A_3	250 + 2N	310	350 – 2N

Задача 1.2. Необходимо обосновать дозы внесения органических удобрений в расчете на 1 га картофеля с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация планирует выращивать картофель на конкретном поле.

2. На урожайность картофеля оказывают влияние погодные условия (стратегия $П_1$ – сухое лето, $П_2$ – нормальное, $П_3$ – влажное) и количество вносимых под сельскохозяйственную культуру удобрений (стратегия A_1 – меньше рекомендуемой нормы внесения, A_2 – соответствует норме, A_3 – больше нормы внесения удобрений).

3. Прибыль с 1 га посева картофеля в зависимости от норм внесения удобрений и погодных условий приведена в табл. 1.2.

Т а б л и ц а 1.2. **Прибыль с 1 га картофеля, тыс. у. д. е.**

Норма внесения удобрений, ц д. в.	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	105	110	98 + K
A_2	115	120 – N	100
A_3	95 + N	125 – K	115

Задача 1.3. Требуется дать рекомендации сельскохозяйственной организации по выращиванию сельскохозяйственных культур в зависимости от погодных условий с целью достижения максимальных результатов.

Исходная информация.

1. На поле предполагается выращивать одну из культур: тимофеевку, вику и ежу сборную.

2. Погодные условия, влияющие на урожайность сельскохозяйственных культур, характеризуются тремя состояниями: $П_1$ – засушливый год, $П_2$ – нормальный год, $П_3$ – дождливый.

3. Вероятность появления погодных условий составит: $p_{П_1} = 0{,}27$; $p_{П_2} = 0{,}35$; $p_{П_3} = 0{,}38$.

4. Средняя урожайность культур в зависимости от погодных условий приведена в табл. 1.3.

Таблица 1.3. **Урожайность сельскохозяйственных культур, ц к. ед/га**

Сельхозкультура	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
Тимофеевка	42 + К	50 – 0,2К	46
Вика	43	48	47
Ежа сборная	41 + N	49 – 0,2N	48

Задача 1.4. Требуется обосновать вариант производства модификации товара, величина предложения которого обеспечит предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса, приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,5	2,6	2,5 + 0,1N
T_2	2,4	2,2 – 0,1К	2,6
T_3	2,3 + 0,1К	2,4	2,8

Задача 1.5. Необходимо обосновать объем заказываемой партии товара с целью минимизации дополнительных затрат, связанных с хранением товара и срочным его завозом.

Исходная информация.

1. Руководство магазина заказывает определенный товар, спрос на который колеблется в пределах от 50 до 100 шт. (стратегии второго игрока), с оптовой базы.

2. Если спрос на товар будет неудовлетворен, то можно срочно заказать и завезти недостающее количество товара в магазин. Затраты по срочному заказу составляют 5,0 + 0,5N у. д. е. в расчете на единицу товара.

3. Если спрос будет меньше имеющегося количества товара, то нереализованный товар будет храниться на складе. Расходы на хранение единицы товара составляют 1,5 + 0,2К у. д. е.

Задача 1.6. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия, т. е. стратегию продаж изделий (C_1, C_2, C_3, H_1, H_2, H_3).

Исходная информация.

Предприятие планирует продажи старых товаров (C_1, C_2, C_3) при наличии новых товаров (H_1, H_2, H_3). Выигрыш от продажи товаров (a_{ij}) и условные вероятности продажи (p_{ij}) приведены в табл. 1.5.

Т а б л и ц а 1.5. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Старые товары	Новые товары		
	$H_1(p)$	$H_2(p)$	$H_3(p)$
C_1	6 (0,5)	4 (0,3)	1 (0,2)
C_2	7 (0,3)	2 + 0,1N (0,1)	5 (0,6)
C_3	4 (0,3)	3 + 0,1К (0,3)	6 (0,4)

Используя приведенную информацию задач 1.1–1.6, необходимо:

1) используя критерии Байеса (с учетом вероятности появления исходов) и Лапласа, определить: на каком участке сельскохозяйственная культура (или какая сельскохозяйственная культура) обеспечивает сельскохозяйственной организации наибольшую урожайность; производство или продажа какого товара (или товаров) обеспечивает предприятию наибольшую прибыль;

2) используя критерий Вальда, определить: на каком участке сельскохозяйственная культура гарантирует сельскохозяйственной организации наилучшие результаты в наихудших условиях; производство или продажа какого товара гарантирует предприятию наилучшие результаты в наихудших условиях;

3) обосновать оптимальную стратегию предприятия по критерию Сэвиджа. Для этого необходимо следующее:

а) построить матрицу риска (определить значение коэффициентов риска r_{ij}):

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij} \text{ по каждому столбцу } j,$$

где i – номер строки;

j – номер столбца;

a_{ij} – элемент матрицы a, стоящий в i-й строке j-го столбца;

$\max a_{ij}$ – максимальный элемент a_{ij} в каждом столбце;

б) найти максимальное значение коэффициентов риска по каждой строке, т. е. $\max\limits_{j} r_{ij}$;

в) найти минимальное значение коэффициентов риска по столбцу, полученному выше, т. е. $\min\limits_{i}(\max\limits_{j} r_{ij})$.

В результате определим стратегию предприятия, характеризующуюся наименьшим максимальным риском;

4) определить по критерию Гурвица оптимальную стратегию предприятия, которая выбирается по формуле

$$\max[\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij}],$$

где $0 \le \lambda \le 1$;

5) обосновать, используя различные критерии, на каком участке сельскохозяйственная культура обеспечивает предприятию наибольшую урожайность при заданных условиях; производство или продажа какого товара (товаров) более выгодны предприятию при любом уровне спроса.

1.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричные игры – это класс антагонистических игр, в которых участвуют два игрока, причем каждый располагает конечным числом стратегий. Если один игрок имеет m стратегий, а второй n, то можно построить матрицу игры размерностью $m \times n$, которая характеризует выигрыш первого игрока и проигрыш второго.

Задача 1.7. Требуется обосновать оптимальный уровень производства и сбыта товаров, обеспечивающий кафетерию наибольшую эффективность работы.

Исходная информация.

Кафетерий реализует торты собственного производства. В зависимости от покупательского спроса ежедневный сбыт колеблется в пределах от 10 до 15 единиц. Прибыль предприятия от каждого реализованного торта равна 1,5 у. д. е. Если торты не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафетерий несет убытки, равные 2,5 у. д. е. в расчете на каждый торт.

Задача 1.8. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия (т. е. стратегию продаж товаров).

Исходная информация.

Торговое предприятие планирует продажу сезонных товаров с учетом возможных вариантов покупательского спроса (C_1, C_2, C_3, C_4). Предприятие разработало три стратегии продажи товаров ($П_1$, $П_2$, $П_3$). Прибыль от сбыта сезонных товаров (a_{ij}) приведена в табл. 1.6.

Таблица 1.6. **Прибыль торгового предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Стратегии продаж	Состояние спроса			
	C_1	C_2	C_3	C_4
$П_1$	7	5	4	6
$П_2$	4	3 + 0,1К	2	5
$П_3$	2 + 0,1К	4	3 + 0,1К	2

Задача 1.9. Требуется обосновать, производство каких товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство шести товаров ($T_1 \dots T_6$) с неопределенным спросом, предлагаемый уровень которого характеризуется тремя состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса (коэффициенты платежей матрицы a_{ij}), приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Товар	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	4	3	6
T_2	6	2 + 0,2К	4
T_3	2	1	5
T_4	3	3	1 + 0,1N
T_5	5	2	3
T_6	4	1 + 0,1К	8

Задача 1.10. Требуется обосновать стратегию закупки угля для отопления административных зданий сельскохозяйственной организации с целью минимизации затрат на его приобретение.

Исходная информация.

1. Котельная сельскохозяйственной организации работает на угле, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом 1 т угля стоит 80 + N у. д. е., в мягкую зиму – 100, в обычную – 110, в холодную – 120 у. д. е.

2. Расход угля за отопительный сезон зависит от характера зимы: в мягкую зиму расходуется 20 + K т, в обычную – 30 + K т, в холодную – 40 + K т угля.

3. Следует иметь в виду, что уголь можно закупить летом, докупить недостающее количество зимой, но продавать неиспользованный уголь зимой нельзя.

Используя приведенную информацию задач 1.7–1.10, необходимо:

1) составить платежную матрицу игры;

2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij},$$

т. е. сначала найти минимально возможный выигрыш (минимальное значение) $\alpha_i : \alpha_i = \min_j a_{ij} (i = \overline{1, m})$, а затем из всех α_i выбрать наибольшее значение $\alpha : \alpha = \max_i a_i$ и определить соответствующую ему чистую стратегию A_i^0. Величина α – это гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок *A*, правильно применяя свои стратегии;

3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

т. е. сначала найти максимально возможный проигрыш (максимальное значение) β_j: $\beta_j = \max_i a_{ij} (j = \overline{1, n})$, а затем из всех β_j выбрать минимальное значение $\beta : \beta = \min_j \beta_j$ и определить соответствующую ему чистую стратегию B_j^0. Величина β – это наименьший проигрыш игрока *B* независимо от того, какие стратегии применяет игрок *A* в процессе игры;

4) найти чистую цену игры.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены совпадают $(\alpha = \beta)$, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$\nu = \alpha = \beta;$$

$$\nu = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij};$$

5) найти оптимальное решение игры $\{A_{i*}, B_{j*}, a_{i*j*}\}$ и обосновать, какие стратегии более выгодны для игрока *A* и игрока *B*,
где A_{i*} – оптимальная чистая стратегия игрока *A*;

B_{j*} – оптимальная чистая стратегия игрока *B*;

a_{i*j*} – седловой элемент платежной матрицы, стоящий в строке i^* и в столбце j^*.

Примечание. Седловой элемент a_{i*j*} является наименьшим в строке *i** и наибольшим в столбце *j**. Он определяет принцип, предполагающий, что противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все, для того чтобы добиться своей цели: максимизировать выигрыш – для игрока *A* и минимизировать проигрыш – для игрока *B*.

1.3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом

Задача 1.11. Требуется обосновать управленческое решение о внесении удобрений под сахарную свеклу с целью максимизации прибыли при любых погодных условиях.

Исходная информация.

1. Урожайность сахарной свеклы зависит от количества внесенных удобрений (стратегии A_1, A_2) и состояния погоды (стратегии $П_1$, $П_2$).

2. Возможны следующие варианты внесения удобрений: A_1 – количество удобрений на 1 га посевов сахарной свеклы находится на фактическом уровне за прошлый год; A_2 – норма внесения удобрений на 1 га площади больше на 30 % фактического уровня.

3. Могут быть два состояния погоды:

$П_1$ – лето сухое; $П_2$ – лето влажное.

4. Поступление прибыли с 1 га посевов сахарной свеклы (с учетом урожайности, формирующейся под влиянием внесения удобрений и погодно-климатических условий выращивания), приведено в табл. 1.8.

Т а б л и ц а 1.8. **Прибыль сельскохозяйственной организации в расчете на 1 га сахарной свеклы, у. д. е.**

Внесение удобрений, кг д. в.	Погодные условия	
	$П_1$	$П_2$
A_1	180 – N	145 + K
A_2	155 + N	170 – K

Задача 1.12. Требуется обосновать оптимальные стратегии сельскохозяйственных организаций по финансированию строительства перерабатывающих модулей по производству молочных и мясных продуктов.

Исходная информация.

1. Две сельскохозяйственные организации выделяют денежные средства на строительство двух перерабатывающих модулей по производству молочных и мясных продуктов. Первая организация может выделить 3000 у. д. е., вторая – 2000 у. д. е.

2. Прибыль первого предприятия формируется под влиянием конкретных экономических условий и в зависимости от объема финансирования выражается элементами платежной матрицы (табл. 1.9).

Т а б л и ц а 1.9. **Прибыль сельскохозяйственной организации, у. д. е.**

Стратегии первой сельхозорганизации	Стратегии второй сельхозорганизации	
	B_1 – вложить средства в строительство модуля по производству мясных продуктов	B_2 – вложить средства в строительство модуля по производству молочных продуктов
A_1 – вложить средства в строительство модуля по производству мясных продуктов	250 – N	220 + N
A_2 – вложить средства в строительство модуля по производству молочных продуктов	225 + K	240 – K

Задача 1.13. Найти решение игр, представленных платежными матрицами (табл. 1.10–1.13).

Т а б л и ц а 1.10. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	11	9	7	8	4 + 0,5K
A_2	8	7	6	5	6
A_3	9	10	9	6	8
A_4	6	3 + 0,5N	5	4 + 0,5K	5

Т а б л и ц а 1.11. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	4	11 – 0,5N	8
A_2	4	7	10 – 0,5K	0
A_3	3	8	7	–2
A_4	4	6	9 – 0,5K	0

Т а б л и ц а 1.12. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	2	2 + 0,5N	3	4
A_2	1	3	6	2	5
A_3	1 + 0,5N	4	2	1 + 0,5K	2

Т а б л и ц а 1.13. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9 – 0,5K	8 – 0,5K	1	0
A_2	7	6 – 0,5N	8 – 0,5K	5
A_3	3	4	7	6
A_4	5	6	0	–1
A_5	4	3	2	2

Используя приведенную информацию задач 1.11–1.13, необходимо:

1) найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры (максимин и минимакс) согласно п. 2 и 3 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

2) найти седловую точку игры $(\alpha = \beta)$. Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях. При этом нижней ценой игры будет число α, а верхней ценой игры – число β:

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q});$$

$$\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q}).$$

Цена игры (ν) равна:

а) $\nu = \alpha = \beta$;

б) $\nu = f(\overline{p}^*, \overline{q}^*)$;

в) $\nu = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}^*, \overline{q}^*)$, где $\overline{p}$ – смешанная стратегия игрока A;

$$\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_m),\ p_i \geq 0\ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$\overline{q}$ – смешанная стратегия игрока B;

$$\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n),\ q_j \geq 0\ (j = \overline{1, n}), \sum_{i=1}^{n} q_j = 1;$$

$\overline{p}^*, \overline{q}^*$ – соответственно оптимальная смешанная стратегия игроков A и B;

3) сравнивая почленно элементы строк и столбцов платежной матрицы, вычеркнуть заведомо невыгодные стратегии для игроков A и B. При этом заведомо невыгодной называется такая i-я стратегия, для которой элементы некоторой строки, определяющей i-ю стратегию игрока A, не больше (меньше или равны) соответствующих элементов другой строки. Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего j-ю стратегию игрока B, не меньше (больше или равны) соответствующих элементов другого столбца, то j-я стратегия является заведомо невыгодной. В результате исходную платежную матрицу задачи необходимо привести к виду $2 \times n$ или $2 \times m$;

4) на координатной оси отложить горизонтальный отрезок [0,1];

5) через концы отрезка [0,1] провести два перпендикуляра: левый перпендикуляр должен соответствовать чистой стратегии A_1 игрока A (или чистой стратегии B_1 игрока B), а правый – чистой стратегии A_2 игрока A (или чистой стратегии B_2 игрока B);

6) на левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0,1] отложить, как на вертикальной числовой оси, все элементы первой строки матрицы (для игрока A) или все элементы первого столбца матрицы (для игрока B);

7) на правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком [0,1] отложить, как на вертикальной числовой оси, все элементы второй строки (второго столбца) для игрока A (для игрока B).

Примечание 1. Масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковые и могут не совпадать с масштабом горизонтального отрезка [0,1];

8) каждую пару точек, лежащих на разных перпендикулярах, изображающих элементы a_{1j} и a_{2j}, $j = 1, ..., n$ – для игрока A (или a_{i1} и a_{i2}, $i = 1, ..., m$ – для игрока B), соединить отрезком $[a_{1j}, a_{2j}]$ (или

отрезком $[a_{i1,} a_{i2}]$). В результате получаем n (или m) отрезков, представляющих собой графики n (или m) пересекающихся линейных функций;

9) найти нижнюю (для игрока *A*) или верхнюю (для игрока *B*) огибающую линию семейства отрезков, которая в общем случае будет представлять собой выпуклую вверх (выпуклую вниз) ломаную линию. Точки данной ломаной линии должны соответствовать нижней границе выигрыша игрока *A* (или верхней границе проигрыша игрока *B*);

10) найти наивысшую точку нижней огибающей линии (для игрока *A*) или наинизшую точку нижней огибающей линии (для игрока *B*);

11) спроектировать выбранную точку ортогонально на горизонтальный отрезок [0,1];

12) полученная проекция точки (абсцисса) является вероятностью случайного выбора игроком *A* своих чистых стратегий $(p_2; p_1 = 1 - p_2)$ или вероятностью случайного выбора игроком *B* своих чистых стратегий $(q_2; q_1 = 1 - q_2)$;

13) ордината наивысшей точки огибающей линии (для игрока *A*) или наинизшей точки огибающей линии (для игрока *B*) равна цене игры v;

14) решить игру, найдя пересекающиеся линейные функции в точке, характеризующей вероятности смешивания чистых стратегий игрока и цену игры;

15) решение данной игры свести к решению системы линейных уравнений для нахождения вероятностей применения стратегий игроками:

для игрока *A*

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v; \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

для игрока *B*

$$\begin{cases} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = v; \\ a_{21} q_2 + a_{22} q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1; \end{cases}$$

16) обосновать оптимальные смешанные стратегии игроков *A* и *B*.

1.4. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Задача 1.14. Требуется обосновать выбор сельскохозяйственной культуры, обеспечивающей сельскохозяйственной организации наибольшую прибыль при сбыте продукции.

Исходная информация.

Сельскохозяйственная организация имеет возможность выращивать две сельскохозяйственные культуры (K_1, K_2), которые по-разному реагируют на погодные условия. Урожайность первой культуры выше при сухой погоде, а второй – при более влажной. Погодные условия, влияющие на урожайность сельскохозяйственных культур, характеризуются следующими состояниями: $П_1$ – лето прохладное сухое, $П_2$ – лето прохладное влажное, $П_3$ – лето теплое сухое, $П_4$ – лето теплое влажное, $П_5$ – лето жаркое сухое, $П_6$ – лето жаркое влажное. Прибыль сельскохозяйственной организации зависит от сбыта выращенной продукции и, следовательно, от урожайности сельскохозяйственных культур (табл. 1.14).

Таблица 1.14. **Прибыль сельскохозяйственной организации в расчете на 1 га сельхозкультур, у. д. е.**

Сельхозкультура	Погодные условия					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$П_6$
K_1	52 + 0,1K	53	55	57	59 – 0,1K	61 – 0,1N
K_2	60 – 0,1N	59 – 0,1K	58	56	52 + 0,1K	51 + 0,1N

Задача 1.15. Требуется обосновать оптимальные стратегии двух перерабатывающих предприятий (*A* и *B*), борющихся за рынки сбыта в условиях конкуренции.

Исходная информация.

1. Каждый игрок имеет возможность выделять определенное количество средств на конкретный рынок сбыта для укрепления своих позиций на нем.

2. Прибыль первого предприятия (игрока *A*) или убыток второго предприятия (игрока *B*) выражается коэффициентами платежной матрицы (табл. 1.15).

Таблица 1.15. **Прибыль (убыток) предприятия в расчете на 100 у. д. е. проданного товара**

Стратегии игрока *A*	Стратегии игрока *B*		
	1-й рынок	2-й рынок	3-й рынок
1-й рынок	65	30 + N	35
2-й рынок	43	62	48
3-й рынок	34 + K	46	73

Задача 1.16. Необходимо обосновать оптимальные пропорции поставки овощной продукции потребителю в свежем виде, после хране-

ния продукции в холодильнике и после ее переработки с целью максимизации прибыли сельскохозяйственной организации.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация имеет три стратегии реализации овощной продукции: A_1 – реализация продукции в свежем виде, A_2 – временное хранение продукции в холодильнике, A_3 – промышленная переработка продукции.

2. Спрос потребителей можно охарактеризовать следующими стратегиями: B_1 – купить продукцию в свежем виде, B_2 – приобрести продукцию через определенный период времени, B_3 – купить переработанную продукцию.

3. Прибыль от реализации овощной продукции в зависимости от поведения потребителей приведена в табл. 1.16.

Таблица 1.16. **Прибыль от реализации единицы овощной продукции, у. д. е.**

Стратегии сельскохозяйственной организации	Стратегии потребителя		
	B_1	B_2	B_3
A_1	12	9 + 0,4K	13
A_2	10	8 + 0,3N	14
A_3	16 – 0,2N	14	12

Задача 1.17. Требуется обосновать рекомендации по управленческому решению.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация, подготавливая сельскохозяйственную технику к уборочным работам, имеет 3 состояния техники: $П_1$ – требуется незначительный ремонт, $П_2$ – необходимо заменить отдельные детали и узлы машин, $П_3$ – дальнейшая эксплуатация возможна после капитального ремонта.

2. В зависимости от сложившейся ситуации руководство сельскохозяйственной организации может принять решения: A_1 – произвести ремонт своими силами, A_2 – произвести ремонт силами предприятий агросервиса, A_3 – заменить оборудование новым.

3. Вероятности появления исходов и затраты материально-денежных средств на ремонт и замену сельскохозяйственных машин при разном уровне их износа и выбранных управленческих решениях приведены в табл. 1.17.

Т а б л и ц а 1.17. **Затраты материально-денежных средств на ремонт и замену машин, тыс. у. д. е.**

Управленческое решение	Стратегии игрока B		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	–2	–6	–11 + 0,2N
A_2	–13	–5	–9
A_3	–15 + 0,2K	–10	–7

Задача 1.18. Требуется определить оптимальные стратегии предприятий по выпуску товаров однородного назначения с целью максимизации прибыли первого предприятия и минимизации убытка.

Исходная информация.

1. Два предприятия, занимающихся переработкой сельскохозяйственной продукции, реализуют в пределах города плодово-овощные консервы.

2. Первое предприятие (игрок A) специализируется на выпуске 8 видов товаров (стратегии A_1, A_2,…, A_8). Второе предприятие также выпускает 8 видов плодово-овощных консервов (стратегии B_1, B_2,…, B_8).

3. Емкость рынка этой продукции в городе, как установила маркетинговая служба предприятий, равна 1000 единиц консервов. Прибыль от реализации единицы товара равна 2 у. д. е.

4. Прогнозируемая доля сбыта товаров первым предприятием при условии поступления на рынок товаров второго предприятия приведена в табл. 1.18.

Т а б л и ц а 1.18. **Прогнозируемая доля сбыта товаров первым предприятием**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B							
	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я
1-я	0,6	0,6	0,5	0,4	0,3	0,7	0,2	0,6
2-я	0,2	0,5	0,8	0,2	0,7	0,6	0,1	0,4
3-я	0,3	0,4	0,5	0,3	0,8	0,6	0,3	0,3 + 0,1K
4-я	0,4	0,7	0,2	0,4	0,3	0,5	0,2	–
5-я	0,5	0,5	0,4	0,1	0,2	0,7	0,1	0,6
6-я	0,8	0,6	0,4	0,5	0,6	0,2	0,5	0,4
7-я	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,5	0,6	0,5
8-я	0,1	0,4	0,7	0,1	0,6	0,5	0,7	0,1 + 0,2N

Задача 1.19. Требуется обосновать ассортиментный набор товарной группы, который целесообразно завезти в магазин с целью максимизации результатов его работы.

Исходная информация.

На оптовой базе имеется ассортиментный набор товарной группы, товары которого могут быть завезены в магазин. Если товар будет пользоваться спросом, то от его реализации магазин получит прибыль p_j, в противном случае магазин понесет издержки, связанные с хранением, порчей товара и т. д., т. е. получит убыток c_j (табл. 1.19).

Т а б л и ц а 1.19. **Результаты сбыта единицы товара**

Показатели	Товар					
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Доход от сбыта, у. д. е.	32 + 0,5K	30	34	31	33	32
Издержки, у. д. е.	16 + 0,5K	4	10	6	8	18

Используя приведенную информацию задач 1.14–1.19, необходимо:

1) составить платежную матрицу (для задачи 1.19) согласно информации табл. 1.20;

Т а б л и ц а 1.20. **Информация платежной матрицы**

Товар	Состояние спроса					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
T_1	P_1	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$
T_2	$-C_2$	P_2	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$
T_3	$-C_3$	$-C_3$	P_3	$-C_3$	$-C_3$	$-C_3$
T_4	$-C_4$	$-C_4$	$-C_4$	P_4	$-C_4$	$-C_4$
T_5	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	P_5	$-C_5$
T_6	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	P_6

2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α согласно п. 2 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β согласно п. 3 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

4) найти седловую точку игры $(\alpha = \beta)$. Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях;

5) свести решение матричной игры в смешанных стратегиях к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования.

П р и м е ч а н и е 2. Если среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные элементы, то их необходимо преобразовать в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы постоянной величины C, значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. В противном случае цена игры может быть числом отрицательным;

6) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины двойственных задач;

7) составить развернутые экономико-математические задачи, используя следующие структурные модели:

а) задача линейного программирования для игрока A:

Требуется найти $F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} x_i$.

При условиях:

1. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1, n}$;

2. $x_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$;

ν – цена игры;

p_i – вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии A_i.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i и в столбце j.

б) задача линейного программирования для игрока B:

Требуется найти $F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

При условиях:

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1, i = \overline{1, m}$;

2. $y_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$y_j = \dfrac{q_j}{v}$;

v – цена игры;

q_j – вероятности, с которыми игрок B использует в ходе игры свои чистые стратегии B_j.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i и в столбце j;

8) решить экономико-математические задачи, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

9) найти оптимальное решение задач, проанализировав его;

10) преобразовать результаты решения экономико-математических задач в результате решения матричной игры:

для игрока A	для игрока B
$v = \dfrac{1}{F_{\min}}$;	$v = \dfrac{1}{F_{\max}}$;
$p_i^* = v x_i^*, \left(i = \overline{1,m}\right)$;	$q_j^* = v y_j^*, \left(j = \overline{1,n}\right)$;

11) найти оптимальное решение игры $\{ \overline{p}^*, \overline{q}^*, v \}$.

12) дать экономическую интерпретацию оптимальным смешанным стратегиям игроков.

Задача 1.20. Необходимо обосновать рекомендации по оптимальным срокам поставки товара на рынок сбыта с целью максимизации прибыли первого предприятия и минимизации убытка второго предприятия.

Исходная информация.

1. Два предприятия производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом n единиц времени. Прибыль от сбыта единицы товара составляет p у. д. е.

2. Первое предприятие стремится вытеснить второе с рынка сбыта, и оно, не снижая цены на товар, вкладывает дополнительные средства, повышая его качество, что требует дополнительного времени на совершенствование технологии производства товара. Следовательно, чем

выше качество товара, тем он позже поступает на рынок и пользуется спросом.

Используя приведенную информацию задачи 1.20, необходимо:

1) обозначить через $A_i\,(i=\overline{1,m})$ чистые стратегии игрока *A*, состоящие в том, что он поставляет свой товар на рынок в *i*-ю единицу времени; через $B_j\,(j=\overline{1,n})$ – чистые стратегии игрока *B*, состоящие в том, что он поставляет свой товар на рынок в *j*-ю единицу времени;

2) рассчитать элементы платежной матрицы для игрока *A*, используя следующие формулы:

$$a_{ij}=\begin{cases} p(j-i), i<j, \\ 0{,}5\,p(n-i+1), i=1, \\ p(n-i+1), i>j; \end{cases}$$

3) найти решение игры, используя п. 2–12 задач 1.14–1.19.

1.5. Позиционные игры

Позиционные игры – это игры, описываемые с помощью «дерева игры», последовательно по ходам фиксирующего, какой информацией располагают игроки перед каждым ходом, какие варианты они могут выбирать и какими могут быть предельные размеры платежей в конце игры.

Задача 1.21. Решить позиционную игру, состоящую из трех ходов, которые делают два игрока (два зарубежных предприятия, занимающихся переработкой молока, решают вопрос о привлечении инвестиций для строительства перерабатывающего цеха, причем первое предприятие инвестирует строительство цеха на втором предприятии).

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.1.

2. Первый игрок (первое зарубежное предприятие) делает на первом ходе выбор из двух альтернатив: 1-я – предложить второму предприятию построить цех по производству масла; 2-я – предложить построить цех по производству сыра.

3. На втором ходе второй игрок (второе предприятие), зная, какую альтернативу выбрало первое предприятие на первом ходе, делает выбор из двух альтернатив: 1-я – построить цех по производству масла и заключить договор с первым зарубежным предприятием; 2-я – построить цех по производству сыра и заключить договор с инвестором.

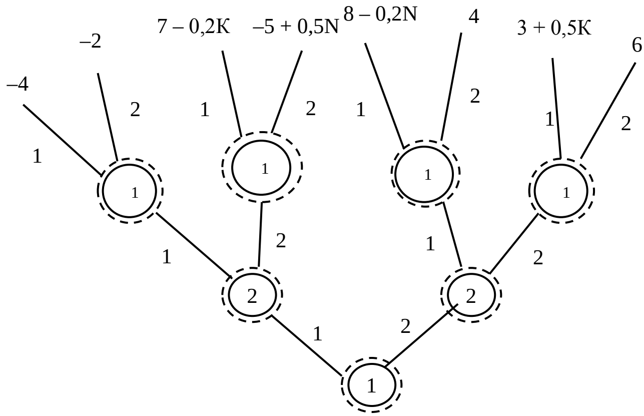


Рис. 1.1. Дерево игры

4. На третьем ходе первое предприятие, зная выбор второго предприятия на втором ходе и помня свой выбор на первом ходе, делает выбор из двух альтернатив: 1-я – согласиться с предложением второй стороны и заключить договор; 2-я – не согласиться с предложением второго предприятия.

Так как каждый игрок, делая свой ход, знает, в каком месте дерева он находится, то каждый узел (позиция) игры образует отдельное информационное множество, выделенное пунктирной линией.

5. После того как сделаны 3 хода, первое предприятие получит выигрыш, характеризующийся функцией $M\,(x; y; z)$,
где x – выбор числа 1 или 2 на первом ходе;

y – выбор числа 1 или 2 на втором ходе;

z – выбор числа 1 или 2 на третьем ходе.

Используя приведенную информацию задачи 1.21, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) обозначить стратегии первого игрока через (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – выбор числа x первым игроком на первом ходе;

i_1 – выбор числа z первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число $y = 1$;

i_2 – выбор числа z первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число $y = 2$;

3) определить стратегии второго игрока (число y):

1-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

2-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 2$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

3-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = x$;

4-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, если первый игрок выбрал число $x = 2$, и выбор числа $y = 2$, если первый игрок выбрал число $x = 1$;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав элементы матрицы в соответствии с функцией $M(x; y; z)$. При этом первый игрок имеет 8 стратегий, второй игрок – 4;

5) решить матричную игру, используя п. 2–12 (решение матричных игр в смешанных стратегиях);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.22. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.2.

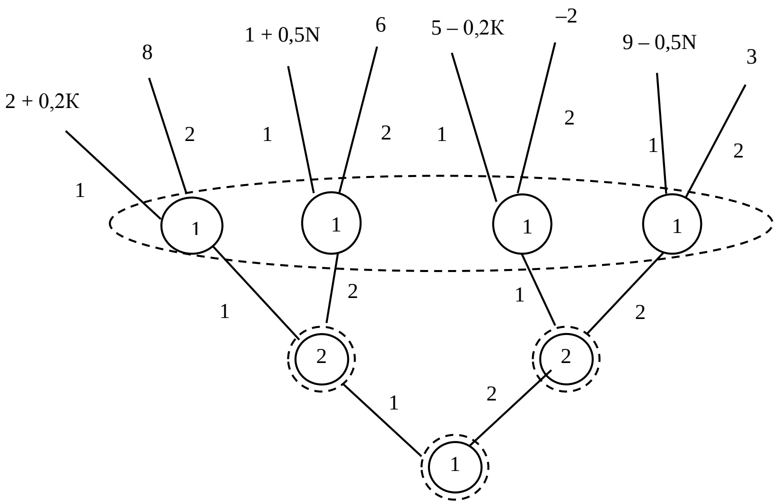


Рис. 1.2. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией. Так как первый ход делает первое лицо, а третий ход – второе лицо, то при графическом представлении игры эти

обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходе не знает, в каком из узлов третьего уровня он находится, поэтому все четыре узла третьего уровня образуют информационное множество.

Используя приведенную информацию задачи 1.22, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии второго игрока, согласно п. 3 задачи 1.21 (позиционные игры);

3) определить стратегии первого игрока, состоящие из пары чисел (x, z), т. е. на первом ходе первый игрок может выбрать число $x = 1$ или 2. На третьем ходе, не зная предыдущих выборов, он может выбрать число $z = 1$ или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав элементы матрицы в соответствии с функцией M (x; y; z). При этом и первый, и второй игроки имеют по 4 стратегии;

5) решить матричную игру, используя п. 2–12 (решение матричных игр в смешанных стратегиях);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.23. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.3.

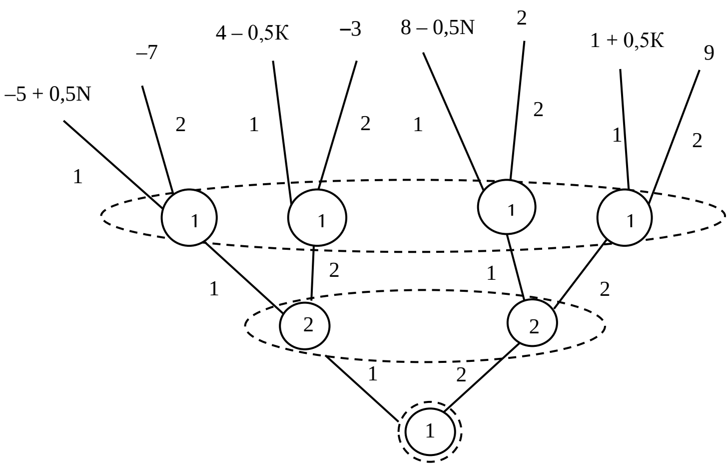


Рис. 1.3. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией, поэтому узлы третьего уровня образуют информационное множество. Второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходе, поэтому узлы второго уровня также образуют информационное множество.

Используя приведенную информацию задачи 1.23, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока согласно п. 3 задачи 1.22 (позиционные игры);

3) определить стратегии второго игрока. Не зная предыдущих выборов, он может выбрать число y = 1 или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией M (x; y; z). При этом первый игрок имеет 4 стратегии, второй игрок – 2;

5) решить матричную игру геометрическим способом, используя п. 1–15 (решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.24. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.4.

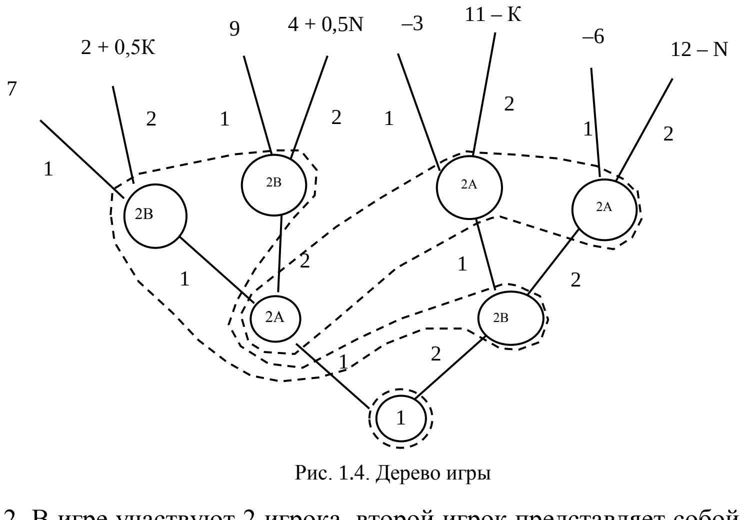


Рис. 1.4. Дерево игры

2. В игре участвуют 2 игрока, второй игрок представляет собой команду из двух человек – A и B. Три человека изолированы друг от дру-

га и не могут обмениваться информацией. Если на первом ходе первый игрок выбрал число $x = 1$, то на втором ходе делает выбор игрок A, который выбирает число $y = 1$ или 2, после чего на третьем ходе делает выбор игрок B и выбирает число $z = 1$ или 2. Если же первый игрок на первом ходе выбрал число $x = 2$, то на втором ходе делает выбор игрок B, выбирая число $y = 1$ или 2, а на третьем ходе выбор делает игрок A, выбирая число $z = 1$ или 2, о чем свидетельствуют информационные множества, изображенные на рис. 1.4. Информационные множества для второго игрока охватывают второй и третий уровни, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход.

Используя приведенную информацию задачи 1.24, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока. Так как ему никто не мешает сделать свой выбор, то он имеет две стратегии: 1-я – выбрать число $x = 1$; 2-я – выбрать число $x = 2$;

3) определить стратегии второго игрока, представленного командой из двух человек – A и B. Второй игрок имеет 4 стратегии:

1-я – игрок A и B выбирают число 1;

2-я – игрок A выбирает число 1, а игрок B – число 2;

3-я – игрок B выбирает число 1, а игрок A – число 2;

4-я – игроки A и B выбирают число 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией $M\,(x;\,y;\,z)$;

5) решить матричную игру геометрическим способом, используя п. 1–15 (решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.25. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.5.

2. Первый ход производится случайно, т. е. игрок «0» выбирает число $x = 1$ с вероятностью 0,5 и число $x = 2$ с такой же вероятностью. Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x на первом ходе выбрал игрок «0», первый игрок выбирает число $y = 1$ или 2. Третий ход делает второй игрок, не зная выбор числа x игроком «0» на первом ходе, но зная выбор числа y первым игроком на втором ходе, он выбирает число $z = 1$ или 2.

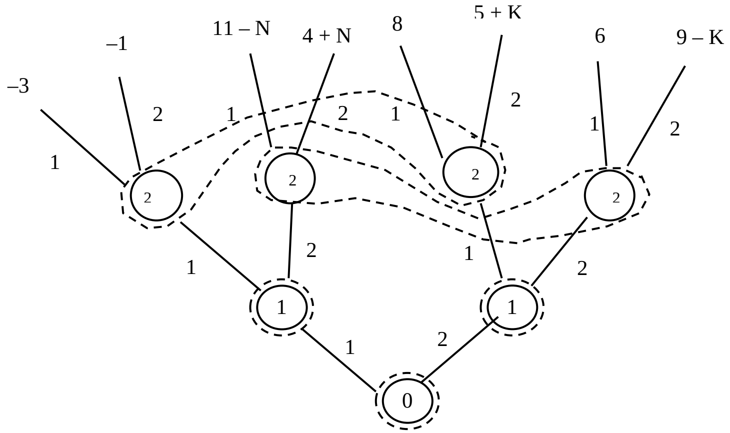


Рис. 1.5. Дерево игры

Используя приведенную информацию задачи 1.25, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока:

1-я стратегия – первый игрок выбирает число y = 1 независимо от выбора игроком «0» на первом ходе числа x;

2-я стратегия – первый игрок выбирает число y, равное числу x;

3-я стратегия – первый игрок на втором ходе выбирает число y = 1, если на первом ходе игрок «0» выбрал число x = 2, и выбирает число y = 2, если на первом ходе игрок «0» выбрал число x = 1;

4-я стратегия – первый игрок на втором ходе выбирает число y = 2 независимо от выбора числа x игроком «0» на первом ходе;

3) определить стратегии второго игрока:

1-я стратегия – второй игрок на третьем ходе выбирает число z = 1 независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходе;

2-я стратегия – второй игрок выбирает число z, равное числу y;

3-я стратегия – второй игрок на третьем ходе выбирает число z = 1, если на втором ходе первый игрок выбрал число y = 2, и выбирает число z = 2, если на втором ходе первый игрок выбрал число y = 1;

4-я стратегия – второй игрок на третьем ходе выбирает число z = 2 независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходе;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы с учетом вероятностей выбора игроком «0» своих альтернатив и в соответствии с функцией M (x; y; z);

5) решить матричную игру;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.26. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.6.

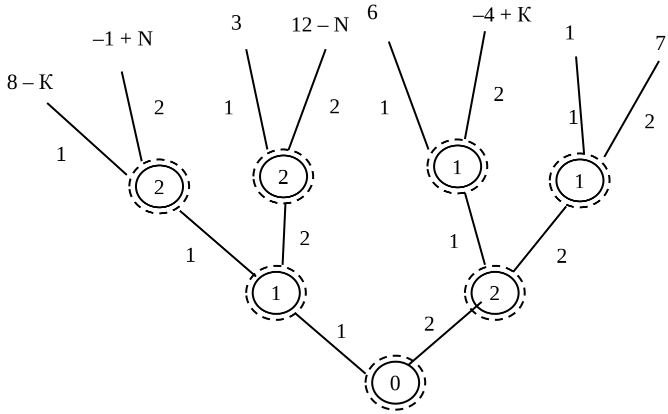


Рис. 1.6. Дерево игры

2. Первый ход делает игрок «0» – природа, который с вероятностью 0,3 выбирает число $x = 1$, т. е. первую альтернативу, а с вероятностью 0,7 – вторую альтернативу, т. е. число $x = 2$. Если игрок «0» на первом ходе выбрал первую альтернативу ($x = 1$), то второй ход делает первый игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает второй игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2. Если же игрок «0» на первом ходе выбрал вторую альтернативу ($x = 2$), то второй ход делает второй игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает первый игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2.

Используя приведенную информацию задачи 1.26, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока, каждую из которых записать как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на втором ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу;

i_1 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал вторую альтернативу, а на втором ходе первую альтернативу выбрал второй игрок;

i_2 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходе, если на первом и втором ходе выбрана вторая альтернатива;

3) определить стратегии второго игрока, каждую из которых записать как систему чисел (j_0, j_1, j_2),

где j_0 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на втором ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал вторую альтернативу;

j_1 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходе первый игрок тоже выбрал первую альтернативу;

j_2 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходе первый игрок выбрал вторую альтернативу;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы с учетом вероятностей выбора альтернатив игроком «0» и в соответствии с функцией $M(x; y; z)$. При этом первый и второй игроки имеют по восемь стратегий;

5) решить матричную игру в чистых или смешанных стратегиях;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задача 1.27. Решить позиционную игру, состоящую из четырех ходов, которые делают два игрока.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.7.

2. Первый ход делает первый игрок, находясь в информационном множестве первого узла. Он выбирает число x из двух альтернатив: 1 или 2. Второй ход принадлежит второму игроку, который находится в информационном множестве узлов второго уровня. Он выбирает число y из двух альтернатив: 1 или 2. Третий ход делает первый игрок и выбирает число z = 1 или 2. Четвертый ход делает второй игрок, находясь в информационном множестве четвертого уровня, он выбирает число $z' = 1$ или 2.

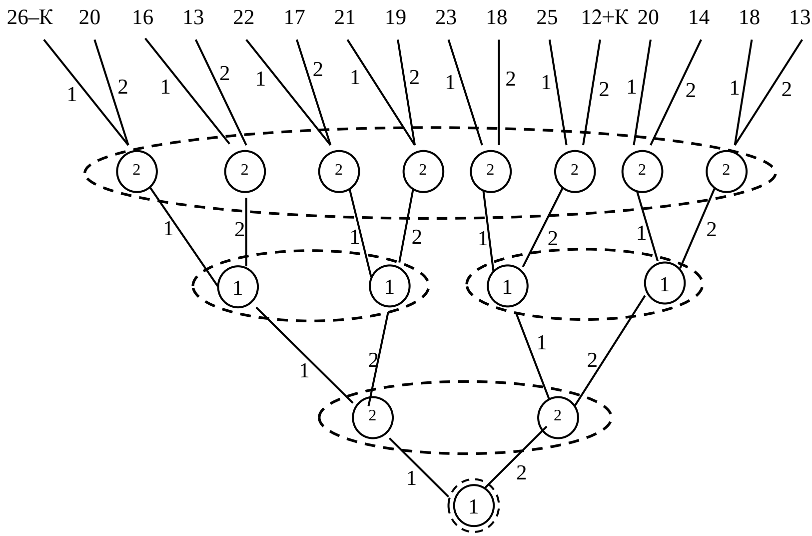


Рис. 1.7. Дерево игры

Используя приведенную информацию задачи 1.27, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока, каждую из которых записать как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива (x = 1 или 2), выбираемая на первом ходе первым игроком;

i_1 – альтернатива (z = 1 или 2), выбираемая на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал первую альтернативу, т. е. число $y = 1$;

i_2 – альтернатива (z = 1 или 2), выбираемая на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал вторую альтернативу, т. е. число $y = 2$;

3) определить стратегии второго игрока, каждую из которых записать как систему чисел (j_1, j_2),

j_1 – альтернатива, выбираемая вторым игроком на втором ходе, т. е. число y = 1 или 2;

j_2 – альтернатива, выбираемая вторым игроком на четвертом ходе, т. е. $z' = 1$ или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией $M(x; y; z; z')$. При этом первый игрок имеет 8 стратегий, а второй – 4;

5) решить матричную игру в чистых или смешанных стратегиях;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

1.6. Биматричные игры

Биматричные игры (игры с ненулевой суммой) – класс игр, в которых не обязательно, что выигрыш одного игрока означает проигрыш другого. Так как интересы игроков не являются полностью противоположными, то они обмениваются информацией и в некоторых случаях координируют свои действия.

Задача 1.28. Необходимо обосновать оптимальную стратегию предприятия по реализации рекламной компании на двух рынках, контролируемых более сильным конкурентом.

Исходная информация.

Небольшое предприятие (игрок *A*) планирует, развернув рекламную деятельность, сбывать свои товары на одном из двух рынков, контролируемых более сильным предприятием (игроком *B*).

1. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.21, 1.22).

Т а б л и ц а 1.21. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–280	120 + K
A_2	55 + N	–120

Т а б л и ц а 1.22. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	120 + K	–30
A_2	–10	40 + N

2. Выигрыши игроков характеризуются следующими платежными матрицами (табл. 1.23, 1.24).

Т а б л и ц а 1.23. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–250	130 + N
A_2	120 + K	–140

Т а б л и ц а 1.24. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	230 – N	–50
A_2	–20	130 + K

3. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.25, 1.26).

Т а б л и ц а 1.25. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–200	40 + K
A_2	20 + N	–10

Т а б л и ц а 1.26. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	180 – K	–40
A_2	–10	50 + N

4. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.27, 1.28).

Т а б л и ц а 1.27. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–200	150 + N
A_2	160 + K	–220

Т а б л и ц а 1.28. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	80 + K	–60
A_2	–40	110 – N

5. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.29, 1.30).

Т а б л и ц а 1.29. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–70	60 + K
A_2	50 – N	–100

Т а б л и ц а 1.30. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	150 + N	–170
A_2	–200	130 + K

Используя приведенную информацию задачи 1.28, п. 1–5, необходимо:

1) ввести следующие обозначения, используя платежную матрицу игрока *A*:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},$$

$$\alpha = a_{22} - a_{12};$$

2) ввести обозначения, используя платежную матрицу игрока *B*:

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22},$$

$$\beta = b_{22} - b_{21};$$

3) рассчитать значения C, α, D, β для информации задачи 1.28, п. 1–5;

4) проверить биматричную игру, согласно теореме Дж. Нэша, на наличие точки равновесия. Считается, что необходимым и достаточным условием существования равновесной ситуации в биматричной игре 2×2 является такая пара чисел (p, q), для которых выполняются следующие неравенства:

$$(p-1)(Gq-\alpha) \geq 0,$$

$$p(Gq-\alpha) \geq 0,$$

$$(q-1)(Dp-\beta) \geq 0,$$

$$q(Dp-\beta) \geq 0,$$

$$0 \leq p \leq 1,$$

$$0 \leq q \leq 1;$$

5) определить значение q, рассмотрев условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации для игрока A при:

1. $p=1$,

2. $p=0$,

3. $0<p<1$;

6) определить значение p, рассмотрев условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации для игрока B при:

1. $q=1$,

2. $q=0$,

3. $0<q<1$;

7) изобразить графически для игроков A и B полученные результаты, выделив в системе координат единичный квадрат, соответствующий неравенствам:

$0 \le p \le 1$,

$0 \le q \le 1$;

8) найти координаты точки пересечения (p, q), являющейся точкой равновесия;

9) определить оптимальные смешанные стратегии игрока A – $p^*(p;\ 1-p)$ и игрока B – $q^*(1-q;q)$;

10) найти средние выигрыши игроков:

$$f_A(p;q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+$$
$$+(a_{21}-a_{22})q+a_{22};$$
$$f_B(p;q)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq+(b_{12}-b_{22})p+$$
$$+(b_{21}-b_{22})q+b_{22};$$

11) обосновать оптимальный выбор игроков.

1.7. Кооперативные игры

Кооперативные игры – это игры с нулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом и вступать в коалиции.

Задача 1.29. Решить кооперативную игру, заданную матрицей:

1. $\begin{Vmatrix} (12,8) & (0,0) \\ (6,6) & (2,7) \end{Vmatrix}$;

2. $\begin{Vmatrix} (8,2) & (4,4) \\ (0,0) & (1,6) \end{Vmatrix}$;

3. $\begin{Vmatrix} (10,5) & (5,5) \\ (1,9) & (0,0) \end{Vmatrix}$;

4. $\begin{Vmatrix} (0,0) & (12,4) \\ (2,9) & (3,3) \end{Vmatrix}$;

5. $\begin{Vmatrix} (7,7) & (0,0) \\ (10,6) & (4,4) \end{Vmatrix}$.

Используя приведенную информацию задачи 1.29, п. 1–5, необходимо:

1) изобразить в системе координат выпуклое, замкнутое множество, определяющее игру;

2) найти множество парето, т. е. множество, характеризующееся тем, что увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет другого игрока;

3) указать координаты точки (T_1, T_2), определяющей выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером;

4) найти переговорное множество игроков;

5) найти на переговорном множестве координаты точки, соответствующей равновесию по Нэшу, в которой достигается максимум произведения:

$$\max(a_1 - T_1)(a_2 - T_2) .$$

Равновесие по Нэшу гласит, что ситуация, образованная в результате выбора всеми игроками некоторых своих стратегий, является равновесной, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий;

6) обосновать оптимальный выбор игроков.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение теории игр.
2. Что вы понимаете под игрой?
3. Дайте определение понятия «оптимальная стратегия игрока».
4. Приведите особенности статистических игр.
5. Охарактеризуйте критерии определения оптимальной стратегии игрока в статистической игре.

6. Дайте определение понятий «седловая точка», «верхняя и нижняя чистая цена матричной игры».

7. Как практически решаются матричные игры в смешанных стратегиях?

8. Приведите структурные модели линейного программирования, позволяющие обосновать оптимальные стратегии игроков при решении матричной игры в смешанных стратегиях.

9. Каким образом перейти от результатов решения задач линейного программирования к результатам решения матричной игры в смешанных стратегиях?

10. Как происходит обоснование оптимальной стратегии игрока в позиционной игре?

11. Как происходит формирование элементов платежной матрицы позиционной игры?

12. Какие неравенства должны выполняться для пары чисел, характеризующих равновесную ситуацию биматричной игры?

13. Как геометрически происходит выбор оптимальных стратегий игроков в биматричной игре?

14. Дайте определение понятия «равновесие по Нэшу (точка Нэша)», чем оно характеризуется?

2. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Под *экономико-математической линейной моделью* понимают программу вычислений, обеспечивающую нахождение наилучшего, т. е. оптимального решения задачи, условия которой заданы в виде линейных уравнений или неравенств, сведены в единую систему, подчиненную цели решения задачи (т. е. целевой функции, записанной в виде линейного уравнения).

В зависимости от характера моделируемых объектов и процессов структура моделей может быть различной. Но имеются и общие элементы модели, включающие следующие группы:

1) неизвестные величины, значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают x_j, где $i = 1,\ldots,m$ или y_i, где $j = 1,\ldots,n$. Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;

2) технико-экономические коэффициенты, т. е. известные величины при переменных, они служат для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с результатами решения задачи. Технико-

экономические коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индексы при a_{ij} показывают, что коэффициент a стоит в i-й строке (или в ограничении вида i) и в j-м столбце (или при переменной вида j), где $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$;

3) известные величины, стоящие в правой части ограничений (т. е. уравнений или неравенств). Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например A_i, где $i = 1,\ldots,m$. Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче;

4) коэффициенты целевой функции, или коэффициенты F-строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например, $p_j(p_1, p_2,..., p_n)$, где $j = 1,\ldots,n$. Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче.

Элементы второй, третьей и четвертой групп составляют исходную информацию экономико-математической задачи.

Задачи линейного программирования имеют свойства, сформулированные следующими теоремами.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений и, наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу такого же класса, называемую двойственной (обратной) по отношению к исходной (прямой) задаче. Принято считать, что прямой будет та задача, в результате решения которой получают размеры отраслей и другие параметры. Решение *двойственной задачи* дает систему двойственных оценок (объективно обусловленных оценок, теневых цен ресурсов) (прил. В).

Свойства двойственных оценок базируются на содержании первой и второй теорем двойственности.

Теорема 4. *Первая теорема двойственности*:

если одна из задач или прямая, или двойственная, имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, т. е., если целевая функция прямой задачи записана в виде $F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j$, а двойственной задачи – в виде $F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i$,то согласно первой теореме двойственности $\max \sum_{j \in J_0} c_j x_j = \min \sum_{i = I_0} A_i u_i$.

Теорема 5. *Вторая теорема двойственности*:

1) если двойственные оценки положительны, то производственные ресурсы, для которых они рассчитаны, используются полностью, т. е. если $u_i > 0$, то $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0$;

2) двойственные оценки равны нулю, если производственные ресурсы, к которым они относятся, недоиспользуются, т. е. $u_i = 0$ при условии $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i, i \in I_0$.

Анализ устойчивости (чувствительности) оптимального плана основывается на изменении параметров задачи: a_{ij}, A_i и p_j, где $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$.

Влияние изменения параметров задачи на оптимальный план можно посмотреть, если найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых они измеряют влияние ограничений на целевую функцию задачи (прил. С и D).

Среди практических задач линейного программирования важное место занимают задачи с требованием целочисленности переменных (всех или части неизвестных величин). Экстремальные задачи, в которых на переменные накладываются условия целочисленности, а область допустимых решений конечна, являются предметом изучения целочисленного, или дискретного, программирования. Они возникают в случае, когда искомые переменные определяют неделимые объекты: тракторы, животные и т. д.

Целочисленные линейные модели решаются методом отсечений и методом ветвей и границ (прил. E и F).

Задача 2.1. Требуется обосновать ассортимент выпуска и реализации продукции молокоперерабатывающего цеха сельскохозяйственной организации с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. Объемы и расход сырья на производство единицы продукции приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Расход на 1 т		Наличие ресурса
	фасованного молока	фасованной сметаны	
Молоко, т	1,01	9,5	1000
Фасовка молока, машино-ч	0,2	–	8
Фасовка сметаны, машино-ч	–	3,5	240
Прибыль, у. д. е.	20 + 0,1N	90 – 0,1K	

2. Учитывая спрос покупателей, с перерабатывающего цеха в фирменный магазин должно поступить не менее 200 т фасованного молока.

Задача 2.2. Необходимо обосновать оптимальный товарооборот фирменного магазина предприятия, доставляющий максимум прибыли.

Исходная информация.

1. Фирменный магазин предприятия реализует два вида продукции подсобного цеха. Объемы ресурсов и их расход на реализацию единицы товара приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Расход ресурсов на сбыт единицы товаров, у. д. е.		Наличие ресурса
	1-й товар	2-й товар	
Торговая площадь, $м^2$	0,23	0,15	120 + 2N
Рабочее время продавцов, чел.-ч	2,2	3,8	4000 – K
Прибыль, у. д. е.	13,0 + 0,2K	16,5 + 0,1N	

2. Отдел маркетинга, учитывая спрос покупателей, рекомендует соотношение 1-го и 2-го товаров как 2:1.

Задача 2.3. Требуется обосновать ассортимент выпуска продукции перерабатывающего цеха фермерского хозяйства с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. Объемы заготовки и расход сырья на производство единицы продукции приведены в табл. 2.3.

Т а б л и ц а 2.3. **Объемы заготовки и расход сырья**

Сырье	Расход на 1 ц колбасы, кг		Ресурсы жилованного мяса, кг
	столовой	докторской	
Говядина высшего и I сорта, кг	36	25	1400 + 2N
Свинина полужирная, кг	60	70	3200 – N
Полезный фонд работы шприца, ч	2	2	160
Прибыль, у. д. е/ц	1,42 + 2K	1,35 + N	

2. Изучение рынка сбыта отделом маркетинга показало, что реализация докторской колбасы не должна превышать сбыт столовой колбасы более чем на 15 ц.

Задача 2.4. Необходимо определить количество дней выработки продукции в разрезе технологического способа производства с целью максимизации прибыли организации.

Исходная информация.

1. Организация получила заказ на изготовление не менее 70 единиц продукции, которая может производиться по двум технологиям. По первой технологии организация выпускает за один рабочий день две единицы продукции, по второй – пять единиц.

2. Расход ресурсов на производство продукции и получаемая прибыль за один рабочий день, а также объем ресурсов, которыми располагает организация, представлены в табл. 2.4.

Т а б л и ц а 2.4. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Технологические способы производства		Наличие ресурса
	1-й	2-й	
Сырье, т	3	4	180
Оборудование, чел.-ч	4	6	200
Рабочая сила, чел.-ч	8	5	220
Электроэнергия, кВт·ч	4	5	170
Прибыль за рабочий день, у. д. е.	70	40	

Задача 2.5. Требуется обосновать оптимальный состав заказываемых транспортных средств на перевозку оборудования с целью минимизации затрат.

Исходная информация.

1. Для перевозки 100 единиц оборудования 1-го типа и 150 единиц оборудования 2-го типа организация может заказать четыре вида транспорта.

2. Количество единиц оборудования, вмещаемого на одно транспортное средство конкретного вида, указаны в табл. 2.5.

Таблица 2.5. **Количество оборудования, ед.**

Вид транспорта	Тип оборудования		Затраты на транспортировку единицы оборудования, у. д. е.
	1-й	2-й	
1-й	6	9	2 + К
2-й	4	7	5
3-й	2	6	4
4-й	3	4	9 – К

Задача 2.6. Необходимо определить количество выпускаемой в производственном цеху кондитерской фабрики карамели с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. В производственном цеху освоен выпуск двух ассортиментных групп карамели.

2. Расход основного сырья, его запас и получаемая прибыль указаны в табл. 2.6.

Таблица 2.6. **Расход и запас сырья**

Основное сырье	Ассортиментная группа карамели		Наличие сырья
	1-я	2-я	
Сахарный песок, т	0,7	0,7	900
Фруктовое пюре, т	–	0,2	140
Патока, т	0,3	0,2	370
Прибыль с 1 т продукции, тыс. у. д. е.	30,0	32,0	

Задача 2.7. Необходимо обосновать объемы выпуска изделий швейного цеха сельскохозяйственной организации с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. Швейный цех выпускает меховые шапки и полушубки в ассортименте 3:1.

2. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка. Время обработки изделий на каждом участке, себестоимость и отпускная цена изделий приведены в табл. 2.7.

Т а б л и ц а 2.7. **Основные показатели работы швейного цеха**

Показатели	Изделие		Фонд рабочего времени, чел.-ч
	меховая шапка	полушубок	
Норма времени на участках, чел.-ч:			
дубильном	0,2	0,6	380
раскройном	0,3	1,7	520
пошивочном	0,4	2,8	580
Себестоимость одного изделия, у. д. е.	80	130	
Цена одного изделия, у. д. е.	120	260	

Задача 2.8. Необходимо обосновать оптимальное сочетание посевов пшеницы и овса в фермерском хозяйстве с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

В фермерском хозяйстве под зерновые культуры отведено 30 га пахотных земель. Выход продукции и затраты на возделывание 1 га культур, а также запасы ресурсов приведены в табл. 2.8.

Т а б л и ц а 2.8. **Информация по возделыванию 1 га зерновых культур**

Показатели	Сельхозкультура		Запасы ресурсов
	пшеница	овес	
Урожайность, ц	55	50	
Затраты механизированного труда, тракторо-смен	0,8	0,7	23
Себестоимость 1 ц зерна, у. д. е.	22	16	
Цена 1 ц, у. д. е.	25	18	

Задача 2.9. Требуется определить объемы закупок картофеля у двух поставщиков с целью максимизации прибыли организации.

Исходная информация.

1. Организация специализируется на производстве замороженных пищевых полуфабрикатов: картофельных долек, кубиков и хлопьев, используемых для приготовления пюре.

2. Объемы выпуска полуфабрикатов в ассортименте из картофеля первого и второго поставщиков и прибыль от их производства приведены в табл. 2.9.

Т а б л и ц а 2.9. **Выпуск полуфабрикатов с 1 т картофеля, т**

Продукция	Поставщики		Максимальный объем выпуска продукции
	1-й	2-й	
Картофельные дольки	0,22	0,30	2,9
Картофельные кубики	0,23	0,12	3,1
Картофельные хлопья	0,31	0,32	2,5
Прибыль в расчете на 1 т сырья, у. д. е.	150	230	

Используя приведенную информацию задач 2.1–2.9, необходимо:

1) ввести неизвестные переменные задачи;

2) представить условия экономико-математической задачи в виде системы неравенств;

3) построить многогранник решений системы неравенств;

4) изобразить геометрически целевую функцию, количественно выражающую цель решения экономико-математической задачи;

5) найти наиболее удаленную от начала координат точку пересечения целевой функции и многогранника решений при решении задачи на максимум или наиболее близко расположенную от начала координат точку пересечения при решении задачи на минимум;

6) найти оптимальные значения переменных экономико-математической задачи, проанализировать оптимальное решение (прил. А).

Задача 2.10. Определить оптимальные размеры отраслей с целью получения максимума прибыли.

Исходная информация.

1. В фермерском хозяйстве имеется 50 + N га пахотных земель. Запас труда составляет 1600 + 10N чел.-дн. Возможно возделывание зерновых, картофеля и многолетних трав, а также предусмотрен откорм свиней.

2. Затраты труда на 1 га зерновых, картофеля и многолетних трав составляют соответственно 5,0; 25,0 и 2,0 чел.-дн/га, а на 1 голову свиней – 5 чел.-дн. Выход кормов соответственно 60, 50, 45 ц к. ед., расход кормов на 1 гол. – 10 ц к. ед.

3. Минимальное поголовье свиней – 100 голов, минимальная площадь зерновых – 20 га.

4. Прибыль на 1 га посева картофеля – 250 + 2N, а на 1 голову свиней – 130 + 0,8N у. д. е.

Задача 2.11. Определить площадь посева сельскохозяйственных культур с целью производства максимума стоимости валовой продукции в стоимостном выражении.

Исходная информация.

1. В подразделении хозяйства планируется выращивать зерновые, многолетние травы на сено, однолетние травы на зеленый корм.

2. Производственные ресурсы подразделения: пахотные земли – 4200 – 2N га; труд – 18000 + 4N чел.-дн.

3. Технологические ограничения на размеры отраслей: зерновые культуры – не менее 1250 + 2N, не более 3620 + N га.

4. Эффективность развития отраслей отражена в табл. 2.10.

Таблица 2.10. **Экономические показатели развития отраслей растениеводства**

Показатели	Сельхозкультура		
	зерновые	многолетние травы	однолетние травы
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн/га	5 + 0,2K	2 + 0,1K	0,8 + 0,1K
Стоимость валовой продукции, тыс. у. д. е/га	4,7 + 4K	1,5 + 2K	1,2 + K

Задача 2.12. Определить площади посева сельскохозяйственных культур с целью производства максимума стоимости товарной продукции.

Исходная информация.

1. В подразделении хозяйства планируется выращивать зерновые культуры, картофель, сахарную свеклу.

2. Для возделывания сельскохозяйственных культур выделяется: пахотных земель – 3600 + 3N га; трудовых ресурсов – 62500 + + 50,0N чел.-дн.

3. Минимальный объем производства, ц: зерна – 25500 + 10N; картофеля – 30000 + 20N; сахарной свеклы – 22000 + 15N.

4. Экономические показатели развития отрасли растениеводства характеризуются данными табл. 2.11.

Таблица 2.11. **Экономические показатели развития отраслей растениеводства**

Показатели	Сельхозкультура		
	зерновые	картофель	сахарная свекла
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн/га	5 + 0,2K	25 + K	28 + 0,5K
Стоимость товарной продукции, у. д. е/га	590 + 2,9K	7200 + 18K	5800 + 22K
Урожайность, ц/га	49 + 0,8K	360 + 5K	340 + 8K

Задача 2.13. Определить размеры отраслей подразделения, обеспечивающих получение максимума прибыли.

Исходная информация.

1. В подразделении хозяйства получили развитие зерновые, лен-долгунец, картофель.

2. Производственные ресурсы подразделения: пахотные земли – 5700 + 10N га; труд – 152000 + 20N чел.-дн.

3. Технические ограничения на размеры отраслей: зерновые – не менее 2280 га, лен-долгунец – не более 570 га.

4. Показатели развития отраслей приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12. **Экономические показатели развития отраслей**

Показатели	Сельхозкультура		
	зерновые	лен	картофель
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн/га	5 – 0,3K	23 – 0,8K	28 + 0,2K
Прибыль, у. д. е/га	270 – 0,5K	180 – 2K	150 – 1,5K

На основе приведенной информации задач 2.10–2.13 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум прибыли, стоимости валовой, товарной продукции:

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j .$$

При условиях:

1. По использованию земельных угодий –

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1 .$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i, i \in I_2 .$$

3. По балансу питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_2} w_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_1} d_{ij} x_j + W_i, i \in I_3 .$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j,\ j \in J_0 .$$

5. По производству (реализации) продукции –

$$\sum_{j \in J_0} \bar{d}_{ij} x_j \ge D_i, i \in I_4 .$$

6. Неотрицательность переменных:

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей и сельскохозяйственных культур;

J_1 – множество отраслей растениеводства, $J_1 \subset J_0$;

J_2 – множество отраслей животноводства, $J_2 \subset J_0$;

i – номер ресурса (вида земельного угодья, труда, питательного вещества, продукции);

I_1 – множество видов земельных угодий;

I_2 – множество видов труда;

I_3 – множество видов питательных веществ;

I_4 – множество видов продукции.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы земельного угодья вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – расход питательного вещества вида i на единицу отрасли животноводства вида j;

d_{ij} – выход корма в пересчете на питательное вещество вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

w_i – выход корма с природных кормовых угодий в пересчете на питательное вещество вида i;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

$\bar{d}_{ij}$ – выход продукции вида i с единицы отрасли вида j;

D_i – минимальный объем производства (реализации) продукции вида j;

p_j – прибыль, товарная, валовая продукция в расчете на единицу отрасли вида j.

Задача 2.14. Определить оптимальное сочетание посевных площадей культур, обеспечивающее максимальное производство кормов.

Исходная информация.

1. На участках пахотных земель с поливом и без орошения могут возделываться две культуры: кормовые корнеплоды и кукуруза на силос.

2. Производственные ресурсы: площадь орошаемых пахотных земель – 1150 + 5N га; площадь богарных (неполивных) земель – 1250 + + 2N га; труд – 213000 + 10N чел.-дн.; ресурсы воды – 1670 + 3N тыс. м^3.

3. Нормы затрат ресурсов и урожайность сельскохозяйственных культур приведены в табл. 2.13.

Таблица 2.13. **Экономические показатели возделывания сельскохозяйственных культур**

Показатели	Кормовые корнеплоды		Кукуруза на силос	
	без полива	на поливе	без полива	на поливе
Расход пахотных земель, га	1	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн/га	28 + 0,2К	40 + 0,2К	4 + 0,1К	6 + 0,1К
Норма полива, тыс. м^3/га	–	2,0	–	1,0
Выход кормов, ц к. ед/га	40 – К	70 – К	50 – 0,5К	80 – 0,5К

На основе приведенной информации задачи 2.14 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум производства кормов:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{j \in J_0} W_{ij} x_j .$$

При условиях:

1. По использованию пахотных земель –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \leq A_i , i \in I_1 .$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \leq B_i , i \in I_2 .$$

3. По использованию ресурсов воды –

$$\sum_{j \in J_0} v_{ij} x_j \leq V_i , i = 2 .$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \leq x_j \leq D_j , j \in J_0 .$$

5. Неотрицательность переменных –

$$x_j \geq 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей растениеводства и сельскохозяйственных культур;

i – номер ресурса (вида пахотных земель, труда, питательного вещества, ресурса воды);

$i = 1$ – номер питательного вещества;

$i = 2$ – номер ресурса воды;

I_1 – множество видов пахотных земель (орошаемой, богарной (неполивной));

I_2 – множество видов труда;

I_4 – множество видов продукции.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы пахотных земель (орошаемой, богарной) вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – выход питательного вещества вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

v_{ij} – расход ресурса (воды) вида i на единицу отрасли вида j;

V_i – количество ресурса (воды) вида i.

Задача 2.15. Определить оптимальную программу трансформации земельных угодий, обеспечивающую получение максимума стоимости дополнительной продукции.

Исходная информация.

1. Имеется 850 + 0,5N га не используемых в сельскохозяйственном производстве угодий, которые могут трансформироваться в пахотные земли, сенокосы или пастбища.

2. В пашню может быть трансформировано от 120 до 230 га.

3. Показатели эффективности трансформации угодий приведены в табл. 2.14.

4. На проведение работ по трансформации выделено 150 + 2N тыс. у. д. е.

Таблица 2.14. **Исходные данные в расчете на 1 га**

Показатели	Трансформация угодий		
	в пахотные земли	в сенокосы	в пастбища
Затраты на трансформацию, у. д. е.	120 + 0,1К	90 – 0,2К	40 + 0,3К
Стоимость дополнительной продукции, у. д. е.	150 + 2К	100 + К	45 + 5К

На основе приведенной информации задачи 2.15 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум стоимости дополнительной продукции:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{k \in K_1} \sum_{\tilde{k} \in K_2} p_{ik\tilde{k}}\, x_{k\tilde{k}}.$$

1. По использованию угодий, подлежащих трансформации –

$$\sum_{\tilde{k} \in K_2} x_{k\tilde{k}} \le A_k, k \in K_0.$$

2. По площади трансформации угодий –

$$x_{k\tilde{k}} \le A_{k\tilde{k}}, k \in K_0, \tilde{k} \in K_2.$$

3. По использованию ресурсов –

$$\sum_{k \in K_0} \sum_{\tilde{k} \in K_2} b_{ik\tilde{k}}\, x_{k\tilde{k}} \le B_i, i \in I_0.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{k\tilde{k}} \ge 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса (труда, материально-денежных средств, основных производственных фондов);

$i = 1$ – номер ресурса (денежных средств);

I_0 – множество видов ресурсов;

k – номер вида земельного угодья;

$\tilde{k}$ – номер вида трансформируемого земельного угодья, $\tilde{k} \subset k$;

K_0 – множество видов земельных угодий;

K_1 – множество видов сельскохозяйственных угодий, $K_1 \subset K_0$;

K_2 – множество видов трансформации земельных угодий.

Неизвестные величины:

$x_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом вида $\tilde{k}$.

Известные величины:

$p_{ik\tilde{k}}$ – стоимость дополнительной продукции (ресурса) вида i с единицы угодья вида k после трансформации его способом вида $\tilde{k}$;

$A_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

A_k – площадь угодья вида k, подлежащего трансформации;

$b_{ik\tilde{k}}$ – расход ресурса вида i на единицу угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

B_i – наличие ресурса вида i.

Задача 2.16. Составить план перевозок кормов на фермы, обеспечивающий минимальные транспортные затраты на перевозку кормов.

Исходная информация.

1. В сельскохозяйственном предприятии имеется 4 севооборота (2 полевых и 2 кормовых) и 4 фермы.

2. Потребность в кормах на фермах составляет: 1-й фермы – 20000 – – 100K; 2-й – 10000 + 50(N + K); 3-й – 18000 – 20 (N + K); 4-й – 7000 + + 100N ц к. ед.

3. Выход кормов с севооборотов равен: с 1-го севооборота – 8500 + + 100N; со 2-го – 16100 – 20(N + K); с 3-го – 14300 + 50(N + K); с 4-го – 17300 – 100N ц к. ед.

4. С третьего севооборота нет возможности транспортировать корма на первую и вторую фермы.

5. Стоимость транспортировки единицы груза (с учетом расстояний) приведена в табл. 2.15.

Таблица 2.15. **Стоимость транспортировки единицы груза, у. д. е.**

Фермы	Севообороты			
	1-й (полевой)	2-й (полевой)	3-й (кормовой)	4-й (кормовой)
1-я	2 + 0,1K	6	–	5
2-я	5	3	–	3
3-я	7 – 0,1K	4	8 – 0,1N	7 – 0,1K
4-я	6	2	1 + 0,1N	4

Задача 2.17. Определить оптимальную программу использования полей севооборота с целью получения максимума зеленых кормов.

Исходная информация.

1. В сельскохозяйственном предприятии для посева четырех культур выделено четыре поля севооборота.

2. Площадь посева сельскохозяйственных культур (с учетом запасов семенного фонда) следующая: тимофеевка – 5200 – 3K; вика – 6000 – 3K; клевер – 3600 + 2N; ежа сборная – 5600 – 2N га.

3. Имеются четыре поля севооборота: 1-е – 5000 – 3K; 2-е – 440 + + 3K; 3-е – 4000 + 2N; 4-е – 7200 – 2N га.

4. На четверном поле высевать клевер не планируется.

5. Продуктивность сельскохозяйственных культур приведена в табл. 2.16.

Т а б л и ц а 2.16. **Выход кормов с 1 га посева, ц к. ед.**

Сельскохозяйственная культура	Поля севооборота			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Тимофеевка	50	60	63 – K	70 – N
Вика	45	40 + N	55	51
Клевер	69 – N	58	53	–
Ежа сборная	43 + K	49	39 + N	57

Задача 2.18. Распределить севообороты по участкам с разным плодородием с целью получения максимума чистого дохода в стоимостном выражении.

Исходная информация.

1. При землеустроительном обследовании в сельскохозяйственном предприятии выделено 4 участка с разным плодородием (пригодных для трансформации угодий), на которых планируется разместить три севооборота.

2. Площади севооборотов составят: 1-го (полевого) – 600; 2-го (полевого) – 1000 – 2K; 3-го (кормового) – 400 + 3N га.

3. Площади участков, пригодных для трансформации угодий, равны: 1-го – 400; 2-го – 560; 3-го – 320 + 3N; 4-го – 800 – 2K га.

4. Не планируется размещать первый полевой севооборот на четвертом земельном участке.

5. Чистый доход с 1 га площади севооборота приведен в табл. 2.17.

Т а б л и ц а 2.17. **Чистый доход с 1 га площади севооборота, у. д. е.**

Севообороты	Земельные участки с разным плодородием			
	1-й	2-й	3-й	4-й
1-й (полевой)	100	130	50 + 2N	–
2-й (полевой)	60 + 2K	110	140 + 2K	80
3-й (кормовой)	150 – 2N	90	70	120

Используя приведенную информацию задач 2.16–2.18, необходимо:

1) привести открытую экономико-математическую модель к закрытому виду. Модель является открытой, если объем ресурсов не равен объему потребностей. Для того чтобы открытую модель привести к закрытому виду, в нее вводят фиктивный ресурс или фиктивного потребителя в объеме, равном разнице между объемами ресурсов и по-

требностей. Оценочные коэффициенты перевозки единицы груза от поставщиков к потребителям в этом случае принимают равными нулю. Ввести неизвестные величины задач;

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую модель.

Требуется найти минимум затрат на перевозку грузов:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} \sum_{i \in I_0} c_{ij} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По использованию ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} x_{ij} = A_i, i \in I_0.$$

2. По удовлетворению потребностей –

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} = B_j, j \in J_0.$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \geq 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса;

I_0 – множество ресурсов;

j – номер потребителя;

J_0 – множество потребителей.

Неизвестные величины:

x_{ij} – количество груза, запланированного к перевозке от поставщика вида i к потребителю вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы поставщика вида i;

B_j – заказ потребителя вида j;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от поставщика вида i к потребителю вида j.

Задача 2.19. Составить рецептуру смеси молочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

1. В 100 кг смеси молочного мороженого должно содержаться 3,5 +

+ 0,2К % жира, 10 + 0,1К % сухих обезжиренных веществ, 17,5 + + 0,3К % сахара.

2. Расход сырья для производства молочного мороженого приведен в табл. 2.18.

Т а б л и ц а 2.18. **Расход сырья для производства молочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжиренных веществ	сахара	
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,27 + 0,1К
сухое обезжиренное	–	93	–	0,90
Сливки сухие	42	51	–	2,63
Сахар	–	–	100	1,55
Ванилин	–	–	–	90,00 + 2К
Агар	–	–	–	3,35
Вода	–	–	–	–

3. Согласно рецептуре для производства молочного мороженого должно быть не более 3 + 2К % сухого обезжиренного молока, не более 4,5 % сухих сливок, не более 75 + 0,05N % натурального молока.

4. На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Задача 2.20. Составить рецептуру смеси сливочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

1. В 100 кг смеси сливочного мороженого должно содержаться 9 + + 2К % жира, 10 + 0,1К % сухих обезжиренных веществ, 16 % сахара.

2. Расход сырья для производства сливочного мороженого приведен в табл. 2.19.

Т а б л и ц а 2.19. **Расход сырья для производства сливочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжиренных веществ	сахара	
1	2	3	4	5
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,27 + 0,1К
сухое обезжиренное	–	93	–	0,90
сухое цельное	26	68	–	1,62

О к о н ч а н и е т а б л. 2.19

1	2	3	4	5
Масло сливочное	83	1	–	5,41 + 0,1N
Сахар	–	–	100	1,55
Ванилин	–	–	–	90,00 + 2К
Агар	–	–	–	3,35
Вода	–	–	–	–

3. Согласно рецептуре для производства сливочного мороженого должно быть не более 4 + 0,1К % сухого обезжиренного молока, не более 3 + 0,1N % сухого молока.

4. На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Задача 2.21. Составить рецептуру смеси сливочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

1. В 100 кг смеси мороженого должно содержаться 10 + 0,05К % жира, 9 + 0,06 N % сухих обезжиренных веществ, 16 + 0,1К % сахара.

2. Расход сырья для производства сливочного мороженого приведен в табл. 2.20.

Т а б л и ц а 2.20. **Расход сырья для производства сливочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжиренных веществ	сахара	
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,27 + 0,1К
сухое цельное	26	28	–	1,62
сгущенное с сахаром	8,5	20	42	1,28
сгущенное обезжиренное с сахаром	–	26	42	0,98
Масло сливочное	83	1	–	5,4 + 0,1N
Сливки:				
сухие	42	51	–	2,63
натуральные	20 + 2К	7	–	1,67
Сахар	–	–	100	1,55
Ванилин	–	–	–	90,00 + 2К
Агар	–	–	–	3,35
Вода	–	–	–	–

3. Согласно рецептуре для производства сливочного мороженого должно быть не более 4 % сухого цельного молока и не более 4 % сухих сливок, порошкообразных молочных продуктов (сухого молока и сухих сливок) должно быть не более 7 %.

4. На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Используя приведенную информацию задач 2.19–2.21, необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум затрат:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j .$$

При условиях:

1. По содержанию питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le (\ge, =) A_i \ , i \in I_0 .$$

2. По предельным нормам продуктов (сырья) –

$$\tilde{M}_j \le x_j \le M_j , \ j \in J_0 .$$

3. По весу рецептурной смеси –

$$\sum_{j \in J_0} x_j = 100 .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0 .$$

Индексация:

i – номер вида питательного вещества;

I_0 – множество видов питательных веществ;

j – номер вида продукта (сырья);

J_0 – множество видов продуктов (сырья).

Неизвестные величины:

x_j – количество единиц продукта (сырья) вида j, входящего в рецептурную смесь.

Известные величины:

a_{ij} – содержание питательного вещества вида i в единице продукта (сырья) вида j;

A_i – количество питательного вещества вида i в рецептурной смеси;

$\tilde{M}_j, M_j$ – соответственно минимальное и максимальное количество продукта (сырья) вида j в рецептурной смеси;

c_j – цена единицы продукта (сырья) вида j;

3) решить экономико-математические задачи 2.10–2.21 на персональном компьютере, найти значение неизвестных величин (функциональная клавиша F1 (PRIMAL VALUES OUTPUT MENU) программы LPX.88 или «Результаты поиска решения» программы Excel);

4) найти оптимальное решение задач 2.10–2.21, проанализировать его, используя значение двойственных оценок (функциональная клавиша F2 (DUAL VALVES OUTPUT MENU) программы LPX.88);

5) проанализировать устойчивость (чувствительность) оптимального решения, используя информацию устойчивости по критерию (функциональная клавиша F3 (COST RANCES OUTPUT MENU) программы LPX.88 или «Отчет по устойчивости» и «Отчет по пределам» программы Excel);

6) решить экономико-математические задачи 2.10–2.21, используя программу Excel, наложив на неизвестные величины требование целочисленности (устанавливаем курсор на требование Целое);

7) проанализировать оптимальное решение целочисленных задач линейного программирования.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение экономико-математической линейной модели.
2. Охарактеризуйте группы исходной информации экономико-математической модели.
3. Сформулируйте теоремы, характеризующие основные свойства задач линейного программирования.
4. Приведите алгоритм геометрического решения экономико-математической линейной модели в двухмерном пространстве.
5. Приведите примеры базовых моделей линейного программирования, применяемых при планировании производства и макроэкономики.
6. Дайте определение понятия «двойственные экономико-математические оценки».
7. Охарактеризуйте сущность первой и второй теорем двойственности.

8. Дайте определение понятия «устойчивость оптимального плана экономико-математической задачи».

9. Перечислите особенности задач целочисленного программирования.

10. Перечислите методы решения задач дискретного программирования.

11. Охарактеризуйте алгоритм решения целочисленных линейных моделей методом отсечения.

12. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом ветвей и границ.

13. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом отсечения.

3. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

3.1. Экстремальные задачи на графах

Граф, с одной стороны, – это совокупность двух множеств: множества элементов $x \in X$ и множества отношений между этими элементами; с другой стороны, – это некая геометрическая схема, в которой элементы множества X выступают точками или вершинами, а отношения между ними выражены отрезками (ребрами) или дугами (направленными ребрами), соединяющими элемент X с элементами, которые с ним связаны.

В экономике широкое использование получил такой граф, как сеть.

Сеть – это ориентированный конечный связный граф без контуров, имеющий начальную (источник) и конечную (сток) точки.

Задача 3.1. Требуется построить сетевой график, заданный перечнем работ (табл. 3.1).

Таблица 3.1. **Перечень работ**

Работа (i, j)	Продолжительность, дн.
1, 2	5
1, 3	7
2, 3	6
2, 4	3
2, 5	8
3, 4	5
4, 5	4
4, 6	3
5, 6	9

Задача 3.2. Требуется построить сетевой график, заданный структурной таблицей (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Структурная таблица**

Дуга орграфа	Опирается на дуги
$\vec{e}_1$	–
$\vec{e}_2$	–
$\vec{e}_3$	–
$\vec{e}_4$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_6$	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$
$\vec{e}_7$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_8$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$
$\vec{e}_9$	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_8$
$\vec{e}_{10}$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$

Задача 3.3. Построить матрицу инциденций для ребер неориентированного графа и дуг орграфа, представленных на рис. 3.1 и 3.2.

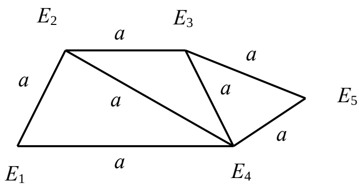


Рис. 3.1. Неориентированный граф

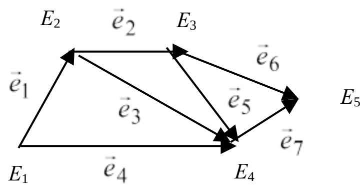


Рис. 3.2. Орграф

При этом матрицей инциденций для дуг орграфа является матрица $\left\| a_{ij} \right\|$, строки (m) которой соответствуют вершинам, столбцы (n) – дугам, а каждый элемент a_{ij} формируется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } E_i - \text{начальная вершина дуги } \vec{e}, \\ -1, \text{ если } E_j - \text{конечная вершина дуги } \vec{e}, \\ 0, \text{ если } E \text{ не инцидентна } \vec{e}. \end{cases}$$

Если имеем неориентированный граф, то элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ размером $m \cdot n$ формируются таким образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } E_i \text{ инцидентна ребру } a_i, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 3.4. Построить матрицу смежности ребер и дуг неориентированного графа и орграфа, представленных на рис. 3.3 и 3.4.

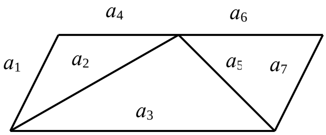


Рис. 3.3. Неориентированный граф

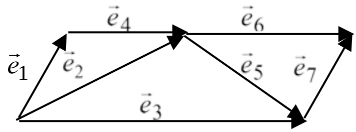


Рис. 3.4. Орграф

При этом матрицей смежности дуг (ребер) орграфа (неориентированного графа) называется матрица *A*, каждый элемент которой a_{ij} равен 1, если конечная вершина дуги $\vec{e}_i$ является начальной вершиной дуги $\vec{e}_j$ (если ребра имеют общую вершину), и нулю в остальных случаях:

а) $A = \|a_{ij}\|, \overline{i,\ j} = \overline{1, m},$

где m – число ребер неориентированного графа,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребра } a_i \text{ и } a_j \text{ имеют общую вершину,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

б) $A = \|a_{ij}\|, \overline{i,\ j} = \overline{1, m},$

где m – число дуг орграфа,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } \vec{e}_i \text{ непосредственно предшествует дуге } \vec{e}_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 3.5. Построить матрицу смежности вершин для неориентированного графа (рис. 3.5) и орграфа (рис. 3.6).

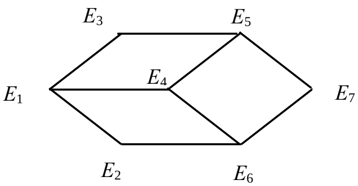


Рис. 3.5. Неориентированный граф

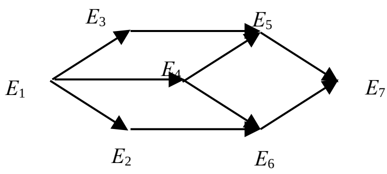


Рис. 3.6. Орграф

При этом матрицей смежности вершин орграфа является квадратная матрица A, каждый элемент которой a_{ij} численно равен количеству дуг, идущих из вершины E_i в вершину E_j. Следует отметить, что матрица смежности вершин орграфа является не симметричной относительно главной диагонали. Для неориентированного графа матрица смежности вершин является симметричной, так как ребра (E_i, E_j) и (E_j, E_i) существуют одновременно.

Задача 3.6. Требуется разбить элементы орграфа по рангам (слоям) и упорядочить их для орграфа, изображенного на рис. 3.7.

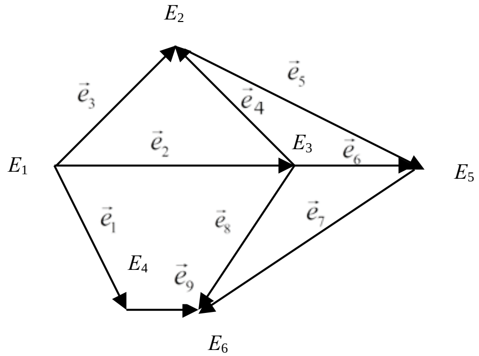


Рис. 3.7. Неупорядоченный орграф

Используя приведенную информацию, упорядочить орграф с помощью графического способа:

1) суть графического способа упорядочения элементов орграфа состоит в последовательном нахождении вершины, степень входящих дуг которой равна нулю: $\rho^+(E) = 0$. Такая вершина E_i является вершиной 1-го ранга. Вершина называется вершиной 2-го ранга, если в нее входят несколько дуг из вершин 1-го ранга, и не входит ни одна дуга из вершин выше 1-го ранга. Вершина E_i называется вершиной k-го ранга, если в нее входят дуги из вершин не выше $(k-1)$-го ранга, и при этом имеется хотя бы одна дуга, исходящая из вершин $(k-1)$-го ранга. Дуга $\vec{e}_i$ называется дугой k-го ранга, если она опирается на дугу (дуги) не выше $(k-1)$-го ранга, среди которых есть хотя бы одна дуга $(k-1)$-го ранга;

2) после разбиения на ранги элементам орграфа придать более удобную нумерацию, такую, чтобы:

а) все номера элементов некоторого ранга были меньше номеров элементов следующего ранга; номера элементов 1-го ранга были наименьшими, а номера элементов последнего ранга – наибольшими;

б) порядок элементов внутри одного и того же ранга был безразличен (так как вершины, принадлежащие одному рангу, не соединены между собой дугами, а дуги друг на друга не опираются).

Таким образом, графический способ упорядочения вершин (алгоритм Фалкерсона) состоит из следующих шагов:

а) находят вершины первого ранга и пронумеровывают их (1, 2…);

б) мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины (1-го ранга) и дуги из них выходящие;

в) вершины, оставшиеся без входящих дуг, относят ко второму рангу и присваивают им очередные номера и т. д.;

г) шаги п. б) и в) повторяют до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы;

3) изобразить упорядоченный орграф по рангам вершин;

4) аналогично, используя графический способ, определить ранги дуг. Найти дуги, не имеющие непосредственно предшествующих дуг. Они образуют 1-й ранг. После их мысленного вычеркивания вновь найти дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (это дуги 2-го ранга). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на ранги.

При этом дуги, выходящие из вершин конкретного ранга, относятся к этому же рангу;

5) изобразить упорядоченный по рангам дуг орграф.

Задача 3.7. Требуется упорядочить орграф, используя матрицу смежности вершин орграфа (рис. 3.8).

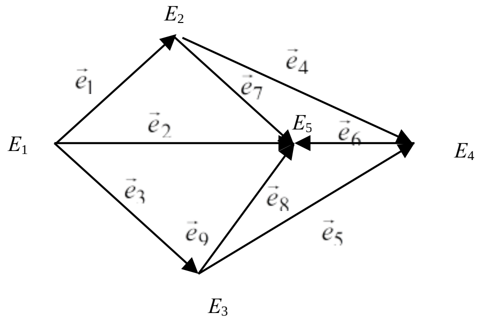


Рис. 3.8. Неупорядоченный орграф

Используя приведенную информацию, упорядочить орграф с помощью метода Демукрона, основанного на использовании матрицы смежности вершин орграфа:

1) обозначить через $V_{E\,i} = (a_{i1}, a_{i2,}, ..., a_{in}), i = \overline{1, n}$ векторы, являющиеся строками матрицы смежности;

2) вычислить компоненты вектора V_1:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n} V_{E_i}$$

и поместить результат в (n + 1)-ю строку табл. 3.3;

Т а б л и ц а 3.3. **Матрица смежности вершин**

Номер строки	E_i	E_j							Ранг	Новая нумерация вершин
		E_1	…	E_k	…	E_s	…	E_n		
1	E_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	r	E'_n
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k	E_k	a_{k1}	…	a_{kk}	…	a_{ks}	…	a_{kn}	1	E'_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	E_s	a_{s1}	…	a_{sk}	…	a_{ss}	…	a_{sn}	1	E'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	E_n	a_{n1}	…	a_{nk}	…	a_{ns}	…	a_{nn}	2	E'_3
n + 1	V_1	$a_1^{(2)}$	…	$a_к^{(1)}$	…	$a_s^{(1)}$	…	$a_n^{(1)}$		
n + 2	V_2	$a_1^{(2)}$	…	$a_к^{(2)}$	…	$a_s^{(2)}$	…	$a_n^{(2)}$		
…	…	…	…	…	…	…	…	…		
$n + r$	V_r	0	…		…		…			

3) среди неотрицательных компонентов вектора $V_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)})$ найти компоненты, равные нулю.

Пусть $a_k^{(1)}$ и $a_s^{(1)}$ равны нулю. Это значит, что в вершины $E_к$ и E_s не входит ни одна дуга, и они относятся к 1-му рангу. В столбце, соответствующем рангу, в строках k и s записать ранг этих вершин;

4) из вектора V_1 вычесть векторы-строки, соответствующие вершинам 1-го ранга $E_к$ и E_s;

5) в результате вычисления получен вектор $V_2 = V_1 - V_{E_k} - V_{E_s}$, в котором появятся новые компоненты, равные нулю. Пусть $a_n^{(2)}=0$. Следовательно, вершина E_n относится ко 2-му рангу. Ранг этой вершины, равный 2, занести в таблицу;

6) вычислить вектор $V_3 = V_2 - V_{E_n}$, в котором появятся новые нули. Следовательно, определить вершины 3-го ранга;

7) аналогичным образом продолжить процесс вычисления до тех пор, пока не будет получен вектор, все компоненты которого равны нулю. Пусть V_r – нулевой вектор, новый нулевой компонент которого $a_1^{(r)}$. Тогда E_1 – вершина r-го ранга;

8) перенумеровать вершины орграфа согласно их рангам и записать новые номера в последний столбец табл. 3.3;

9) построить упорядоченный орграф.

3.2. Задача о минимальных покрывающих деревьях

Покрывающее дерево – это дерево, содержащее все вершины сети. Минимальное покрывающее дерево предполагает, что все вершины сети соединены между собой путями наименьшей длины.

Задача 3.8. Сельскохозяйственное предприятие планирует газифицировать свои населенные пункты. Структура планируемой газовой сети и расстояние между центральной усадьбой сельскохозяйственного предприятия и населенными пунктами приведены на рис. 3.9, *а–в*. Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть, используя алгоритм построения минимального покрывающего дерева.

На основании приведенной информации задачи 3.8, применив алгоритм построения покрывающего дерева, необходимо:

1) разбить все вершины сети на два множества: E_1 – множество, содержащее любую выбранную вершину сети (чаще всего вершину с номером 1), и $\overline{E_1}$ – множество, содержащее все другие вершины сети, за исключением выбранной;

2) среди вершин множества E_1 выбрать ту вершину из множества $\overline{E_1}$, которая соединена самой короткой дугой или ребром с вершиной из множества E_1;

3) выбранную на предыдущем этапе вершину добавить в множество E_1, образовав множество вершин E_2, и отнять из множества $\overline{E_1}$, образовав множество вершин $\overline{E_2}$;

4) самую короткую дугу или ребро, соединяющую вершины двух множеств, выделить жирной линией;

5) алгоритм продолжить выполнять с пункта 2 до тех пор, пока множество $\overset{\circ}{\overline{A}}_k$ не будет содержать ни одного элемента;

6) рассчитать длину газовой сети сельскохозяйственного предприятия.

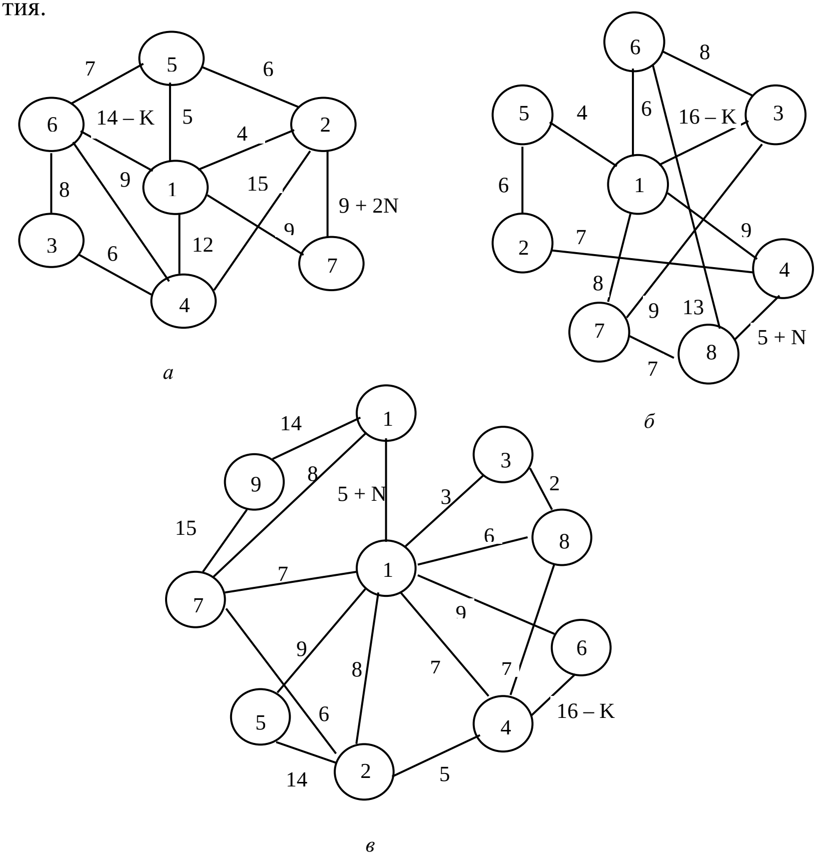


Рис. 3.9. Газовая сеть

3.3. Задача о кратчайших цепях

Цепь – это такая последовательность ребер (дуг) графа, при которой для каждого ребра (дуги) (кроме первого и последнего) одна из его вершин является общей с предыдущим ребром (дугой), а вторая – с последующим.

Цель данной задачи состоит в определении кратчайшего маршрута от исходной вершины сети до завершающей.

Задача 3.9. Фермер планирует доставлять часть сельскохозяйственной продукции фермерского хозяйства на переработку. Требуется проложить кратчайший маршрут от фермерского хозяйства до перерабатывающего цеха ассоциации фермерских хозяйств, используя существующую сеть дорог (рис. 3.10, *а*–*в*).

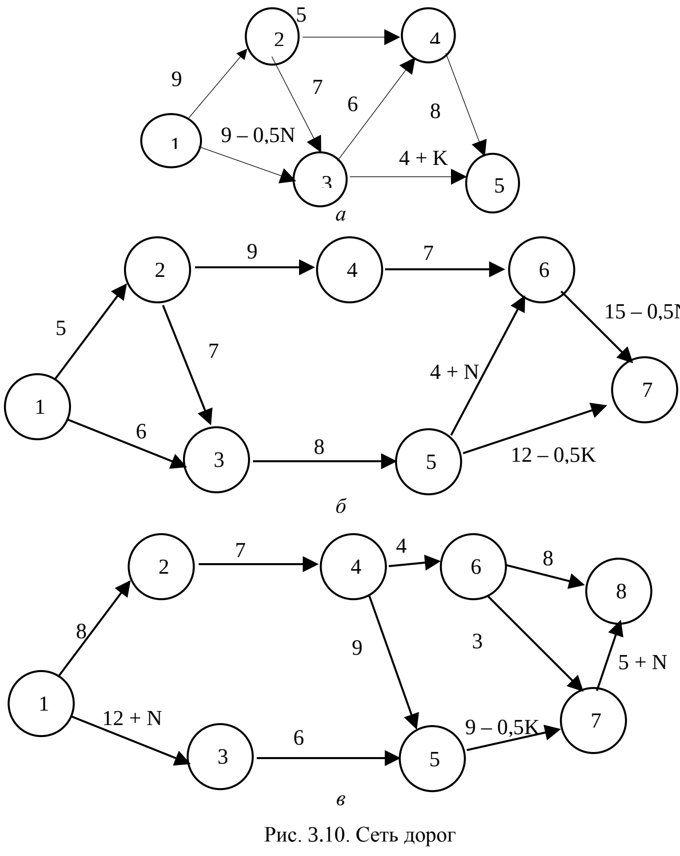


Рис. 3.10. Сеть дорог

На основании приведенной информации задачи 3.9, применив алгоритм Дейкстры, необходимо:

1) присвоить исходной вершине постоянную метку [0, –] и пометить в круглых скобках номер шага (1);

2) определить временные метки для всех вершин, которых можно достичь из выбранной вершины, согласно пункту 1 (при этом данные вершины не должны иметь постоянных меток) следующим образом:

$$[u_j, i] = [u_i + t_{ij}, i], \text{ при } t_{ij} \geq 0,$$

где i – номер начальной вершины дуги (ребра) (i, j);

j – номер конечной вершины дуги (ребра) (i, j);

u_j – расстояние к вершине j;

u_i – кратчайшее расстояние к вершине i;

t_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

3) если вершина имеет две временные метки и более, то их заменить на постоянную метку, выбрав наименьшее расстояние между вершинами;

4) выбрав последнюю вершину с постоянной меткой, алгоритм продолжить выполнять с пункта 2 до тех пор, пока все вершины не будут иметь постоянных меток;

5) определить кратчайшую цепь, проходя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки;

6) рассчитать длину кратчайшего маршрута.

Задача 3.10. Необходимо составить кратчайший маршрут от перерабатывающего предприятия до фирменного магазина, используя существующую сеть дорог (рис. 3.11, *а*–*в*).

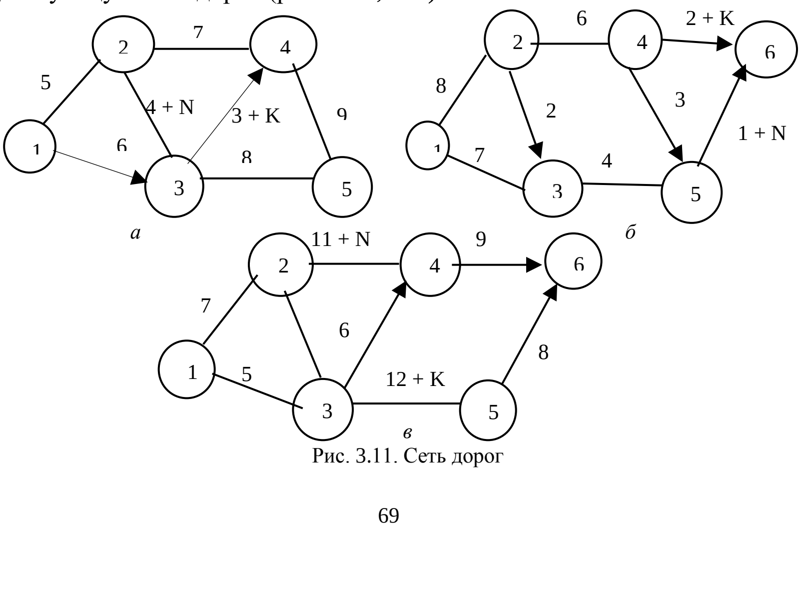


Рис. 3.11. Сеть дорог

На основании приведенной информации задачи 3.10, применив алгоритм Флойда, необходимо:

1) представить сеть в виде матрицы расстояний U_0 (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4. **Матрица расстояний** U_0

U_0

E_i	E_j				
	1	2	3	…	n
1	–	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
2	a_{21}	–	a_{23}	…	a_{2n}
3	a_{31}	a_{32}	–	…	a_{3n}
…	…	…	…	–	…
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	–

При определении элементов матрицы расстояний учитывать следующее: если вершина i связана с вершиной j путем $i \to j$, то его расстояние U_{ij} занести в таблицу, в противном случае такое расстояние принять равным бесконечности. Элементы матрицы U_0 симметричны относительно главной диагонали, за исключением пар элементов, соединенных между собой дугами, а не ребрами;

2) представить сеть в виде матрицы последовательности вершин E_0 (табл. 3.5);

Т а б л и ц а 3.5. **Матрица последовательности вершин** E_0

E_0

E_i	E_j				
	1	2	3	…	n
1	–	2	3	…	n
2	1	–	3	…	n
3	1	2	–	…	n
…	…	…	…	–	…
n	1	2	3	…	–

3) принять за ведущие первую строку и первый столбец ($k = 1$) матрицы расстояний U_0;

4) рассмотреть возможность применения треугольного оператора ко всем элементам U_{ij} матрицы U_0 (рис. 3.12). Суть треугольного оператора Флойда: над элементами матрицы расстояний выполнить процедуру замены

$$U_{ik} + U_{kj} \text{ на } U_{ij}\text{, если } U_{ij} > U_{ik} + U_{kj};$$

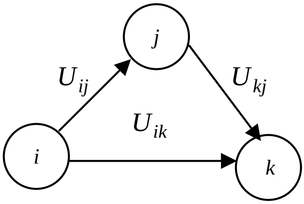


Рис. 3.12. Треугольный оператор Флойда

5) рассчитать новые элементы матрицы расстояний U_1 путем замены в матрице расстояний U_0 элемента U_{ij} на сумму элементов $U_{ik} + U_{kj}$;

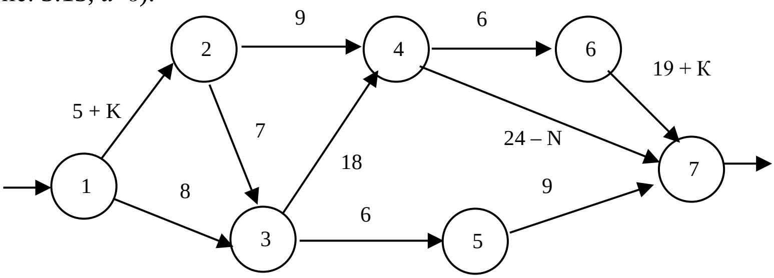
6) определить новые элементы матрицы последовательности вершин E_1 путем замены в матрице последовательности вершин E_0 соответствующих элементов на элементы, равные номеру ведущей строки и столбца;

7) принять за ведущие вторую строку и второй столбец ($k = k + 1$) и алгоритм расчетов повторять с пункта 3 до тех пор, пока ни один элемент матрицы расстояний нельзя будет улучшить;

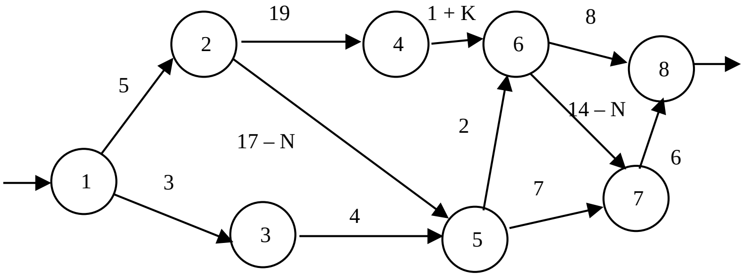
8) используя конечную матрицу последовательности вершин E_n, найти кратчайший путь от исходной до завершающей вершины сети;

9) используя конечную матрицу расстояний U_n, найти длину кратчайшего пути от исходной до завершающей вершины сети.

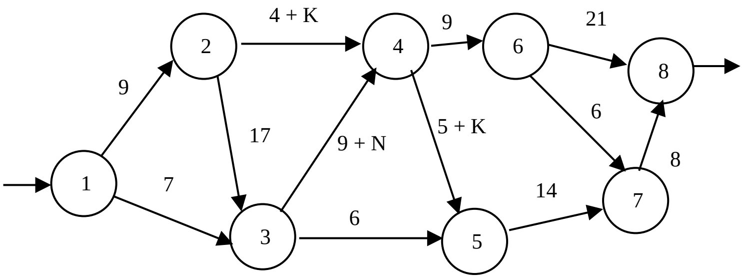
Задача 3.11. Необходимо составить кратчайший маршрут от оптовой базы до магазина РайПО, используя существующие потоки сети (рис. 3.13, *а–в*).



а



б



в

Рис. 3.13. Входные и выходные потоки сети

На основании приведенной информации задачи 3.11, используя прямую задачу линейного программирования, необходимо:

1) сделать предложение о том, что в исходную вершину входит одна единица внешнего потока, которая и выходит из завершающей вершины сети;

2) ввести двоичные переменные задачи:

$$x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1, n}),$$

где i – номер вершины, из которой выходит поток;

j – номер вершины, в которую входит поток;

3) записать ограничения задачи в виде баланса потока, т. е. общий входной поток минус общий выходной поток, равный нулю;

4) составить целевую функцию задачи, позволяющую минимизировать длину сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij} x_{ij} ,$$

где c_{ij} – расстояние от вершины сети i до вершины j;

5) решить прямую задачу линейного программирования с помощью электронных матриц Excel;

6) проанализировав оптимальное решение задачи, найти кратчайший путь из исходной вершины до завершающей вершины сети и определить его длину.

Задача 3.12. Требуется обосновать кратчайший маршрут от центра кооперативного участка до базы райпотребсоюза, используя существующую сеть дорог (рис. 3.14, *а*–*в*).

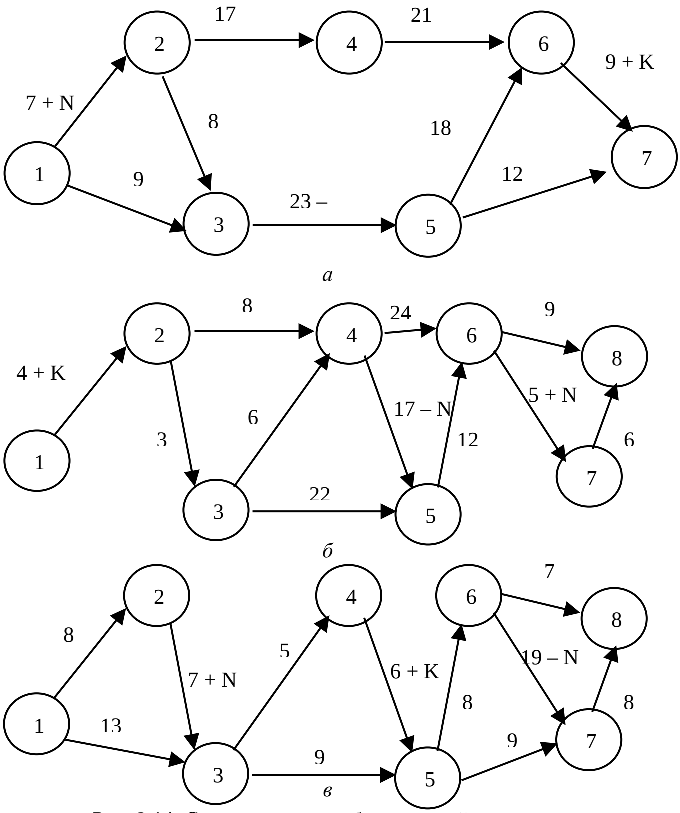


Рис. 3.14. Сеть дорог для выбора кратчайшего пути

На основании приведенной информации задачи 3.12, используя двойственную задачу линейного программирования, необходимо:

1) ввести неизвестные величины задачи:

u_i – расстояние от исходной вершины до вершины сети i;

c_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

2) расстояние до исходной вершины сети принять равным нулю: $u_1 = 0$;

3) составить ограничения двойственной задачи:

$$u_j - u_i \le c_{ij},$$

где $u_j - u_i$ – расстояние от вершины i до вершины сети j;

c_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

4) записать целевую функцию задачи, позволяющую максимизировать расстояние от исходной вершины сети u_1 до завершающей u_n:

$$F_{\max} = u_n - u_1;$$

5) решить двойственную задачу линейного программирования с помощью электронных таблиц Excel;

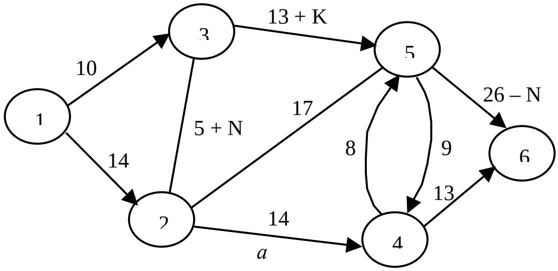
6) проанализировать оптимальное решение задачи и определить, используя значения двойственных переменных, равных единице, кратчайший путь из исходной вершины сети до завершающей;

7) вычислить длину кратчайшего пути.

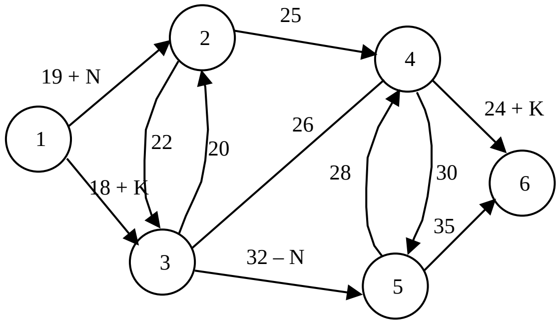
3.4. Задача о максимальном потоке в сетях

Поток – это экономическая величина, измеряемая в движении с учетом того периода времени, для которого делается расчет.

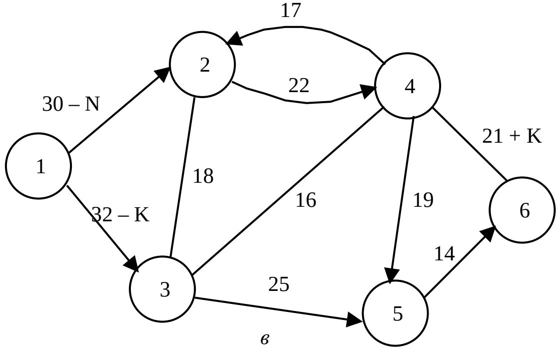
Задача 3.13. Требуется обосновать максимальную величину потока комбикормов, поступающих из комбикормового завода на птицефабрику, используя следующую сеть (рис. 3.15, *а–в*).



а



б



в

Рис. 3.15. Сеть для определения максимального потока

Используя информацию задачи 3.13, применив алгоритм Форда, необходимо:

1) сформировать матрицу пропускных способностей дуг (ребер) сети. При этом в метку (i, j) записывают пропускную способность дуги (b_{ij}), если она больше нуля; если пропускная способность симметричной ей дуги равна нулю, то в клетку (j, i) ставят нуль; если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j, i) не заполняют;

2) пометить значком * столбец E_1 матрицы пропускных способностей;

3) найти в строке E_1 положительные элементы матрицы ($b_{ij} > 0$) и столбцы, в которых они находятся, пометить номером просматриваемой строки;

4) продолжить процедуру пометок до тех пор, пока:

а) не будет помечен столбец E_n, т. е. сток;

б) нельзя пометить новые столбцы, что означает отсутствие пути из E_1 в E_n, проходящего по дугам с положительной пропускной способностью;

5) найти путь из стока E_1 в сток E_n, используя пометки столбцов;

6) расставить знаки, используя соответствующие элементы сети b_{ij}. Последний положительный элемент столбца E_n, т. е. b_{in}, пометить знаком «–», а симметричный ему элемент – знаком «+». Процесс пометок продолжить до тех пор, пока не придем к истоку (вершине E_1) и не отметим знаком «–» элемент этой строки и знаком «+» симметричный ему элемент;

7) определить пропускную способность пути Q_i, которая равна наименьшей из пропускных способностей дуг пути, получивших знак «–»:

$$Q_i = \min_{(i,j)} \left\{ b_{ij}^{-} \right\};$$

8) определить остаточные пропускные способности дуг пути и симметричных к ним дуг, т. е. из элементов таблицы b_{ij}^{-}, получивших знак «–», вычесть выбранный элемент Q_i, а к элементам b_{ij}^{+}, получивших знак «+», прибавить Q_i;

9) все изменения элементов b_{ij} занести в новую матрицу пропускных способностей дуг (ребер) и расчеты повторять с пункта 2 до тех пор, пока не получим матрицу V_n, в которой нет ни одного пути из истока E_1 в сток E_n с пропускной способностью больше нуля;

10) вычислить элементы новой таблицы путем вычитания из элементов матрицы последовательности дуг (ребер) V_0 соответствующих элементов матрицы V_n;

11) используя положительные элементы таблицы, охарактеризовать величины дуговых потоков;

12) определить величину максимального потока сети, просуммировав элементы строки E_1 (источника) или элементы столбца E_n (стока);

13) найти дуги, образующие разрез с минимальной пропускной способностью. При этом учесть, что данный разрез образован дугами, начальные вершины которых характеризуют строки E_1, а конечные вершины – элементы столбца E_n;

14) сделать вывод о степени насыщения дуг разреза потоком.

Задача 3.14. Необходимо обосновать максимальную пропускную способность потока зерна, поступающего из сельскохозяйственного предприятия на элеватор, используя следующую сеть (рис. 3.16, *а–в*).

Используя информацию задачи 3.14, необходимо:

1) ввести неизвестные величины задачи линейного программирования x_{ij}, обозначающие поток по дуге (ребру) (E_i, E_j), равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени;

2) составить развернутую задачу линейного программирования, используя следующую структурную экономико-математическую модель.

Требуется найти значения x_{ij}, максимизирующие одну из целевых функций:

а) максимальный поток, равный количеству вещества, вытекающего из источника:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} ,$$

б) или максимальный поток, равный количеству вещества, притекающего в сток:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{in} .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

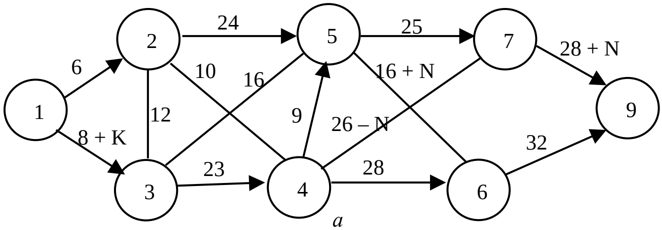
$$x_{ij} \le b_{ij} ,\ i, j = \overline{0, n} ,\ i \ne j .$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

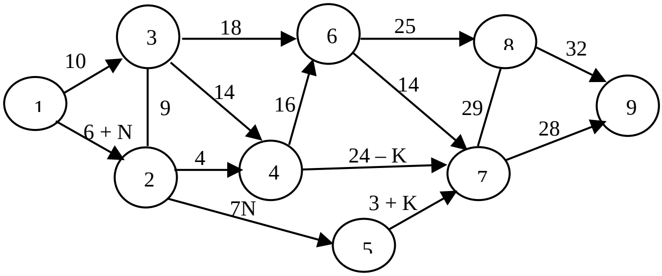
$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0 ,\ k = \overline{1, n-1} .$$

3. Неотрицательность переменных –

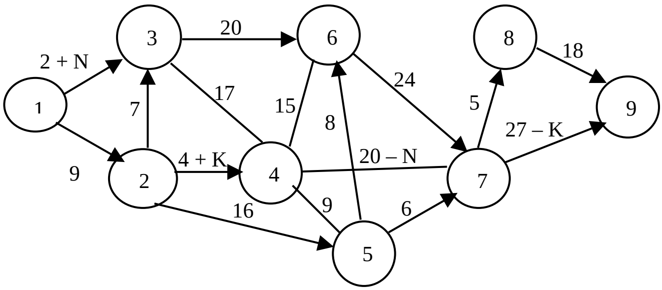
$$x_{ij} \ge 0 ;$$



а



б



в

Рис. 3.16. Сеть дорог для определения максимального потока

3) решить задачу, используя электронные таблицы Excel (Поиск решения);

4) проанализировать оптимальное решение экономико-математической задачи, определив величины дуговых потоков, разрезы с минимальной пропускной способностью и величину максимального потока сети.

3.5. Задача о потоке минимальной стоимости

Задача нахождения потока минимальной стоимости в сети с ограниченной пропускной способностью обобщает задачу определения максимального потока, так как каждой дуге (ребру) соответствует определенная стоимость прохождения единицы потока по этой дуге (c_{ij}).

Задача 3.15. Требуется минимизировать стоимость в сети с ограниченной пропускной способностью B = 15. Сеть (рис. 3.17, *а–в*) дополнена стоимостью прохождения единицы потока по дугам (ребрам) c_{ij}, информация о которой записана в скобках над дугами (ребрами) сети.

Используя информацию задачи 3.15, необходимо:

1) ввести переменные величины задачи линейного программирования x_{ij}, обозначающие величину потока по дуге (ребру) (E_i, E_j), перемещаемого по ней в единицу времени;

2) составить развернутую задачу, используя следующую структурную экономико-математическую модель.

Требуется минимизировать стоимость потока в сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij} x_{ij} .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

$$x_{ij} \le b_{ij}, \; i, j = \overline{0, n}, \; i \ne j .$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, \; k = \overline{1, n-1}.$$

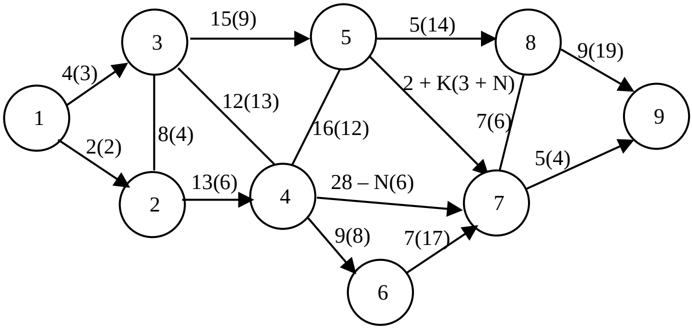
3. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток –

а) $\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = B$;

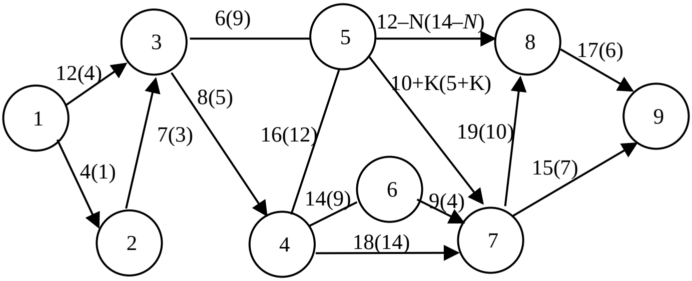
б) $\sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B$.

4. Неотрицательность переменных –

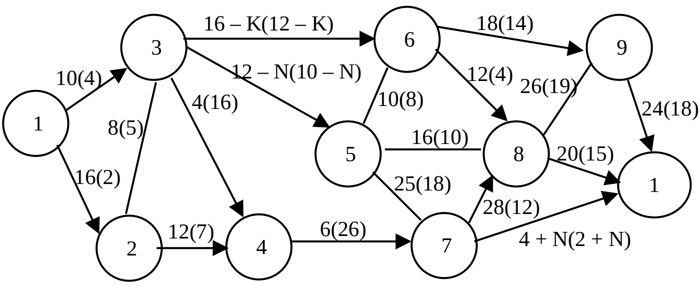
$$x_{ij} \ge 0;$$



а



б



в

Рис. 3.17. Сеть для определения потока минимальной стоимости

3) решить задачу линейного программирования, используя электронные таблицы Excel;

4) сделать анализ оптимального решения экономико-математической задачи, определив разрезы с минимальной пропускной способностью, величины дуговых потоков, величину потока сети и его минимальную стоимость в сети.

3.6. Задачи о назначениях

Задача о назначениях является частичным случаем распределительных задач, особенность которых состоит в том, что в них объемы наличных и требующихся для выполнения каждой работы ресурсов равны единице, если работник i назначен на работу j, или нулю в противном случае, т. е. для выполнения каждой работы расходуется только один вид ресурса, а каждый ресурс может быть использован на одной работе.

Задача 3.16. Требуется распределить торговых работников супермаркета на выполнение работ с целью максимизации общей производительности труда. Производительность работников приведена в табл. 3.6–3.8.

Таблица 3.6. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	5	6	1	14	7	2	3	15
A_2	–	–	–	10	3	11	5	–
A_3	6	7	9	6	–	–	4	–
A_4	2	9	1 + N	3	–	–	14	–
A_5	8	3	9	2	6	17 – N	10	2
A_6	–	–	–	–	12	4	8	9
A_7	13	15	1	8	2	10	3	1 + K
A_8	10	4	16 – K	2	1	5	6	7

Таблица 3.7. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	8	10	1	11	13	4
A_2	2	16	7	18 – K	6	17
A_3	6	3	–	–	–	14
A_4	12	8	–	–	–	13
A_5	5	20 – N	–	–	–	5
A_6	19	1 + K	14	2 + N	4	14

Т а б л и ц а 3.8. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа								
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	6	13	8	19	20	13	22	4	3
A_2	4	3	6	7	2 + K	10	12	16	2
A_3	8	6	4	15	10	–	–	–	5
A_4	1	21 – K	9	7	3	–	–	–	9
A_5	–	–	–	5	18	–	–	–	3
A_6	–	–	–	4	7	17	5	9	6
A_7	17	6	15	9	12	2 + N	3	10	4
A_8	7	2	19 – N	12	4	16	8	11	21
A_9	11	8	12	5	10	12	3	7	1

Используя информацию задачи 3.16, применив линейное программирование, необходимо:

1) ввести двоичные неизвестные величины:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-й исполнитель выполняет работу вида } j, \\ 0, \text{в противном случае} \, (i,\, j = \overline{1, n}; i \neq j); \end{cases}$$

2) составить ограничения задачи, используя следующие структурные соотношения:

1. По распределению работ для выполнения –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}\,.$$

2. По распределению исполнителей по работам –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}\,.$$

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0; x_{ij} \in \{0,1\};$$

3) записать целевую функцию задачи в зависимости от постановки, требуется максимизировать или минимизировать целевую функцию:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ \text{ или } \ F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\,,$$

где c_{ij} – соответственно производительность исполнителя вида i при выполнении работы вида j или затраты на выполнение работы вида j исполнителем вида i;

4) решить задачу линейного программирования, используя электронные таблицы Excel (Поиск решения);

5) проанализировать оптимальное решение задачи и обосновать рациональное распределение исполнителей по работам.

Задача 3.17. Требуется распределить работников маркетингового отдела предприятия на работы по проведению маркетинговых исследований рынка сбыта товаров с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 3.9–3.11.

Используя информацию задачи 3.17, применив алгоритм венгерского метода, необходимо:

1) найти в каждой строке матрицы наименьший элемент ($\min\limits_{i} c_{ij}$);

Т а б л и ц а 3.9. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	6	9	4 + 0,5K	8	7
A_2	6	11 – 0,3N	5	9	5 + 0,5N	4
A_3	7	8	6	5	5	9
A_4	5	6	9	3	7	8
A_5	12 – 0,3K	7	4	6	9	5
A_6	9	10	8	5	6	7

Т а б л и ц а 3.10. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	4	3	3 + 0,5K	11	9	7	5
A_2	6	4 + 0,5N	5	3	7	4	9
A_3	8	4	5	9	6	7	8
A_4	5	7	11 – 0,5N	5	3	8	2
A_5	13	9	6	8	4	12	10
A_6	9	6	4	13	7	11	12
A_7	15 – 0,5K	5	7	8	15	6	11 – 0,5K

Т а б л и ц а 3.11. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	14 – 0,5N	7	9
A_2	7	3	6	4	5
A_3	8	5	4	6	7
A_4	12 – 0,5K	6	3	3 + K	4
A_5	4	8	5	3	2 + N

2) построить новую матрицу, элементы которой рассчитать как разность между соответствующим элементом каждой строки и выбранным минимальным элементом конкретной строки;

3) выбрать среди элементов каждого столбца новой матрицы наименьшие элементы ($\min_j c_{ij}$);

4) почленно вычесть из элементов каждого столбца полученной матрицы минимальные элементы соответствующего столбца, получить матрицу, в которой каждая строка и каждый столбец содержат хотя бы по одному нулевому значению;

5) получить допустимое решение задачи, используя нулевые значения элементов матрицы;

6) получить оптимальное решение задачи о назначениях, анализируя допустимое решение задачи;

7) рассчитать суммарные затраты на выполнение работ, используя оптимальную расстановку работников по местам.

3.7. Задача коммивояжера

Задачей, схожей с задачей о назначениях, является задача о коммивояжере, постановка которой состоит в том, чтобы коммивояжер посетил n городов только один раз, выезжая из первого города и возвращаясь в исходный по кратчайшему маршруту.

Задача 3.18. Перерабатывающему предприятию необходимо развезти свою продукцию по фирменным магазинам, расположенным в разных городах. Расстояние между городами приведено в табл. 3.12–3.14. Требуется определить кратчайший замкнутый маршрут.

Таблица 3.12. **Расстояние между городами, км**

Города	Города					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	–	10 + N	60 – N	18	20	28
A_2	15 + N	–	35	35 + K	24	36
A_3	55 – N	35	–	46 – K	19	40
A_4	18	25 + K	45 – K	–	30	52
A_5	20	24	19	30	–	44
A_6	28	36	40	52	44	–

Т а б л и ц а 3.13. **Расстояние между городами, км**

Города	Города							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	–	15 + N	36	20	42	50	19	60 – K
A_2	15 + N	–	22	56	30	47	10 + K	82
A_3	36	22	–	16	20	34	56	70 – N
A_4	20	56	16	–	62	40	38	12
A_5	42	30	20	62	–	16	39	47
A_6	50	47	34	40	16	–	43	64
A_7	19	10 + K	56	38	39	43	–	52
A_8	60 – K	82	70 – N	12	47	64	52	–

Т а б л и ц а 3.14. **Расстояние между городами, км**

Города	Города				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	–	32	27 + N	44	19 + K
A_2	32	–	47	36	63 – K
A_3	24 + N	46	–	58	33
A_4	44	36	58	–	78 – N
A_5	19 + K	62 – K	33	74 – N	–

Используя информацию задачи 3.18, применив метод отсекающих плоскостей, необходимо:

1) ввести неизвестные величины целочисленной задачи линейного программирования:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j, \\ 0, \text{в противном случае;} \end{cases}$$

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется минимизировать маршрут:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

где c_{ij} – расстояние между городом i и городом j.

При условиях:

1. По въезду в города – $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}$.

2. По выезду из городов – $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$.

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\};$$

3) в модель ввести дополнительные ограничения (по формированию маршрута коммивояжера) в количестве $(n-1)\cdot(n-2)$, позволяющие исключить возможность разрыва пути коммивояжера и появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1,\ i, j = \overline{2,n},\ i \neq j;$$

4) найти оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования, используя электронные таблицы Excel;

5) проанализировать маршрут коммивояжера, определив его длину.

3.8. Сетевые графики и их параметры

Сетевой график – это граф типа сети, в котором фиксируется комплекс работ (операций) и событий, отражая их технологическую последовательность и взаимосвязь в процессе достижения цели.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов или времени, или логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий. *Событиями* называют результаты выполнения одной или нескольких работ.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике не должно быть тупиков, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);

2) в сетевом графике не должно быть и событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;

3) не должно быть двух событий, связанных двумя или большим количеством работ;

4) в сети не должно быть контуров, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;

5) не должно быть петель, т. е. начало выполнения работы является и условием ее окончания.

Задача 3.19. Необходимо построить сетевой график переоборудования фирменного магазина перерабатывающего предприятия, заданный списком работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.15).

Т а б л и ц а 3.15. **Список работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1,2)	Демонтаж старого холодильного оборудования и витрин	–	2
$\vec{e}_2$	(2,6)	Ремонтные строительно-монтажные работы	$\vec{e}_1$	21
$\vec{e}_3$	(2,3)	Подготовка к монтажу нового холодильного оборудования и витрин	$\vec{e}_1$	4
$\vec{e}_4$	(3,4)	Монтаж нового оборудования	$\vec{e}_3$	6 + 0,1N
$\vec{e}_6$	(4,5)	Подключение оборудования к электросети	$\vec{e}_4$	1
$\vec{e}_8$	(5,7)	Наладка оборудования	$\vec{e}_6$	5 + 0,2K
$\vec{e}_7$	(6,7)	Отделочные работы	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_5$ *	10
$\vec{e}_9$	(7,8)	Приемка фирменного магазина в эксплуатацию	$\vec{e}_7$, $\vec{e}_8$	1

*Работа $\vec{e}_5$ (4,6) является фиктивной.

Задача 3.20. Требуется построить сетевой график подготовки выставочного зала для демонстрации товаров, выпускаемых перерабатывающей промышленностью, заданный списком работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.16).

Т а б л и ц а 3.16. **Список работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, ч
1	2	3	4	5
$\vec{e}_1$	(1,2)	Отбор образцов товара для выставки	–	2
$\vec{e}_2$	(2,6)	Изготовление буклетов и других рекламных материалов	$\vec{e}_1$	20
$\vec{e}_3$	(2,5)	Изготовление стендов для установки образцов товаров в демонстрационном зале	$\vec{e}_1$	5 + 0,2K

О к о н ч а н и е т а б л. 3.16

1	2	3	4	5
$\vec{e}_4$	(2,3)	Доставка в зал выставки образцов товаров	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_5$	(3,4)	Доставка в зал выставки стендов	$\vec{e}_4$	2
$\vec{e}_6$	(4,5)	Монтаж стендов	$\vec{e}_5$	3 + 0,2N
$\vec{e}_7$	(5,6)	Установка образцов товаров на стендах	$\vec{e}_3$, $\vec{e}_6$	1
$\vec{e}_8$	(6,7)	Оформление зала и стендов рекламными материалами	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7,8)	Репетиция открытия выставки	$\vec{e}_8$	1

На основании приведенной информации задач 3.19, 3.20 необходимо:

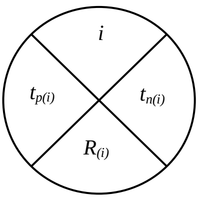
1) на сетевом графике рассчитать ранний срок свершения событий:

а) $t_{p(1)} = 0$;

б) $t_{p(j)} = t_{p(i)} + t_{ij}$,

где $t_{p(j)}$ – ранний срок свершения события j (последующего события) (рис. 3.18);

t_{ij} – продолжительность работы (i, j);

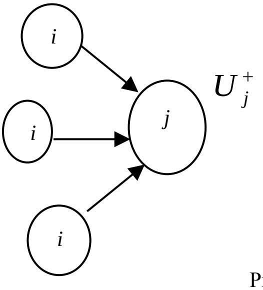


i – номер события;
$t_{p(i)}$ – ранний срок свершения события i;
$t_{n(i)}$ – поздний срок свершения события i;
$R_{(i)}$ – резерв времени события i.

Рис. 3.18. Временные параметры событий

в) если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i, то ранний срок свершения события j определяется как максимальная сумма ранних сроков свершения событий i и продолжительность работ, входящих в событие j (рис. 3.19):

$$t_{p(j)} = \max_{(i,j)\in u_j^+} \{t_{p(i)} + t_{ij}\}, (j = \overline{2, n});$$



U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие j.

Рис. 3.19. Фрагмент сетевого графика

2) определить продолжительность критического пути t_{kp}:

$$t_{kp} = t_{n(n)};$$

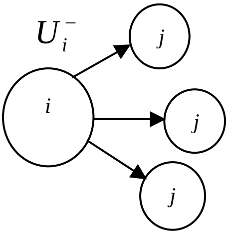
3) на сетевом графике рассчитать поздний срок свершения событий:

а) $t_{n(n)} = t_{kp}$, где t_{kp} – продолжительность критического пути;

б) $t_{n(i)} = t_{n(j)} - t_{ij}$, где $t_{n(j)}$ – поздний срок свершения события j (предшествующего события);

в) если нескольким событиям j предшествует свершение одного события i, то поздний срок свершения события i определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий j и продолжительность работ, выходящих из события i (рис. 3.20):

$$t_{n(i)} = \min_{(i,j)\in u_i^-} \{t_{n(j)} - t_{ij}\}, (i = \overline{1, n-1});$$



U_i^- – множество всех работ, выходящих из события i.

Рис. 3.20. Фрагмент сетевого графика

4) на сетевом графике рассчитать резерв времени событий:

$$R_{(i)} = t_{n(i)} - t_{p(i)};$$

5) рассчитать временные параметры работ (табл. 3.17):

Т а б л и ц а 3.17. **Временные параметры работ**

Условные обозначения работ (i, j)	Продолжительность работы, t_{ij}	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени работы		
		начала работы, $t_{р.н(i,j)}$	окончания работы, $t_{р.о(i,j)}$	начала работы, $t_{п.н(i,j)}$	окончания работы, $t_{п.о(i,j)}$	полный $R_{п(i,j)}$	свободный $R_{c(i,j)}$	независимый $R_{н(i,j)}$

а) ранний срок начала работы (i, j): $t_{р.н(i,j)} = t_{р(i)}$;

б) ранний срок окончания работы (i, j): $t_{р.о(i,j)} = t_{р.н(i,j)} + t_{ij}$;

в) поздний срок окончания работы (i, j): $t_{п.о(i,j)} = t_{п.(j)}$;

г) поздний срок начала работы (i, j): $t_{п.н(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{ij}$;

д) полный резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{п(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{р.н(ij)} - t_{i,j};$$

$$2.\ R_{п(i,j)} = t_{п.(j)} - t_{р.(i)} - t_{i,j};$$

$$3.\ R_{п(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{р.о(ij)};$$

е) свободный резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{c(i,j)} = t_{р(j)} - t_{р(i)} - t_{ij};$$

$$2.\ R_{c(i,j)} = R_{п(i,j)} - R_{(j)};$$

ж) независимый резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{н(i,j)} = t_{р(j)} - t_{п(i)} - t_{ij};$$

$$2.\ R_{н(i,j)} = R_{п(i,j)} - R_{(i)} - R_{(j)};$$

6) проанализировать временные характеристики событий и работ.

Задача 3.21. Необходимо построить сетевой график реконструкции цеха перерабатывающего предприятия, заданного перечнем работ, и рассчитать временные характеристики событий и работ (табл. 3.18).

Т а б л и ц а 3.18. **Перечень работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
1	2	3	4	5
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Определение объема реконструкции	–	2
$\vec{e}_2$	(2, 3)	Составление сметы затрат	$\vec{e}_1$	7 + N

1	2	3	4	5
$\vec{e}_3$	(2, 4)	Выбор проекта реконструкции	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_4$	(3, 5)	Выбор подрядчика (строительной организации)	$\vec{e}_2$	2
$\vec{e}_5$	(3, 7)	Получение финансового обеспечения	$\vec{e}_2$	6 + K
$\vec{e}_6$	(5, 7)	Составление договора на выполнение работ проекта	$\vec{e}_4$	1
$\vec{e}_7$	(4, 6)	Экономическое обоснование проекта	$\vec{e}_3$	5
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Привязка проекта к условиям перерабатывающего предприятия	$\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Работа по реконструкции	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_8$	30

Задача 3.22. Требуется составить сетевой график подготовительных мероприятий для участия в выставке товаров предприятия, заданный перечнем работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.19).

Таблица 3.19. **Перечень подготовительных работ**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Определение рекламной стратегии	–	2
$\vec{e}_2$	(2, 3)	Разработка дизайна проекта экспозиции	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_3$	(2, 4)	Изготовление рекламно-информационных материалов	$\vec{e}_1$	6 + N
$\vec{e}_4$	(4, 5)	Отбор экспонатов (товаров для выставки)	$\vec{e}_3$	1
$\vec{e}_5$	(3, 6)	Техническое и художественное оформление стендов	$\vec{e}_2$	4 + K
$\vec{e}_6$	(5, 6)	Упаковка и подготовка к транспортировке	$\vec{e}_4$	2
$\vec{e}_7$	(2, 6)	Заключение договора на участие и оплата аренды	$\vec{e}_2$	2
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Переезд и размещение, транспортировка экспозиции и товаров	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Установка стендов и подготовка их к открытию	$\vec{e}_8$	1

На основании приведенной информации задач 3.21, 3.22 необходимо:

1) построить сетевой график работ проекта;

2) определить продолжительность критического пути;

3) рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 задач 3.19, 3.20;

4) рассчитать временные характеристики работ согласно п. 5 задач 3.19, 3.20;

5) определить резервы времени работ и проанализировать их.

3.9. Задачи распределения ресурсов на сетях

Задача 3.23. Необходимо распределить трудовые ресурсы во времени, т. е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить комплекс проектных работ в минимальный срок.

Исходная информация.

1. В распоряжении руководителя проектных работ имеется 35 + + 0,2К человек.

2. На перерабатывающем комбинате необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.21).

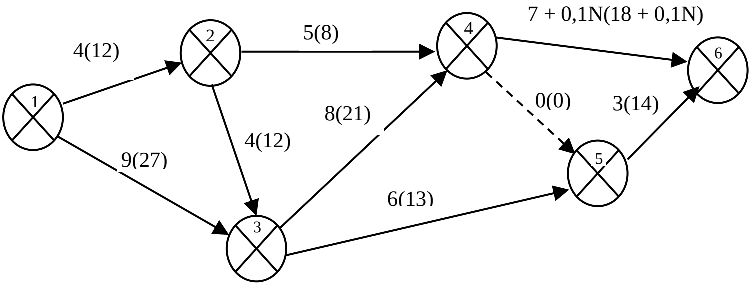


Рис. 3.21. Сетевой график выполнения комплекса проектных работ

3. Над дугами графика представлена продолжительность выполнения работ (t_{ij}), а в скобках – интенсивность потребления ресурса, т. е. необходимое для выполнения работы (i, j) число исполнителей в единицу времени (ν_{ij}).

Задача 3.24. Требуется обосновать время начала и окончания работ по переводу производства на новую, более интенсивную технологию так, чтобы комплекс подготовительных работ был завершен в кратчайший срок.

Исходная информация.

1. К выполнению подготовительных работ можно привлечь не более 10 + 0,3К специалистов, имеющих соответствующую квалификацию.

2. С этой целью создана группа специалистов и составлен сетевой график выполнения комплекса работ (рис. 3.22).

3. Известны продолжительность выполнения работ (t_{ij}) и количество специалистов, необходимых для этого (v_{ij}).

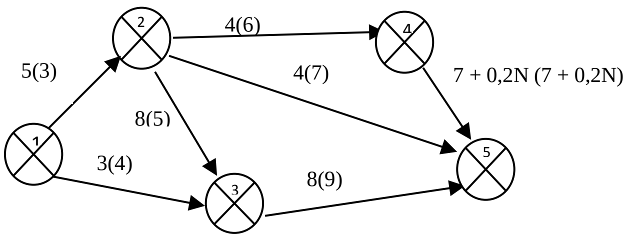


Рис. 3.22. Сетевой график выполнения комплекса подготовительных работ

На основании приведенной информации задач 3.23, 3.24 необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 задач 3.19, 3.20;

2) рассчитать временные характеристики работ, согласно п. 5 задач 3.19, 3.20;

3) построить сетевой график в календарной шкале времени по ранним срокам начала и окончания работ (т. е. график Ганта), спроецировать на оси времени (ot) начало и окончание каждой работы, выделив промежутки;

4) построить эпюру интенсивности потребления ресурса (без учета ограничения), просуммировать в промежутках оси времени интенсивность потребления ресурсов.

Если для каждого промежутка интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то распределение ресурсов считается удовлетворительным;

5) в противном случае оптимизировать использование ресурсов:

а) все работы, сумма интенсивности использования ресурсов которых не превышает запасов ресурса, оставляем в первоначальном положении;

б) если после прибавления интенсивности использования ресурса какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше их запасов, то эту работу сдвигают вправо на величину рассматриваемого промежутка;

в) если суммарное потребление ресурсов больше их запасов, а необходимо выполнить несколько работ, то устанавливают очередность их выполнения:

1. В первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке.

2. Затем выполняются те работы, которые имеют наименьший полный резерв времени $R_{n(i,j)}$.

3. Если полные резервы времени для некоторых работ равны, то выполняют сначала ту работу, для которой характерна наименьшая интенсивность использования ресурсов.

4. Если интенсивность использования ресурсов равна, то работы из промежутка выбирают в произвольном порядке.

5. Включение новых работ для выполнения в конкретный промежуток происходит тогда, когда для этого имеются ресурсы, в противном случае работу (или работы) сдвигают вправо на промежуток.

6) С учетом вышеизложенных корректировок построить новый график Ганта и эпюру интенсивности потребления ресурса. Если интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то задача решена. В противном случае оптимизацию графика повторяем с п. 5.

7) Найти оптимальное решение задачи, проанализировать его.

3.10. Задачи оптимизации сетей по времени

Задача 3.25 (1-й вариант). Необходимо минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы проекта, с тем чтобы общий срок его выполнения не превышал 25 + 0,5К дней.

Исходная информация.

1. В организации необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.23).

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность

работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $k_{12} = 0{,}2$; $k_{13} = 0{,}5$; $k_{23} = 0{,}4$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}6$; $k_{45} = 0{,}1$.

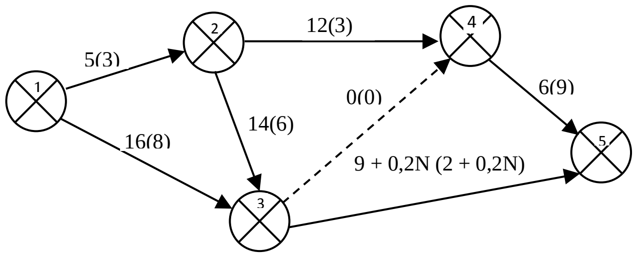


Рис. 3.23. Сетевой график выполнения комплекса работ

Задача 3.26 (1-й вариант). Требуется минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы комплекса при условии завершения комплекса работ не позднее 26 – 0,2К дней.

Исходная информация.

1. Комплекс работ по организации рекламной компании предприятия представлен сетевым графиком (рис. 3.24).

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

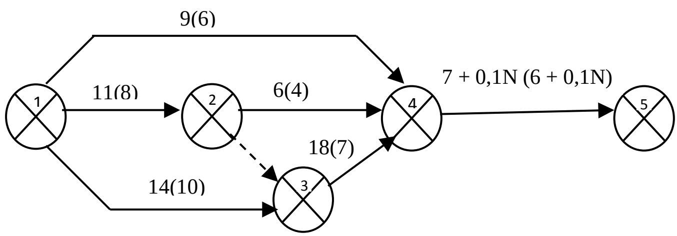


Рис. 3.24. Сетевой график выполнения комплекса работ

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $k_{12} = 0{,}25$; $k_{13} = 0{,}4$; $k_{14} = 0{,}2$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{34} = 0{,}5$; $k_{45} = 0{,}15$.

На основании приведенной информации задач 3.25, 3.26 необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 задач 3.19, 3.20;

2) ввести переменные задачи, обозначающие величину дополнительных вложений в работы, время начала и окончания работ;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум суммарных затрат дополнительных вложений:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{H} = 0, (1, j) \in \vec{e}.$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{in}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e}.$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E.$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0}, x_{ij} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу ij, позволяющая сократить время ее выполнения;

t_{ij}^{H} – время начала работы ij ;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij .

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij ;

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных вложений в работу ij ;

t_{ij} – продолжительность выполнения работы ij ;

4) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Задача 3.27 (2-й вариант). Необходимо минимизировать срок выполнения проекта за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения плановых работ на новый календарный год имеет следующий вид (рис. 3.25).

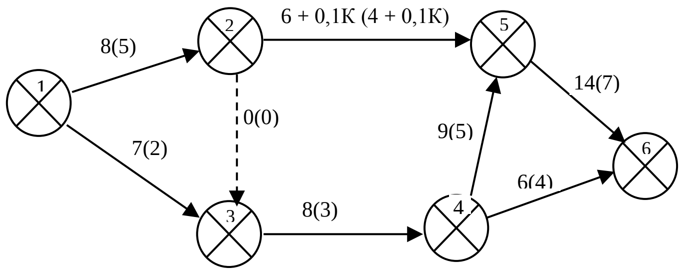


Рис. 3.25. Сетевой график выполнения плановых работ

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $k_{12} = 0{,}5$; $k_{13} = 0{,}4$; $k_{25} = 0{,}1$; $k_{34} = 0{,}8$; $k_{45} = 0{,}2$; $k_{46} = 0{,}7$; $k_{56} = 0{,}6$.

4. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 40 + 0,3N у. д. е.

Задача 3.28 (2-й вариант). Требуется минимизировать время выполнения комплекса работ за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 3.26).

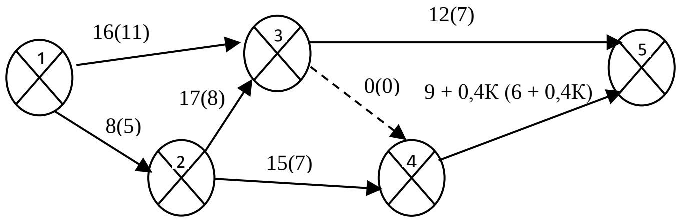


Рис. 3.26. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность работ (t_{ij}) и минимально возможное время их выполнения (d_{ij} – в скобках).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $k_{12} = 0{,}5$; $k_{13} = 0{,}1$; $k_{23} = 0{,}2$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}1$; $k_{45} = 0{,}4$.

4. Для сокращения общего срока выполнения комплекса работ выделены дополнительные средства в размере 120 + 0,5N у. д. е.

На основании приведенной информации задач 3.27, 3.28 необходимо:

1) добавить на сетевом графике фиктивную работу и фиктивное событие, завершающее комплекс работ;

2) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий, согласно п. 1–4 задач 3.19, 3.20;

3) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи, согласно условным обозначениям задач 3.23, 3.24, п. 3;

4) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальный срок выполнения проекта:

$$F_{\min} = \underset{(i,n)\in\vec{e}}{t_{in}^{0}} .$$

При условиях:

1. По использованию дополнительных вложений –

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B .$$

2. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{H} = 0, (1, j) \in \vec{e} .$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e} .$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e} .$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E .$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0}, x_{ij} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Условные обозначения те же, как и для вышеизложенной модели п. 3 задач 3.23 и 3.24.

В известные величины добавляют: B – количество дополнительных вложений, выделяемых для сокращения продолжительности работ;

5) решить экономико-математическую задачу на персональном компьютере;

6) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

7) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

8) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

3.11. Задачи оптимизации сетей по стоимости

Задача 3.29. Необходимо минимизировать стоимость проектных работ при условии выполнения проекта не более чем за 30 + 0,2N дней.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ проекта имеет следующий вид (рис. 3.27).

2. Для каждой работы над дугами приведена нормальная (t_{ij}) (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij}, а в скобках – минимальная продолжительность работ d_{ij} (т. е. срочный режим выполнения работ).

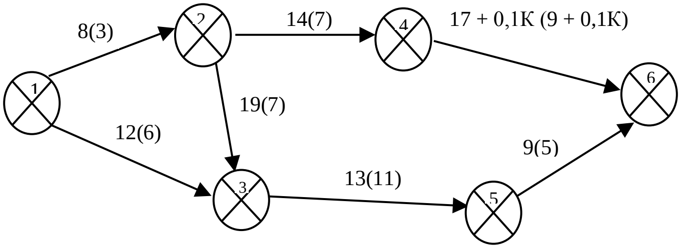


Рис. 3.27. Сетевой график выполнения работ проекта

3. Затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Так, срочному режиму выполнения работ (d_{ij}) соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}, а наибольшей продолжительности работ (D_{ij}) – наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.20).

Т а б л и ц а 3.20. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 6)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	3	6	7	7	11	9 + 0,1К	5
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	20	40	70	50	30	90 + 0,2N	60
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	8	12	19	14	13	17 + 0,1К	9
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	10	15	30	35	25	50 + 0,2N	20
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат							

Задача 3.30. Требуется минимизировать стоимость комплекса работ с целью его завершения не более чем за 25 + 0,3N дней.

Исходная информация.

1. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 3.28).

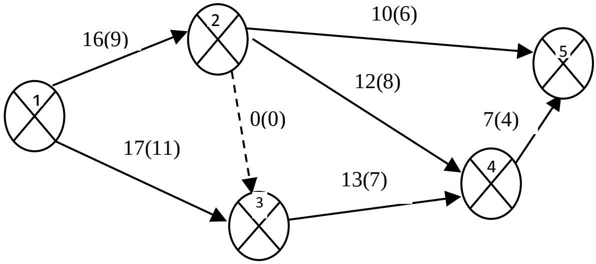


Рис. 3.28. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность выполнения работ в нормальном (t_{ij} или D_{ij}) и срочном режиме (d_{ij}) соответственно.

3. Для выполнения работ в срочном режиме (d_{ij}) требуются наибольшие затраты средств C_{ij}, а для работ в нормальном режиме (t_{ij} или с наибольшей продолжительностью работ D_{ij}) – соответственно наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.21).

Т а б л и ц а 3.21. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа					
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(4, 5)
1	2	3	4	5	6	7
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	9	11	8	7	6	4
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	190	160	95	85	115	145
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	16	17	12	10	13	7

Окончание табл. 3.21

1	2	3	4	5	6	7
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	160	120	35	60	70	110
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат						

На основе приведенной информации задач 3.29, 3.30 необходимо:

1) на сетевом графике определить временные характеристики событий согласно п. 1–4 задач 3.19 и 3.20;

2) вычислить коэффициент дополнительных затрат для каждой работы, который показывает, на сколько увеличится стоимость работы (i, j) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени:

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}};$$

3) рассчитать минимальную и максимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij},$$

$$F_{\max} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} C_{ij};$$

4) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

5) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} - d_{ij})].$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{H} = 0, (1, j) \in \vec{e}\ .$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{in}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e}\ .$$

3. По предельной продолжительности работ –

$$d_{ij} \le t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \le D_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

4. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E.$$

5. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

t_{ij}^{H} – время начала работы ij;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij.

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij;

h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат, показывающий увеличение стоимости работы ij при уменьшении ее продолжительности на единицу времени;

D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij;

6) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

7) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

8) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

9) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

3.12. Сетевое планирование в условиях неопределенности

Задача 3.31. Требуется определить:

1) критическое время выполнения работ проекта;

2) вероятность выполнения работ проекта за 30, 35 и 45 дней;

3) время, за которое проект будет выполнен с вероятностью, не меньшей 0,75; 0,55 и 0,35 (рис. 3.28).

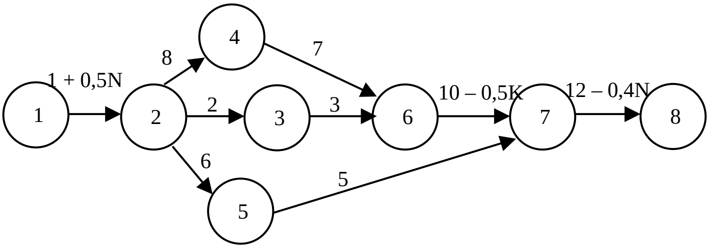


Рис. 3.28. Сетевой график работ проекта

Оптимистическая (минимальная продолжительность) $t_{\min}$ и пессимистическая (максимальная продолжительность) $t_{\max}$ оценки работ приведены в табл. 3.22.

Т а б л и ц а 3.22. **Исходные параметры работ**

№	(i, j)	$t_{\min}$	$t_{\max}$
1	1,2	0,5	2,5
2	2,3	1,5	3,5
3	2,4	6,5	10,5
4	2,5	3,5	8,5
5	3,6	1,5	4,5
6	4,6	5	10
7	5,7	4,5	8,5
8	6,7	8	12
9	7,8	10	18

На основе приведенной информации задачи 3.31 необходимо:

1) найти продолжительность критического пути, рассчитав временные характеристики событий (п. 1–4 задач 3.19 и 3.20);

2) определить временные характеристики работ (п. 5 задач 3.19 и 3.20);

3) вычислить математическое ожидание работы (ij) $\bar{t}_{ij}$ по формуле

$$\bar{t}_{ij} = \frac{3t_{\min} + 2t_{\max}}{5};$$

4) рассчитать дисперсию $D_{ij}(t)$ каждой работы ij сетевого графика, используя оптимистическую и пессимистическую оценки:

$$D_{ij}(t) = \left(\frac{t_{\max} - t_{\min}}{5} \right)^2;$$

5) оценить продолжительность пути по оптимистической $t_{\text{кр.опт}} = \sum_{(i,j)} t_{\min}$ и по пессимистической $t_{\text{кр.пес}} = \sum_{(i,j)} t_{\max}$ оценкам;

6) рассчитать дисперсию критического пути $D(t_{\text{кр}})$, которая равна сумме дисперсий работ $D_{ij}(t)$, лежащих на критическом пути:

$$D(t_{\text{кр}}) = \sum_{(i,j)_{\text{кр}}} D_{ij}(t);$$

7) определить среднее квадратическое отклонение критического пути:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sqrt{D(t_{\text{кр}})};$$

8) вычислить вероятность выполнения работ проекта за 30, 35 и 45 дней, используя следующую формулу:

$$P = \Phi(u) + 0,5,$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, значения которой взять из статистической таблицы (прил. G), при этом $u = \frac{(t_{\text{пл}} - t_{\text{кр}})}{\sigma_{\text{кр}}}$,

где $t_{\text{пл}}$ – планируемое время выполнения работ проекта;

$t_{\text{кр}}$ – продолжительность критического пути;

$\sigma_{\text{кр}}$ – среднее квадратическое отклонение критического пути;

9) определить время, за которое работы проекта будут выполнены с вероятностью, не меньшей 0,75; 0,55 и 0,35. Зная, что $\Phi(u) = P - 0,5$, по статистической таблице (приложение) найти соответствующее значение u и рассчитать планируемое время выполнения работ проекта по формуле

$$t_{\text{пл}} = t_{\text{кр}} + \sigma_{\text{кр}} \cdot u;$$

10) проанализировать характеристики сетевого графика.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «граф».
2. Что такое путь, критический путь?

3. Как определяется длина пути?

4. Чем отличается орграф от неориентированного графа?

5. Как формируются матрицы смежности дуг и ребер?

6. Как построить матрицы инциденций для дуг и ребер?

7. Каким образом можно сформировать матрицу смежности вершин?

8. Какими способами можно упорядочить граф?

9. Дайте определение понятия «минимальное покрывающее дерево».

10. Приведите алгоритм построения минимального покрывающего дерева.

11. Какими методами можно обосновать кратчайшую цепь?

12. Приведите алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшей цепи.

13. Приведите алгоритм Флойда для решения задач о кратчайших цепях.

14. Дайте определение понятия «треугольный оператор Флойда».

15. Как построить матрицу расстояний и матрицу последовательности вершин графа?

16. Приведите структурные модели прямой и двойственной задач линейного программирования для обоснования кратчайшего пути между исходной и завершающей вершинами цепи.

17. Как формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) графа?

18. Приведите алгоритм Форда для решения задач о максимальном потоке в сети.

19. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования максимального потока в сети.

20. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования потока минимальной стоимости в сети.

21. Дайте определение понятий «сетевой график», «событие», «работа».

22. Как рассчитать ранний, поздний сроки свершения и резерв времени события?

23. Как рассчитать ранние сроки начала и окончания работ?

24. Как рассчитать поздние сроки начала и окончания работ?

25. Приведите формулы расчета полного, свободного и независимого резервов времени работ.

26. Как строится график Ганта?

27. Приведите алгоритм распределения ресурсов на сетях.

28. Каким образом оптимизируется порядок выполнения работ при распределении ресурсов на сетях?

29. Приведите структурные экономико-математические модели оптимизации проекта во времени.

30. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации сети по стоимости.

31. Как определяется и что показывает коэффициент дополнительных затрат в задачах оптимизации сетей по стоимости?

32. Как определить оптимальные затраты средств в работы при оптимизации сетей по стоимости?

33. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи о назначениях.

34. Приведите алгоритм венгерского метода решения задачи о назначениях.

35. Охарактеризуйте сущность задачи коммивояжера.

36. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи коммивояжера.

4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

С помощью задач оптимального упорядочения обосновываются расписания, под которыми понимают такие предписания, по которым в каждый момент времени можно установить, простаивает обслуживающее устройство или нет. Если оно не простаивает, то можно указать, какое из требований оно обслуживает. Таким образом, *расписание* – это последовательность выбора требований на обслуживание, которое обозначается $\pi(n) = (i_1, i_2, ..., i_n)$, где i_2 – элемент из множества N, занимающий в последовательности $\pi(n)$ второе место.

В общем случае для задачи упорядочения должны быть известны:

1) подлежащие выполнению операции;
2) количество и типы обслуживающих устройств;
3) трудоемкость или время и порядок выполнения операций;
4) критерий эффективности расписания.

Типичной задачей теории расписаний является проблема составления расписания работы технологической линии, состоящей из m-станков $(i = 1, \overline{m})$, на которых нужно обработать партии из n-деталей $(j = 1, \overline{n})$. Критерием эффективности расписания станет минимальное время обработки всех n-деталей, каждая из которых должна последовательно пройти обработку на каждом станке. Исходными данными задачи служит продолжительность обработки на i-м станке j-й детали t_{ij}.

Такая задача получила название задачи Джонсона.

4.1. Системы с одним обслуживающим устройством

Задача 4.1. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований (полуфабрикатов, проходящих обработку на одном оборудовании в перерабатывающем цеху организации) одним обслуживающим устройством, минимизирующее суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди.

Исходная информация представлена в табл. 4.1–4.3.

Таблица 4.1. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	6	4 + K	13	11	6	9	5	3 + N
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	16	9 + N	20	2	8	1	22	6 + K

Таблица 4.2. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	6	4	3 + K	20	8	16	7	17	5
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	15	10	1 + N	7	3	8	2	5	9

Таблица 4.3. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	22	12	5	7	9	15	4	2 + N	11
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	8	4	9	16	10	4	3	2 + K	7

На основе приведенной информации задачи 4.1 необходимо:

1) определить время начала обслуживания требований вида i для расписания, изложенного в табл. 4.1–4.3;

2) рассчитать штраф, связанный с ожиданием требований вида i в очереди для первоначального расписания: $\Phi_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{t}_i$;

3) вычислить отношение $\frac{t_i}{\alpha_i}$ для каждого требования вида i;

4) определить оптимальный порядок обслуживания требований вида i, такой, что $\frac{t_i}{\alpha_i} \le \frac{t_{i+1}}{\alpha_{i+1}}$;

5) определить время начала обслуживания требований вида i, согласно п. 1 $\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i$, где $\underline{t}_{i+1}, t_i$ – соответственно время начала обслуживания требования вида $i+1$ и i;

6) рассчитать штраф, связанный с ожиданием требований в очереди: $\Phi_{1\min} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{t}_i$;

7) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задача 4.2. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством (работ, выполняемых одной строительной бригадой сельскохозяйственной организации), минимизирующее величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе до момента завершения обслуживания последнего.

Исходная информация представлена в табл. 4.4–4.6.

Т а б л и ц а 4.4. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	6	4	5	8 + N	9	3	2 + K	12

1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания	4	2	3	5 + K	7	6	2 + N	8

Таблица 4.5. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	22	2 + N	16	8	14	9	7	24	6
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания	6	3 + K	15	10	5	17	15	12	8

Таблица 4.6. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	4	6	8	12	3	9	20	1 + N	19
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания	8	14	5	7	4	16	2	3 + K	11

На основе приведенной информации задачи 4.2 необходимо:

1) определить время окончания обслуживания требований вида i ($\bar{t}_i$) : $\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$,

где $\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания требования вида i ;

$\underline{t}_i$ – время начала обслуживания требования вида i ;

t_i – продолжительность обслуживания требования вида i ;

2) определить время окончания обслуживания последнего требования (Т) : $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$;

3) определить время ожидания требований вида i в системе после их обслуживания : $T - \bar{t}_i$;

4) определить величину средств, связываемых всеми требованиями вида i после завершения их обслуживания : $\Phi_2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \overline{t_i})$;

5) вычислить отношение $\frac{t_i}{\gamma_i}$ для каждого требования вида i;

6) определить оптимальный порядок обслуживания требований вида i , такой, что $\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}}$;

7) определить время окончания обслуживания требований вида i , согласно п. 1;

8) определить время окончания обслуживания последнего требования, при оптимальном расписании, согласно п. 2;

9) определить время ожидания требований вида i в системе после их обслуживания, при оптимальном расписании, согласно п. 3;

10) определить величину средств, связываемых всеми требованиями вида i после завершения их обслуживания при оптимальном расписании : $\Phi_{2\min} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \overline{t_i})$;

11) рассчитать эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задача 4.3. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством (сельскохозяйственных операций, выполняемых одной сельхозмашиной), минимизирующее величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований.

Исходная информация представлена в табл. 4.7–4.9.

Т а б л и ц а 4.7. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	2	8	4	6 + К	3	7	1	9 + К
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	5	7	3	8	6	1	4	2
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	3	12	7	9 + N	4	15	5	11 + N

Т а б л и ц а 4.8. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	5	1	4	3 + К	11	9	2	6	10
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	2	10	5	8	1	4	7	3	6
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	10	2	16	5 + N	23	12	8	9	14

Т а б л и ц а 4.9. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	15	9	4	24	3	10	16	8	12 + N
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	4	7	2	9	1	5	8	3	6
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	18	15	7	26	9	13	23	10	15 + К

На основе приведенной информации задачи 4.3 необходимо:

1) определить время окончания обслуживания требований вида i при неоптимальном расписании: $\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$;

2) рассчитать z_i – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком: $z_i = \max\{0; \bar{t}_i - D_i\}$;

3) вычислить величины $\delta_i z_i$ для каждого требования вида i при неоптимальном расписании;

4) вычислить величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований: $\Phi_3 = \max\limits_{i \in N} \delta_i z_i$;

5) определить время окончания обслуживания последнего требования: $T = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$;

6) рассчитать z_i' – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком: $z_i' = \max\{0, T - D_i\}$;

7) вычислить величины $\delta_i z_i'$ для каждого требования вида i;

8) найти требование, для которого значение $\delta_i z_i'$ будет минимальным. Выбранное требование будет обслуживаться последним. Исключить его из рассмотрения и расчет, начав с п. 5, продолжать до тех пор, пока не установите оптимальный порядок обслуживания требований;

9) определить время окончания обслуживания требований вида i при оптимальном расписании: $\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$;

10) рассчитать z_i – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком при оптимальном расписании (п. 2);

11) вычислить величины $\delta_i z_i$ для каждого требования вида i при оптимальном расписании;

12) вычислить величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований: $\Phi_{3\min} = \max\limits_{i \in N} \delta_i z_i$;

13) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

4.2. Последовательное обслуживание

Задача 4.4. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований (колбасных полуфабрикатов) двумя устройствами (обжарочной и пароварочной камерами), минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств. Времена обслуживания требований представлены в табл. 4.10–4.12.

Т а б л и ц а 4.10. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	$Т_1$	$Т_2$	$Т_3$	$Т_4$	$Т_5$	$Т_6$	$Т_7$	$Т_8$
Устройство 1	40	80	32 + К	60	20	30	55 + N	25
Устройство 2	22	60	10 + К	42	30	45	12 + N	50

Т а б л и ц а 4.11. **Исходная информация второй задачи**

Устройства	Требования								
	$Т_1$	$Т_2$	$Т_3$	$Т_4$	$Т_5$	$Т_6$	$Т_7$	$Т_8$	$Т_9$
Устройство 1	65	80	45	10 + К	35	20	55	42 + N	26
Устройство 2	30	20	35	40 – К	80	65	15	72 – N	46

Т а б л и ц а 4.12. **Исходная информация третьей задачи**

Устройства	Требования								
	$Т_1$	$Т_2$	$Т_3$	$Т_4$	$Т_5$	$Т_6$	$Т_7$	$Т_8$	$Т_9$
Устройство 1	30	40	20	52	45	80	24	56	25 + N
Устройство 2	64	80	42	72	38	25	39	60	75 – N

На основе приведенной информации задачи 4.4 необходимо:

1) определить простои второго устройства, считая, что обслуживание требований вида i происходит по неоптимальному расписанию (табл. 4.10–4.12);

2) определить суммарный простой второго устройства;

3) изобразить неоптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

4) записать условие задачи в виде матрицы $\|t_{ij}\|$, где t_{ij} – продолжительность обслуживания требования вида i обслуживающим устройством вида j;

5) оптимизировать расписание, применив алгоритм Джонсона, т. е. в матрице $\|t_{ij}\|$ найти минимальный элемент. Если он стоит в первой строке, соответствующей первому обслуживающему устройству, то данное требование обслуживается первым, если во второй строке, то последним;

6) из рассмотрения исключить выбранное требование и работу продолжить согласно п. 5, пока не определите оптимальный порядок обслуживания требований.

Примечание 1. Если в одной строке имеется несколько одинаковых минимальных величин, то для обслуживания сначала выбирают требования с меньшим номером.

Примечание 2. Если и в первой, и во второй строках есть несколько одинаковых минимальных величин, то для обслуживания сначала выбирают требование из первой строки;

7) определить простои второго устройства, считая, что обслуживание требований вида i происходит по оптимальному расписанию;

8) определить суммарный простой второго устройства;

9) изобразить оптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

10) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований двумя устройствами.

Задача 4.5. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований тремя устройствами (деталей, обрабатываемых на трех станках), минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств.

Время обслуживания требований представлено в табл. 4.13–4.15.

Таблица 4.13. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Устройство 1	24	18 + K	15	23	14 + N	22	15	22
Устройство 2	10	14 + K	7	13	12 + N	11	9	13
Устройство 3	32	28 + K	21	24	16 + N	30	18	17

Таблица 4.14. **Исходная информация второй задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	22 + K	12	35	5	24	30	7	23	20
Устройство 2	9 + N	44	18	3	6	21	5	10	10
Устройство 3	15 + K	26	23	16	25	24	19	14	13

Таблица 4.15. **Исходная информация третьей задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	9	14	7	5 + N	7	15	9	8	14
Устройство 2	5	12	4	3 + K	6	10	8	7	4
Устройство 3	6	17	13	10 + N	9	11	9	12	6

На основе приведенной информации задачи 4.5 необходимо:

1) определить простои второго и третьего устройств, считая, что обслуживание требований вида i происходит по неоптимальному расписанию (табл. 4.13–4.15);

2) определить суммарный простой второго и третьего устройств;

3) изобразить неоптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

4) проверить выполнение условия:

$$\min t_{i1} \geq \max t_{i2} \text{ или } \min t_{i3} \geq \max t_{i2};$$

5) найти суммы $t_{i1} + t_{i2}$ и $t_{i2} + t_{i3}$;

6) записать условие задачи в виде матрицы $\|t_{ij}\|$;

7) осуществить оптимальное упорядочение требований в соответствии с алгоритмом Джонсона (согласно п. 5 и 6, задачи 4.4), где в качестве времени обслуживания требований принимаются соответствующие суммы;

8) определить простои второго и третьего устройств, считая, что обслуживание требований вида i происходит по оптимальному расписанию;

9) определить суммарный простой второго и третьего устройств;

10) изобразить оптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

11) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «расписание».

2. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарного штрафа, связанного с ожиданием всех требований в очереди.

3. Перечислите правила решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарной величины средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.

4. Дайте определение понятия «директивный срок обслуживания требования».

5. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации максимального штрафа за задержку в обслуживании требования.

6. Каким способом можно геометрически изобразить оптимальное расписание обслуживания требований?

7. Сформулируйте общую задачу Джонсона.

8. Как определяются простои второго обслуживающего устройства?

9. Как изображается порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами с помощью графика Ганта?

10. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения для системы с двумя обслуживающими устройствами.

11. Как определить простои третьего обслуживающего устройства?

12. Приведите алгоритм обоснования оптимального расписания для системы с тремя обслуживающими устройствами.

13. Каким образом построить график Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами?

5. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания представляет собой научное направление, изучающее системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение определенных услуг и происходит удовлетворение этих запросов.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью определения наилучших вариантов управления данными системами.

Эти системы получили название *систем массового обслуживания*, а процессы, возникающие при этом, *называются процессами обслуживания*.

Элементами системы массового обслуживания являются входящий поток заявок, очередь, поток необслуженных (покинувших очередь) заявок, каналы обслуживания, выходящий поток обслуженных заявок.

Обслуживающие устройства системы массового обслуживания (пункты, станции, приборы, устройства, кассовые аппараты, продавцы, телефонные линии связи и т. д.) называются *каналами обслуживания*.

Заявка (*требование*) – это запрос на выполнение каких-либо услуг или удовлетворение определенной потребности.

5.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Задача 5.1. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию торговой фирмы поступает простейший поток заказов покупателей с интенсивностью $\lambda = 2,5 + 0,1\text{K}$ звонков-заказов в минуту. Длительность оформления заказа в среднем равна $\overline{t}_{\text{об}} = 0,9 - 0,1\text{K}$. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток оформления заказов являются простейшими.

Задача 5.2. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0,8 + 0,2\text{K}$ звонка в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 1,5 + 0,1\text{N}$ мин. Вызов-звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Используя приведенную информацию задач 5.1 и 5.2, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{\text{об}}}$;

2) вычислить q – относительную пропускную способность: $q = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$;

3) найти A – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot q$;

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа: $p_{\text{отк}} = 1 - q$;

5) вычислить $A_{\text{ном}}$ – номинальную пропускную способность системы: $A_{\text{ном}} = \dfrac{1}{\overline{t}_{\text{об}}}$;

6) найти $\overline{t}_{\text{пр}}$ – среднее время простоя канала: $\overline{t}_{\text{пр}} = \dfrac{1}{\lambda}$;

7) определить p_0 – вероятность того, что канал свободен: $p_0 = \dfrac{\overline{t}_{\text{пр}}}{\overline{t}_{\text{об}} + \overline{t}_{\text{пр}}}$;

8) вычислить p_1 – вероятность того, что канал занят:

а) $p_1 = 1 - p_0$;

б) $p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$;

9) проанализировать работу телефонной линии торговой фирмы, филиала банка (сравнить фактическую пропускную способность системы массового обслуживания с номинальной пропускной способностью; сравнить вероятности того, что телефонная линия занята и свободна; сравнить среднее время обслуживания и среднее время простоя канала).

5.2. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием

Задача 5.3. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В фирменном магазине перерабатывающего предприятия имеется один кассовый аппарат. Магазин посещают покупатели, поток которых имеет интенсивность $\lambda = 0,5 + 0,2\mathrm{K}$ человека в минуту. Среднее время обслуживания одного покупателя равно 5 – 0,1N мин ($\overline{t_{\text{об}}}$). Наибольшая очередь покупателей к кассе – 6 человек (m = 6). Если в очереди стоят шесть человек, то очередной покупатель в очередь на обслуживание не становится, а идет за покупками в магазин самообслуживания.

Задача 5.4. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,95 - 0,1K$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,2 + 0,1N часа $(\overline{t_{\text{об}}})$. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем $(m = 3)$. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Используя приведенную информацию задач 5.3 и 5.4, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{об}}}$;

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку (трафик) на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) вычислить p_0, p_k – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \text{ если } \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \text{ если } \rho = 1; \end{cases}$$

б) $p_k = p^k \cdot p_0$; $k = 1,..., m+1$,

где k – состояние системы;

m – максимальное число мест в очереди;

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании требования: $p_{\text{отк}} = \rho^{m+1} \cdot p_0$;

5) рассчитать q – относительную пропускную способность системы обслуживания: $q = 1 - p_{\text{отк}}$;

6) вычислить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda \cdot q;$$

7) определить $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, \text{ если } \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, \text{ если } \rho = 1; \end{cases}$$

8) рассчитать $\bar{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе: $\bar{T}_{\text{сис}} = \dfrac{\bar{N}_{\text{сис}}}{\lambda(1-p_{m+1})}$;

9) вычислить $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания заяв-

ки в очереди на обслуживание: $\overline{T}_{оч} = \overline{T}_{сис} - \dfrac{1}{\mu}$;

10) определить $\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди): $\overline{N}_{оч} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{оч}$;

11) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу кассового аппарата фирменного магазина, поста диагностики автомобилей.

5.3. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения

Задача 5.5. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью $\lambda = 1,4 + 0,1\text{N}$ заявки в день. Аудиторские проверки (обслуживание заявок) выполняет один независимый бухгалтер. Время обслуживания заявки в среднем равно 2,5 + 0,1K дн. Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована.

Задача 5.6. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,9 + 0,05\text{N}$ (автомобиля в час). Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,15 + 0,1K часа $(\overline{t}_{об})$. Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Используя приведенную информацию задач 5.5 и 5.6, необходимо:

1) рассчитать μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{об}}$;

2) определить ρ – относительную нагрузку (трафик) на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) вычислить p_0, p_n – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - \rho;$$

$$p_n = (1 - p) \cdot \rho^n; \; n = 1, \ldots, m+1;$$

4) найти $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди): $\overline{N}_{\text{сис}} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$;

5) рассчитать $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\text{а) } \overline{T}_{\text{сис}} = \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{\lambda};$$

$$\text{б) } \overline{T}_{\text{сис}} = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)};$$

6) найти $\overline{N}_{\text{оч}}$ – число требований в очереди на обслуживание:

$$\text{а) } \overline{N}_{\text{оч}} = \overline{N}_{\text{сис}} - \frac{\lambda}{\mu};$$

$$\text{б) } \overline{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)};$$

7) определить $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания требования в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$\text{а) } \overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$\text{б) } \overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

8) рассчитать A – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot q$, где q – относительная пропускная способность системы, $q = 1$, так как каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена;

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу аудиторской фирмы, пункта разгрузки сырья перерабатывающего предприятия.

5.4. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Задача 5.7. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая фирма планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этих целей выделено два телефонных аппарата. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составит: 2 + 0,1К заказа в минуту (λ). Длительность оформления заказа в среднем равна $\overline{t}_{\text{об}} = 0,8 + 0,1\text{К}$ мин. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефоны заняты, получает отказ в обслуживании. Поток заказов и поток их оформления являются простейшими.

Задача 5.8. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В компьютерный класс кафедры с выделенными для этих целей тремя (n = 3) персональными компьютерами поступают заказы от студентов на вычислительные работы. Поток задач, поступающих в компьютерный класс, имеет интенсивность $\lambda = 0,8 + 0,2\text{К}$ задачи в час. Средняя продолжительность обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 1,7 + 0,1\text{N}$ часа. Если работают все три персональных компьютера, то вновь поступающий заказ не принимается и студент вынужден обратиться в компьютерный класс другой кафедры. Поток заявок на решение задач и потом обслуживания этих заявок являются простейшими.

Используя приведенную информацию задач 5.7 и 5.8, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{\text{об}}}$;

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы, используя формулы Эрланга:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}; k = 0,1,...,n;$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0; k = 1,...,n;$$

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_n;$$

5) вычислить q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

6) определить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q;$$

7) найти $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \rho(1 - p_{\text{отк}}) = \rho q;$$

8) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу системы массового обслуживания;

9) определить оптимальное число телефонных аппаратов, используемых для приема заказов клиентов, и оптимальное количество персональных компьютеров в классе, используемых для решения задач, в целях сокращения числа необслуженных заявок, поступающих в систему, в 10 раз. Для этого используем формулу $p_{\text{отк}}$ – определения вероятности отказа в обслуживании заявки: $p_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$.

Расчеты заносим в табл. 5.1.

Таблица 5.1. **Некоторые характеристики системы**

n – количество каналов обслуживания	1	2	…	n
p_0 – вероятность свободного состояния системы				
$p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки				

5.5. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием

Задача 5.9. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В магазине самообслуживания установлены 3 кассовых аппарата (n). Поток покупателей имеет интенсивность $\lambda = 0,8 + 0,1K$ человека в минуту. Среднее время обслуживания одного покупателя равно 3– – 0,1К мин ($\overline{t}_{\text{об}}$). Наибольшая очередь покупателей к кассе – 8 человек (m). Если в очереди стоят восемь человек, то очередной покупатель в очередь на обслуживание не становится, а идет за покупками в соседний коммерческий магазин.

Задача 5.10. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая база по заготовке овощей и картофеля оборудована двумя разгрузочно-сортировочными площадками (n). Прибывающие на разгрузку автомобили могут ожидать своей очереди на площадке, вмещающей не более 6 автомобилей (m). Поток автомобилей имеет интенсивность прибытия $\lambda = 4 + 0{,}1\text{К}$ автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,5 + 0,1К часа ($\bar{t}_{\text{об}}$). Если прибывший с грузом автомобиль застает все места для ожидания занятыми, то он отправляется на другую торговую базу.

Используя приведенную информацию задач 5.9 и 5.10, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{об}}}$;

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \dfrac{\dfrac{\rho}{n} - \left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \dfrac{\rho}{n}}};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; k = 1, \ldots, n;$$

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0;$$

5) вычислить q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

6) определить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q;$$

7) найти $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot q;$$

8) рассчитать $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{\text{оч}} = p_0 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

9) вычислить $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \overline{k};$$

10) найти $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{A};$$

11) определить $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}};$$

12) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу систем.

5.6. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения

Задача 5.11. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Ремонтная мастерская сельскохозяйственной организации с тремя рабочими каналами (*n*) выполняет ремонт сельхозмашин. Поток неисправных сельхозмашин, прибывающих в мастерскую, пуассоновский и имеет интенсивность $\lambda = 3 - 0{,}1\text{N}$ сельхозмашины в сутки. Среднее время ремонта одной сельхозмашины распределено по показательному закону и равно $\overline{t}_{\text{об}} = 1{,}5 - 0{,}1\text{К}$ сут. Так как в сельскохозяйственной организации имеется одна ремонтная мастерская, то очередь растет неограниченно.

Задача 5.12. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На элеватор поступают машины с зерном из сельскохозяйственных организаций района. Элеватор оборудован двумя разгрузочными площадками (n). Поток поступающих автомобилей имеет интенсивность $\lambda = 3 + 0{,}1\mathrm{N}$ автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,8 – 0,1К часа $\left(\overline{t_{\text{об}}}\right)$. Так как в районе имеется один элеватор, то очередь растет неограниченно.

Используя приведенную информацию задач 5.11 и 5.12, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\overline{t_{\text{об}}}}$;

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти p_0, $p_к$ – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{n!\left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)}};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; k = 1, ..., n;$$

4) при $m \to \infty$, $p_{\text{отк}} = 0; q = 1; A = \lambda; \overline{k} = \rho;$

5) рассчитать $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \left(\frac{n\rho}{(n-\rho)^2}\right) p_n = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2};$$

6) вычислить $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \rho;$$

7) найти $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

8) определить $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}};$$

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу ремонтной мастерской сельскохозяйственной организации, элеватора.

5.7. Замкнутая система массового обслуживания

Задача 5.13. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На кафедре для обслуживания двенадцати персональных компьютеров выделено два инженера с одинаковой производительностью. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0,3 + 0,05\text{К}$. Время обслуживания компьютера подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного компьютера одним инженером составляет: $\overline{t}_{\text{об}} = 1,20 - 0,02\text{N}$.

Рассматриваются два варианта организации обслуживания персональных компьютеров:

а) создать один компьютерный класс, тогда при отказе компьютера его будет обслуживать один из свободных инженеров $(n = 2; N = 12)$;

б) создать два компьютерных класса по 6 компьютеров в каждом $(n = 1; N = 6)$.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{\text{об}}}$;

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для двух вариантов ее организации:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k p_0}{k!(N-k)!}, 1 \le k < n, \\[2ex] \dfrac{N!\rho^k p_0}{n^{k-n} n!(N-k)!}, n \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

Так как $\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$, то найти p_0;

4) определить $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание (для двух вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \sum_{k=n}^{N} (k-n)\, p_k;$$

5) найти $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди) для двух вариантов организации системы:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} k p_k;$$

6) рассчитать $\overline{N}_{\text{пр}}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы (для двух вариантов): $\overline{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, p_k;$

7) вычислить a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди (для двух вариантов): $a_1 = \dfrac{\overline{N}_{\text{оч}}}{N};$

8) найти a_2 – коэффициент использования компьютеров (для двух вариантов): $a_2 = 1 - \dfrac{\overline{N}_{\text{сис}}}{N};$

9) определить a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров (для двух вариантов): $a_3 = \dfrac{\overline{N}_{\text{пр}}}{N};$

10) рассчитать $\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера (для двух вариантов): $\overline{T}_{\text{ож}} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1-a_2}{a_2}\right) - \dfrac{1}{\mu};$

11) расчеты занести в табл. 5.2, проанализировать ее и найти оптимальное решение задачи.

Т а б л и ц а 5.2. **Некоторые вероятностные характеристики системы**

Вероятностные характеристики	Варианты организации системы	
	1	2
a_1 – коэффициент простоя компьютера в очереди		
a_2 – коэффициент использования компьютеров		
a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров		
$\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера		

Вопросы для самопроверки

1. Какие вопросы можно решить с помощью теории массового обслуживания?
2. Дайте определение понятия «система массового обслуживания».
3. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с отказами.
4. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с ожиданием.
5. Что такое однофазная система массового обслуживания?
6. Что такое многофазная система массового обслуживания?
7. Что такое замкнутая система массового обслуживания?
8. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с отказами.
9. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием.
10. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди.
11. Назовите критерии оптимальности одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания.
12. Перечислите характеристики замкнутой системы массового обслуживания.

6. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты на функционирование системы были бы минимальными.

Под *организацией поставок* понимается определение объемов поставок и периодичность заказов.

Основными причинами создания производственных запасов служат необходимость обеспечения бесперебойного снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика к потребителю партиями, а также несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Под *запасами* понимают все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления.

6.1. Модель оптимального размера партии поставки (запуска продукции в производство) (рис. 6.1, 6.2)

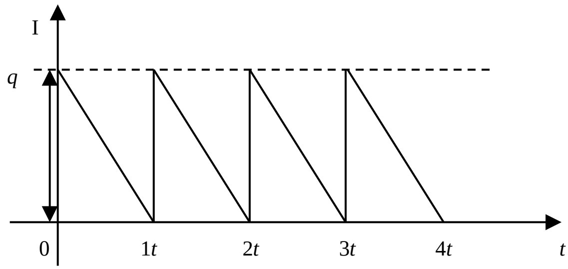


Рис. 6.1. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона

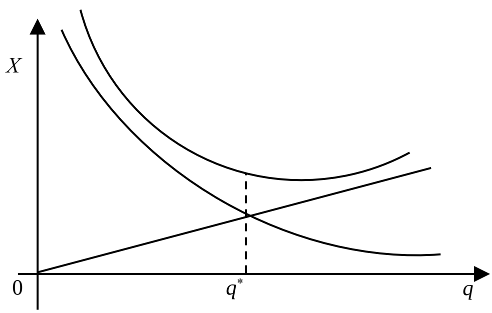


Рис. 6.2. Зависимость издержек содержания запасов, стоимости заказа от размера партии поставок

Задача 6.1. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны $K = 300 + 2\mathrm{N}$ у. д. е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида $\nu = 1500 + 5\mathrm{N}$ т в год, стоимость 1 т $\alpha = 400 + 5\mathrm{K}$ у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют p = 1 % от стоимости хранимой продукции.

Задача 6.2. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами.

Исходная информация.

На овощесушильном заводе на одной линии соки нескольких видов разливаются в банки. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют 600 у. д. е., потребность в соках – 1900 условных банок в неделю, стоимость хранения единицы товара в течение недели – 0,2 у. д. е.

Задача 6.3. Требуется определить оптимальный размер заказываемой партии и расчетные характеристики работы системы в оптимальном режиме.

Исходная информация.

На железнодорожную станцию поставляют вагоны с торфобрикетом в количестве 2500 т. В течение суток потребители успевают забрать 500 т топлива. Накладные расходы по доставке партии груза равны 300 у. д. е. Издержки хранения 1 т торфобрикета за сутки составляют 0,2 у. д. е.

Используя приведенную информацию задач 6.1–6.3, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени: $s = \alpha p$;

2) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии запуска (поставки):

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}};$$

где K – затраты на организацию поставки;

ν – интенсивность спроса;

3) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}};$$

4) рассчитать L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu}.$$

6.2. Модель оптимального размера партии поставки

Задача 6.4. Требуется: 1) определить оптимальные параметры данной системы управления запасами; 2) сравнить с действующей системой поставки партии подшипников в количестве 800 шт.

Исходная информация.

Торговый отдел райагросервисной организации планирует иметь потребность в подшипниках в количестве 56000 шт. Годовые затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 1,1 у. д. е. Издержки на транспортировку одной партии этого товара равны 16 у. д. е.

Задача 6.5. Требуется: 1) определить оптимальную стратегию управления запасами для предпринимателя в предположении, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно нулю; 2) найти затраты пункта общественного питания, связанные с существующей стратегией создания запаса; 3) вычислить разность между текущими месячными затратами предпринимателя и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

Исходная информация.

Частный предприниматель открыл пункт общественного питания на одном из оживленных участков международной автомагистрали. Для удовлетворения месячного спроса в количестве 900 кг он заказывает свинину у производителей сельскохозяйственной продукции. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 5 у. д. е. Стоимость замораживания и хранения одного килограмма свинины обходится предпринимателю в 0,9 у. д. е. в месяц. Фактически ему поставляют продукцию партиями по 180 кг свинины в каждой.

Задача 6.6. Требуется: 1) найти фиксированный размер заказываемой партии аккумуляторов, который минимизирует расходы по завозу и хранению запасных частей; 2) определить оптимальные параметры системы управления запасами; 3) рассчитать, каким образом изменятся суммарные издержки по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами, если отдел снабжения предложил установить размер одной партии поставки аккумуляторов в количестве 16 шт.

Исходная информация.

На склад областной базы агроснаба поступают аккумуляторы для колесных тракторов (пятый класс тягового усилия), годовая потребность в которых составляет 900 шт. Затраты на оформление, т. е. издержки завоза одной партии, этого товара равны 50 у. д. е. Ежегодные затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 60 у. д. е.

Задача 6.7. Требуется: 1) определить оптимальные параметры системы управления запасами; 2) рассчитать коэффициент относительного увеличения затрат, если известна фактическая стратегия доставки партии удобрений в количестве 20 т (имеется 3 специализированные автомашины по перевозке груза грузоподъемностью 5 т каждая).

Исходная информация.

Станция по агрохимическому обслуживанию сельхозорганизаций имеет годовую потребность в калийных удобрениях, равную 1960 т. Годовые затраты по хранению 1 т данного вида удобрений составляют 50 у. д. е. Затраты на подготовительно-заключительные операции, связанные с каждой поставкой и не зависящие от величины поставляемой партии, равняются 10 у. д. е.

Задача 6.8. Требуется определить: 1) период поставки и общие среднеквартальные издержки склада на заказ и хранение молока; 2) экономичный размер заказываемой партии молока, период поставки и ее количество, а также среднеквартальные издержки склада на оформление и хранение молочного продукта в оптимальном режиме; 3) величину абсолютного увеличения фактических издержек по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами и коэффициент относительного увеличения издержек.

Исходная информация.

В рамках межобластного обмена молочными продуктами молочный комбинат одного из регионов поставляет молоко определенной жирности в тетрапакетах торговому предприятию другого региона. Потребность магазина составляет 8000 пакетов молока долгосрочного хранения в квартал. Продукт доставляется на склад в контейнерных упаковках в количестве 100 шт. Затраты на заказ и оформление поставки одной партии молока составляют 6 у. д. е. Среднеквартальные издержки хранения одного пакета молока равны 0,2 у. д. е.

Задача 6.9. Требуется: 1) рассчитать недельные затраты обслуживающей организации, связанные с существующей стратегией создания запаса; 2) определить экономичный объем заказа в предположении, что время от момента его размещения до реальной поставки равно нулю; 3) вычислить экономию средств, исходя из текущих недельных затрат райагротехсервисной организации и тех, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

Исходная информация.

Организация райагротехсервиса заказывает в начале каждой недели электроды для удовлетворения спроса на них (со стороны сельхозтоваропроизводителей) в количестве 500 упаковок. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 25 у. д. е. Затраты по хранению одной упаковки электродов обходятся организации райагротехсервиса в 0,2 у. д. е. в неделю.

Задача 6.10. Требуется определить: 1) период поставки и общие среднемесячные издержки склада, связанные с работой данной системы управления запасами; 2) оптимальный размер заказываемой партии подшипников определенного типа, оптимальный период поставки и среднемесячные затраты склада на доставку и хранение подшипников в оптимальном режиме; 3) величину абсолютного увеличения общих издержек по сравнению с оптимальным режимом и коэффициент относительного увеличения затрат.

Исходная информация.

Потребность моторемонтного завода в подшипниках определенного типа составляет в среднем 30 ящиков в месяц. Товар доставляется на склад в количестве 40 ящиков (исходя из заранее подписанных договоренностей). Затраты на поставку одной партии подшипников составляют 20 у. д. е. Среднемесячные издержки хранения одного ящика подшипников равны 0,3 у. д. е.

Задача 6.11. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

Исходная информация.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц $(\tau_д)$. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют $K = 300 + 2\text{К}$ у. д. е. Потребность в соках составляет $\nu = 1,8 + 0,01\text{N}$ тыс. литров в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня равна $s = 0,1 + 0,01\text{К}$ у. д. е.

Используя приведенную информацию задач 6.4–6.11, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в месяц;

2) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2, задача 6.1);

3) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3, задача 1);

4) рассчитать L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4, задача 6.1);

5) найти $q_д$ – размер партии поставки при действующей системе:

$$q_д = \tau_д \nu;$$

6) определить L_∂ – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L_\partial = \frac{K\nu}{q_0} + \frac{sq_\partial}{2};$$

7) проанализировать результаты решения задачи, сравнить оптимальные параметры системы с действующими.

6.3. Модель оптимального размера поставки партии с определением точки заказа

Задача 6.12. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется $\nu = 10 + 0{,}1N$ тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа $K = 300 - K$ у. д. е., содержание одной заготовки $s = 2 - 0{,}1N$ у. д. е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 30$ дней, или 0,082 года.

Используя приведенную информацию задачи 6.3, необходимо:

1) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2, задача 6.1);

2) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3, задача 6.1);

3) найти r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^*,$$

где $\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]$ – целая часть числа $\dfrac{\Theta}{\tau^*}$;

4) рассчитать I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta\nu;$$

5) определить t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{\nu} - \Theta + k\tau^*, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где I – фактический начальный запас;

6) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4, задача 6.1);

7) проанализировать результаты решения задачи.

6.4. Модель оптимального размера партии поставки с учетом дискретности спроса (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности) рис. 6.3

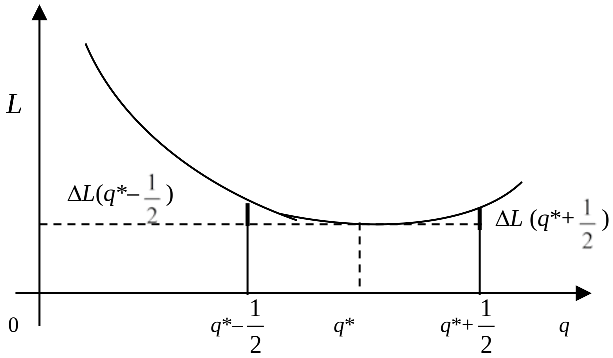


Рис. 6.3. Зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии поставок

Задача 6.13. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Исходная информация.

Завод по выпуску сельскохозяйственной техники поставляет сельскохозяйственным организациям района тракторы. Средняя потребность в них равна $\nu = 4 + 0{,}1\mathrm{N}$ трактора в месяц. Стоимость организации заказа $K = 1000 - 10\text{N}$ у. д. е., издержки содержания одного трактора в месяц $s = 200 - 10\text{K}$ у. д. е.

Задача 6.14. Требуется определить оптимальный объем запускаемой в производство партии конфет.

Исходная информация.

Фабрика по производству сладостей выпускает партиями различные виды конфет. При переходе от выпуска одного вида конфет к другому предприятие несет издержки из-за переналадок, которые составляют 60 у. д. е. Интенсивность потребления, т. е. средний объем продаваемых конфет, составляет 5 т в декаду. Издержки, связанные с хранением 1 т конфет за данный период, составляют 0,6 у. д. е.

Задача 6.15. Требуется определить: 1) издержки содержания единицы продукции за год; 2) оптимальную партию выпуска заготовок; 3) периодичность запуска и среднегодовые издержки работы системы, связанной как с выпуском, так и с содержанием запасов и переналадками.

Исходная информация.

Один из цехов райагропромтехники для восстановления и ремонта валов отбора мощности занимается выпуском различных типов заготовок (партиями) на одном и том же оборудовании. При переходе от производства одного вида заготовок к другому цех несет затраты от переналадок оборудования, которые равны 25 у. д. е. Средняя потребность в заготовках каждого типа составляет 400 шт. в год, себестоимость изготовления единицы производимой продукции – 50 у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют 2 % от стоимости складируемой продукции.

Задача 6.16. Требуется: 1) определить оптимальную партию; 2) найти оптимальный интервал между поставками; 3) рассчитать наименьшие суммарные затраты работы системы.

Исходная информация.

Специализированный завод поставляет организации агросервисного обслуживания станки. Средняя потребность в них – 4 единицы в квартал. Стоимость организации заказа равна 40 у. д. е., издержки содержания составляют 8 у. д. е. за станко-квартал.

Используя приведенную информацию задач 6.13–6.16, необходимо:

1) найти $q^*(q_1^*, q_2^*)$ – оптимальный размер партии поставки (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности):

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \right],$$

где $[a]$ – целая часть числа а;

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*;$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \le q^* \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}};$$

2) определить $L^* (L_1^*, L_2^*)$ – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L_{(q)} = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq}{2};$$

3) рассчитать $\tau^* (\tau_1^*, \tau_2^*)$ – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu};$$

4) проанализировать результаты решения задачи.

6.5. Модель оптимального размера партии поставки поступления заказа (партии товара) (рис. 6.4)

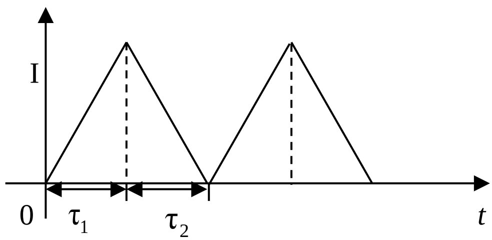


Рис. 6.4. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления партии товара

Задача 6.17. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Консервный завод выпускает партиями 6 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консервов составляет $\nu = 500 + (\mathrm{N} + \mathrm{K})$ тыс. тубов в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов, равны $K = 200 + 2\mathrm{N}$ у. д. е. Стоимость хранения 1 тыс. тубов консервов на складе $s = 30 + \mathrm{K}$ у. д. е. в год. Производительность завода (интенсивность) $\lambda = 2500,0 + 10,0(\mathrm{N} + \mathrm{K})$ тыс. тубов в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 2$ месяца, или 0,164 года.

Задача 6.18. Требуется определить: 1) каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке; 2) как следует организовывать циклы для производства деталей; 3) если бы можно было снизить фиксированные затраты на производство одной партии деталей до 200 у. д. е., какой будет оптимальный размер партии и на сколько снизятся издержки системы.

Исходная информация.

Открытое акционерное общество «Райагротехснаб» выполняет работы по регулированию и ремонту форсунок, расточке и шлифовке коленчатых валов, а также оказывает другие услуги для сельскохозяйственных товаропроизводителей. В ремонтной мастерской общества на некотором станке производятся детали в количестве 1200 единиц в месяц. Они используются для выпуска продукции на другом станке с производительностью 280 единиц в месяц. Оставшиеся детали образуют запас и поступают на специальный склад. Фиксированные издержки по организации производственного цикла, т. е. затраты на производство одной партии изделий, равны 400 у. д. е. По оценкам специалистов планово-учетного отдела стоимость выпуска одной детали равна 1,2 у. д. е., а издержки хранения составляют 20 % средней стоимости запасов в год.

Задача 6.19. Требуется определить оптимальный размер партии производства каждого вида запасных частей и среднемесячные издержки, связанные с переналадками и содержанием продукции, исходя из того, что дефицит запаса на складе цеха не допускается.

Исходная информация.

Специализированный цех предприятия по сервисному обслуживанию машинно-тракторного парка организаций сельского хозяйства занимается производством различных видов запасных частей, выпуск которых налажен партиями на одном и том же оборудовании. Спрос (интенсивность потребления) на каждый их вид заранее известен и составляет 150 упаковок в месяц. Фиксированные издержки переналадки (связаны с определенной перестройкой оборудования при переходе от выпуска одного вида запасных частей к другому) равны

160 у. д. е. Содержание одной упаковки запасных частей на складе обходится агропромтехнике в 75 у. д. е. в месяц. Мощность производства цеха составляет 900 упаковок в месяц.

Используя приведенную информацию задач 6.17–6.19, необходимо:

1) найти q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать τ_1^* – время производства:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda};$$

3) вычислить τ_2^* – время чистого потребления:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}};$$

4) определить оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

5) найти r – точку заказа:

а) $r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^*$, если $\Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$;

б) $r = \Theta(\nu - \lambda) + (\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1) \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu} - 1\right) q^*$, если $\Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$;

6) определить t_k – моменты размещения заказа при $t_0 = 0$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1, 2, \dots;$$

7) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}};$$

8) проанализировать результаты решения задачи.

6.6. Модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований (рис. 6.5)

Задача 6.20. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам сельскохозяйственная организация поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет $\nu = 4000 + 2(\mathrm{N}+\mathrm{K})$ т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукцией $s = 50 + \mathrm{K}$ у. д. е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа $K = 600 - K$ у. д. е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют $d = 100 + 2\mathrm{K}$ у. д. е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц.

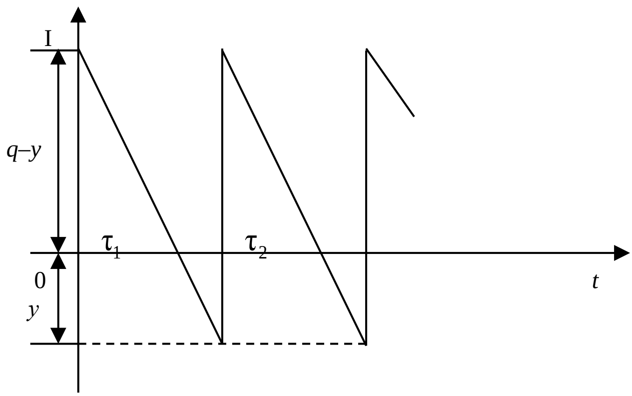


Рис. 6.5. Динамика изменения уровня запаса в модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Задача 6.21. Требуется определить: 1) величину оптимального размера заказа муфт сцепления у специализированного завода; 2) максимальную величину задолженного спроса; 3) максимальную величину наличного запаса; 4) периоды существования запаса и дефицита, а также продолжительность цикла; 5) среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

База снабжения организации по материально-техническому обеспечению АПК занимается продажей различных товаров для сельхозтоваропроизводителей. Спрос на такую продукцию, как муфты сцепления, составляет 2000 единиц и равномерно распределяется в течение года. Закупка товара производится у непосредственного производителя (специализированного завода), а издержки по размещению заказа равны 50 у. д. е. Затраты, связанные с хранением данной запасной части, за год равны 6 у. д. е. Сельскохозяйственные организации, по мере необходимости, делают заявку на поставку муфт сцепления. Если на базе снабжения в момент подачи заявки нет данного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере поступления на склад обслуживающей организации. Между организацией по материально-техническому обеспечению АПК и сельскохозяйственными предприятиями заключен договор о том, что за доставку товаров позже необходимого срока уплачивается штраф. Его величина составляет 2 у. д. е. в год за одну муфту сцепления.

Задача 6.22. Требуется: 1) рассчитать оптимальный размер партии поставки деталей, внести руководству свои предложения; 2) определить оптимальную продолжительность цикла и соответствующий уровень запасов, который находится на складе в начале каждого периода; 3) найти суммарные издержки при оптимальной политике управления запасами.

Исходная информация.

Коммерческая фирма, выступающая в качестве посредника, обязуется продавать райагросервисной организации, занимающейся восстановлением двигателей, коленчатые валы. Согласно заключенному контракту фирма должна ежедневно обеспечивать агросервисную организацию данными запасными частями в количестве 8 шт. В одном из пунктов контракта записано то, что за просроченный день в поставке коленчатого вала коммерческая фирма выплачивает организации штраф в размере 1 у. д. е. Издержки размещения заказа (организационные затраты) обходятся фирме в 200 у. д. е. Специалисты планово-аналитической службы рассчитали, что затраты по хранению одного коленчатого вала составляют 0,1 у. д. е. в день. Руководство фирмы решает закупать коленчатые валы на свой склад партиями по 50 шт. в каждой.

Используя приведенную информацию задач 6.20–6.22, необходимо:

1) вычислить q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

2) рассчитать y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

5) найти τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

6) рассчитать τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

7) определить r – точку заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^*.$$

П р и м е ч а н и е. Точка заказа может принимать отрицательное значение, это означает, что заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$;

8) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

9) проанализировать результаты решения задачи.

6.7. Обобщенная модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований (рис. 6.6)

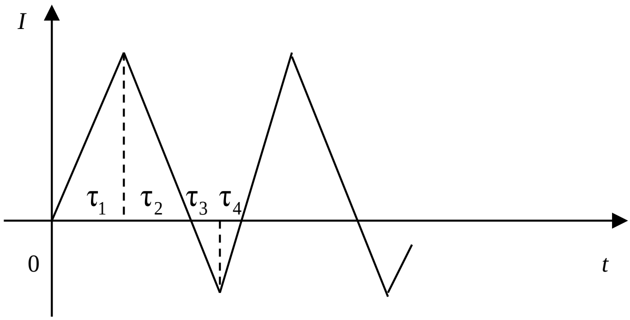


Рис. 6.6. Динамика изменения уровня запаса в обобщенной модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Задача 6.23. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Исходная информация.

Один из цехов перерабатывающего предприятия производит 8 видов полуфабрикатов колбасных изделий. Производительность $\lambda = 50,0 + \mathrm{N}$ ц в сутки. Средний объем потребления каждого вида полуфабрикатов колбасных изделий термического цеха $\nu = 4 + 0,1\mathrm{K}$ ц в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида полуфабрикатов к другому и очистке оборудования составляет $K = 30,0 + 2\mathrm{K}$ у. д. е. Стоимость хранения 1 ц полуфабрикатов в холодильнике $s = 0,06 + 0,01\mathrm{K}$ в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита $d = 0,15 + 0,01\mathrm{N}$ у. д. е. в сутки.

Задача 6.24. Требуется найти оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Одно из предприятий производит для моторемонтного завода системы агроснаба форсунки. Так как завод восстанавливает двигатели для различных марок тракторов, то предприятие выпускает форсунки четырех типов партиями. Производительность линии для производства деталей составляет 2500 единиц за неделю. Средний объем потребления каждого вида форсунок равен 500 шт. за неделю. Стоимость переналадки оборудования при переходе от выпуска одного типа деталей к другому составляет 110 у. д. е., а издержки по хранению одной форсунки – 0,02 у. д. е. в неделю. Неудовлетворенные заявки по поставке форсунок берутся на учет, однако удельные издержки дефицита (снижение объемов продаж, определенная утрата доверия покупателя) равны 0,15 у. д. е. за форсунку в неделю.

Используя приведенную информацию задач 6.23–6.24, необходимо:

1) вычислить q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1+\dfrac{s}{d}}{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = \nu\tau_3^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}{1+\dfrac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = \nu\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}{1+\dfrac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{s}{d}};$$

5) найти τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1 - \frac{\nu}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}};$$

6) найти τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1 - \frac{\nu}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

7) найти τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

8) определить τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* + \tau_4^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{s}{d}}{1 - \frac{\nu}{d}}};$$

9) найти $\tau_{\text{пр}}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{\text{пр}}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda};$$

10) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}}};$$

11) проанализировать результаты решения задачи.

6.8. Многопродуктовая модель размера партии поставки при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов (раздельная оптимизация)

Задача 6.25. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площадь холодильника.

Исходная информация.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (N). Холодильник имеет площадь $f = 500 - 5\mathrm{N}$ м^2. Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 6.1.

Используя приведенную информацию задачи 6.25, необходимо:

1) определить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

Т а б л и ц а 6.1. **Характеристики запасов готовой продукции**

Ассортиментные группы продукции	ν_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у. д. е.	f_i – расход площади холодильника, м^2/т
1	800 + 5N	6	5 + 0,2K	1
2	2000 – 5N	4	20	3
3	1200	3	10	2
4	1800	5	25	3
5	1700	2	15	2
6	1400	7	30	1

2) проверить, существует ли ограничение на складские площади (площадь холодильника) при максимальном уровне запасов:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \le f,$$

где h – нормировочный множитель, позволяющий учесть время поступления запасов товаров, $0 < h \le 1$, чаще всего $\frac{1}{2} \le h \le 1$.

Если $h = 1$, то запасы всех товаров поступают одновременно и занятая ими площадь максимальная, т. е. вводят ограничение по максимальному уровню запасов.

Если $h = \frac{1}{2}$, то запасы поступают в разное время, т. е. вводят ограничение по среднему уровню запаса;

3) определить λ^*, используя следующую формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f,$$

где λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу;

4) найти q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

5) вычислить $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$L(q^0) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i s_i \nu_i} = \sum_{i=1}^{N} s_i q_i^0;$$

6) рассчитать $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i (s_i + 2\lambda f_i \nu_i)} = \sum_{i=1}^{N} (s_i + 2\lambda^* f_i) q_i^*;$$

7) проанализировать результаты решения задачи, определить эффект от расширения складских площадей (площади холодильника):

$$L(q^*) - L(q^0).$$

6.9. Многопродуктовая модель размера партии поставки в случае нескольких ограничений

Задача 6.26. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На оптовую базу поступают товары $N = 6$ видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере $A = 2500 + 2(\mathrm{N} + \mathrm{K})$ у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает $f = 1000 + \mathrm{N} + \mathrm{K}$ м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере $p = 8 - 0{,}1\mathrm{K}$ % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2. **Характеристики запасов товаров**

Товары	ν_i – интенсивность потребления в месяц, шт.	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	800 + 2N	18	22	1,0	1,4
2	1800	15	12	1,3 + 0,1K	1,2
3	1400	10 – N	18	2,0 – 0,1K	1,5
4	1200 + 2K	30	10 – N	1,2	1,0
5	2000	25 – K	20	1,7	0,9
6	1600	20	25 – K	1,5	1,6

Используя приведенную информацию задачи 6.26, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единице времени:

$$s = \alpha \cdot p;$$

2) определить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \le f;$$

4) проверить, существует ли ограничение по оборотным средствам (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i^0 \le A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить λ^*, введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f \quad \text{при} \quad h = \frac{1}{2};$$

6) найти q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

7) проверить, удовлетворяют ли g_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i^* < A \quad \text{при} \quad h = \frac{1}{2};$$

8) если вышеизложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае необходимо определить λ^*, используя формулу

$$h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = A \quad \text{при} \quad h = \frac{1}{2};$$

9) вычислить q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства, используя формулу п. 5, задачи 6.9;

10) проверить, удовлетворяют ли найденные в п. 6, задачи 6.9 q_i^* требованию ограничения на складские площади;

11) рассчитать $L(q^*)-$минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(q^*)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2K_i(s_i+2\lambda f_i \nu_i)}=\sum_{i=1}^{N}(s_i+2\lambda^* f_i)q_i^*;$$

12) проанализировать результаты решения задачи.

6.10. Многопродуктовая модель размера партии поставки с периодическими проверками при полном совмещении заказов

Задача 6.27. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Предприятие заказывает $N=6$ видов товаров с оптовой базы. Складские площади предприятия $f=600+3\text{N}$ м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать $A=4000+5(\text{N}+\text{K})$ у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки заказывания зависят от количества (N) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением $K=10(1+\frac{N}{5})$, т. е. $K=g(1+\gamma N)$, где $g-$фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемых товаров и от величины партий поставок; $\gamma-$доля издержек, связанная с размещением заказа по каждому товару. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3. **Характеристики запасов товаров**

Товары	ν_i – интенсивность потребления в год, шт.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	120 + 2K	10	2,2	1,3
2	140	8	1,6 – 0,1N	2,6
3	150	14	1,3	2,0 – 0,1K
4	200 – 2N	16 – K	1,8	3,5
5	160	12	0,9	1,5 – 0,1K
6	180	15 – N	1,2 – 0,1N	2,5

Используя приведенную информацию задачи 6.27, необходимо:

1) определить τ^0 – оптимальный период возобновления поставок без учета ограничений:

$$\tau^0 = \sqrt{\frac{2g(1+\gamma N)}{\sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i}};$$

2) вычислить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \nu_i \tau^0, (i = \overline{1, N});$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \le f;$$

4) проверить, существует ли ограничение по оборотным средствам:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i^0 \le A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить $\overline{\tau}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на складские помещения:

$$\overline{\tau}^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i};$$

6) вычислить $\overline{\overline{\tau}}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на оборотные средства:

$$\overline{\overline{\tau}}^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i};$$

7) определить τ^* – оптимальный период повторения заказов в случае обоих ограничений:

$$\tau^* = \min\left\{\frac{f}{\sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i}; \frac{A}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i}\right\} \text{ или } \tau^* = \min(\overline{\tau}^*; \overline{\overline{\tau}}^*);$$

8) рассчитать q_i^* – оптимальный поставочный комплект:

$$q_i^* = \nu_i \tau^*, (i = \overline{1, N});$$

9) определить L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2g(1+\gamma N)\sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i ;$$

10) проанализировать результаты решения задачи.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое организация поставок?
2. Что такое потери от дефицита?
3. Выведите самостоятельно формулу Уилсона.
4. Дайте определение точки заказа.
5. Назовите особенности модели с конечной интенсивностью поступления запаса.
6. Почему максимальный уровень внутрипроизводственного запаса меньше величины партии?
7. Каковы виды моделей планирования дефицита?
8. За счет какого вида затрат происходит снижение общих затрат в случае учета неудовлетворенных требований?
9. Что такое задолженный спрос?
10. Может ли точка заказа в моделях с учетом неудовлетворенных требований быть отрицательной величиной?
11. Постройте графики динамики изменения уровня запаса в однопродуктовой модели без дефицита и с дефицитом при учете неудовлетворенных требований.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Графический метод решения задач линейного программирования

При решении задач линейного программирования могут возникать следующие случаи (рис. 1):

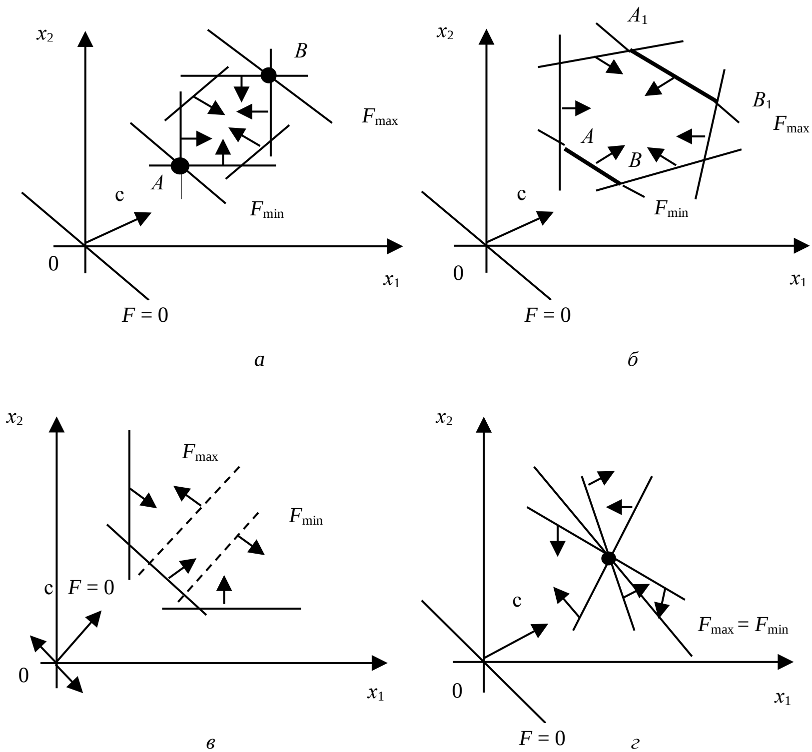
1) оптимальное решение единственно;

2) оптимальных решений бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону области допустимых решений;

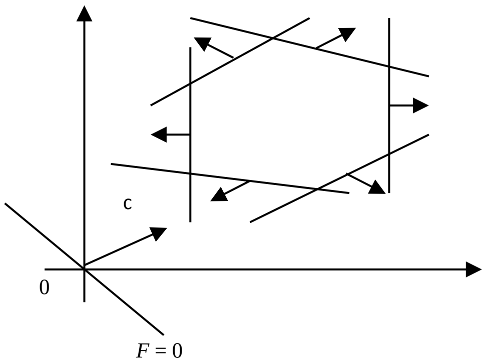
3) целевая функция не ограничена, т. е. сколько бы ни перемещали линию уровня, она не может занять разрешающее положение;

4) область допустимых решений состоит из точки, в которой целевая функция одновременно имеет и максимальное, и минимальное значения;

5) задача решений не имеет, так как система ограничений несовместна**.**



а *б* *в* *г*



д

Рис. 1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

В общем случае линейный характер целевой функции и выпуклость области допустимых значений позволяют сделать следующий вывод: оптимальному решению соответствует по крайней мере одна из вершин многогранника, описывающего область допустимых решений.

П р и л о ж е н и е В

Методика обоснования двойственных оценок

Значения двойственных оценок получают в результате решения двойственной задачи, которая составляется на базе прямой задачи.

Прямая задача имеет следующий вид:

найти x_j при условии –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_0;$$

$$x_j \ge 0;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j.$$

Двойственная задача имеет такой вид:

найти u_i при условии –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \ge c_j, j \in J_0;$$

$$u_i \ge 0;$$

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Индексация:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных).

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли *j*;

u_i – двойственная экономико-математическая оценка ресурса *i*.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент строки *i* столбца *j*;

A_i – наличие ресурсов строки *i*;

c_j – оценочный коэффициент в столбце *j*.

Следовательно, двойственная задача по отношению к прямой строится по следующей схеме:

а) коэффициенты столбцов прямой задачи являются коэффициентами строк двойственной задачи;

б) знаки ограничений прямой задачи противоположны знакам ограничений двойственной задачи;

в) коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами двойственной задачи;

г) если целевая функция одной из задач максимизируется, то целевая функция другой задачи минимизируется.

П р и л о ж е н и е С

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе LPX.88

Дана следующая задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800, \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808, \\ x_1 \le 36, \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Решим ее по программе LPX.88.

F SOLUTION IS OPTIMAL DATE 02-01-2011 TIME 12:17:05
ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДАТА ВРЕМЯ

MAXIMUM ENTERS: BASIS X: 3 VARIABLES: 4
ПЕРЕМЕННЫЕ
PIVOTS: 3 LEAVES: BASIS S: 1 SLACKS: 4
ИТЕРАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
LAST INV: 0 DELTA 0 RETURN 4520 CONSTRAINTS: 4
КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕНИЯ

BASIS *БАЗИС*	X.2	S.2	X.4	X.1
PRIMAL *ПРЯМАЯ*	24	160	32	36
DUAL *ДВОЙСТВЕННАЯ*	41	0	1.4	25.8

F_1 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2011
PRIMAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННЫЕ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	VALUE/UNIT *ВЛИЯНИЕ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	NET RETURN *ИЗМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ*
X.1	BASIS (*БАЗИС*)	36	50	50	0
X.2	BASIS	24	20	20	0
X.3	NONBASIS (*НЕБАЗИС*)	0	0	6	-6
X.4	BASIS	32	70	70	0
S.1	NONBASIS	0	0	41	-41
S.2	BASIS	160	0	0	0
S.3	NONBASIS	0	0	1.4	-1.4
S.4	NONBASIS	0	0	25.8	-25.8

F_2 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2011
DUAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	USAGE *РАСХОД*	SLACK *ОСТАТОК*
Y.1	BINDING (*ДЕФИЦИТ*)	41	60	60	0
Y.2	NONBINDING (*НЕДИФИЦИТ*)	0	1800	1640	160
Y.3	BINDING	1.4	808	808	0
Y.4	BINDING	25.8	36	36	0

F_3 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2011
OBJECTIVE ROW RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:27
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КРИТЕРИЮ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННАЯ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
X.1	BASIS	36	50	24.2	NONE

X.2	BASIS	24	20	14	45.8
X.3	NONBASIS	0	0	NONE	6
X.4	BASIS	32	70	0	100

F_4 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2011
RIGHT HAND SIDE RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:28
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО РЕСУРСАМ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
Y.1	BINDING	41	60	36	64.77612
Y.2	NONBINDING	0	1800	1640	NONE
Y.3	BINDING	1.4	808	-792	1128
Y.4	BINDING	25.8	36	28.55814	60

F_5 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2011
INVERSE COEFFICIENTS *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:29
ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

	RETURN	X.2	S.2	X.4	X.1
X.1	0	0	0	0	1
X.2	0	1	0	0	-1
X.4	0	.3	0	.02	-.06
S.2	0	-33.5	1	-5	21.5

П р и л о ж е н и е D

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе Excel «Поиск решения»

Пусть имеем прямую задачу:

1. $x_1 + x_2 + x_3 \le 60$;

2. $6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800$;

3. $50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808$;

4. $x_1 \le 36$;

$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4$.

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	60
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=6*B3	=26*C3	=2*D3	=25*E4	=СУММ(B5:E5)	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	=12*B3	=15*C3	=25*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+808
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Прибыль, у.д.е.	=50*B3	=20*C3		=70*E4	=B8+C8+E8	=F8
9							

Изначально ячейки, значения которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо установить табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка G8 (прибыль), выполнить команду «Сервис → Поиск решения…». Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. 1).

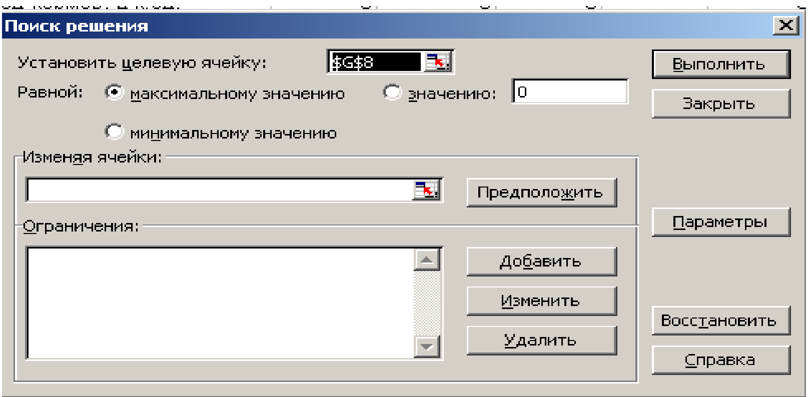


Рис. 1. Диалоговое окно «Поиск решения»

В поле «Изменяя ячейки»: указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. 2), щелкнув по кнопке «Добавить».

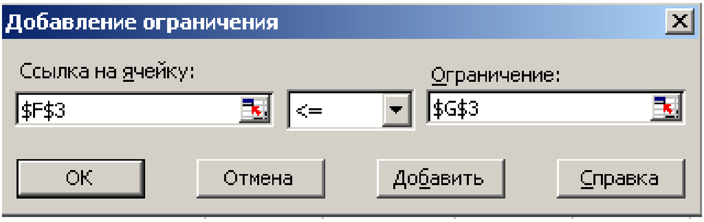


Рис. 2. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения:

Ограничение	Описание
B3:D3≥0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3≤G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5≤G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
E4≥0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7≤G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выход этих кормов с отрасли растениеводства
B3≤36	Площадь посева зерновых культур не может быть больше 40 % от площади пашни (36 га)

После ввода последнего ограничения, щелкнув по кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. 3).

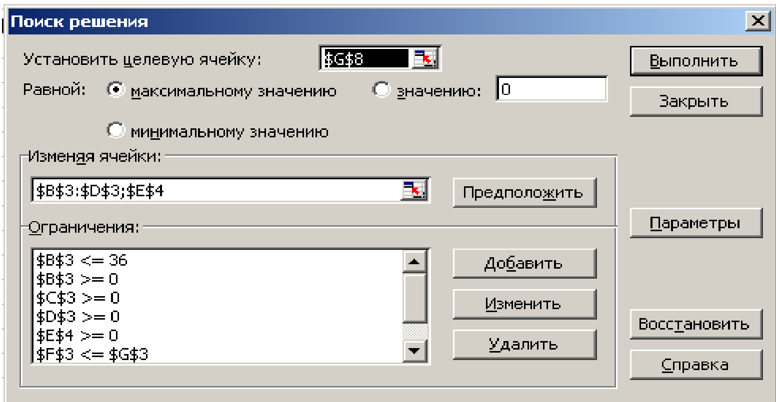


Рис. 3. Диалоговое окно «Поиск решения»

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение задачи (рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	36	24	0		60	60
4	Поголовье, гол.				32		
5	Затраты труда, чел.-дн.	216	624	0	800	1640	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	432	360	0		792	1600
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				1600	1600	
8	Прибыль, у.д.е.	1800	480		2240	4520	4520
9							

Рис. 4. Результаты решения задачи

Из рис. 4 видны значения неизвестных величин задачи:
$x_1 = 36$ $y_1 = 0$
$x_2 = 24$ $y_2 = 160$
$x_3 = 0$ $y_3 = 0$
$x_4 = 32$ $y_4 = 0$
$F_{max} = 4520.$
В диалоговом окне «Результаты поиска решения» (рис. 5) указывают тип отчета.

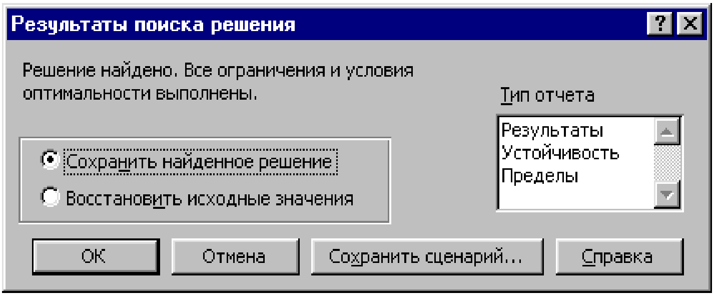


Рис. 5. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Результаты.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

Устойчивость.

Используется для создания отчета, содержащего сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений (рис. 6). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Свете5.xls]Лист1
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B3	Площадь, га Зерновые	36	25,8
C3	Площадь, га Картофель	24	0
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	-6
E4	Поголовье, гол.	32	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F3	Итого	60	41
F5	Затраты труда, чел.-дн. Итого	1640	0
F7	Потребность в кормах, ц к.ед. Итого	1600	1,4

Рис. 6. Отчет по устойчивости

Пределы.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ (рис. 7). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно верхним пределом называется наибольшее значение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Свете5.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Ячейка	Целевое Имя	Значение
G8	Прибыль, у.д.е. Имеется	4520

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
B3	Площадь, га Зерновые	36	36	4520	36	4520
C3	Площадь, га Картофель	24	24	4520	24	4520
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	0	4520	0	4520
E4	Поголовье, гол.	32	0	2280	32	4520

Рис. 7. Отчет по пределам

П р и л о ж е н и е E

Метод отсечения

Сущность метода отсечения состоит в том, что сначала задача решается симплексным методом без условия целочисленности. Если полученные значения переменных не являются целочисленными, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

1) оно должно быть линейным;

2) отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи;

3) не затрагивать ни одного целочисленного решения.

Данное соотношение, или правильное отсечение Гомори, имеет следующий вид:

$$\left\{A_i\right\} - \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{ij}\right\} \cdot x_j \le 0 \text{ или } \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{ij}\right\} \cdot x_j \ge \left\{A_i\right\}.$$

Таким образом, для решения задач целочисленного линейного программирования *методом Гомори* используется следующий алгоритм:

1. Решают искомую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все переменные задачи целочисленные, то получаем искомое решение. Если задача без условия целочисленности не имеет решения, то и целочисленная задача решения не имеет.

2. Если среди оптимальных значений переменных есть нецелые, то выбирают компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы формируют правильное отсечение.

3. В неравенство, формирующее правильное отсечение, вводят дополнительную переменную и, превращая его в равенство, включают в систему ограничений задачи.

4. Полученную расширенную задачу решают симплексным методом, начиная с пункта 2 до тех пор, пока значения базисных переменных не будут целочисленными.

П р и л о ж е н и е F

Метод ветвей и границ

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Решаем искомую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности.

2. Если в полученном симплексном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из них и по ней строим два ограничения.

3. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значения дробной переменной в оптимальном решении, в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной (например: x_1 = 3,5, первое ограничение будет $x_1 \le 3$, а второе $x_1 \ge 4$, что исключает промежуток с дробным значением x_1).

4. В каждую из искомых задач добавляем по изложенному выше ограничению, в результате получаем две задачи (подзадачи) линейного программирования и решаем их.

5. Если снова получены оптимальные решения с дробным значением переменной, то, сравнив значения целевых функций задач, выбираем задачу с большим значением

целевой функции и с пункта 2 продолжаем до тех пор, пока не получим целочисленные значения переменных.

В результате получаем ветви (рис. 1).

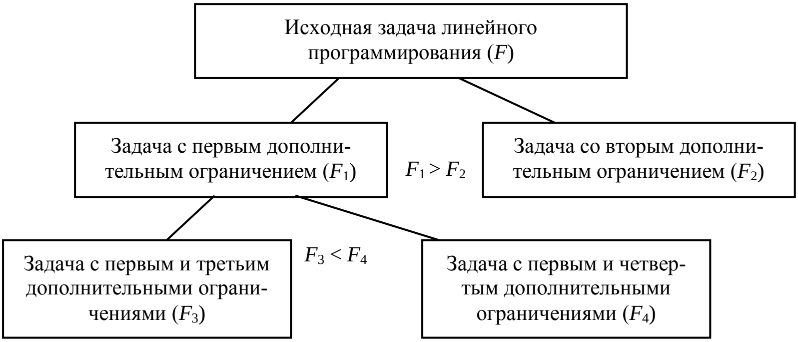
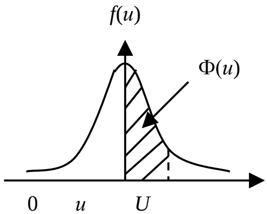


Рис. 1. Алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ

П р и л о ж е н и е G

Функция Лапласа
(стандартизированное нормальное распределение)

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



П р и м е р:

$\Phi(1{,}65) = P(0 \leq U \leq 1{,}65) = 0{,}4505$;
$P(U > 1{,}65) = 0{,}4595$.

u	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,3190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3139	0,3186	0,3212	0,3238	0,3254	0,8289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015

1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4541	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

3,1	0,49903	3,7	0,49989
3,2	0,49931	3,8	0,49993
3,3	0,49952	3,9	0,49995
3,4	0,49966	4,0	0,499968
3,5	0,49977	4,5	0,49999
3,6	0,49984	5,0	0,49999997

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А ф а н а с ь е в, М. Ю. Прикладные задачи исследования операций: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский, В. М. Матюшонок. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.

2. Горелик, В. А. Исследование операций и методы оптимизации: учебник / В. А. Горелик. – М.: ООО «Издат. центр «Академия», 2013. – 272 с.

3. Горлач, Б. А. Исследование операций: учеб. пособие / Б. А. Горлач. – М.: ООО «Изд-во «Лань», 2013. – 448 с.

4. Давыдов, Е. Г. Элементы исследования операций: учеб. пособие / Е. Г. Давыдов. – М.: ООО «Издат. дом Дашков и К», 2013. – 160 с.

5. Есипов, Б. А. Методы исследования операций: учеб. пособие / Б. А. Есипов. – М.: ООО «Изд-во «Лань», 2010. – 256 с.

6. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 430 с.

7. К о с о р у к о в, О. А. Исследование операций: учебник / О. А. Косоруков, А. В. Мищенко; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. Н. П. Тихомирова. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003. – 448 с.

8. К о с т е в и ч, Л. С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2008. – 368 с.

9. Минько, Э. В. Методы прогнозирования и исследования операций: учеб. пособие / Э. В. Минько, А. Э. Минько; под ред. А. С. Будагова. – М.: Финансы и статистика: ИНФРА-М, 2012. – 480 с.

10. Морозов, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях: учеб. пособие / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. – М.: Изд-во «Книжный дом «Либроком», 2016. – 288 с.

11. Писарук, Н. Н. Исследование операций: учеб. пособие / Н. Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2015 – 304 с.

12. С а к о в и ч, В. А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): справоч. пособие / В. А. Сакович. – Минск: Вышэйш. шк., 1984. – 256 с.

13. С а к о в и ч, В. А. Оптимальные решения экономических задач / В. А. Сакович. – Минск: Выш. шк., 1982. – 272 с.

14. Т а х а, А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – 7-е изд. – М.: Издательский Дом «Вильямс», 2016. – 912 с.

15. Токарев, В. В. Модели и решения. Исследование операций для экономистов: учеб. пособие / В. В. Токарев. – М.: Изд-во «Физматлит», 2014. – 408 с.

16. Ш а п к и н, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник. 6-е изд. / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: ООО «Издательский дом Дашков и К°», 2017. – 400 с.

17. Ш и к и н, Е. В. Исследование операций: учебник / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М.: ТК «Велби», Изд-во «Проспект», 2006. – 280 с.

18. Ширяев, В. И. Исследование операций и численные методы оптимизации: учеб. пособие. 5-е изд. / В. И. Ширяев. – М.: ООО «Ленанд», 2017. – 224 с.

19. Шафранская, И. В. Исследование операций: учеб. пособие / И. В. Шафранская. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 324 с.

20. Экономико-математическое моделирование: учебник для студентов вузов / под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004. – 800 с.

21. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.

СОДЕРЖАНИЕ