МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Е. Н. Крючков, С. В. Курзенков

МАТЕМАТИКА

Курс лекций
для студентов, обучающихся по специальностям
6-05-0812-02 Техническое обеспечение хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, 6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе

Горки
БГСХА
2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К85

*Одобрено методической комиссией
факультета механизации сельского хозяйства 22.11.2021
(протокол № 3)
и Научно-методическим советом БГСХА 29.12.2021 (протокол № 3)*

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *Е. Н. Крючков*;
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*;
кандидат технических наук, доцент *А. А. Жешко*

Крючков, Е. Н.
К85 Математика : курс лекций / Е. Н. Крючков, С. В. Курзенков. – Горки : БГСХА, 2022. – 289 с.
ISBN 978-985-882-275-0.

Изложен необходимый теоретический материал по высшей математике, приведены решения типовых примеров, а также задания для самоконтроля.

Для студентов, обучающихся по специальностям 6-05-0812-02 Техническое обеспечение хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, 6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-882-275-0

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного курса лекций – помочь студентам освоить основные понятия и утверждения учебной дисциплины на доступном для понимания уровне; формирование ключевых компетенций, связанных с пониманием значимости дисциплины в освоении их будущей профессии. издание написано в соответствии с программой курса математики для студентов I ступени высшего образования, обучающихся по специальности 1-74 06 01 Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного производства

Весь учебный материал разделен на отдельные лекции, связанные с определенной темой. В каждой лекции излагается необходимый теоретический материал, приводится решение типовых примеров, предлагается система упражнений для усвоения и закрепления каждой темы. В случае необходимости студент может изучить или восстановить в памяти доказательства необходимых формул и теорем, используя рекомендуемую литературу.

Курс лекций может быть использован и другими категориями студентов высших учебных заведений, готовящимися к сдаче зачетов и экзаменов по высшей математике.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика: общий курс / А. И. Яблонский [и др.]. – Минск: Выш. шк., 2000. – 351 с.

2. М а ц к е в и ч, И. П. Высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск: Выш. шк., 1993. – 269 с.

3. М а ц к е в и ч, И. П. Сборник задач и упражнений по высшей математике: теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск: Выш. шк., 1996. – 318 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч.: учеб. пособие / под ред. А. П. Рябушко. – 3-е изд. – Минск: Выш. шк., 2007. – 335 с.

5. Г м у р м а н, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Выш. шк., 1972. – 367 с.

6. Г м у р м а н, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Выш. шк., 1975. – 387 с.

7. М и н о р с к и й, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: Выш. шк., 1987. – 336 с.

8. Л и х о л е т о в, И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Лихолетов. – Минск: Выш. шк., 1969. – 453 с.

9. Л и х о л е т о в, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Минск: Выш. шк., 1969. – 416 с.

10. Ш и п а ч е в, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.

11. Г у с а к, А. Н. Высшая математика: в 2 т. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Т. 1. – 544 с.

12. Г у с а к, А. Н. Высшая математика: в 2 т. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Т. 2. – 448 с.

13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Понятие матрицы. Действия над матрицами

Матрицей **называется прямоугольная таблица чисел**, состоящая и m строк и n столбцов. Числа таблицы называются ***элементами*** матрицы. Обозначается матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Запись a_{ij} означает, что элемент находится на пересечении строки с номером i и столбца с номером j.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***матрицей-столбцом***, а состоящая из одной строки – ***матрицей-строкой***.

Запись $A_{m\times n}$ означает, что матрица A имеет m строк и n столбцов, а запись $m\times n$ называется ***размерностью матрицы***. Если при этом $m = n$, то матрица называется ***квадратной***. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется ее ***порядком***. У квадратной матрицы элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют ***главную диагональ***.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется ***диагональной***. Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны единице, то матрица называется ***единичной*** и обозначается E. Если у квадратной матрицы поменять местами строки и соответствующие столбцы, то полученная матрица будет называться ***транспонированной***.

Умножение матрицы на число, сложение и вычитание матриц называются ***линейными операциями над матрицами***.

При умножении матрицы на число на это же число умножается и каждый элемент матрицы:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При сложении и вычитании матриц их размерности должны быть одинаковыми. Суммой матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица $C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$

Обозначается сумма матриц $C = A + B$.

Разностью матриц A и B называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначается разность матриц $C = A - B$.

Таким образом, при сложении матриц элементы, стоящие на одинаковых местах в обеих матрицах, складываются, а при вычитании – вычитаются.

Наиболее сложной операцией является умножение матрицы на матрицу. Пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Размерность матриц A равна $m \times n$, а матрицы B – $m \times k$

Произведением матриц A и B называется такая матрица C, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B. Обозначается произведение $C = A \cdot B$ (или $C = AB$). Следует иметь в виду, что умножение двух матриц возможно лишь в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Такие матрицы называются ***согласованными.*** Поэтому в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Размерность же матрицы C при умножении матриц A и B будет равна $m \times k$.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $2A - 3B$.

Решение. $2A-3B = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} -$

$-\begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Решение. Так как размерность матрицы A равна 2×3, а размерность матрицы B равна 3×2, то в результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица размерности 2×2:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot2+4\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+4\cdot1\\3\cdot3+2\cdot2+5\cdot1 & 3\cdot1+2\cdot(-1)+5\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&5\\18&4\end{pmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы B на матрицу A будет матрица размерности 3×3: $B\cdot A=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\3&2&5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot2+1\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot2 & 3\cdot4+1\cdot5\\2\cdot2+(-1)\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot2 & 2\cdot4+(-1)\cdot5\\1\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot4+1\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&17\\1&0&3\\5&3&9\end{pmatrix}.$$

Из этого примера видно, что $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пример 3. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&-2\\-3&4&3\end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&-2\\-3&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&-2\\-3&4&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1+4+3 & 2+6-4 & -1-4-3\\2+6+6 & 4+9-8 & -2-6-6\\-3+8-9 & -6+12+12 & 3-8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&-8\\14&5&-14\\-4&18&4\end{pmatrix}.$$

1.2. Определители и их свойства

Пусть дана квадратная матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$.

Определителем данной матрицы, или определителем второго по-

рядка, называется число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Обозначается определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, т. е. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, обозначаемое символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если из определителя третьего порядка вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ij}, то оставшиеся элементы образуют определитель второго порядка, который называется ***минором определителя третьего порядка*** к элементу a_{ij}. Обозначается минор M_{ij}. Например, элементу a_{12} соответствует минор $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Минор к элементу a_{ij}, взятый со знаком «+», если сумма $i + j$ номеров строк и столбца четная, или со знаком «–», если сумма $i + j$ нечетная, называется ***алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} и обозначается $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 4. Найти алгебраическое дополнение числа 3 в определителе $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Так как число 3 находится на пересечении второй строки и первого столбца, то вычеркиваем эти строку и столбец и получаем минор, соответствующий числу 3: $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2$. Алгебраическое дополнение этого элемента $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка ***n***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема Лапласа. *Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (любого столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.*

Например, для первой строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Такая запись называется ***разложением определителя по элементам первой строки***.

Основные свойства определителя:

1) если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю;

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;

3) определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю;

4) общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

5) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число;

6) при транспонировании определителя, т. е. при замене его строк столбцами с теми же номерами, величина определителя не меняется.

Пример 5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Все элементы первой строки, кроме первого, обратим в нули. Для этого:

1) ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на -2;
2) к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на 3;
3) к четвертому столбцу прибавим первый, умноженный на -3.

В результате получим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & -4 \\ -1 & 6 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}$.

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}.$$

К первой строке прибавим третью, умноженную на -3, а ко второй прибавим третью, умноженную на 6. В результате получим определитель, который разложим по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -15 & 17 \\ 0 & 46 & -35 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -15 & 17 \\ 46 & -35 \end{vmatrix} = -(-15\cdot(-35) - 17\cdot 46) = 257.$$

Пример 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 248 & 256 & 254 \\ 167 & 169 & 170 \end{vmatrix}$.

Решение. Ко второй строке определителя прибавим первую, умноженную на -3, а к третьей прибавим первую, умноженную на -2.

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{$ко второй строке прибавим третью$\} =$

$\begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 83 & 85 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4(-83-85) = 672$.

1.3. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Уравнение, содержащее переменные только в первой степени и не имеющее произведений переменных, называется ***линейным***.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется главным ***определителем системы***.

Составим определитель $\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, который получается из главного определителя системы заменой в нем коэффициентов при неизвестной x_1 соответствующими свободными членами.

Аналогично составим определитель $\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, заменив в главном определителе системы столбец коэффициентов при неизвестной x_2 столбцом свободных членов.

Если определитель системы не равен нулю, то справедливы ***формулы Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Аналогично для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

формулы Крамера примут вид $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$,

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формулы Крамера можно использовать и для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными при условии, что определитель системы отличен от нуля.

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = 17, \\ 2x + 5y = -4. \end{cases}$

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23$ отличен от нуля. Следовательно, для ее решения можно применить формулы Крамера. Найдем определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 85 - 16 = 69, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 34 = -46.$$

Тогда по формулам Крамера $x = \dfrac{69}{23} = 3$, $y = \dfrac{-46}{23} = -2$.

Пример 8. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 19, \\ 4x + 2y - 5z = -3, \\ 3x - y + 2z = 11. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 60.$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера. Заменим в определителе системы столбец с коэффициентами при x столбцом свободных членов и найдем определитель $\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \\ 11 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 20.$

Аналогично найдем определители Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 19 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -180, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 19 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

По формулам Крамера получаем значения неизвестных величин:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{120}{60} = 2, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-180}{60} = -3, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1.$$

Если главный определитель системы равен нулю, а хотя бы один из определителей $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, ..., \Delta_{xn}$ не равен нулю, такая система линейных уравнений решений не имеет. Если же определитель системы равен нулю, а также равны нулю все определители $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, ..., \Delta_{xn}$, то система имеет бесконечное множество решений.

1.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если каждое решение одной из них является решением другой. Процесс решения системы линейных уравнений заключается в последовательном преобразовании ее в эквивалентную систему с помощью ***элементарных преобразований***, которыми являются:

1) перестановка любых двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей любого уравнения системы на отличное от нуля число;

3) прибавление к любому уравнению другого уравнения, умноженного на любое число;

4) вычеркивание уравнения, состоящего из нулей, т. е. уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Суть метода Гаусса, или метода последовательного исключения неизвестных, состоит в следующем:

Вначале с помощью элементарных преобразований исключается неизвестная x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Такие преобразования системы называются ***шагом гауссового исключения***. Неизвестная x_1 называется ***разрешающей переменной*** на первом шаге преобразований. Коэффициент a_{11} называется ***разрешающим коэффициентом***, первое уравнение называется ***разрешающим уравнением***, а столбец коэффициентов при x_1 – ***разрешающим столбцом***.

При выполнении одного шага гауссового исключения нужно пользоваться следующими правилами:

1) коэффициенты и свободный член разрешающего уравнения остаются неизменными;

2) коэффициенты разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего коэффициента, обращаются в нули;

3) все прочие коэффициенты и свободные члены при выполнении первого шага вычисляются по правилу прямоугольника:

$$a_{ij}' = a_{ij}a_{11} - a_{i1}a_{1j}, \text{ где } i = 2, 3, \ldots, m; \; j = 2, 3, \ldots, n.$$

Аналогичные преобразования выполним и над вторым уравнением системы. Это приведет к системе, у которой во всех уравнениях, кроме первых двух, будет исключена неизвестная x_2. В результате таких преобразований над каждым из уравнений системы (прямой ход метода Гаусса) исходная система приводится к эквивалентной ей ступенчатой системе одного из следующих видов:

а) ступенчатая система

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 + \ldots + a_{1n}^0 x_n = b_1^0, \\ \qquad a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 + \ldots + a_{2n}^0 x_n = b_2^0, \\ \qquad\qquad a_{33}^0 x_3 + \ldots + a_{3n}^0 x_n = b_3^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^0 x_n = b_n^0 \end{cases}$$

имеет треугольный вид и все $a_{ii} \neq 0$ (i = 1, 2, …, n). Такая система имеет единственное решение. Неизвестные определяются, начиная с последнего уравнения (обратный ход метода Гаусса);

б) ступенчатая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 + \ldots + a_{1n}^0 x_n = b_1^0, \\ \qquad a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 + \ldots + a_{2n}^0 x_n = b_2^0, \\ \qquad\qquad a_{33}^0 x_3 + \ldots + a_{3n}^0 x_n = b_3^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot x_n = b_k^0, \end{cases}$$

где $k \leq n$, т. е. число уравнений системы меньше либо равно числу неизвестных. Эта система не имеет решений, так как последнее уравнение не будет выполняться ни при каких значениях переменной x_n;

в) ступенчатая система вида

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \ldots + a_{1k}^0 x_k + \ldots + a_{1n}^0 x_n = b_1^0, \\ \qquad a_{22}^0 x_2 + \ldots + a_{2k}^0 x_k + \ldots + a_{2n}^0 x_n = b_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^0 x_k + \ldots + a_{kn}^0 x_n = b_k^0 \end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений. Из последнего уравнения неизвестная x_k выражается через неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Затем в предпоследнее уравнение вместо неизвестной x_k подставляется ее выражение через неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Продолжая обратный ход метода Гаусса, неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ можно выразить через неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$. В этом случае $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ называются ***свободными*** и могут принимать любые значения.

При практическом решении систем удобно выполнять все преобразования не с системой уравнений, а с расширенной матрицей системы, состоящей из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x-3y+z=-5, \\ 2x+4y-3z=22, \\ 5x-3y+2z=-3. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и выполним элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & -3 & 22 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 18 & -11 & 76 \\ 0 & 6 & 1 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 18 & -11 & 76 \\ 0 & 0 & 84 & -168 \end{array}\right).$$

В результате исходная система свелась к эквивалентной системе

$$\begin{cases} 3x-3y+z=-5, \\ \quad -18y-11z=76, \\ \qquad\quad 84z=-168. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $z=-2$. Подставим это значение во второе уравнение: $18y-11\cdot(-2)=76,\ y = 3$. В первое уравнение подставим найденные значения y и z: $3x-3\cdot 3-2=-5$, $x = 2$.

Таким образом, решением данной системы уравнений является $x = 2, y = 3,\ z=-2$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=11, \\ x_1+2x_2-x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=15, \\ 6x_1-3x_2+2x_3=25. \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 15 \\ 6 & -3 & 2 & 25 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & 2 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 22 & 44 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ \qquad 7x_2 - 3x_3 = -13, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 2. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем: $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = 3$.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -6. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и выполним элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -5 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 14 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

В результате получена система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

эквивалентная исходной.

Так как уравнений на два меньше, чем неизвестных, то из второго уравнения $x_2 = 2 - x_3 + 2x_4$. Подставим выражение для x_2 в первое уравнение: $2x_1 - 3(2 - x_3 + 2x_4) + x_3 + 4x_4 = 2$, $x_1 = 4 - 2x_3 + x_4$.

Таким образом, формулы

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

дают общее решение данной системы уравнений. Неизвестные x_3 и x_4 являются свободными и могут принимать любые значения.

Пусть, например, $x_3 = 1,\ x_4 = 2.$ Тогда $x_1 = 4 - 2\cdot 1 + 2 = 4$ и $x_2 = 2 - 1 + 2\cdot 2 = 5$. Решение $x_1 = 4,\ \ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$ является одним из частных решений системы, которых бесчисленное множество.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти матрицу $2A - 5B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 25 & 34 & 42 \\ 51 & 69 & 83 \\ 101 & 135 & 169 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Найти миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 3x+5y=1, \\ 2x-3y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=8, \\ 5x+2y=-18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8x-6y=-5, \\ 3x+5y=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-6, \\ 4x_1+5x_2=32; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x-3y+z=-5, \\ 3x+y-4z=9, \\ x-2y-5z=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x+y-5z=-20, \\ 2x-y+7z=26, \\ x+y+z=4; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=8, \\ 2x_2+3x_3=5, \\ 4x_1-x_2+5x_3=12. \end{cases}$

6. Решить системы уравнений методом Гаусса:

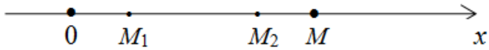
а) $\begin{cases} 2x-4y+5z=9, \\ 3x+2y-4z=-5, \\ 4x-y+3z=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3=7, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=9, \\ 5x_1+6x_2+7x_3=11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=3, \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=2, \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=-9, \\ 4x_1-x_2-x_3+x_4=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+13x_3-9x_4=0, \\ x_1+4x_2-5x_3+11x_4=14, \\ 4x_1+2x_2+8x_3+2x_4=14, \\ 5x_1+6x_2+3x_3+13x_4=28. \end{cases}$

Лекция 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Координаты на прямой, на плоскости и в пространстве

Возьмем произвольную прямую X и выберем на ней положительное направление слева направо. Прямую с выбранным на ней направлением назовем осью. На оси возьмем произвольную точку O и назовем ее началом отсчета, относительно которого будем определять положение всех точек этой оси. Затем выберем единицу масштаба для измерения длин. Ось с выбранным на ней масштабом называют ***числовой осью,*** или ***числовой прямой***. Числовая прямая представляет простейшую ***декартову систему координат***.



Пусть на числовой прямой отрезок задан точками M_1 и M_2 и указано, что точка M_1 называется началом, а точка M_2 – концом отрезка. Такой отрезок называется ***направленным*** и обозначается $\overline{M_1M_2}$. ***Величиной направленного отрезка*** называется его длина, взятая со знаком «+», если направление отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком « – », если эти направления противоположны.

Возьмем на координатной оси точку M. Отрезок $\overline{OM}$ является направленным. ***Координатой точки*** M называется величина направленного отрезка $\overline{OM}$. Обозначим координату точки M через x. Тогда запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

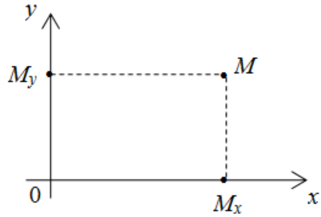
Пусть на координатной оси даны точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. В этом случае величина направленного отрезка $M_1M_2 = x_2 - x_1$. Расстояние d между точками определяется по формуле $d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.

Пример 1. Даны точки $M_1(5)$ и $M_2(-1)$. Величина направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ равна –6, а расстояние между точками M_1 и M_2 равно $|M_1M_2| = |-1-5| = 6$.

Положение точки на прямой определяется одним числом – ее координатой.

Положение точки на плоскости определим следующим образом. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в точке O, зададим масштаб для измерения длины. Точку O

назовем ***началом координат***. В результате получим ***декартову прямоугольную систему координат на плоскости***. Одна ось Ox называется ***осью абсцисс***, а другая ось O – ***осью ординат***. Эти оси называются ***координатными осями***.



Возьмем в прямоугольной системе координат произвольную точку M. Пусть M_x – проекция точки M на ось Ox, M_y – проекция точки M на ось Oy. Тогда $x = M_x$, $y = M_y$ называются ***прямоугольными координатами точки*** на плоскости. Запись $M(x;\ y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

Пусть на плоскости в прямоугольной системе координат даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Тогда расстояние между этими точками определяется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Пример 2. Даны точки $M_1(5;\ 2)$ и $M_2(-3;\ 8)$. Найти расстояние между ними и расстояние от точки M_1 до начала координат.

Решение. По условию примера $x_1 = 5,\ y_1 = 2$, $x_2 = -3$, $y_2 = 8$. Тогда $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-5)^2 + (8-2)^2} = 10$. Расстояние от точки M_1 до начала координат равно $d = \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$.

Пример 3. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(-3;\ 4)$, $C(3;\ 12)$. Вычислить периметр треугольника ABC.

Решение. Периметр p треугольника ABC равен сумме длин всех его сторон. Найдем длины сторон треугольника:

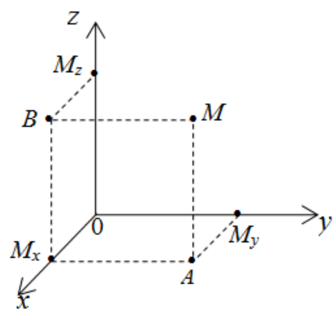
$$|AB| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-1)^2} = 5,$$

$$|BC| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (12-4)^2} = 10,$$

$$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (12-1)^2} = 5\sqrt{5}\ .$$

Тогда $p = 5 + 10 + 5\sqrt{5} = 5(3+\sqrt{5})$.

Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке O, которую назовем ***началом координат***, и зададим единицу измерения длины (мас-



штаб). Одну ось Ox назовем ***осью абсцисс***, вторую Oy – ***осью ординат*** и третью ось Oz – ***осью аппликат***. Координатные оси, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости xOy, yOz, xOz, которые называются ***координатными плоскостями***.

Пусть M – произвольная точка пространства. Спроектируем точку M на координатные плоскости xOy и xOz (точки A и B). Проекцией точки A на ось Ox является точка M_x, а на ось Oy – точка M_y. Проекцией точки В на ось Oz является точка M_z. Таким образом, точки M_x, M_y и M_z являются проекциями точки M на координатные оси. Величины OM_x, OM_y и OM_z ***называются координатами точки М***. Первая координата $x = OM_x$ называется ***абсциссой***, вторая $y = OM_y$ – ***ординатой*** и третья $z = OM_z$ – ***аппликатой***. Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Если в пространстве известны координаты точек $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то расстояние между ними определяется по формуле

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Пусть через точки $M_1(x_1; y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2; y_2;\ z_2)$ проходит некоторая ось. Пусть известно, что точка $C(x;\ y;\ z)$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ на два направленных отрезка $\overrightarrow{M_1C}$ и $\overrightarrow{CM_2}$ в отношении λ. Это означает, что $\overrightarrow{M_1C} = \lambda\ \overrightarrow{CM_2}$, т. е.

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ \ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ \ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Отсюда находим координаты точки C:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

2.2. Векторы. Основные понятия

Величина, которая характеризуется только своим численным значением, называется ***скалярной***. Примерами скалярных величин являются вес, температура, площадь, длина. Величина, которая характеризуется не только своим численным значением, но и направлением, называется ***векторной***. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила.

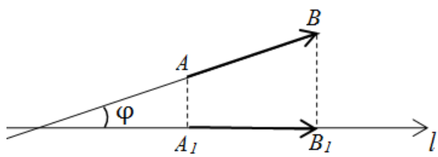
Вектором называется ***направленный отрезок***. Если начало вектора находится в точке A, а конец вектора находится в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или просто $\overline{a}$. ***Модулем (длиной)*** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние от начальной точки A до конечной точки B вектора и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$. Если точки A и B совпадают, то длина вектора равна нулю и вектор называется ***нулевым***. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они имеют одинаковые направления либо противоположно направлены. Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковые длины и одинаково направлены. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Следовательно, если некоторую точку в пространстве взять за общее начало, то от этой точки можно отложить все рассматриваемые векторы. В этом смысле все векторы можно рассматривать как ***свободные***.

Если два вектора имеют одинаковые длины и противоположное направление, то они называются ***противоположными***. Для вектора $\vec{a}$ противоположный ему вектор обозначается $-\vec{a}$.

Векторы, которые лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***. Если компланарные векторы привести к одному началу, то они будут лежать в одной плоскости.

Пусть дана ось l и вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть начало A вектора проектируется в точку A_1 на оси l, а конец B вектора – в точку B_1.



Рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. ***Проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l имеют противоположные направления. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $\text{Пр}_l\,\overrightarrow{AB}$. Обозначим через φ угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l. Тогда $\text{Пр}_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$.

Если в качестве оси l взять какой-либо вектор, то можно говорить о проекции одного вектора на другой. Например, проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$ равна $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Иногда вместо выражения «проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$» используют выражение «проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{CD}$».

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ в прямоугольной системе координат. ***Координатами вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называются его проекции на координатные оси. Запись $\vec{a}(x; y; z)$ означает, что вектор $\bar{a}$ в пространстве имеет координаты *x*, *y*, *z*.

Два вектора $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ будут ***равны тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты***, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Пусть начало вектора задано точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а конец вектора – точкой $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда для определения координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ ***от координат конца вектора вычитаются координаты его начала***, т. е. $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

В прямоугольной системе координат в пространстве единичные векторы направления осей *Ox*, *Oy* и *Oz* обозначим через $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$. Эти единичные векторы, называемые ***ортами,*** составляют ***прямоугольный базис***.

Любой вектор $\vec{a}(x; y; z)$ пространства может быть разложен единственным образом по ***прямоугольному базису*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, представлен в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где числа *x*, *y*, *z* – координаты этого вектора.

Пример 4. Даны точки $M_1(1;-3;\ 5)$ и $M_2(4;\ 2;-3)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и записать разложение этого вектора по ортам.

Решение. Если заданы координаты начала и конца вектора, то для определения координат вектора из координат его конца вычитаются координаты начала: $\overrightarrow{M_1M_2} = (4-1;\ 2-(-3);-3-5) = (3;\ 5;-8)$.

Разложение вектора по ортам имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}.$$

2.3. Линейные операции над векторами

Сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число называются ***линейными операциями над векторами***.

Пусть даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

т. е. ***при сложении векторов их одноименные координаты складываются***.

Аналогично

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$

т. е. ***при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются***.

При ***умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число***: если $\vec{c} = \alpha\vec{a} = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1)$. В этом случае вектор $\vec{a}$ будет коллинеарен вектору $\alpha\vec{a}$.

Обозначим $\vec{c} = (x; y; z)$. Тогда из равенства $\overline{c} = a\overline{a}$ следует, что $x = \alpha x_1$, $y = \alpha y_1$, $z = \alpha z_1$. А это означает, что $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1} = \alpha$. Таким образом, ***если два ненулевых вектора коллинеарны, то их одноименные координаты пропорциональны***.

Верно и обратное: ***если одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны***.

Пример 5. Даны векторы $\vec{a}(2;-3;\,1)$ и $\vec{b}(1;-1;\,0)$. Найти координаты вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, а при вычитании векторов вычитаются их соответствующие координаты, то

$$2\vec{a}-3\vec{b}(2\cdot 2-3\cdot 1;\ 2\cdot(-3)-3\cdot(-1);\ 2\cdot 1-3\cdot 0)=(1;-3;\ 2).$$

Пример 6. При каких значениях m и n векторы $\vec{a}(3;\,2;\,m)$ и $\vec{b}(6;\,n;\,10)$ коллинеарны?

Решение. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны: $\frac{3}{6}=\frac{2}{n}=\frac{m}{10}$. Тогда $\frac{2}{n}=\frac{1}{2}$ и $\frac{m}{10}=\frac{1}{2}$, т. е. $n = 4$ и $m = 5$.

2.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Так как $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$, а $\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=$ $=\left|\vec{a}\right|\cdot\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}.$

Таким образом, ***скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на направление первого***.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ заданы своими координатами. Тогда ***скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат***:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Если же два вектора равны, т. е. $\vec{a}(x;y;z)$ и $\vec{b}(x;y;z)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z=x^2+y^2+z^2$. Отсюда следует, что

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

т. е. ***длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат***.

Из определения скалярного произведения двух векторов можно найти ***угол между векторами***:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \text{ или } \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, так как $\cos\varphi = \cos 90° = 0$. И, обратно, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, ***необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения***:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ или } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пример 7. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами $\varphi = 30°$.

Решение. По определению скалярного произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\cos 30° = 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 27.$$

Пример 8. Вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, если $A(3; -1;\ 0), B(2;\ 1;\ 4), C(2;\ -1;\ -2)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2-3;\ 1-(-1);\ 4-0) = (-1;\ 2;\ 4),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-3; -1-(-1); -2-0) = (-1;\ 0;\ -2).$$

Так как известны координаты векторов, то их скалярное произведение равно: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 4\cdot(-2) = -7$.

Пример 9. Вычислить скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Решение. По условию примера $\vec{a}(3; -4;\ 1)$ и $\vec{b}(2;\ 3;\ 1)$.

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + 1\cdot 1 = -5$.

Пример 10. Найти длину вектора $\vec{a}(4;\ 3; -1)$.

Решение. Так как длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$ и определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

Пример 11. Найти длину вектора $\vec{b}-\vec{a}$, если известны векторы $\vec{a}(3;\ 2;-1)$ и $\vec{b}(6;\ 6;-1)$.

Решение. Вначале вычислим координаты вектора $\vec{b}-\vec{a}$:

$\vec{b}-\vec{a}=(6-3;\ 6-2;-1-(-1))=(3;\ 4;\ 0)$.

Тогда $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5.$

Пример 12. Даны векторы $\vec{a}(3;-1;-1)$ и $\vec{b}(1;\ 3;\ 5)$. Найти проекцию вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

Решение. Найдем координаты этих векторов:

$$2\vec{a}-\vec{b}=(5;-5;-7),\quad \vec{a}+\vec{b}=(4;\ 2;\ 4).$$

Тогда $\text{Пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}=\dfrac{5\cdot 4+(-5)\cdot 2+(-7)\cdot 4}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=-3.$

Пример 13. Найти угол между векторами $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$.

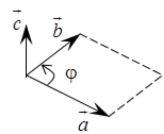
Решение. Так как по условию $\vec{a}=(1;\ 1;\ 0)$ и $\vec{b}=(1;\ 0;\ 1)$, то

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, угол между векторами $\varphi=60^\circ$.

2.5. Векторное произведение двух векторов, его свойства и применение

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:



1) модуль вектора $\vec{c}$ равен $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\varphi)$, где $0\le\varphi\le\pi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. численно *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, *как на сторонах*;

2) вектор $\vec{c}$ *ортогонален векторам* $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке *образуют правую тройку векторов*, т. е. если смотреть на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с конечной точки вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет осуществляться против часовой стрелки.

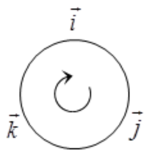
Обозначается векторное произведение как $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$;
3. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

В частности, векторное произведение единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, образующих прямоугольный базис, определяется по следующей схеме: векторное произведение совпадающих сомножителей равно нулю; векторное произведение несовпадающих сомножителей равно третьему не задействованному в произведении орту, взятому с положительным знаком, если направление кратчайшего поворота от первого сомножителя до второго совпадает с направлением часовой стрелки и со знаком минус в противном случае.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$



В координатной форме векторное произведение векторов $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ равно:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Применение векторного произведения векторов.

1. *Проверка векторов на коллинеарность.* Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и наоборот.

Пример 14. Проверить векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ на коллинеарность.

Решение. Запишем векторы в координатной форме $\vec{a}\,(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}\,(1; 2; -3)$ и найдем их векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Так как $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$, то эти векторы не коллинеарны.

2. *Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.* Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ модуль этого произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т. е.

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\varphi) = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{matrix}\right\|,$$

а значит площадь соответствующего треугольника будет равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{matrix}\right\|.$$

Пример 15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b},\ \ 3\vec{a} + \vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = 30°.$

Решение. Площадь параллелограмма определяется по формуле

$S_{\text{пар}} = \left|(\vec{a} + 3\vec{b})\times(3\vec{a} + \vec{b})\right|$. Найдем $(\vec{a} + 3\vec{b})\times\ (3\vec{a} + \vec{b}) =$

$$3\vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} + 9\vec{b}\times\vec{a} + 3\vec{b}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} + 9\vec{b}\times\vec{a} = \ 8\cdot(\vec{b}\times\vec{a})\,.$$

Тогда $S_{\text{пар}} = 8\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin 30° = 4$ (ед.^{2}).

Пример 16. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;\ 2;\ 2),\ B(4;\ 0;\ 3),\ C(0;\ 1;\ 0).$

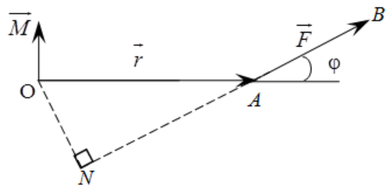
Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC}(0-2;\ 1-2;\ 0-2),\ \text{ или }\ \overrightarrow{AC}(-2;\ -1;\ -2);$$

$$\overrightarrow{AB}(4-2;\ 0-2;\ 3-2),\ \text{или}\ \overrightarrow{AB}(2;\ -2;\ 1).$$

Тогда $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$

$=\vec i(-1-4)-\vec j(-2+4)+\vec k(4+2)=-5\vec i-2\vec j+6\vec k$, а его модуль равен $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}.$ Следовательно, площадь треугольника равна $S_\Delta=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед.^{2}).



3. *Определение момента силы относительно точки*. Пусть в точке A приложена сила $\vec F=\overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства.

Из физики известно, что моментом силы $\vec F$ относительно точки O называется вектор $\vec M$, который проходит через точку O и удовлетворяет следующим условиям:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

2) численно равен произведению силы на плечо:

$$\vec M=\left|\vec F\right|\cdot ON=\left|\vec F\right|\cdot\left|\vec r\right|\cdot\sin(\varphi)=\left|\vec F\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\sin(\vec F\,\hat{;}\,\overrightarrow{OA});$$

3) образует правую тройку векторов с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что

$$\vec M=\overrightarrow{AB}\times\vec F.$$

Пример 17. Найти величину момента силы $\vec F(1;\,0;\,1)$ относительно точки $A(-2;\,1;\,3)$, если сила приложена к точке $B(3;\,-1;\,0)$.

Решение. Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB}(3+2;\ -1-1;\ 0-3)$, $\overrightarrow{AB}(5;\ -2;\ -3)$. Момент $\vec M$ силы $\vec F$ относительно точки A найдем как

$$\vec M=\overrightarrow{AB}\times\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 5 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec i\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\vec i-8\vec j+2\vec k.$$

Тогда величина момента силы $\vec{F}$ равна модулю вектора $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

2.6. Смешанное произведение тройки векторов, его свойства и применение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) в произведении есть коллинеарные векторы;

в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$.

4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \lambda\vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \mu\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$.

В координатной форме смешанное произведение векторов $\vec{a}\,(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ и $\vec{c}(x_c; y_c; z_c)$ равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Применение смешанного произведения векторов.

1. *Проверка тройки векторов на компланарность.* Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю при условии, что $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Пример 18. Доказать, что точки $A(5;\ 7;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9;\ 4;\ -4)$, $D(1;\ 5;\ 0)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Если заданные точки лежат в одной плоскости, то соответствующая тройка векторов, выходящих из общего начала, будет компланарна. Проверим, компланарны ли векторы с общим началом в точке A. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC}(4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD}(-4;-2;\ 2)$. Вычислим их смешанное произведение:

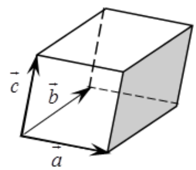
$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

2. *Определение взаимной ориентации тройки векторов в пространстве.* Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве правоориентирована, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, и левоориентирована при $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$.

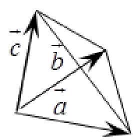
3. *Нахождение объемов.* Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах, т. е.

$$V_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{matrix}\right\|.$$



Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах, равен одной шестой смешанного произведения этих векторов, взятого по абсолютной величине, т. е.

$$V_{\text{пар}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{matrix}\right\|.$$



Пример 19. Найти длину высоты треугольной пирамиды с вершинами A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2), опущенную на грань BCD.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}(-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD}(1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC}(4;-1;-2)$. Тогда объем пирамиды можно вычислить по формуле

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)\right|=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20\ (\text{ед.}^3).$$

Из школьного курса математики известно, что $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h$. Откуда следует, что $h_{\text{В}}=\frac{3\cdot V}{S_{\text{осн}}}\cdot$ Поэтому для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания *BCD*.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-8-3)-\vec{j}\,(-2+12)+\vec{k}\,(-1-16)=$$

$$=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

Определим модуль векторного произведения векторов:

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}\,.$$

Тогда площадь треугольника *BCD* равна $S_{\text{осн}}$ = $\sqrt{510}\,/\,2$ (ед.^{2}), а длина искомой высоты – $h_{\text{В}}=\frac{3\cdot V}{S_{\text{осн}}}=\frac{2\cdot 3\cdot 20}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$ (ед.).

Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{a}(2;-3;\,5)$, $\vec{b}(6;\,4;-7)$, $\vec{c}(-2;\,9;\,1)$. Найти векторы $3\vec{a}$, $4\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

2. Даны векторы $\vec{a}(3;\,-5;\,8)$, $\vec{b}(-1;\,1;\,-4)$. Найти длины векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

3. Даны вершины треугольника $A(7;5;-4)$, $B(4;9;1)$, $C(6;-3;-7)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A, и периметр треугольника.

4. Точки $A(9; -11; 5)$, $B(7; 4; -2)$, $C(-7; 13; -3)$ являются последовательными вершинами ромба. Найти четвертую вершину, вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

5. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

6. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}(4; 2; -5)$ и $\vec{b}(2; 6; 4)$.

7. Найти угол между векторами $\vec{a}(4; -10; 1)$ и $\vec{b}(11; -8; -7)$.

8. Дан треугольник с вершинами $A(1; 7; 2)$, $B(5; -3; 3)$, $C(12; -1; -5)$. Найти внутренние углы этого треугольника.

9. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}(1; -2; 2)$ на вектор $\vec{b}(2; 10; 11)$.

10. Даны векторы $\vec{a}(2; -3; 5)$ и $\overline{b}(6; 4; -7)$. Найти проекцию вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

11. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

12. Найти, при каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ будут взаимно перпендикулярными.

13. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$, если известны точки $A(2; -3; 4), B(5; -5; -2), C(1; 2; 3)$ и $D(7; 4; 6)$.

14. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Вычислить угол между его диагоналями.

15. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2; 4; 6)$ в положение $B(4; 2; 7)$. Под каким углом к вектору перемещения $\vec{S}$ направлена сила $\vec{F}$?

Лекция 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВЕ

Аналитическая геометрия представляет собой раздел геометрии, в которой геометрические объекты исследуются методами алгебры на основе метода координат.

Основными понятиями аналитической геометрии являются понятие геометрической фигуры, или просто фигуры, и понятие системы координат.

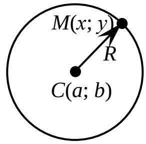
3.1. Уравнение линии на плоскости

В аналитической геометрии любую линию на плоскости рассматривают как *множество точек, обладающих общими свойствами*.

Например, окружность радиуса R – это множество точек плоскости, равноудаленных на расстояние R от заданной точки, называемой *центром окружности*.

Уравнением линии называется такое уравнение $F(x; y) = 0$, связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами точек линии*.

Для того чтобы составить уравнение линии, на ней выбирают произвольную текущую точку $M(x; y)$ и посредством координат выбранной точки математически выражают свойства, присущие всем точкам линии.



Например, составить уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R.

Решение. Выберем на окружности текущую точку $M(x; y)$. Известно, что все точки окружности равноудалены от центра C на расстояние R. Тогда длина вектора будет равна R. Выразим длину вектора $\overrightarrow{CM}$. Так как вектор имеет координаты $\overrightarrow{CM}(x-a; y-b)$, то его длина равна $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$, или $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$.

Таким образом, уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ определяет окружность с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R.

Нетрудно заметить, что, если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения. Так, для того чтобы установить, лежит ли точка $M_0(x_0;\ y_0)$ на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки M_0 уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 1. Лежат ли точки $A(2;\ –7)$ и $B(–2;\ –6)$ на линии

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9?$$

Решение. Линией является окружность с центром в точке $C(2;\ –4)$ и радиусом 3 единицы длины. Подставим в уравнение окружности вместо x и y координаты точек A и B, получим:

$$(2-2)^2 + (-7+4)^2 = 0^2 + (-3)^2 = 9;$$

$$(-2-2)^2 + (-6+4)^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 20 \neq 9.$$

Следовательно, точка A лежит на данной линии, а точка B не лежит на ней.

Уравнение линии на плоскости может быть задано в полярной системе координат уравнением $F(r;\ \varphi) = 0$ или выражено параметрическим способом через некоторый независимый параметр t в виде системы уравнений $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Например, в полярной системе координат уравнение $r = 2R\cdot\sin(\varphi)$ задает окружность с центром в точке с координатами $(0;\ R)$ и радиусом R единиц длины.

Эту же окружность, но с центром в начале координат, можно записать в параметрическом виде: $\begin{cases} x = R\cdot\cos(t), \\ y = R\cdot\sin(t). \end{cases}$

Алгебраической линией n-го порядка называется линия, которая определяется алгебраическим уравнением n-й степени (n – наивысший показатель степени переменных, входящих в уравнение).

Рассмотрим алгебраические линии, которые задаются уравнением второй степени, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то данное уравнение на координатной плоскости определяет одну из кривых второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Иначе данное уравнение преобразуется к алгебраическому уравнению первой степени, которое определяет на координатной плоскости прямую линию.

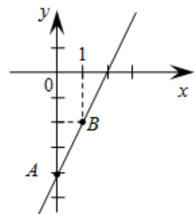
3.2. Построение прямой на плоскости

Известно, что прямую на координатной плоскости однозначно определяют две заданные точки.

Например. Для построения прямой, заданной уравнением $2x - y - 4 = 0$, достаточно знать координаты двух ее произвольных точек.

Результаты вычислений при этом обычно представляют в виде таблицы:

x	0	1
y	–4	–2

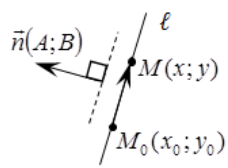


Построим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую.

Рассмотрим различные способы аналитического задания прямой линии.

3.3. Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору

Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;\ B)$. Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором прямой*.



Выберем на прямой ℓ текущую точку $M(x;\ y)$ и найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$. Можно заметить, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны. Это означает, что их скалярное произведение будет равно нулю, т. е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору*.

Например. Уравнение прямой, проходящей через точку $C(–3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1; -4)$, будет иметь следующий вид:

$$1 \cdot (x + 3) - 4(y - 5) = 0.$$

3.4. Общее уравнение прямой

Пусть прямая задана уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Если в нем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получим

$$Ax + By + C = 0,$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Например, раскроем скобки и приведем подобные в уравнении $1 \cdot (x+3) - 4(y-5) = 0,$ получим $x + 3 - 4y + 20 = 0,$ или общее уравнение прямой примет вид $x - 4y + 23 = 0.$

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой:

$Ax + By = 0$ $(C = 0)$ – прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ $(B = 0)$ – прямая параллельна оси Oy;

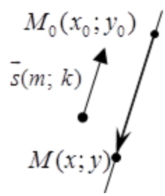
$By + C = 0$ $(A = 0)$ – прямая параллельна оси Ox;

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Oy;

$By = 0$ $(A = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Ox.

3.5. Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m;\ k)$. Ненулевой вектор $\vec{s},$ параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.



Выберем на прямой ℓ произвольную текущую точку $M(x;\ y)$ и найдем координаты вектора $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$. Можно заметить, что векторы $\overline{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны. Это означает, что соответствующие координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k}.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

3.6. Параметрические уравнения прямой

Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ следует, что $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x - x_0 = tm,\ y - y_0 = tk.$$

В результате получим *параметрические уравнения прямой на плоскости*: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + kt, \end{cases}$

где $\vec{s}(m; k)$ – направляющий вектор прямой;

$(x_0; y_0)$ – координаты точки, принадлежащей данной прямой.

Пример 2. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3; 5)$ параллельно вектору $\vec{s}(2; 6)$.

Решение. Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k},\quad \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 5}{6}.$$

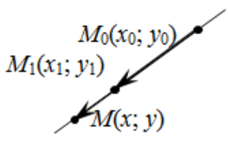
Приравняем в каноническом уравнении прямой пропорции к параметру t и выразим из них переменные x и y:

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 5}{6} = t.$$

Получим параметрические уравнения этой же прямой:

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 6t + 5. \end{cases}$$

3.7. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки



Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$.

Выберем на прямой ℓ текущую точку $M(x; y)$ и найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0)$.

Заметим, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарны, т. е. можем записать

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

Заметим, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;\, y_1-y_0)$.

Если $x_1=x_0$, то уравнение прямой примет вид $x=x_0$. При $y_1=y_0$ уравнение прямой будет иметь вид $y=y_1$.

Например, составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;\,-3)$ и начало координат.

Решение. Уравнение прямой имеет следующий вид:

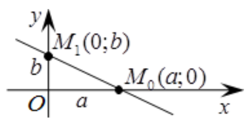
$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

где $x_0=y_0=0$; $x_1=-2$; $y_1=-3$.

Тогда получим $\dfrac{x-0}{-2-0}=\dfrac{y-0}{-3-0}$; $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{-3}$. Избавимся от знаменателей в левой и правой части уравнения, используя свойство пропорции. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. В результате общее уравнение прямой примет вид $3x-2y=0$.

3.8. Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат

Пусть искомая прямая ℓ отсекает от осей координат отрезки: a от оси Ox и b – от оси Oy. Тогда *уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат,* будет иметь вид



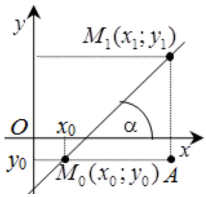
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Пример 3. Прямая отсекает от координатных осей равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками, равна 8 см^2.

Решение. Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат, имеет вид $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Так как прямая отсекает равные отрезки, то $a = b$. Это означает, что образованный при этом прямоугольный треугольник будет иметь площадь, равную a^2 / 2 = 8. Таким образом, $a = 4$ и уравнение прямой примет вид $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$. Умножим обе части уравнения на 4 и перенесем все его слагаемые в левую часть. Тогда общее уравнение прямой будет выглядеть следующим образом:

$$x + y - 4 = 0.$$

3.9. Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом



Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$. При этом она будет задаваться уравнением

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Выразим из данного уравнения числитель правой части: $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)$ и введем обозначение $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, коэффициент k будем называть *угловым коэффициентом*. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Это уравнение называют *уравнением прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом*.

Допустим, что прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ и образует с положительным направлением оси Ox угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0AM_1. Можно заметить, что величина y_1-y_0 определяет величину противолежащего катета к углу α, а x_1-x_0 – величину прилежащего катета. Это означает, что с геометрической точки зрения *угловой коэффициент прямой определяет тангенс угла наклона этой прямой с положительным направлением оси Ox*:

$$k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\mathrm{tg}(\alpha).$$

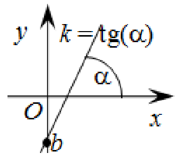
3.10. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Приведем подобные в уравнении

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В результате получим $y = kx + (y_0 - kx_0)$.

Введем обозначение $b = y_0 - kx_0$.



Тогда уравнение прямой примет вид

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox);

b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример 4. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Решение. Выполним преобразования данного уравнения, приводящие к уравнению прямой в отрезках, отсекаемых ею от осей координат: $12x - 5y = 65$, $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$, $\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$.

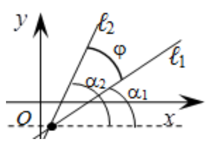
Преобразуем общее уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$12x - 5y - 65 = 0,\ \ -5y = 65 - 12x,\ \ y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5},\ \ y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Угловой коэффициент данной прямой $k = \frac{12}{5}$.

3.11. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Рассмотрим две прямые ℓ_1 и ℓ_2 на плоскости.



Углом φ *между прямыми* называется острый из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться по формуле

$$\angle\phi = \mathrm{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

При этом прямые ℓ_1 и ℓ_2 *параллельны*, если $k_1 = k_2$, и *перпендикулярны*, когда $k_1 = -1/k_2$.

Пример 5. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. Выпишем угловые коэффициенты данных прямых: $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ и найдем угол между ними: $\angle\varphi = \mathrm{arctg}\left|\dfrac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}\right| = 1$, или $\angle\varphi = \pi/4$.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда угол φ между ними будет равен углу между их векторами нормалей:

$$\angle\varphi = \arccos\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

При этом *условие параллельности прямых* ℓ_1 и ℓ_2 вытекает из коллинеарности их нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и может быть записано в следующем виде: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности прямых ℓ_1 и ℓ_2 следует из ортогональности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и определяется следующим равенством:

$$A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 = 0.$$

Пример 6. Вычислить угол между прямыми:

а) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$; б) $y = \dfrac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$.

Решение. а) в данном случае прямые заданы общими уравнениями. Выпишем координаты векторов нормалей этих прямых: $\vec{n}_1(2;-3)$, $\vec{n}_2(5;-1)$. Воспользуемся расчетной формулой

$$\angle\varphi = \arccos\left(\frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{5^2 + (-1)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{10+3}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{25+1}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{13}{13\cdot\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4};$$

б) в данном случае $k_1 = \dfrac{3}{4}$. Найдем k_2.

$8x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow \; 6y = -8x - 5 \Rightarrow \; y = -\dfrac{8}{6}x - \dfrac{5}{6} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{6}$. Тогда $k_2 = -\dfrac{4}{3}$.

Следует отметить, что угловые коэффициенты прямых связаны соотношением $k_1 = -1/k_2$, т. е. прямые перпендикулярны и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

3.12. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой

Пусть две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями соответственно: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и требуется найти точку их пересечения $M_0(x_0; y_0)$. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду

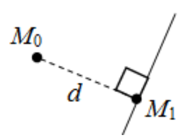
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

и решим методом Крамера. В результате получим

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 7. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Так как $\dfrac{3}{2} \neq -\dfrac{2}{5}$, т. е. $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются. Координаты точки пересечения прямых найдем из системы уравнений:



$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ 2x+5y-12=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 2x+5y=12. \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-5+24}{15+4}=\frac{19}{19}=1; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{38}{19}=2.$$

Точка пересечения имеет координаты $M(1; 2)$.

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой ℓ: $Ax + By + C = 0$.

Предположим, что точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M_0 и M_1 $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку M_0. В качестве направляющего вектора к этой прямой можно взять вектор $\vec{s}(A; B)$. Тогда уравнение перпендикулярной прямой будет иметь вид $\frac{(x-x_0)}{A}=\frac{(y-y_0)}{B}$.

Найдем координаты M_1 как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ \dfrac{(x-x_0)}{A}=\dfrac{(y-y_0)}{B}. \end{cases}$$

Для этого запишем второе уравнение системы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ x=At+x_0, \\ y=Bt+y_0. \end{cases}$$

Подставим правые части второго и третьего равенства в первое уравнение системы и выразим параметр t

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

Тогда можем записать

$$x - x_0 = At = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \cdot A;$$

$$y - y_0 = Bt = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \cdot B.$$

Таким образом, $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример 8. Найти расстояние от точки $M_0(2;1)$ до прямой $4x - 3y + 10 = 0$.

Решение. Воспользуемся расчетной формулой

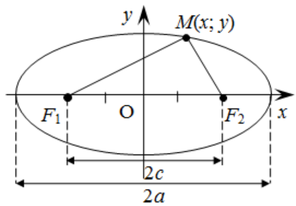
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|8 - 3 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ ед. дл.}$$

3.13. Эллипс, его канонические уравнения

Эллипсом называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами эллипса*, есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Величину a для эллипса называют *большей полуосью*, а c – *полуфокусным расстоянием*. Очевидно, что большая полуось эллипса с его полуфокусным расстоянием связаны соотношением $a > c$.

Получим уравнение эллипса, фокусы которого располагаются симметрично относительно начала координат и лежат на одной из осей. Такое уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*.



Для определенности положим, что фокусы эллипса располагаются на оси Ox.

Выберем на эллипсе текущую точку $M(x;\, y)$. Тогда для нее можно записать следующее равенство: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Перепишем его в координатной форме:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$$

Сделаем преобразования:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$(x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

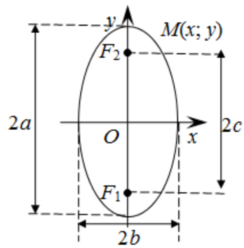
$$xc-a^2=-a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\cdot((x-c)^2+y^2);$$

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2-a^2c^2+a^2y^2;$$

$$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$



Введем величину $b^2 = a^2-c^2>0$. Нетрудно заметить, что $b \le a$, поэтому параметр b называют *меньшей полуосью эллипса*.

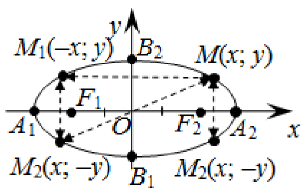
В результате получим каноническое уравнение эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Каноническое уравнение эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Исследуем форму эллипса.



1. Канонические уравнения эллипса содержат переменные x и y в четных степенях, поэтому любая точка эллипса будет иметь на нем симметричные точки относительно осей координат и начала координат. При этом начало координат называют *центром эллипса*.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Для определенности рассмотрим каноническое уравнение эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат

на оси Ox. Тогда координаты точек пересечения эллипса с осью Ox должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x^2=a^2, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x_1=-a \text{ или } x_2=a, \\ y=0. \end{cases}$$

В результате получаем две точки $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$.

Точки пересечения эллипса с осью Oy найдем из аналогичной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} y^2=b^2, \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} y_1=-b \text{ или } y_2=b, \\ x=0. \end{cases}$$

Искомые точки будут иметь координаты $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – соответственно большой и малой осями эллипса.

3. Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной y. В результате получим

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика эллипса, на которые он разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика эллипса, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $-a \le x \le a$.

Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной x, получим

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Знак «+» будет соответствовать фрагменту графика эллипса, лежащему правее оси Oy, а «–» – левее этой оси. Равенство определено для значений переменной y, изменяющихся в пределах $-b \le y \le b$.

Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В рассматриваемом уравнении сумма неотрицательных слагаемых $\dfrac{x^2}{a^2}$ и $\dfrac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного

слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается, и наоборот.

Аналогичные рассуждения справедливы для эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy.

Следовательно, *эллипс имеет форму овальной замкнутой кривой.*

Пример 9. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Сделать построение.

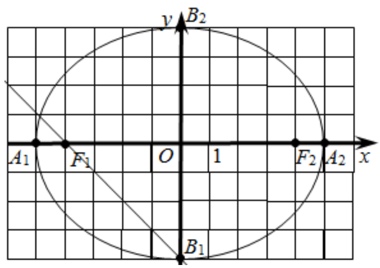
Решение. Данное уравнение определяет эллипс с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox.

Большая его полуось $a = 5$, а меньшая $b = 4$. Найдем полуфокусное расстояние: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, т. е. $c = 3$, а фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$. Нижняя вершина эллипса будет находиться в точке $B_1(0; -4)$.

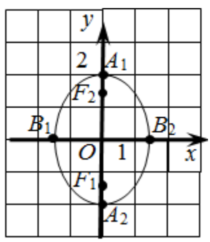
Тогда уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, будет иметь вид

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\ \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\ 4x=-3y-12;\ 4x+3y+12=0\ .$$

Сделаем построения.



Пример 10. Построить эллипс с вершиной в начале координат, если известно, что один из его фокусов находится в точке $M(0; -\sqrt{2})$, а большая ось равна 4.



Решение. Так как фокус расположен на оси ординат, а его центр совпадает с началом координат, то каноническое уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, причем большая полуось $a = 2$, а полуфокусное расстояние $c = \sqrt{2}$.

Известно, что меньшая полуось определяется как

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}.$$

Тогда каноническое уравнение эллипса примет вид $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1.$

3.14. Окружность, ее канонические уравнения

Окружность – это линия, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром окружности*.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Очевидно, что данное уравнение является частным случаем канонического уравнения эллипса, когда его большая и меньшая полуоси равны. Действительно, пусть $a = b = R$, тогда каноническое уравнение эллипса можно записать в виде

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на R^2, в результате получим $x^2 + y^2 = R^2$ – уравнение окружности. В данном случае говорят, что фокусы эллипса совпадают с вершиной, а сам эллипс вырождается в окружность.

3.15. Гипербола, ее канонические уравнения

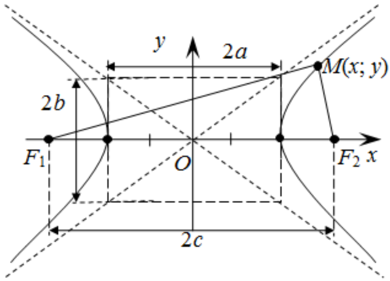
Гиперболой называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами гиперболы,* есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Величину a для гиперболы называют *действительной полуосью*, а c – *полуфокусным расстоянием*. Очевидно, что действительная полуось гиперболы меньше полуфокусного расстояния, $a < c$.

Выведем уравнение гиперболы, фокусы которого располагаются симметрично относительно начала координат и лежат на одной из осей. Такое уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*.

Для определенности положим, что фокусы гиперболы располагаются на оси Ox.

Выберем на гиперболе произвольную текущую точку $M(x; y)$.



Тогда для нее можно записать следующее равенство: $\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a$ или $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$.

Перепишем его в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a.$$

Выполним преобразования:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$(x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$xc-a^2=\pm a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\cdot((x-c)^2+y^2);$$

$$x^2c^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2;$$

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4;$$

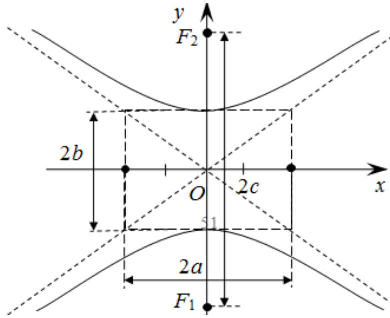
$$x^2(a^2-c^2)-a^2y^2=a^2(a^2-c^2);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Так как $c > a$, введем следующее обозначение: $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Назовем параметр b *мнимой полуосью гиперболы*, а прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ по оси Ox и Oy, диагонали которого пересекаются в точке начала координат, соответственно – *основным прямоугольником гиперболы*. В результате получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

с фокусами, расположенными на оси Ox симметрично относительно начала координат.



Каноническое уравнение гиперболы с фокусами и действительной осью $2b$, расположенными на оси Oy симметрично относительно начала координат, и мнимой осью $2a$ на оси Ox имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Нетрудно заметить, что рассмотренные гиперболы имеют общий прямоугольник. Такие гиперболы называют *сопряженными*.

Исследуем форму гиперболы.

1. Канонические уравнения гиперболы содержат переменные x и y в четных степенях, поэтому любая точка гиперболы будет иметь на ней симметричные точки относительно осей координат и начала координат. При этом начало координат называют *центром гиперболы*.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Для определенности рассмотрим каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox. Тогда координаты точек пересечения гиперболы с осью Ox должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2=a^2,\\ y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-a \text{ или } x_2=a,\\ y=0.\end{cases}$$

В результате получаем две точки $A_1(–a; 0)$ и $A_2(a; 0)$, которые будем называть *вершинами гиперболы*, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ – *действительной осью*.

Точки пересечения гиперболы с осью Oy будем искать из аналогичной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Данная система решений не имеет, а значит, гипербола не пересекает ось Oy.

Отрезок $B_1B_2 = 2b$, соединяющий точки $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$, называется *мнимой осью гиперболы*.

3. Разрешим рассматриваемое уравнение относительно переменной y. В результате получим

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика гиперболы, на которые она разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $x\in(-\infty; -a] \cup [a; \infty)$.

Рассмотрим данные уравнения при неограниченном удалении переменной x влево и вправо от начала координат. В этом случае постоянной величиной, стоящей под знаком корня, можно пренебречь и уравнения примут вид

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\pm\frac{b}{a}x.$$

Уравнения $y=\dfrac{b}{a}x$ и $y=-\dfrac{b}{a}x$ определяют прямые, пересекающиеся в начале координат и являющиеся продолжением диагоналей основного прямоугольника гиперболы. Можно показать, что при неограниченном удалении переменной x от начала координат расстояние от точки гиперболы до одной из этих прямых стремится к нулю. Поэтому прямые $y=\dfrac{b}{a}x$ и $y=-\dfrac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Разрешим уравнение относительно переменной x, получим

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}.$$

Знак «+» будет соответствовать фрагменту графика гиперболы, лежащему правее оси Oy, а «–» – левее этой оси. Равенство определено для любого значения переменной y.

4. В рассматриваемом уравнении разность неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при увеличении одного слагаемого другое будет тоже возрастать, т. е. при возрастании $|x|$ увеличивается и $|y|$, и наоборот.

Аналогичные рассуждения справедливы для гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси *Oy*. Из приведенных исследований следует, что гипербола – это кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей.

При построении гиперболы целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы и отметить ее вершины. Затем продлить диагонали основного прямоугольника гиперболы на бесконечность, получив при этом ее асимптоты. Расставить точки относительно асимптот, характеризующие неограниченное приближение к ним ветвей гиперболы вдоль действительной оси. Соединить плавной линией эти точки с вершинами гиперболы.

Пример 11. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси *Oy*, проходящей через точки $A(-5;\ 4)$ и $B(1;\ -1)$. Найти полуоси, фокусы. Сделать построения.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси *Oy*, имеет вид $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$

Так как точки *A* и *B* лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению. В результате подстановки координат точек получаем систему уравнений двух неизвестных a и b:

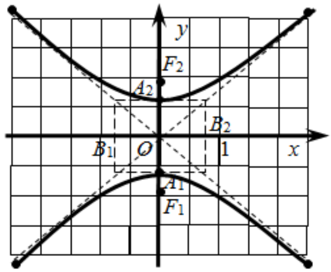
$$\begin{cases} \frac{16}{b^2}-\frac{25}{a^2}=1, \\ \frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=1. \end{cases}$$

Исключим из системы, например, переменную b. Для этого второе уравнение системы умножим на 16 и вычтем из первого уравнения второе. В результате уравнение примет вид $-\frac{9}{a^2}=-15,$ откуда $a^2=\frac{3}{5}$.

Подставив a^2 во второе уравнение системы, получим $b^2=\frac{3}{8}$.

Таким образом, каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, проходящей через точки $A(-5; 4)$ и $B(1; -1)$, будет иметь вид

$$\frac{y^2}{3/8}-\frac{x^2}{3/5}=1.$$



При этом действительная полуось гиперболы $b = \sqrt{\frac{3}{8}} \approx 0{,}612$, а мнимая $a=\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}775$.

Найдем полуфокусное расстояние

$$c=\sqrt{b^2+a^2} = \sqrt{\frac{3}{8}+\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{39}{40}} \approx 0{,}987.$$

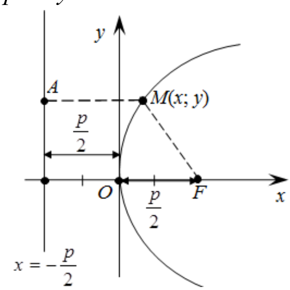
Тогда фокусы гиперболы будут находиться в точках

$$F_1\left(0;-\sqrt{\frac{39}{40}}\right) \text{ и } F_2\left(0;\sqrt{\frac{39}{40}}\right).$$

3.16. Парабола, ее канонические уравнения

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой, лежащих в той же плоскости.

Ось симметрии параболы, вдоль которой располагаются ее ветви, называется *осью параболы*, а точка пересечения параболы с осью – *вершиной параболы*. Отрезок прямой, соединяющий любую точку параболы с фокусом, называется *фокальным радиусом*.



Выведем *каноническое уравнение параболы* с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо вдоль оси Ox. Для этого фокус параболы расположим на оси Ox, а директрису – параллельно оси Oy так, чтобы фокус и директриса отстояли от оси Oy на равных расстояниях $\frac{p}{2}$.

Величину p (расстояние от фокуса до директрисы) будем называть *параметром параболы*.

Из геометрических соотношений $|AM| = |MF|$, $|AM| = x + p/2$, $|MF|^2 = y^2 + (x - p/2)^2$ получаем уравнение $(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$. Раскроем в этом уравнении скобки, приведем подобные слагаемые и выразим y^2. В результате получим

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4,$$

а затем и каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо, вдоль оси Ox

$$y^2 = 2px.$$

По аналогии можно записать следующие уравнения: $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$. Эти уравнения определяют на плоскости параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными соответственно: влево, вдоль оси Ox, вдоль оси Oy вверх и вниз, вдоль оси Oy.

Пример 12. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 6.

Решение. Из уравнения параболы определяем, что ее параметр $p = 4$. Тогда расстояние от любой точки параболы до директрисы вычисляется по формуле $d = x + p/2$. Подставив в данное равенство $d = 6$ и $p = 4$, получим $6 = x + 2$, откуда абсцисса искомой точки равна $x = 4$. Подставим это значение в уравнение параболы, в результате ординаты искомых точек $y_{1,2} = \pm 4\sqrt{2}$. Это означает, что на параболе имеются две точки, отстоящие от директрисы на расстоянии, равном 6, это точки $M_1(4; 4\sqrt{2})$ и $M_2(4; -4\sqrt{2})$.

Пример 13. Построить линию, определяемую уравнением

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{-y}\,.$$

Решение. Из уравнения видно, что оно определено только при $x \le 0$ и $y \le 0$, т. е. это уравнение задает лишь фрагмент некоторой кривой, лежащей в третьей четверти координатной плоскости.

Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения, в результате получим $x^2 = \frac{1}{4}(-y)$ или $y = -4x^2$. Это уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вниз, вдоль оси Oy.

Проанализировав результаты, делаем вывод, что данное уравнение определяет на плоскости левую ветвь параболы $y = -4x^2$. Сделаем построения.

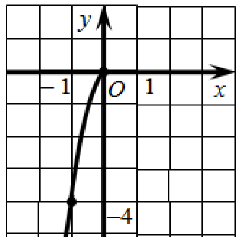
Исследуем форму параболы.

1. В канонические уравнения параболы с вершиной в начале координат лишь одна переменная x или y входит в четной степени. Если это переменная x, то осью симметрии параболы будет являться ось Oy, иначе – ось Ox.

2. Для канонического уравнения вершина параболы находится в начале координат.

3. Разрешим относительно переменной y каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо, вдоль оси Ox. В результате получим

$$y = \pm\sqrt{2px}\ .$$



Знаки правой части данных равенств характеризуют фрагменты графика параболы, на которые она разбивается осью Ox. Знак «+» соответствует фрагменту графика, лежащему над осью Ox, а «–» – под этой осью. Так как $p > 0$, то равенства определены для значений переменной x, изменяющихся в пределах $x \in [0; \infty)$ и любого значения переменной y.

3.17. Построение графика параболы

В общем виде уравнение параболы может быть представлено как:

$y = ax^2 + bx + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси, параллельной Oy;

$x = ay^2 + by + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси параллельной Ox.

Параметр a определяет направление ветвей параболы. Так, если $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх вдоль оси Oy, иначе (если $a < 0$) – вниз вдоль этой оси. Для уравнения $x = ay^2 + by + c$ при $a > 0$ ветви параболы направлены вправо, а при $a < 0$ – влево вдоль оси Ox.

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c$ абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_в = -b/2a$. Аналогично $y_в = -b/2a$ можно найти ординату параболы $x = ay^2 + by + c$. Другую координату вершины параболы определяют путем подстановки найденной координаты в правую часть соответствующего равенства.

График параболы характеризуется тремя точками, одна из которых вершина, а две другие располагаются на различных ее ветвях. Поэтому для построения графика параболы обычно придерживаются следующей схемы.

Для определенности положим, что требуется построить график параболы $x = -2y^2 + 8y + 1$. Для этого выполним следующие действия.

1. Определяем, как располагается парабола (направление ее ветвей).

Ветви данной параболы направлены вдоль оси Ox влево.

2. Найдем координаты вершины параболы. Ординату вершины параболы определим по формуле

$$y_в = -b / 2a = -8 / (2 \cdot (-2)) = 2.$$

Абсциссу вершины найдем путем подстановки ординаты в уравнение параболы $x = -2y^2 + 8y + 1$

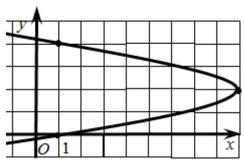
$$x_в = -2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 1 = 9.$$

Таким образом, вершина параболы будет располагаться в точке с координатами (9; 2).

3. Найдем координаты двух точек, расположенных на разных ветвях параболы.

Данные точки удобно выбрать так, чтобы их ординаты располагались симметрично ординате вершины. В таком случае абсциссы этих точек будут совпадать.

Возьмем в качестве ординат искомых точек $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Тогда абсциссы их будут равны: $x_{1,2} = -2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$. Найденные точки будут иметь координаты (1; 0) и (1; 4).



4. Построим параболу.

3.18. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общим уравнением кривой второго порядка называется уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Это уравнение всегда определяет на плоскости либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). Однако возможны случаи вырождения, когда эллипс вырождается в окружность или точку, гипербола – в пару пересекающихся прямых, парабола – в пару параллельных прямых.

При этом справедливо утверждение, что любую кривую второго порядка, записанную общим уравнением, можно элементарными преобразованиями на плоскости привести к каноническому виду. К таким элементарным преобразованиям относятся *поворот* и *параллельный перенос* координатных осей.

Поворот координатных осей на угол α. Если в общем уравнении кривой второго порядка $B \neq 0$, то из него можно исключить слагаемое с произведением координат $x \cdot y$ за счет поворота координатных осей на угол $\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2B}{A-C}\right)$. Используя формулы поворота координатных осей $x = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha)$; $y = x' \sin(\alpha) - y' \cos(\alpha)$, общее уравнение кривой второго порядка примет вид

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F = 0,$$

где $A' = A\cos^2(\alpha) + 2B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\sin^2(\alpha)$;

$C' = A\sin^2(\alpha) - 2B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\cos^2(\alpha)$;

$D' = 2D\cos(\alpha) + 2E\sin(\alpha)$;

$E' = 2D\sin(\alpha) + 2E\cos(\alpha)$.

Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса координатных осей. Предположим, что в общем уравнении кривой второго порядка $B = 0$, т. е. оно имеет вид $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Тогда, для того чтобы привести данное уравнение к каноническому виду, необходимо выполнить ряд действий.

1. Сгруппировать слагаемые по переменным:

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) + F = 0 .$$

2. Вынести за скобки коэффициенты, стоящие перед квадратами переменных:

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0.$$

3. Выделить полные квадраты в скобках:

$$A\left(\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + C\left(\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) + F = 0.$$

4. Раскрыть внешние скобки и привести подобные:

$$A\cdot\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\cdot\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4C^2}-F\right)=0.$$

5. Перенести свободный член уравнения в правую его часть и разделить обе его части на эту величину:

$$\frac{A\cdot\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4C^2}-F}+\frac{C\cdot\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4C^2}-F}=1.$$

6. Ввести следующие обозначения

$$a^2=\frac{C^2D^2+A^2E^2-4A^2C^2F}{4A^2C^2},\quad b^2=\frac{C^2D^2+A^2E^2-4A^2C^2F}{4A^2C^2}$$

и произвести переход к новой системе координат с помощью преобразований:

$$\begin{cases} x'=x+\dfrac{D}{2A}, \\ y'=y+\dfrac{E}{2C}. \end{cases}$$

В результате получим каноническое уравнение одной из кривых второго порядка:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

с центром в точке $O'(-\dfrac{D}{2A};-\dfrac{E}{2C})$, которая является началом новой системы координат.

Пример 14. Привести уравнение $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ к каноническому виду и построить данную кривую второго порядка.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду.

1. Избавимся от коэффициентов при квадратах переменных, для этого обе части уравнения разделим на 2:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0.$$

2. Сгруппируем слагаемые в уравнении по переменным:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2{,}5y) - 2 = 0.$$

3. Выделим в скобках полные квадраты:

$$((x-2)^2-4)+((y+\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16})-2=0.$$

4. Раскроем внешние скобки и приведем подобные:

$$(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2-\frac{121}{16}=0.$$

5. Перенесем свободный член уравнения в правую его часть и разделим на эту величину обе его части:

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{121}{16}}+\frac{\left(y+\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{121}{16}}=1.$$

6. Введем обозначения:

$$a^2=\frac{121}{16},\ \ b^2=\frac{121}{16}.$$

Выполним параллельный перенос координатных осей

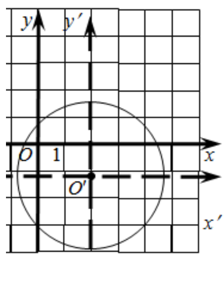
$$\begin{cases} x'=x-2, \\ y'=y+\frac{5}{4}. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $\frac{(x')^2}{\frac{121}{16}}+\frac{(y')^2}{\frac{121}{16}}=1.$

Это уравнение эллипса, но можно заметить, что его полуоси равны, поэтому в данном случае эллипс вырождается в окружность с радиусом $R=\sqrt{\frac{121}{16}}=\frac{11}{4}.$

Для того чтобы определить центр окружности и ее построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x=x'+2, \\ y=y'-\frac{5}{4}. \end{cases}$$



Тогда центр новой системы координат, а значит, и центр окружности будет находиться в точке $O'(2;-\frac{5}{4})$.

Сделаем построения.

Пример 15. Привести уравнение $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$ к каноническому виду и построить данную кривую второго порядка.

Решение. $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$; $8(x^2 - x) + 9y^2 - 16 = 0$;

$8\cdot((x-1/2)^2 - 1/4) + 9y^2 - 16 = 0$; $8\cdot(x-1/2)^2 + 9y^2 - 18 = 0$;

$$8\cdot(x-1/2)^2 + 9y^2 = 18;\ \frac{(x-1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

В данном случае $a^2 = \dfrac{9}{4}$, $b^2 = 2$. Выполним параллельный перенос координатных осей:

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{2}, \\ y' = y. \end{cases}$$

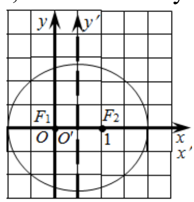
В результате получим уравнение $\dfrac{(x')^2}{9/4} + \dfrac{(y')^2}{2} = 1.$

Для того чтобы определить центр эллипса и его построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{1}{2}, \\ y = y'. \end{cases}$$

Тогда центр новой системы координат, а значит, и центр окружности будет находиться в точке $O'(\dfrac{1}{2}; 0)$.

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1/2 вправо, большая полуось a равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, полуфокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1/2$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a = 1/3$. Фокусы эллипса находятся на оси $O'x'$ и в новой системе имеют координаты $F'_1(-1/2; 0)$ и $F'_2(1/2; 0)$, а в старой – $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.



Сделаем построения.

Пример 16. Определить тип кривой $9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0$, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду:

$$9x^2+90x-16y^2+81=0,\quad (9x^2+90x)-16y^2+81=0;$$

$$9(x^2+10x)-16y^2+81=0,\quad 9((x+5)^2-25)-16y^2+81=0;$$

$$9(x+5)^2-225-16y^2+81=0,\quad 9(x+5)^2-16y^2=144;$$

$$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

В данном случае $a^2=16$, $b^2=9$. Выполним параллельный перенос координатных осей:

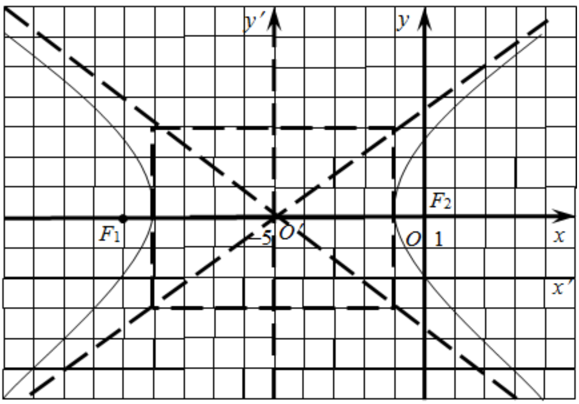
$$\begin{cases} x'=x+5, \\ y'=y. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $\dfrac{(x')^2}{16}-\dfrac{(y')^2}{9}=1.$

Для того чтобы определить центр гиперболы и построить ее, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x=x'-5, \\ y=y'. \end{cases}$$

Сделаем построения.



Центр окружности будет находиться в точке $O'(-5;\ 0)$. Действительная полуось гиперболы a = 4, мнимая полуось b = 3, полуфокусное расстояние $c=\sqrt{a^2+b^2}$ = 5, эксцентриситет $\varepsilon = c/a$ = 5/4.

Фокусы гиперболы находятся на оси $O'x'$ и в новой системе имеют координаты $F'_1(-5; 0)$ и $F'_2(5; 0)$, а в старой – $F_1(-10; 0)$ и $F_2(0; 0)$.

Пример 17. Привести уравнение линии к каноническому виду и построить ее: $-2x^2 - y + 8x - 5 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение $y = -2x^2 + 8x - 5$.

$$y = -2(x^2 - 4x) - 5, \quad y = -2((x-2)^2 - 4) - 5, \quad y = -2(x-2)^2 + 3,$$

$$y - 3 = -2(x-2)^2, \quad (x-2)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(y-3).$$

Выполним параллельный перенос координатных осей

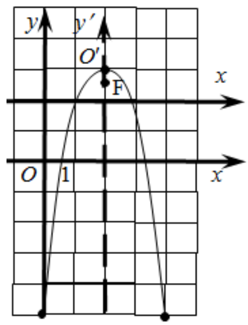
$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

В результате получим уравнение $(x')^2 = -0{,}5y'$. Для того чтобы определить координаты вершины параболы и ее построить, выразим из системы, определяющей параллельный перенос, координаты x и y:

$$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 3. \end{cases}$$

Получим уравнение параболы с вершиной в точке (2; 3), $2p = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, т. е. $F\left(2; 2\frac{7}{8}\right)$.

Сделаем построения.



3.19. Уравнения поверхности и линии в пространстве

В аналитической геометрии любую поверхность в пространстве можно рассматривать как *геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию*.

Например, сфера радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ есть геометрическое место точек пространства, равноудаленных на расстояние R от заданной точки M_0, называемой центром сферы.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y, z – их координатами. Общее свойство, присущее точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, которое связывает их координаты.

Множество всех точек пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $F(x;\ y;\ z) = 0$, называется *поверхностью*. Данное равенство называется *уравнением* данной *поверхности* S, если соблюдены следующие два условия:

а) координаты любой точки поверхности S удовлетворяют уравнению;

б) координаты любой точки, не принадлежащей поверхности S, не удовлетворяют этому уравнению.

Переменные x, y, z в уравнении поверхности называются *текущими координатами* точек поверхности.

Например. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиусом R.

Сфера – это геометрическое место точек, равноудаленных от одной данной точки M_0 на расстояние R.

Возьмем на поверхности сферы текущую точку $M(x;\ y;\ z)$. Расстояние от точки M_0 до точки M равно R, следовательно, $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$.

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2},$$

$$\text{т. е. } \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2} = R$$

$$\text{или } \left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2 = R^2.$$

Полученное уравнение – это *уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ радиуса R.*

Например, уравнение $x^2+y^2+z^2-4x+8y-5=0$ определяет сферу $(x-2)^2+(y+4)^2+z^2=25$ с центром в точке (2; – 4; 0) и радиусом 5.

Линию в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, принадлежащих двум поверхностям: $F_1\left(x;y;z\right)=0$ и $F_2\left(x;\ y;\ z\right)=0$. Таким образом, *уравнения* любой *линии* в пространстве можно записать в виде системы двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z)=0, \\ F_2(x;\ y;\ z)=0. \end{cases}$$

Например, прямая, совпадающая с осью Oy, определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

а результатом пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $z = \frac{1}{2}$

является линия $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}, \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Таким образом, данная линия имеет уравнение $x^2 + y^2 = 3/4$ и является окружностью, лежащей в плоскости $z = 0,5$ с центром в начале координат $O(0; 0; 0)$ и радиусом $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Линию в пространстве также можно рассмотреть как траекторию движения точки. В этом случае ее задают *векторным уравнением* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или системой *параметрических уравнений*:

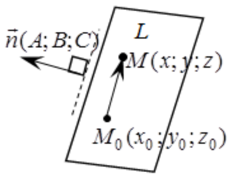
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Для того чтобы составить уравнения поверхности или линии в пространстве, на них выбирают текущую точку $M(x; y; z)$ и посредством координат выбранной точки аналитически выражают свойства, присущие всем точкам рассматриваемой поверхности или линии.

Для изучения формы поверхностей, как правило, пользуются методом сечений. Сущность этого метода заключается в том, что изучаемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям и следующими друг за другом через одинаковые, достаточно малые числовые промежутки. Если для каждого сечения построить его проекцию на соответствующую координатную плоскость, то получится множество кривых, которое называется *картой поверхности в горизонталях.* Эта карта дает некоторое представление как обо всей поверхности, так и о некоторых ее участках.

Например, сгущение линий на карте означает возрастание крутизны поверхности на соответствующем участке.

3.20. Уравнение плоскости в пространстве



Простейшей поверхностью является плоскость. Она может быть задана различными способами, различающимися видом уравнения.

1. С каждой плоскостью связан ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости. Этот вектор называется *нормальным вектором плоскости*. В качестве нормального вектора плоскости можно взять любой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Пусть искомая плоскость L проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B;C)$. Выберем на плоскости текущую точку $M(x;\ y;\ z)$ и найдем координаты вектора:

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0).$$

Можно заметить, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны. Это означает, что их скалярное произведение будет равно нулю.

Таким образом, *уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}(A;\ B;\ C)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

2. В записанном выше уравнении раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. В результате уравнение плоскости примет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Полученное уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

В частности:

– если $D = 0$, то имеем $Ax + By + Cz = 0$. Это уравнение определяет в пространстве плоскость, проходящую через начало координат;

– если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет в пространстве плоскость, параллельную оси Oz. При $B = 0$ уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а при $A = 0$ уравнение $By + Cz + D = 0$ – плоскость, параллельную оси Ox соответственно;

– если $C = D = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ соответствует плоскости, проходящей через ось Oz. В аналогичных случаях уравнения

$Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ соответствуют плоскостям, проходящим через оси Oy и Ox;

– если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ описывает плоскость, параллельную Oxy. Соответственно уравнения $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ характеризуют плоскости, параллельные Oyz и Oxz;

– уравнения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в пространстве определяют плоскости Oyz, Oxz и Oxy соответственно.

Пример 18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -4; 1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(1; -5; 2)$. Записать общее уравнение этой плоскости.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярно данному вектору, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Так как по условию $A = 1$, $B = -5$, $C = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -4$, $z_0 = 1$, то подставив эти значения в уравнение, получим

$$1 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (y + 4) + 2 \cdot (z - 1) = 0,$$

или общее уравнение плоскости будет иметь вид $x - 5y + 2z - 24 = 0$.

3. В пространстве плоскость однозначно определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Найдем уравнение плоскости L, проходящей через три данные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой.

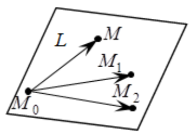
Выберем в искомой плоскости L текущую точку $M(x; y; z)$ и проведем векторы, выходящие из одной общей точки, например, M_0 с концами в точках M, M_1, M_2 соответственно.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_2}(x_2 - x_0;\ y_2 - y_0;\ z_2 - z_0).$$



Эти векторы лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарны. Критерием компланарности тройки векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Поэтому *уравнение плоскости L, проходящей через три данные точки*, будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

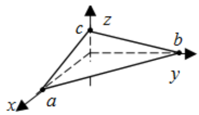
4. Пусть плоскость отсекает на осях *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через точки $M_0(a;\ 0;\ 0)$, $M_1(0;\ b;\ 0)$ и $M_3(0;\ 0;\ c)$.

Тогда согласно приведенному выше уравнению можем записать

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получим $bcx - abc + abz + acy = 0$, или $bcx + abz + acy = abc$. Разделим обе части уравнения на число, стоящее в правой его части. Тогда равенство примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Данное уравнение называется уравнением плоскости в отрезках на координатных осях. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Пример 19. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 3;\ 5)$, $B(-1;\ 2;\ 2)$, $C(2;\ -3;\ 7)$. Определить вектор нормали этой плоскости и построить ее.

Решение. Воспользуемся *уравнением плоскости, проходящей через три данные точки*,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -1-1 & 2-3 & 2-5 \\ 2-1 & -3-3 & 7-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} -$$

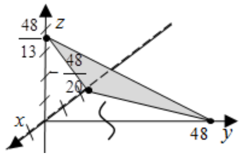
$$-(y-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -20x + y + 13z - 48,$$ т. е. искомая плоскость определяется уравнением

$$-20x + y + 13z - 48 = 0, \text{ или } 20x - y - 13z + 48 = 0.$$

Таким образом, одним из векторов нормалей для этой плоскости будет являться вектор $\overline{n}(20; -1; -13)$. Для построения плоскости преобразуем ее уравнение к уравнению в отрезках на осях координат:

$$20x - y - 13z + 48 = 0,\ 20x - y - 13z = -48, \text{ или } \frac{x}{-48/20} + \frac{y}{48} + \frac{z}{48/13} = 1.$$

Данная плоскость отсекает от осей координат следующие отрезки:



$a = -\dfrac{48}{20} \approx -2,4$ от оси Ox, $b = 48$ от оси Oy,

$c = \dfrac{48}{13} \approx 3,69$ от оси Oz.

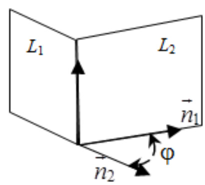
3.21. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до плоскости

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Углом между плоскостями будем считать угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$, который определятся по формуле



$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости параллельны, то векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны и их координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Эти равенства являются *условием параллельности двух плоскостей*.

Если же плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это равенство является *условием перпендикулярности двух плоскостей.*

Пример 20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(2;\ 4;\ -1)$ параллельно плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости равен $\vec{n}(3;\ -2;\ 1)$. Так как искомая плоскость параллельна заданной, то в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять этот же вектор. Подставим координаты точки A и вектора $\vec{n}$ в уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$$3(x-2) - -2(y-4) + (z+1) = 0, \text{ или } 3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Пример 21. Определить угол между плоскостями $2x + y - 2z + 3 = 0$ и $x + y - 5 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами и определяется по формуле

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Запишем нормальные векторы для данных плоскостей: $\vec{n}_1(2;\ 1;\ -2)$, $\vec{n}_2(1;\ 1;\ 0)$. Подставим координаты этих векторов в формулу

$$\cos(\varphi) = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Следовательно, $\varphi = 45°$.

Пример 22. Даны пары плоскостей:

а) $3x - 4y + 5z - 3 = 0$ и $6x - 8y + 10z + 5 = 0$;

б) $2x - y + 5z - 5 = 0$ и $4x + 3y - z + 1 = 0$;

в) $x - 3y + z - 1 = 0$ и $2x + 4y - 3z + 2 = 0$.

Определить, какие из них параллельны, а какие – перпендикулярны.

Решение. 1. Запишем нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1(3;\ -4;\ 5)$ и $\vec{n}_2(6;\ -8;\ 10)$. Так как координаты векторов пропорциональны: $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{5}{10}$, то выполняется условие параллельности плоскостей, т. е. плоскости параллельны.

2. Нормальными векторами плоскостей являются следующие векторы $\vec{n}_1(2;\ -1;\ 5)$ и $\vec{n}_2(4;\ 3;\ -1)$. Скалярное произведение векторов

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 0,$ что является условием перпендикулярности плоскостей. Следовательно, плоскости перпендикулярны.

3. Плоскости имеют нормальные векторы $\vec{n}_1(1;\,-3;\,1)$ и $\vec{n}_2(2;\,4;\,-3)$. Координаты этих векторов не пропорциональны, т. е. $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{-3}$, и скалярное произведение векторов не равно нулю: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \; = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \neq 0$. Следовательно, заданные плоскости не параллельны и не перпендикулярны.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до плоскости, которая задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0,$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 23. Найти расстояние d от точки $A(4;\,–6;\,6)$ до плоскости $3x - 5y + 5z - 13 = 0.$

Решение. Воспользуемся формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 4 - 5 \cdot (-6) + 5 \cdot 6 - 13|}{\sqrt{9 + 25 + 25}} = \frac{|59|}{\sqrt{59}} = \sqrt{59}.$$

3.22. Прямая в пространстве

С любой прямой в пространстве связан ненулевой вектор, который лежит на этой прямой или ей параллельный.

Такой вектор называется *направляющим вектором прямой* и обозначается $\vec{s}(l;\,m;\,n)$.

По аналогии с уравнением прямой в плоскости *уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(l;\,m;\,n)$ в пространстве* (или *канонические уравнения прямой*), могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Рассмотрим данные равенства как пропорции с коэффициентом пропорциональности t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t, \text{ или } \frac{x-x_0}{l}=t, \ \frac{y-y_0}{m}=t, \ \frac{z-z_0}{n}=t$$

и выразим из них текущие координаты точки, принадлежащей заданной прямой. В результате получим *параметрические уравнения прямой:*

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Пример 24. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;3)$ параллельно вектору $\vec{s}(2;-1;3)$.

Решение. По условию $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, $l=2$, $m=-3$, $n=1$.

Подставим эти величины в канонические и параметрические уравнения прямой. В результате получим:

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2-3t, \\ z=3+t \end{cases} \text{ и } \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}.$$

Рассмотрим случай, когда прямая в пространстве задается двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда по аналогии с уравнением прямой на плоскости у*равнения прямой, проходящей через две точки*, имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример 25. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-3;2)$ и $M_2(-1;2;4)$.

Решение. Подставим координаты заданных точек в уравнения: $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y-(-3)}{2-(-3)}=\dfrac{z-2}{4-2}$, или $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-2}{2}$. Последние уравнения являются каноническими уравнениями прямой, где $x_0=1$, $y_0=-3$, $z_0=2$, $l=-2$, $m=5$, $n=2$. Подставим в параметрические уравнения прямой и получим искомые уравнения:

$$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-3+5t, \\ z=2+2t. \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Такой способ задания прямой в пространстве называется *общими уравнениями прямой*.

Часто на практике требуется от общих перейти к каноническим уравнениям прямой. В этом случае координаты произвольной точки M_0 прямой можно определить из приведенной выше системы, придав одной из ее неизвестных произвольное значение (например, $z=0$). Так как плоскости не параллельны, а искомая прямая перпендикулярна векторам $\vec{n}_1(A_1;\,B_1;\,C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;\,B_2;\,C_2)$, то за ее направляющий вектор можно принять векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 26. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения произвольной точки прямой примем ее координату $x=0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений:

$$\begin{cases} y=3z-1, \\ 4y-z-7=0, \end{cases} \begin{cases} y=3z-1, \\ 12z-4-z-7=0, \end{cases} \begin{cases} y=3z-1, \\ z=1, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ z=1, \end{cases}$$ т. е. $A(0;\,2;\,1)$.

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}\,.$$

Тогда канонические уравнения прямой будут иметь следующий вид:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Пример 27. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Разрешим данную систему относительно x и y. Первое уравнение умножим на (–2):

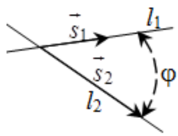
$$\begin{cases} -4x - 2y + 10z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Сложим со вторым и получим: $-x + 6z - 4 = 0$, или $x = 6z - 4$. Подставим в первое уравнение: $2(6z-4) + y - 5z + 3 = 0$, или $y = -7z + 5$. Полученные равенства разрешим относительно z: $z = \dfrac{x+4}{6}$ и $z = \dfrac{y-5}{-7}$. Тогда можно записать $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z}{1}$. Получены канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух данных плоскостей.

3.23. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть даны две прямые, заданные уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$



$$\text{и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1(l_1;\ m_1;\ n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\ m_2;\ n_2)$ – их направляющие векторы.

Углом между прямыми будем считать угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1(l_1;\ m_1;\ n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\ m_2;\ n_2)$, который определяется по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$. Эти соотношения являются *условием параллельности двух прямых*.

Две прямые взаимно перпендикулярны, если их направляющие векторы $\vec{s}_1(l_1;\ m_1;\ n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\ m_2;\ n_2)$ ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$l_1l_2+m_1m_2\ +n_1n_2=0\ .$$

Это равенство выражает *необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых*.

Пример 28. Даны пары прямых:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}$ и $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{-8}$;

б) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ и $\frac{x+2}{4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{-8}$;

в) $\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+4}{1}$ и $\frac{x-6}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Определить, какие из этих пар прямых параллельны, а какие – взаимно перпендикулярны. В случае если прямые не являются параллельными или перпендикулярными, определить угол между ними.

Решение. 1. Направляющие векторы прямых $\vec{s}_1(2;\ -3;\ 4)$ и $\vec{s}_2(-4;\ 6;\ -8)$. Координаты векторов пропорциональны: $\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}=$

$= \frac{-8}{4}$. Так как условие параллельности прямых выполняется, то прямые параллельны.

2. Направляющими векторами прямых являются $\vec{s}_1(3;\,-2;\,1)$ и $\vec{s}_2(4;\,2;\,-8)$. Их скалярное произведение равно нулю: $3\cdot 4+(-2)\cdot 2+$ $+1\cdot(-8)=0$. В данном случае выполняется условие перпендикулярности прямых, т. е. прямые взаимно перпендикулярны.

3. Координаты направляющих векторов $\vec{s}_1(1;\,0;\,1)$ и $\vec{s}_2(2;\,-2;\,1)$ прямых не пропорциональны и скалярное произведение этих векторов не равно нулю, т. е. прямые не параллельны и не перпендикулярны. Найдем угол между прямыми, который равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos(\varphi)=\frac{1\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

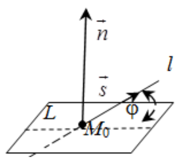
Следовательно, $\varphi=45°$.

3.24. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть заданы прямая уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.



Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Определяется он по формуле

$$\sin(\varphi)=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор $\vec{s}(l;\,m;\,n)$ прямой и нормальный вектор $\vec{n}(A;\,B;\,C)$ плоскости ортогональны. Следовательно, равенство нулю скалярного произведения этих векторов $Al+Bm+Cn=0$ является *условием параллельности прямой и плоскости.*

Если же прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{s}(l;\ m;\ n)$ и $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ коллинеарны и соотношение $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ является *условием перпендикулярности прямой и плоскости*.

Пример 29. Даны прямая и плоскость:

а) $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{-2}$ и $3x-4y+z-3=0$;

б) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{1}$ и $2x+y-4z+1=0$;

в) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z+4}{2}$ и $2x-4y+2z-9=0$.

Определить, какие из заданных пар параллельны или перпендикулярны. В случае если прямая и плоскость не являются параллельными или перпендикулярными, определить угол между ними.

Решение. 1. Направляющим вектором прямой является вектор $\bar{s}(-6;\ 8;\ -2)$, а нормальным вектором плоскости – вектор $\vec{n}(3;\ -4;\ 1)$. Координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{3}{-6}=\frac{-4}{8}=\frac{1}{-2}.$$

Следовательно, прямая перпендикулярна плоскости.

2. Координаты направляющего вектора $\vec{s}(3;\ -2;\ 1)$ прямой и нормального вектора $\vec{n}(2;\ 1;\ -4)$ плоскости удовлетворяют условию параллельности прямой и плоскости: $2\cdot 3+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 1=0$. Это означает, что прямая параллельна плоскости.

3. Координаты направляющего вектора $\vec{s}(-1;\ -1;\ 2)$ прямой и нормального вектора $\vec{n}(2;\ -4;\ 2)$ плоскости не удовлетворяют ни условию параллельности, ни условию перпендикулярности прямой и плоскости. Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin(\varphi)=\frac{\left|2\cdot(-1)+(-4)\cdot(-1)+2\cdot 2\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются под углом $\varphi=30°$.

В случае когда требуется найти координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве, выполняют приведенные ниже вычисления.

1. Так как искомая точка принадлежит и плоскости, и прямой, то необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

2. Для этого канонические уравнения прямой преобразуют к параметрическому виду:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t,$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

3. Подставим в четвертое уравнение системы правые части первых трех равенств, получим

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0.$$

Выразим из него значение параметра t:

$$t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}.$$

4. В результате подстановки значения параметра в правые части первых трех равенств получим координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве:

$$x = x_0 - l\cdot\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn},$$

$$y = y_0 - m \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn},$$

$$z = z_0 - n \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Пример 30. Известно, что прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{2}$ и плоскость $x + 2y - z - 1 = 0$ пересекаются в точке P. Найти координаты этой точки.

Решение. Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим: $\frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+4}{2} = t,\ \frac{z-5}{2} = t,$ или $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$

Полученные выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости и найдем параметр t:

1-й способ: $2 + 3t + 2(-4 + 2t) - (5 + 2t) - 1 = 0,\ \ 5t - 12 = 0,\ \ t = \frac{12}{5};$

2-й способ: $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} = -\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 - 1}{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2} = \frac{12}{5}.$

Найденный параметр t подставим в параметрические уравнения плоскости и найдем координаты пересечения прямой и плоскости:

$$x = 2 + 3 \cdot \frac{12}{5} = 9\frac{1}{5},\ \ y = -4 + 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5},\ \ z = 5 + 2 \cdot \frac{12}{5} = 9\frac{4}{5}.$$

Таким образом, точка $P(9\frac{1}{5};\ \frac{4}{5};\ 9\frac{4}{5})$ пересечения прямой и плоскости найдена.

Задания для самостоятельной работы

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3; -4)$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $B(2;\ -3)$ под углом $45°$ к оси Ox.

3. Найти угол между прямыми:

а) $5x - y + 3 = 0$ и $3x + 2y - 4 = 0$; б) $3x - 2y + 5 = 0$ и $2x + 3y - 8 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ -4)$ параллельно прямой $3x - 2y + 5 = 0$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(–3;\ 2)$ перпендикулярно прямой $2x + 5y – 3 = 0$.

6. Найти величины отрезков, отсекаемых на координатных осях прямыми: а) $3x – 2y – 6 = 0$; б) $4x + 5y – 20 = 0$.

7. Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $4x – 7y – 28 = 0$.

8. Найти расстояние от точки $A(–2;\ 4)$ до прямой $3x + 4y – 20 = 0$.

9. Найти длину перпендикуляра, проведенного из точки $A(6;\ 2)$ к прямой $4x + 3y – 10 = 0$.

10. Найти точку B, симметричную точке $A(4;\ 5)$ относительно прямой $8x + 6y – 37 = 0$.

11. Даны вершины треугольника $A(–2;\ 7)$, $B(10;\ –2)$, $C(8;\ 12)$. Найти уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты, уравнение высоты CD и ее длину, уравнение медианы CM.

12. Написать уравнение окружности радиусом R с центром в точке M:

а) $R=1,\quad M(-5;\ 0)$; б) $R=6,\quad M(-1;\ 2)$.

13. Построить кривые второго порядка на координатной плоскости:

а) $x^2+9y^2=9$; б) $x^2-10y^2=1$; в) $-4x^2+9y^2=9$; г) $5x^2+2y^2=4$.

Показать фокусы и полуоси.

14. Написать уравнение параболы с вершиной в точке $O(0;\ 0)$ и параметром p, если

а) парабола направлена ветвями вправо и $p=2$;

б) парабола направлена ветвями влево и $p=0{,}25$.

15. Преобразовать заданные уравнения к каноническому виду и построить соответствующие линии или их части:

а) $8x^2-9y^2-32x-18y+199=0$; б) $y=x^2-3x+4$;

в) $8x^2+25y^2+32x-100y-24=0$; г) $y=-\dfrac{1}{5}\sqrt{x^2+3}$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ -4;\ 3)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(1;-3;\ 2)$.

17. Даны точки $A(2;-1;\ 3)$ и $B(4;-5;-2)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно отрезку AB.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;\ 1)$ перпендикулярно оси Oy.

19. Найти угол между плоскостями

$$5x-y+3z-2=0 \text{ и } -x+2y+10z-7=0\ .$$

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-4;1)$ параллельно плоскости $5x-3y+4z-7=0$.

21. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-3;1)$ параллельно плоскости $3x-2y+4z-5=0$.

22. Даны точки $A(2;3;-4)$, $B(1;0;6)$, $C(-3;-1;5)$. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно отрезку BC.

23. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-4;1)$ параллельно оси Oz.

24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;1;-4)$ параллельно прямой $x=2-3t$, $y=-1+t$, $z=5t$.

25. Даны вершины треугольника $A(1;3;-2)$, $B(4;1;0)$, $C(3;-3;2)$. Составить уравнение медианы CM.

26. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+6}{7}=\frac{z+2}{8} \text{ и } \frac{x+5}{-8}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+4}{7}.$$

27. Составить канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей $\begin{cases} x+2y+z-8=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$

28. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;-4;2)$ параллельно прямой $\begin{cases} 7x+y+z-8=0, \\ 6x+y-2z-7=0. \end{cases}$

29. Вычислить угол между прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-6}{1}$ и плоскостью $4x+2y-2z+5=0$.

30. Найти координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(6;1;7)$ на плоскость $2x-y+3z-4=0$.

31. Найти координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(3;2;0)$ на прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{-2}$.

32. Найти точку N, симметричную точке $M(3;-2;5)$ относительно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+9}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

Лекция 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1. Понятие функции

Пусть задано множество $D = \{x\}$ изменения переменной величины x. Если каждому значению величины $x \in D$ соответствует одно определенное значение величины y, то говорят, что на множестве D задана ***функция*** $y = f(x)$, т. е. величина y есть функция величины x. Способ задания функции с помощью формулы называют ***аналитическим***.

Величина x называется ***аргументом*** функции y, множество D – ***областью определения функции***.

Примечание. В дальнейшем под областью определения функции $y = f(x)$ будем понимать множество всех тех значений x, для которых функция $y = f(x)$ имеет смысл.

Так как значение величины $x \in D$ можно брать произвольно, а значение величины y зависит от выбранного значения x, то x называется ***независимой переменной***, а y – ***зависимой переменной***. Множество значений, принимаемых функцией y, называется ***областью значений функции***. Значение функции при $x = x_0$ называется ***частным значением функции*** в точке x_0 и обозначается $f(x_0)$.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(–x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат. Примерами четных функций являются степенные функции $y = x^n$, в случае когда n – целое четное число, $y = \cos(x)$, $y = |x|$, $y = C$ (где C = const) и т. д.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(–x) = –f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примерами нечетных функций являются степенные функции $y = x^n$, в случае когда n – целое нечетное число, $y = \sin(x)$, $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$, $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \arcsin(x)$.

Если условие четности или нечетности для рассматриваемой функции не выполняется, ее называют ***функцией общего вида.***

Примерами функций общего вида являются функции $y = ax + b$, $y = \mathrm{arcctg}(x)$, $y = \arccos(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x) = f(x–T)$. Число T называется ***периодом функции*** $y = f(x)$.

Если T – период функции $y = f(x)$, то число вида kT, где k – любое целое число, также является периодом функции. Наименьший среди множества положительных периодов называют ***основным периодом***.

Примерами периодических функций служат функции: $y = \{x\}$, $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на некотором числовом промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Другими словами, функция возрастает на промежутке, если большему значению аргумента на этом промежутке соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на некотором числовом промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция убывает на промежутке, если большему значению аргумента на этом промежутке соответствует меньшее значение функции.

Различают также ***неубывающие и невозрастающие*** функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей*** на некотором числовом промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***невозрастающей*** на некотором числовом промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие (каждая в отдельности!) функции называют ***монотонными***.

Интервалы возрастания и убывания функции называются ***интервалами монотонности*** функции.

К примеру, функция $y = \sin x$ в общем случае не является монотонной. Однако она имеет бесконечное количество участков монотонности.

Пример 1. Вычислить значение функции $y = x^4 - 3x + 1$ при $x = -1$.

Решение. Частное значение данной функции в точке $x = -1$ равно $y = (-1)^4 - 3 \cdot (-1) + 1 = 5$.

Пример 2. Вычислить значение функции

$$y=\begin{cases} 2x-1, & \text{если} \quad x<0, \\ 5x^2+3, & \text{если} \quad 0\le x<3, \\ 1, & \text{если} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

при а) x = –3; б) x = 2; в) x = 4.

Решение: а) так как $x=-3<0$, то $y=2x-1$. Поэтому частное значение функции равно $y=2\cdot(-3)-1=-7$;

б) $x=2\in[0;\ 3)$. Поэтому $y=5x^2+3$, и частное значение функции равно $y=5\cdot 2^2+3=23$;

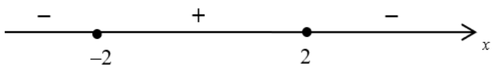
в) в данном случае $x=4>3$. Следовательно, y = 1.

Пример 3. Найти область определения функции $y=\dfrac{5}{1-x}$.

Решение. Так как $1-x\ne 0$, т. е. $x\ne 1$, то
$D(y)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 4. Найти область определения функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

Решение. Выражение под знаком корня квадратного должно быть неотрицательным, т. е. $4-x^2\ge 0$. Решим это неравенство методом интервалов: $(2-x)(2+x)\ge 0$.



Таким образом, $D(y)=[-2;\ 2]$.

Пример 5. Найти область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{6-x}}{x-2}$.

Решение. Для данной функции $\begin{cases} 6-x\ge 0, \\ x-2\ne 0, \end{cases}$ т. е. $x\le 6$ и $x\ne 2$. Поэтому $D(y)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 6]$.

Пусть функция $y=f(u)$ определена на множестве $U=\{u\}$, а функция $u=\varphi(x)$ – на множестве $X=\{x\}$, причем все значения функции $u\in U$. Тогда переменная y является функцией от x: $y=f(\varphi(x))$.

В этом случае y называется ***сложной функцией***, а переменная u – ***промежуточным аргументом***.

Например, $y = \sin u$ и $u = 3x - 4$. Тогда $y = \sin(3x - 4)$ является сложной функцией.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D = \{x\}$ и пусть $G = \{y\}$ – область значений функции. Это означает, что каждому значению $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in G$. Если же каждому значению $y \in G$ соответствует только одно значение $x \in D$, то на множестве G можно определить функцию $x = \varphi(y)$, которая называется ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$. В этом случае функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются ***взаимообратными***. Например, взаимообратными являются функции $y = 3^x$ и $x = \log_3 y$. Пусть дана функция $y = 3x - 4$. Тогда функция $x = \dfrac{y+4}{3}$ будет обратной для данной, т. е. эти функции являются взаимообратными.

При исследовании функций и построении графиков независимую переменную обратной функции удобно обозначать через x, а зависимую переменную – через y. Тогда взаимообратными являются функции $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$, $y = 3x - 4$ и $y = \dfrac{x+4}{3}$. Графики взаимообратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно прямой $y = x$.

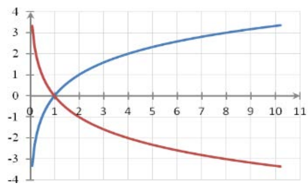
Если независимая переменная x и функция y связаны соотношением $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то y называется ***неявной функцией*** от x.

Например, $x^2 + y^2 - 9 = 0$, $3x - 4y + 5y^3 = 0$, $2x - 4y + 5 = 0$ – неявно заданные функции.

4.2. Преобразование графиков функции

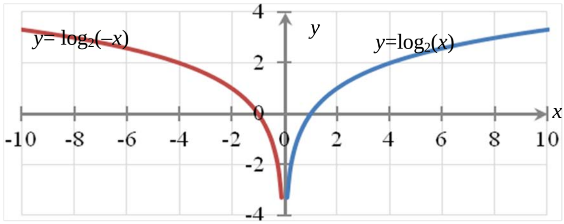
4.2.1. Построение графика функции $y = -f(x)$ по графику функции $y = f(x)$

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси абсцисс.

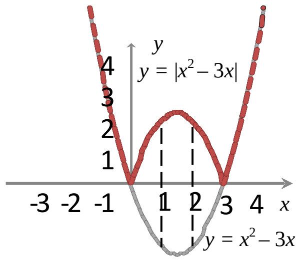


4.2.2. Построение графика функции $y = f(-x)$ по графику функции $y = f(x)$

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси ординат.



4.2.3. Построение графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$



Из определения модуля действительного числа

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

следует, что график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом:

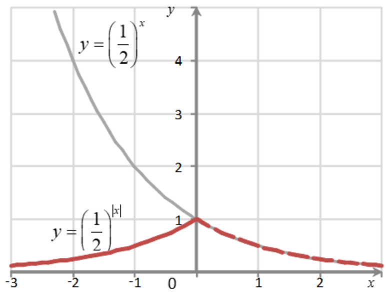
– для всех x, при которых $f(x) \ge 0$, все точки графика $y = f(x)$ остаются на месте;– для всех x, при которых $f(x) < 0$, все точки графика $y = f(x)$ симметрично отображаются относительно оси Ox. График функции $y = |f(x)|$ не имеет точек, лежащих ниже оси Ox.

4.2.4. Построение графика функции $y = f(|x|)$ по графику функции $y = f(x)$

Функция $y = f(|x|)$ является четной, так как $f(|-x|) = f(|x|)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(x))$, принадлежащие графику четной функции, симметричны относительно оси ординат. Поэтому для построения графика четной функции строят ту часть графика, которая соответствует неотрицательным значениям аргумента. Построенную часть графика отображают симметрично относительно оси ординат.

Поскольку $|x|=x$ для $x \geq 0$, то для неотрицательного аргумента график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. При построении графика функции $y = f(|x|)$ для $x < 0$ построенную часть графика функции отображают симметрично относительно оси Oy.



Построим график функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

4.2.5. Построение графика функции $y = A \cdot f(x)$, где $A \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$

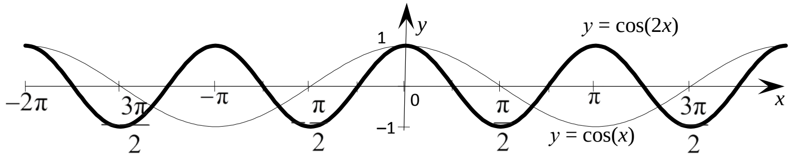
Пусть $A > 1$, тогда график функции $y = A \cdot f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением его вдоль оси Oy в A раз.

Пусть $A = 1$, тогда все точки графика $y = f(x)$ остаются на своем месте.

Пусть $0 < A < 1$, тогда график функции $y = A \cdot f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием его в $1/A$ раз вдоль оси Oy.

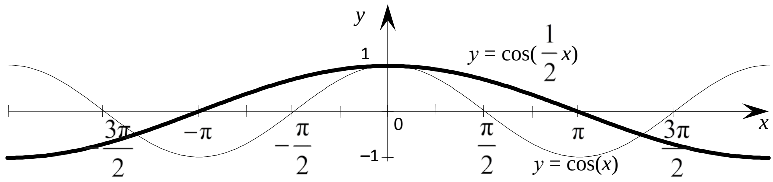
4.2.6. Построение графика функции $y = f(kx)$, где $k \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$

Пусть $k > 1$, тогда график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием его вдоль оси абсцисс в k раз. Рассмотрим этот случай на примере функции $y = \cos(2x)$.

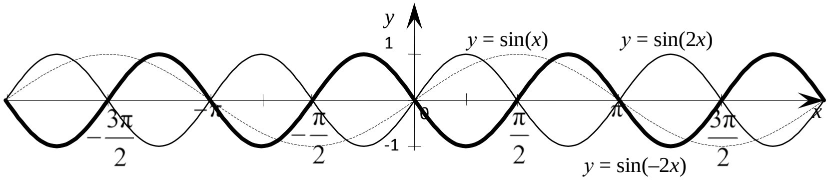


Пусть $k = 1$, тогда все точки графика функции $y = f(x)$ остаются на месте.

Пусть $0 < k < 1$, тогда график функции $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением его вдоль оси Ox в $1/k$ раз. Этот случай показан на примере функции $y = \cos(0{,}5x)$.



Пусть $k < 0$, тогда положим $k_1 = -k$. Построим график функции $y = f(k_1x)$, а затем получим график функции $y = f(kx)$. Этот случай показан на примере функции $y = \sin(-2x)$.

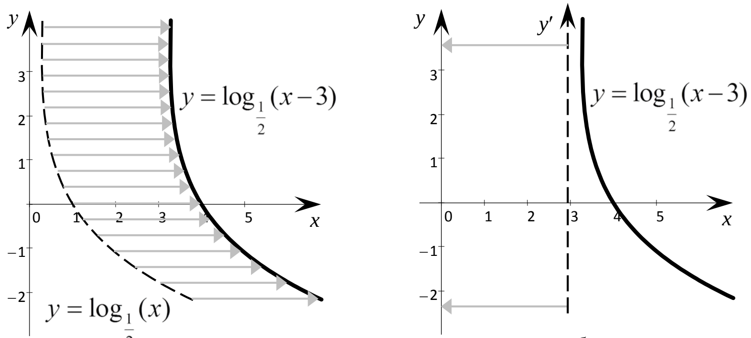


4.2.7. Построение графиков функций $y = f(x - a)$, $y = f(x + a)$, где $a \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$

График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом последнего вправо вдоль оси Ox на величину a.

Для построения графика функции $y = f(x + a)$ (а > 0) по графику функции $y = f(x)$ последний подвергают сдвигу влево на величину a вдоль оси Ox. В некоторых случаях при построении графиков функции $y = f(x - a)$, $y = f(x + a)$ по графику функции $y = f(x)$ удобнее построенный график $y = f(x)$ оставить неподвижным, а сдвигу подвергнуть ось Oy: в первом случае ось передвигают на величину a влево, во втором – вправо.

График функций $y = \log_{0,5}(x - 3)$ получен с помощью параллельного переноса графиков (*а*) и параллельного переноса осей координат (*б*).

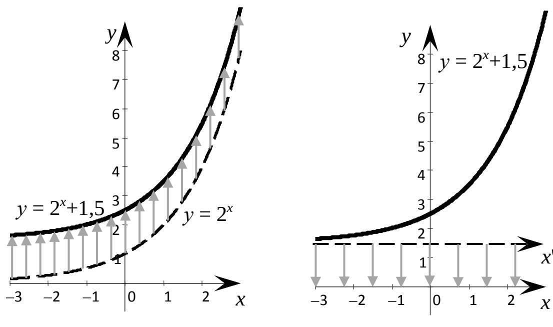


а *б*

4.2.8. Построение графиков функций $y = f(x) + b$, $y = f(x) - b$, где $b \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом его на величину b вверх вдоль оси Oy. Аналогично для построения графика функции $y = f(x) - b$ по графику функции $y = f(x)$ последний сдвигается вниз на величину b вдоль оси Oy. В некоторых случаях при построении графиков функций $y = f(x) + b$, $y = f(x) - b$ по графику функции $y = f(x)$ удобнее построенный график функции $y = f(x)$ оставить неподвижным, а сдвигу подвергнуть ось Ox: в первом случае ось Ox передвигают на величину b вниз, во втором – на величину b вверх.

График функций $y = 2^x + 1,5$ получен с помощью параллельного переноса графиков (*а*) и параллельного переноса осей координат (*б*).



а *б*

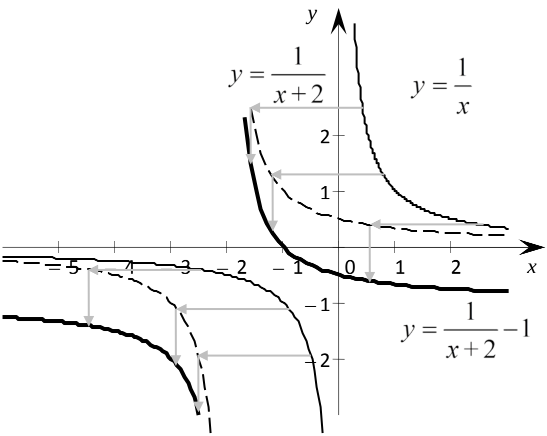
4.2.9. Построение графиков функций $y = (x + a) + b$, $y = f(x + a) - b$, $y = f(x - a) + b$, $y = f(x - a) - b$, где $a > 0$, $b > 0$, по графику функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса

Функция	Параллельный перенос графика	Функция	Параллельный перенос осей координат
$y = f(x + a) + b$	$\uparrow$на b, $\leftarrow$ на a	$y = f(x + a) + b$	$\downarrow$ на b, $\rightarrow$ на a
$y = f(x + a) - b$	$\downarrow$ на b, $\leftarrow$ на a	$y = f(x + a) - b$	$\uparrow$ на b, $\rightarrow$ на a
$y = f(x - a) + b$	$\uparrow$ на b, $\rightarrow$ на a	$y = f(x - a) + b$	$\downarrow$ на b, $\leftarrow$ на a
$y = f(x - a) - b$	$\downarrow$ на b, $\rightarrow$ на a	$y = f(x - a) - b$	$\uparrow$на b, $\leftarrow$на a

П р и м е ч а н и е. Стрелки указывают направления переноса графика функции или осей координат.

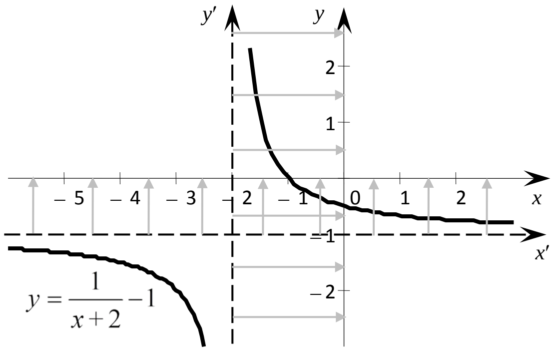
Пример 6. Построить график функции $y = \dfrac{1}{x+2} - 1$.

Решение. 1-й способ. Воспользуемся параллельным переносом графика функции $y = \dfrac{1}{x}$. Согласно таблице, необходимо построить график функции $y = \dfrac{1}{x}$ и затем его перенести на одну единицу вниз и на две единицы влево.



2-й способ. Воспользуемся параллельным переносом осей координат.

Для построения графика функции $y = \dfrac{1}{x+2} - 1$ методом параллельного переноса осей координат необходимо построить график функции $y = \dfrac{1}{x}$ в системе координат $x'Oy'$, а затем ось Ox' передвинуть на одну единицу вверх, а ось Oy' – на две единицы вправо. Полученную систему координат обозначить xOy.



4.2.10. Построение графика функции $y = A \cdot f(k(x-a)) + b$ по графику функции $y = f(x)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

График функции $y = A \cdot f(x-a) + b$ строится последовательно по графику функции $y = f(x)$: $y = f(x) \to y = f(kx) \to y = A \cdot f(kx) \to y = A \cdot f(k(x-a)) \to$ $\to y = A \cdot f(k(x-a)) + b$.

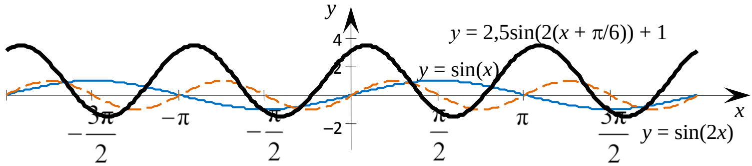
Для построения, например, графика функции

$$y = 2{,}5 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

преобразуем данную функцию к виду

$$y = 2{,}5 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1.$$

Построение графика осуществим по схеме $y = \sin(x) \to y = \sin(2x) \to$ $\to y = 2{,}5 \cdot \sin(2x) \to y = 2{,}5 \cdot \sin\left(2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right) + 1.$



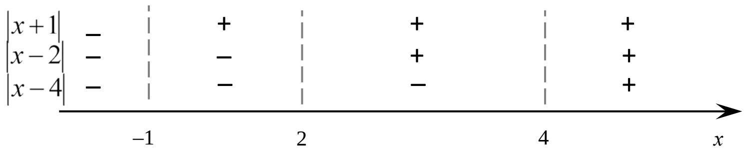
4.2.11. Построение графика функции $y = |x + a| + |x + b| + |x + c|$, где $a, b, c \in R$

Построение графика функции $y = |x + a| + |x + b| + |x + c|$ рассмотрим на следующем примере:

Пример 7. Построить график функции $y = |x + 1| + |x – 2| + |x – 4|$.

Используя определение модуля действительного числа, выражение $y = |x + 1| + |x – 2| + |x – 4|$ запишем без знаков абсолютной величины.

Для этого на числовой прямой отметим ноль каждого из модулей.

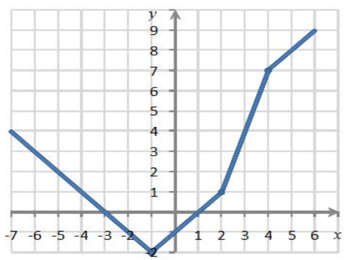


На каждом из образовавшихся промежутков запишем выражение для функции y:

$$y = \begin{cases} -x-1-x+2-(-(x-4)), \text{ если } x<-1, \\ x+1-x+2-(-(x-4)), \text{ если } -1\le x<2, \\ x+1+x-2-(-(x-4)), \text{ если } 2\le x<4, \\ x+1+x-2-(x-4), \text{ если } x\ge 4. \end{cases}$$

Или после упрощения

$$y = \begin{cases} -x-3, \text{ если } x<-1, \\ x-1, \text{ если } -1\le x<2, \\ 3x-5, \text{ если } 2\le x<4, \\ x+3, \text{ если } x\ge 4. \end{cases}$$



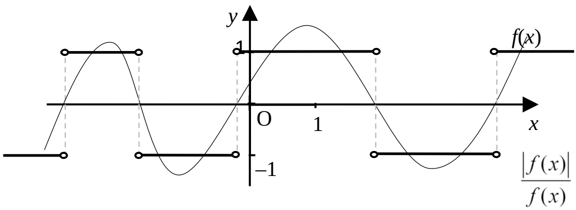
На каждом из промежутков построим соответствующий ему график функции.

4.2.12. Построение графиков функций $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$, $y = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ по графику функции $y = f(x)$

Преобразуем выражение $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$, используя определение модуля действительного числа:

$$y = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(x)}, \text{ если } f(x) > 0, \\ -\dfrac{f(x)}{f(x)}, \text{ если } f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ если } f(x) > 0, \\ -1, \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ необходимо на интервалах, где график функции $y = f(x)$ находится выше оси Ox, построить прямую $y = 1$, а на интервалах, где график функции $y = f(x)$ находится ниже оси Ox, построить прямую $y = -1$. Заметим, что в тех точках, где $f(x) = 0$, функция $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ не определена.



4.3. Предел функции в точке

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A. Записывается это следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{ или } f(x) = A \text{ при } x \to x_0 .$$

В определении предела x_0 может быть любым конечным числом или же одним из символов $-\infty$ или $+\infty$.

При вычислении пределов пользуются следующими правилами:

1) предел постоянной величины равен самой величине, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} C = C \text{ ;}$$

2) предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций при условии, что пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$;

3) предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов при условии, что эти пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) ;$$

4) если n – натуральное число, то

$$\lim_{x \to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n ;$$

5) постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \to x_0}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) ;$$

6) предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \text{, если } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 .$$

При вычислении пределов функции иногда приходится пользоваться понятием односторонних пределов. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D = \{x\}$ и пусть $x \to x_0$. Будем рассматривать такие значения *x*, при которых $x < x_0$. Это означает, что $x \to x_0$, оставаясь все время слева от x_0. Если при этом существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то он называется ***левым пределом*** этой функции в точке x_0 или при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Пусть теперь $x \to x_0$, оставаясь все время справа от x_0, т. е. оставаясь больше x_0. Если при этом существует предел функции $y = f(x)$, то он называется ***правым пределом*** этой функции в точке x_0 или при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Левый и правый пределы называются ***односторонними пределами функции*** в точке. Если односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, то функция имеет тот же предел в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если односторонние пределы функции в точке x_0 существуют, но не равны между собой, то предел функции в этой точке не существует.

Пример 8. Найти предел функции $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \le 2, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ в точке $x = 2$.

Решение. Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 2$. Если $x \le 2$, то $f(x) = 2 - x$ и $f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0}(2 - x) = 2 - 2 = 0$. Если же $x > 2$, то $f(x) = 2x - 1$ и $f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0}(2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Так как односторонние пределы не равны между собой, т. е. $0 \ne 3$, то предел данной функции в точке $x = 2$ не существует.

Пример 9. Найти предел функции $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \le 6, \\ x^2 - 27, & \text{если } x > 6 \end{cases}$ в точке $x = 6$.

Решение. Найдем односторонние пределы функции в данной точке. Если $x \le 6$, то $f(x) = 2x - 3$ и $f(6-0) = \lim\limits_{x \to 6-0}(2x - 3) = 2 \cdot 6 - 3 = 9$. Если $x > 6$, то $f(x) = x^2 - 27$ и $f(6+0) = \lim\limits_{x \to 6+0}(6^2 - 27) = 36 - 27 = 9$. Так как односторонние пределы в точке $x = 6$ равны между собой, то предел функции в этой точке существует и равен 9.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** при $x = a$, если выполняются следующие условия:

а) функция $y = f(x)$ определена на интервале, содержащем эту точку;

б) функция $y = f(x)$ имеет при $x \to a$ конечные и равные между собой односторонние пределы;

в) односторонние пределы при $x \to a$ совпадают со значением функции в точке a, т. е.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a).$$

Если для функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$ хотя бы одно из перечисленных трех условий не выполняется, то функция называется ***разрывной*** в точке $x = a$.

Разрыв функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется ***разрывом первого рода***, если односторонние пределы слева и справа конечны, но не равны между собой.

Скачком функции в точке разрыва называется абсолютная величина разности между ее правым и левым пределами.

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует либо бесконечный, то разрыв в этой точке называется ***разрывом второго рода.***

Каждая элементарная функция в области ее определения непрерывна.

Пример 10. Пусть дана функция $y = \dfrac{2x}{x+3}$.

Требуется:

а) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при значениях аргумента $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$;

б) найти односторонние пределы в точках разрыва;

в) построить график данной функции на отрезке [–8; 8].

Решение.

При $x = -3$ данная функция не определена. Следовательно, в этой точке функция терпит разрыв. Определим односторонние пределы функции при $x \to -3$ слева и справа:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} y = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} \frac{2x}{x+3} = +\infty,$$

так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь отрицательным;

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} y = \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \frac{2x}{x+3} = -\infty,$$

так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь положительным.

Так как односторонние пределы бесконечны, то при $x = -3$ данная функция терпит разрыв второго рода.

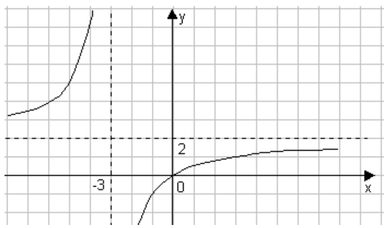
При $x = 2$ данная функция непрерывна, так как выполняются все три условия непрерывности функции.

Функция $y = \dfrac{2x}{x+3}$ – дробно-линейная. Ее графиком является равносторонняя гипербола, асимптоты которой параллельны декартовым осям координат.

Для более точного построения графика найдем значение функции в дополнительных точках:

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	3,2	3,5	4	5	8	±∞	–4	–1	0	0,5	0,8	1	1,1	1,3

Построим график функции.



Пример 11. Функция y задана различными аналитическими выражениями для различных промежутков изменения аргумента x:

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x \le -1, \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1 < x \le 1, \\ 3-x, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти левосторонние и правосторонние пределы функции в точках разрыва;

3) найти скачок функции в точке разрыва.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервалах (–∞; –1), (–1; 1) и (1; +∞), где она задана непрерывными элементарными функциями. При $x=-1$ и $x=1$ меняется аналитическое выражение функции. В этих точках функция может иметь разрыв.

Определим односторонние пределы в точке $x=-1$:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} y = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x+2)=1; \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} y = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x^2+1)=2.$$

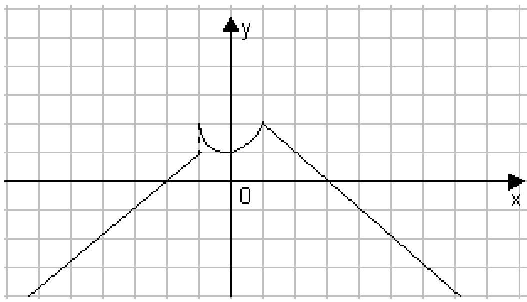
Так как односторонние пределы функции при $x\to -1$ конечны, но не равны между собой, то в точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке $x=-1$ равен $\Delta=\left|2-1\right|=1.$

Определим односторонние пределы в точке $x=1$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+1)=2; \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} y = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(3-x)=2.$$

Односторонние пределы при $x\to 1$ совпадают и равны значению функции в точке $x=1$. Функция в точке $x=1$ непрерывна.

Построим график функции.



Пример 12. Найти точки разрыва функции $y=2^{\frac{2}{4-x}}+1$, если они существуют, а также левосторонние и правосторонние пределы функции в точках разрыва. Указать вид разрыва. Построить схематично график функции.

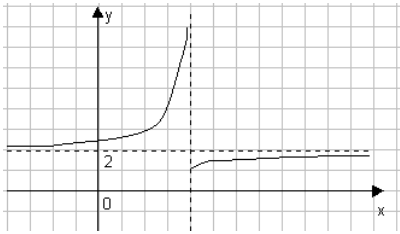
Решение.

Легко проверить, что в любой точке интервалов $(-\infty;\ 4)$, $(4;\ +\infty)$ функция $y=2^{\frac{2}{4-x}}+1$ непрерывна. Для точки $x=4$ имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} y = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} (2^{\frac{2}{4-x}} + 1) = +\infty; \quad \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} y = \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} (2^{\frac{2}{4-x}} + 1) = 1,$$

т. е. в точке $x = 4$ функция терпит бесконечный разрыв (разрыв второго рода).

Построим график функции.



4.3.1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

2) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

3) произведение ограниченной величины на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Рассмотрим бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$. Так как эти бесконечно малые функции могут стремиться к нулю при $x \to x_0$ с разными скоростями, то для их сравнения находится предел отношения этих функций $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

При этом возможны следующие случаи:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A – конечное число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка;

2) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$; в этом случае предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными;

3) если предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми.

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой функцией*** в точке x_0, если для всех значений *x*, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции по абсолютной величине превосходят любое наперед заданное сколь угодно большое положительное число, т. е. $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Пусть $f(x)$ есть бесконечно большая функция при $x \to x_0$, тогда функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$. Если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

Например, функция $\alpha(x) = x^2$ при $x \to 0$ является бесконечно малой функцией. Тогда функция $\frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ является бесконечно большой. Функция $f(x) = x^4 + 1$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой. Тогда $\frac{1}{x^4 + 1}$ при $x \to \infty$ будет бесконечно малой функцией.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ отношения бесконечно малых функций может быть конечным, бесконечным или же вообще не существует. В этом случае выражение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ называется ***неопределенностью вида*** $\dfrac{0}{0}$.

Пусть $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, т. е. $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими функциями в точке x_0. Предел отношения этих функций может быть конечным, бесконечным или вообще не существует. Выражение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ называется ***неопределенностью вида*** $\dfrac{\infty}{\infty}$, а выражение $f(x) - g(x)$ – ***неопределенностью вида*** $\infty - \infty$.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, а $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$, то выражение $\alpha(x) \cdot f(x)$ называется ***неопределенностью вида*** $0 \cdot \infty$. Аналогично вводятся ***неопределенности вида*** 1^∞, ∞^0, 0^0. Чтобы раскрыть неопределенность, нужно найти соответствующий предел.

Пример 13. Найти предел функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ при $x \to 4$.

Решение. Подставим предельное значение *x* = 4 в функцию:
$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \left(\dfrac{4^2 - 6 \cdot 4}{4 - 4} + 8 = \dfrac{0}{0} \right)$. Получена неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия найдем корни квадратного трехчлена, записанного в числителе, и разложим его на множители: $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$.

Подставим разложение в числитель:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x - 2) = 4 - 2 = 2.$$

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$.

Решение. Подставим предельное значение *x* = 1 в функцию:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=\left(\dfrac{1^2-3\cdot1+2}{1^2+2\cdot1-3}=\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-3x+2=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$;

$x^2+2x-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$, $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$.

Пример 15. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-9}-1}{x-5}$ при $x = 5$.

Решение. Подставим вначале значение $x = 5$ в функцию:

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x-9}-1}{x-5}=\left(\dfrac{\sqrt{25-9}-1}{5-5}=\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия полученной неопределенности числитель и знаменатель функции умножим на выражение $\sqrt{2x-9}+1$, сопряженное числителю, и выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x-9}-1\right)\left(\sqrt{2x-9}+1\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x-9}+1\right)}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x-9}\right)^2-1^2}{(x-5)\left(\sqrt{2x-9}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{2x-9-1}{(x-5)\left(\sqrt{2x-9}+1\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x-9}+1\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2}{\sqrt{2x-9}+1}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{2}{\sqrt{2\cdot5-9}+1}=1.$$

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$.

Решение. При подстановке в функцию предельного значения $x = 0$ получим: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}=\left(\dfrac{\sqrt{2-0}-\sqrt{2+0}}{0}=\dfrac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель функции на выражение $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$ и выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}\right)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2-\left(\sqrt{2+x}\right)^2}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x-(2+x)}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2-0}+\sqrt{2+0}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 17. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}$ при $x\to\infty$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Получена неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разделим почленно на x^2 и вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{6}{-2}=-3,$$

так как функции $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{3}{x}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$.

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ называется ***первым замечательным пределом***.

Пусть $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ называется ***вторым замечательным пределом***.

Пример 18. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{3x}$ при $x\to 0$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}=\left(\dfrac{\sin(4\cdot 0)}{3\cdot 0}=\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 4x}{4\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 4x}{3\cdot 4x}=\frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}.$$

Пример 19. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3}.$$

Пример 20. Найти предел функции $f(x)=\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$.

Решение. Воспользуемся вторым замечательным пределом в виде формулы $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4.4. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ являются бесконечно малыми функциями, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Для того чтобы сравнить их, найдем предел их отношения $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Будем говорить, что бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$:

1) *одного и того же порядка*, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\text{const}$;

2) $f(x)$ *более высокого порядка*, чем $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;

3) $f(x)$ *более низкого порядка*, чем $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* и обозначаются $f(x)\sim g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Основные эквивалентные бесконечно малые функции при $\alpha(x)\to 0$

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

4) $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

5) $1-\cos(\alpha(x)) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$;

6) $b^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln(b)$;

7) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

8) $(1+\alpha(x))^{\beta}-1 \sim \beta\cdot\alpha(x)$.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их эквивалентных функций при* $x \to x_0$.

2. *Сумма бесконечно малых функций различного порядка эквивалентна бесконечно малой функции самого низкого порядка.*

Данные утверждения используются при вычислении пределов.

Пример 21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+\sin(x)}{5\mathrm{tg}(x)+x^2}$.

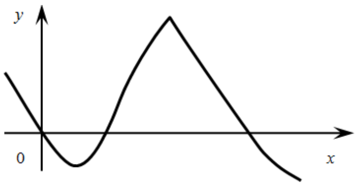
Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\sin(x)}{5\mathrm{tg}(x)-x^2}=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\ (\text{утв. } 2)\\ 2x^3+\sin(x)\sim\sin(x)\\ 5\mathrm{tg}(x)+x^2\ \sim 5\mathrm{tg}(x)\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{5\mathrm{tg}(x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0,(\text{утв. } 1)\\ \sin(x)\sim x\\ 5\mathrm{tg}(x)\sim 5x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{x}}{5x}=\frac{1}{5}.$$

4.5. Непрерывность функции в точке

Интуитивное представление о непрерывной функции обычно связывают с такой функцией, график которой – непрерывная линия.



Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0\in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется разрывной в точке x_0, а точка x_0 – точкой разрыва.

Введем следующие обозначения: $\Delta x=x-x_0$ – приращение аргумента; $\Delta y=f(x-x_0)-f(x_0)$ – приращение функции.

Функция $y = f(x)$ будет *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

На практике при исследовании функции на непрерывность удобно пользоваться понятием *одностороннего предела функции в точке*.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и предположим, что ее аргумент x, изменяясь, стремится к x_0, оставаясь слева (справа) от этой точки, т. е. $x \to x_0 - 0$ ($x \to x_0 + 0$). Пусть при этом функция стремится к некоторому числу A, т. е. $f(x) \to A$.

Тогда будем говорить, что существует *левосторонний предел функции в точке* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ (или *правосторонний предел функции в точке* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$).

Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется *непрерывной слева* (*справа*) в точке x_0, если существует левосторонний (или правосторонний) предел функции и он равен $f(x_0)$. Другими словами, $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, и непрерывна справа в точке, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

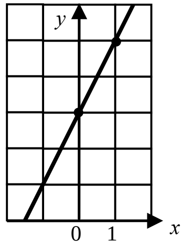
Функция $f(x)$, непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется непрерывной на этом множестве. Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на отрезке требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т. е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т. е. в точке b.

Пример 22. Исследовать непрерывность функций

$$f(x) = 2x + 3 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

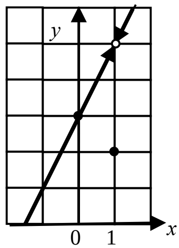
в точке $x_0 = 1$. Построить их графики.

Решение. Исследуем непрерывность функции $f(x) = 2x + 3$ в точке $x_0 = 1$. Для этого найдем $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.



Вычислим $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = \lim\limits_{x \to 1}(2 \cdot 1 + 3) = 5$. Так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, то функция $f(x) = 2x + 3$ непрерывна в точке $x_0 = 1$. Этот факт подтверждает график функции $f(x) = 2x + 3$.

Исследуем непрерывность функции $g(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$ в точке $x_0 = 1$. Для этого найдем $g(1) = 2$.



Вычислим $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = \lim\limits_{x \to 1}(2 \cdot 1 + 3) = 5$. Так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, то функция $g(x)$ имеет разрыв в точке $x_0 = 1$. Этот факт подтверждает график функции $g(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

4.6. Классификация точек разрыва

Различают следующие виды точек разрыва:

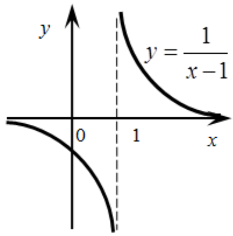
1) если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва первого рода;

2) если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой неустранимого разрыва первого рода, а модуль их разности $\left| \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|$ – скачком функции $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или вообще не существует, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Таким образом, при исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения непрерывности функции в точке. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы.

Пример 23. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.



Решение. Область определения данной функции

$D(f):\ x\in(-\infty;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

Следовательно, $x_0=1$ является точкой разрыва. Определим характер этого разрыва. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, то $x_0=1$ является точкой разрыва второго рода.

Пример 24. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{если } 0<x<1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Решение. Так как функции $-x$, x^2+1 и 2 непрерывны в области задания, то точками разрыва могут быть только точки перехода от одного аналитического выражения к другому. Исследуем функцию на непрерывность в этих точках.

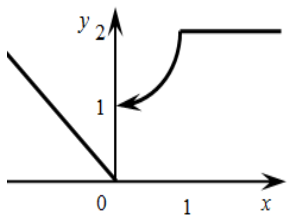
1. Исследуем функцию в точке $x_1=0$. Вычислим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$.

Так как односторонние пределы существуют, конечны, но не равны друг другу, то точка является точкой разрыва первого рода. Модуль разности между левым и правым пределом есть скачок. В данном случае скачок равен 1.

2. Исследуем функцию в точке $x_2=1$. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2$,

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}2=2$, $f(1)=2$.



Так как для функции $f(x)$ в точке $x_2=1$ выполняется равенство

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1),$$

следовательно, она в ней непрерывна.

4.7. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такую прямую называют *асимптотой графика*.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, т. е. x_0 является точкой разрыва второго рода.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции необходимо определить точки разрыва функции второго рода.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной (если $k = 0$ – горизонтальной) асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если для функции существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

При нахождении наклонных асимптот графика функции возможны следующие случаи:

1) оба предела существуют и не зависят от знака бесконечности, тогда прямая $y = kx + b$ называется двусторонней асимптотой;

2) оба предела существуют, но при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ они различны, тогда имеем две односторонние наклонные асимптоты;

3) если хотя бы один из пределов не существует, то наклонных асимптот нет.

Пример 25. Найти асимптоты линии $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Область определения данной функции

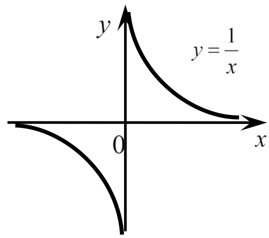
$$D(f):\ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Значит, точка $x_0 = 0$ – точка разрыва. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Следовательно, $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода, а это в свою очередь означает, что прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции.

Для нахождения наклонных асимптот вычислим следующие пределы:



$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Значит, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Пример 26. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на R, следовательно, вертикальных асимптот нет. Для определения наклонных асимптот находим пределы: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \to \infty, \\ -1, \text{ если } & x \to -\infty \end{cases}.$$

Следовательно, у графика данной функции две односторонние горизонтальные асимптоты $y = 1$ при $x \to -\infty$ и $y = -1$ при $x \to \infty$.

Задания для самостоятельной работы

1. Указать функции, которые являются:

а) линейной зависимостью;

б) обратной пропорциональностью;

в) квадратичной зависимостью;

г) кубической зависимостью.

Построить графики следующих функций:

1) $y=\dfrac{4}{x}$; 2) $y=\dfrac{-7}{x}$;
3) $y = x^2$; 4) $y = 2 - 5x^2$;
5) $y = x^3$; 6) $y = x$;
7) $y = -3x + 2$; 8) $y = -5x + 2$;
9) $y + x = 2$; 10) $x - 5y + 6 = 0$.

2. Найти частные значения функций:

а) $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x+3}$, найти $f(-1), f(0), f(1)$;

б) $f(x)=3^{x+1}$, найти $f(-1), f(0), f(2)$;

в) $f(x)=\cos 2x-\sin x$, найти $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f(0), f(-\pi)$;

г) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4, & \text{если } x<-1, \\ 2, & \text{если } -1\le x<1, \\ 3x+1, & \text{если } x\ge 1, \end{cases}$ найти $f(-2), f(-1), f(3)$;

д) $f(x)=\begin{cases} 3\sin 2x, & \text{если } x<0, \\ \cos x-1, & \text{если } x\ge 0, \end{cases}$ найти $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), f(0), f(\pi)$;

е) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2}, & \text{если } x<0, \\ 2x^3, & \text{если } x\ge 0, \end{cases}$ найти $f(-2), f(0), f(2)$.

3. Построить графики следующих функций:

1) $y = x^2 - 3x - 4$; 2) $y = |x^2 - 3x - 4|$;
3) $y = x^2 - 3|x| - 4$; 4) $y = |x^2 - 3|x| - 4|$;
5) $y=\dfrac{|x^2-3x-4|}{x^2-3x-4}$; 6) $y=\dfrac{3x+5}{x+2}$;
7) $y = |x + 3| + |x - 5| - |x|$; 8) $y = \log_3(x - 1) + 2$;
9) $y=\sqrt{4(x+1)}-2$; 10) $y=2,5\cdot\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$.

4. Найти области определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}+\dfrac{3x}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}+\dfrac{3}{\log_2(x+4)}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x^2-8x+15}-\dfrac{\sin^2 x}{|x-4|-2}$; г) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{25-x^2}}{\sqrt[3]{2x-x^2}}+\log_3(x+4)$.

5. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x}{2-4x^2+3x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2-4x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 5x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{2-3x}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-7x}{3-7x}\right)^{-8x^2}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-7x+1}\right)^{-x+5}$.

6. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. Указать точки разрыва графика функции и вид разрыва в них. Построить схематично график функции:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos(x), & \text{если } x\le 0,\\ -x^2, & \text{если } 0<x<1,\\ x, & \text{если } x\ge 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=2-\dfrac{x}{x+4}$;

3) $f(x)=5^{\frac{7}{8+x}}$.

7. Определить асимптоты графиков функции:

1) $f(x)=2-\dfrac{x}{5-x}$; 2) $f(x)=e^{\frac{4}{x+1}}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+1}$.

Лекция 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Изменение независимой переменной x, равное $x_2 - x_1 = \Delta x$, называется ***приращением аргумента***, а разность $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ – ***приращением функции*** на отрезке $[x_1;\, x_2]$ или $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, где $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Другими обозначениями производной могут быть $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $f'(x)$.

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Операция ее нахождения называется ***дифференцированием*** функции. Если функция дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке. Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно, т. е. из непрерывности дифференцируемость функции в точке не следует.

Механический смысл производной: *скорость прямолинейного движения* материальной точки в момент времени *t* есть производная от пути *s* по времени *t*.

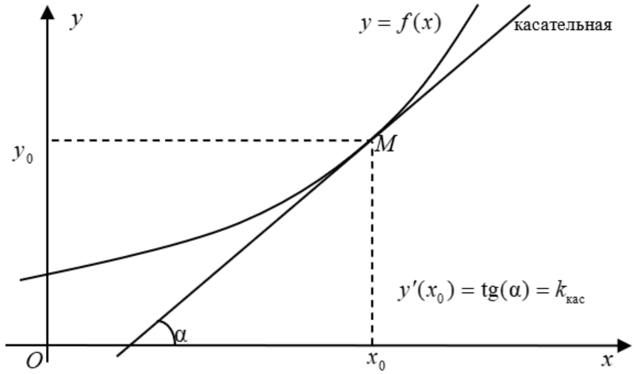
$$v = s_t'\ .$$

Физический смысл производной: если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть *скорость* протекания этого процесса.

Экономический смысл производной: если функция $y = f(x)$ описывает некоторый экономический процесс, то ее производная характеризует *предельную эффективность* этого процесса.

Геометрический смысл производной: производная функции в точке x_0 равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку.



5.2. Вычисление производной

На практике производные функций находят с помощью формул и правил. Основными формулами дифференцирования являются:

1) $C' = 0$, где (C = const);

2) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

3) $(e^x)' = e^x$;

4) $(a^x)' = a^x \ln a$;

5) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$;

6) $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$;

7) $(\sin(x))' = \cos(x)$;

8) $(\cos(x))' = -\sin(x)$;

9) $(\mathrm{tg}(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$;

10) $(\mathrm{ctg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;

11) $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале $(a; b)$. Справедливы следующие правила:

1) производная алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3) постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(k\cdot u)'=k\cdot u'$;

4) производная частного двух функций, если знаменатель не равен нулю, равен дроби, знаменатель которой есть квадрат прежнего знаменателя, а числитель равен произведению производной числителя на знаменатель минус произведение числителя на производную знаменателя: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y=3x^2-x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{3x^2}$; б) $y=5\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y=\left(2x^2-3\right)\cdot\sin(x)$; г) $y=\dfrac{3x^2-4}{2x+1}$.

Решение. а) $y'=\left(3x^2-x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{3x^2}\right)'=\left(3x^2\right)'-x'+\left(4x^{-1}\right)'-$

$$-\left(\frac{2}{3}x^{-2}\right)'=3\left(x^2\right)'-x'+4\left(x^{-1}\right)'-\frac{2}{3}\left(x^{-2}\right)'=3\cdot 2x-1+4\cdot(-1)x^{-2}-$$

$$-\frac{2}{3}\cdot(-2)x^{-3}=6x-1-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{3x^3};$$

б) $y'=\left(5\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(5x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{4}}+4x^{-\frac{1}{3}}\right)'=5\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-$

$$-3\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}};$$

в) $y'=(2x^2-3)'\cdot\sin(x)+(2x^2-3)\cdot(\sin(x))'=4x\cdot\sin(x)+$
$+\ (2x^2-3)\cdot\cos(x)$;

г) $y'=\dfrac{(3x^2-4)'\cdot(2x+1)-(3x^2-4)\cdot(2x+1)'}{(2x+1)^2}=$

$$=\frac{6x(2x+1)-2(3x^2-4)}{(2x+1)^2}=\frac{12x^2+6x-6x^2+8}{(2x+1)^2}=\frac{2(3x^2+3x+4)}{(2x+1)^2}.$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = 2x^2 - \dfrac{1}{3x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$ при $x = -1$.

Решение. Найдем производную: $y' = \left(2x^2 - \dfrac{1}{3x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}\right)' =$

$$= \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^{-5} + 5x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2 \cdot 2x - \frac{(-5)}{3}x^{-6} + 5 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 4x + \frac{5}{3x^6} + \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Тогда $y'(-1) = 4 \cdot (-1) + \dfrac{5}{3 \cdot (-1)^6} + \dfrac{10}{3\sqrt[3]{-1}} = -4 + \dfrac{5}{3} - \dfrac{10}{3} = -5\dfrac{2}{3}$.

Пример 3. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^2 - 3}{4x - 1}$ при $x = -2$.

Решение. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(x^2 - 3)' \cdot (4x - 1) - (x^2 - 3) \cdot (4x - 1)'}{(4x - 1)^2} = \frac{2x(4x - 1) - 4(x^2 - 3)}{(4x - 1)^2} =$$

$= \dfrac{8x^2 - 2x - 4x^2 + 12}{(4x - 1)^2} = \dfrac{4x^2 - 2x + 12}{(4x - 1)^2}$. Вычислим значение производной при $x = -2$: $y' = \dfrac{4 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 12}{(4 \cdot (-2) - 1)^2} = \dfrac{16 + 4 + 12}{81} = \dfrac{32}{81}$.

Пример 4. Среди функций а) $y = 3x^2 - 4$; б) $y = 6x + 5$; в) $y = 6x^2 - x$ найти такие, производная которых равна $6x$.

Решение. Найдем производные: а) $y' = (3x^2 - 4)' = 6x$; б) $y' = (6x + 5)' = 6$; в) $y' = (6x^2 - x)' = 12x - 1$. Следовательно, искомой функцией будет $y = 3x^2 - 4$.

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u = \varphi(x)$ производную $y'_u = f'(u)$. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ является сложной и ее производная находится по правилу: производная сложной функции по основному аргументу равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по основному аргументу, т. е. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Это правило распространяется на сложные функции, которые имеют любое конечное число промежуточных аргументов.

Пример 5. Найти производные функций:

а) $y = e^{-3x^2}$; б) $y = \sin^3(x)$; в) $y = \sqrt{1-\cos(2x)}$.

Решение: а) введем промежуточный аргумент $u = -3x^2$. Тогда $y = e^u$, $u'_x = -6x$, $y'_u = e^u$, $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u(-6x) = -6xe^{-3x^2}$;

б) функцию можно записать в виде $y = (\sin(x))^3$. Введем промежуточный аргумент $u = \sin(x)$, тогда $y = u^3$. По формулам для производной сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin(x))'_x = 3u^2\cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x);$$

в) запишем функцию в виде $y = (1-\cos(2x))^{\frac{1}{2}}$. Введем промежуточные аргументы $v = 2x$ и $u = 1-\cos(v)$. Тогда $y = u^{\frac{1}{2}}$. Так как имеем два промежуточных аргумента, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'_u \cdot (1-\cos(v))'_v \cdot (2x)'_x = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(v) \cdot 2 =$$

$$= \sin(2x) \cdot (1-\cos(2x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}}.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}}$.

Пусть функция y задана в неявном виде, т. е. в виде уравнения $F(x;\ y) = 0$. Для нахождения производной от y по x нужно продифференцировать данное уравнение по x, считая при этом y функцией от x. В итоге производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 6. Найти производную функции y, заданной в неявном виде, т. е. уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. Дифференцируем данное уравнение, считая при этом y функцией от x:

$$(x^3+y^3-3xy)'=0,\ (x^3)'+(y^3)'-(3xy)'=0,$$

$$3x^2+3y^2y'-3(y+xy')=0,\ 3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0,$$

$$x^2-y+y'(y^2-x)=0,\ y'(y^2-x)=y-x^2,\ y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Если требуется найти производную произведения нескольких функций или дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения, то обе части выражения лучше всего вначале прологарифмировать. Такая операция называется *логарифмическим дифференцированием*, а производная от логарифма функции – *логарифмической производной*.

Производные функций вида $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ можно найти лишь способом логарифмического дифференцирования. Такие функции называются *степенно-показательными*.

Пример 7. Найти производные функций:

а) $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)$; б) $y=\sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}$; в) $y=(\sin(2x))^{x^2+1}$.

Решение: а) логарифмируем функцию:

$$\ln(y)=2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2).$$

Найдем производную от обеих частей полученного выражения:

$$(\ln(y))'=\left(2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=2\cdot\frac{1}{x+5}+3\cdot\frac{1}{2x-7}\cdot 2+\frac{1}{x-2},\ \frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2},$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}\right),$$

$$y'=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)\cdot\left(\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}\right);$$

б) запишем функцию в виде $y=\left(\frac{x(x^2+2)}{x-4}\right)^{\frac{1}{5}}$ и обе части прологарифмируем: $\ln(y)=\frac{1}{5}(\ln(x)+\ln\left(x^2+2\right)-\ln(x-4))$. Найдем производные от обеих частей выражения: $\left(\ln y\right)' = \frac{1}{5}\left(\ln x + \ln\left(x^2+2\right) - \ln(x-4)\right)'$,

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x - \frac{1}{x-4}\right)$, т. е. $y' = \frac{1}{5}y\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-4}\right)$,

$y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-4}\right)$;

в) функция является степенно-показательной. Поэтому перед дифференцированием ее обязательно нужно прологарифмировать:

$$\ln(y) = (x^2+1)\cdot\ln(\sin(2x)).$$

Затем продифференцируем обе части полученного выражения:

$$(\ln(y))' = \left((x^2+1)\cdot\ln(\sin(2x))\right)',$$

$$\text{т. е. } \frac{y'}{y} = (x^2+1)'\cdot\ln(\sin(2x)) + (x^2+1)\cdot\left(\ln(\sin(2x))\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + \frac{x^2+1}{\sin(2x)}\cdot(\sin(2x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + \frac{x^2+1}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\cdot 2,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + 2(x^2+1)\cdot\mathrm{ctg}(2x),$$

$$y' = y\cdot\left(2x\cdot\ln(\sin(2x)) + 2(x^2+1)\cdot\mathrm{ctg}(2x)\right),$$

$$y' = (\sin(2x))^{x^2+1}\cdot\left(2x\ln(\sin(2x)) + 2(x^2+1)\cdot\mathrm{ctg}(2x)\right).$$

5.3. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$. Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$. Величина $\alpha\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т. е. $f'(x)\Delta x$ – главная часть приращения Δy.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции $f'(x)\Delta x$. Обозначается дифференциал функции $\mathrm{d}y$ или $\mathrm{d}f(x)$.

Из определения следует, что $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$, а так как можно доказать, что $\Delta x = \mathrm{d}x$, то производная функции определяется отношением

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Пример 8. Записать дифференциалы заданных функций:

а) $s = \cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)$; б) $m = \frac{n^2 e^{n^2}}{n^2+1}$;

в) $p = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)\right) - \frac{k}{\sin(k)}$; г) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2u^4}{1-u^8}\right)$.

Решение: а) сначала преобразуем данную функцию $s = \frac{1}{2}\sin(2x) + {}$ $+ \frac{1}{2}\cos^2(x)$ и найдем ее производную:

$$s' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = \cos(2x) - \sin(x)\cos(x) =$$

$$= \cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Тогда дифференциал функции равен $\mathrm{d}s = \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x$;

б) найдем производную функции $m = \frac{n^2 e^{n^2}}{n^2+1}$:

$$m' = \frac{(2ne^{n^2} + 2n^3e^{n^2})(n^2+1) - 2n^3e^{n^2}}{(n^2+1)^2} = \frac{2n^3e^{n^2} + 2n^5e^{n^2} + 2ne^{n^2}}{(n^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2ne^{n^2}(n^4+n^2+1)}{(n^2+1)^2}.$$

Тогда дифференциал функции равен $\mathrm{d}m = \frac{2ne^{n^2}(n^4+n^2+1)}{(n^2+1)^2}\mathrm{d}n$;

в) найдем производную функции $p=\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)\right)-\frac{k}{\sin(k)}$:

$$p'=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sin(k)-k\cos(k)}{\sin^2(k)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{k}{2}\right)\cos\left(\frac{k}{2}\right)}-$$

$$-\frac{\sin(k)-k\cos(k)}{\sin^2(k)}=\frac{\sin(k)-\sin(k)+k\cos(k)}{\sin^2(k)}=\frac{k\cos(k)}{\sin^2(k)}.$$

Тогда дифференциал функции равен $\mathrm{d}p=\frac{k\cos(k)}{\sin^2(k)}\mathrm{d}k$;

г) найдем производную функции $z=\operatorname{arctg}\left(\frac{2u^4}{1-u^8}\right)$:

$$z'=\frac{1}{\left(1+\frac{4u^8}{(1-u^8)^2}\right)}\cdot\frac{8u^3(1-u^8)-(-8u^7)2u^4}{(1-u^8)^2}=\frac{(1-u^8)^2(8u^3-8u^{11}+16u^{11})}{(1+u^8)^2(1-u^8)^2}=$$

$$=\frac{8u^3+8u^{11}}{(1+u^8)^2}=\frac{8u^3(1+u^8)}{(1+u^8)^2}=\frac{8u^3}{1+u^8}.$$

Тогда дифференциал функции равен $\mathrm{d}z=\frac{8u^3}{1+u^8}\mathrm{d}u$.

Геометрический смысл дифференциала функции: дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют свойства:

1) $\mathrm{d}C = 0$, где (C = const);
2) $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$;
3) $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$;
4) $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$;
5) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$.

Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях: в бесконечно малой окрестности точки x_0 будет справедливо следующее приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, т. е. можно записать $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, или $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Пример 9. Не используя калькулятор, оценить значение выражения $\sqrt{81{,}03}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 81$, в которой она легко вычисляется. Рассмотрим Δ-окрестность этой точки: $\Delta x = x - x_0 = 81{,}03 - 81 = 0{,}03$.

Вычислим значение этой функции в точке x_0: $f(x_0) = \sqrt{81} = 9$. Определим значение ее производной в этой точке:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ а } f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}.$$

Тогда $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{81 + 0{,}03} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{100} = 9 + \frac{1}{600} = 9\frac{1}{600} = 9{,}002.$

Пример 10. Вычислить приближенно $\cos(59^{\circ})$.

Решение. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 60°$, $\Delta x = 59 - 60° = -1° \approx -0{,}017$ рад.

$f(x_0) = \cos(60°) = 0{,}5$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f'(x_0) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$.

Используем формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f(x_0)\Delta x$,

$f(x_0 + \Delta x) \approx 0{,}5 - 0{,}866\,(-0{,}017) = 0{,}514$, т. е. $\cos(59°) \approx 0{,}514$.

5.4. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ проведена касательная, то точка M_0 называется ***точкой касания***. Исходя из геометрического смысла производной, угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, т. е. $k = f'(x_0)$. Тогда уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ является ***уравнением касательной к графику функции*** $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется ***нормалью*** к кривой. Так как угловые коэффициенты касательной и нормали обратны по величине и противоположны по знаку, то уравнение $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ является ***уравнением нормали к графику функции*** $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

Пример 11. Найти угол α наклона касательной, проведенной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке касания с абсциссой $x_0 = 1{,}5$.

Решение. Производная функции $y' = 2x - 2$. Тогда значение производной в точке $x_0 = 1{,}5$ равно $f'(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5 - 2 = 1$.

Это означает, что $k = \operatorname{tg}(\alpha) = 1$. Следовательно, $\alpha = 45°$.

Пример 12. Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ в точке касания с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение. Подставим $x_0 = 4$ в уравнение параболы и найдем $y_0 = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 3$. Следовательно, $M_0(4;\ 3)$ есть точка касания. Производная функции равна $y' = x - 2$. Вычислим значение производной при $x_0 = 4$: $f'(4) = 4 - 2 = 2$. Тогда уравнение $y - 3 = 2(x - 4)$ или $2x - y - 5 = 0$ является уравнением касательной. Уравнением нормали будет $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 4)$ или $x + 2y - 10 = 0$.

Пример 13. Составить уравнение касательной и нормали к линии

$$\begin{cases} x = \cos(2t), \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$$

при $t = \dfrac{\pi}{6}$

Решение. Производная функции, заданной параметрически, находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$; $y'_x = \dfrac{3\sin^2(t) \cdot \cos(t)}{-2\sin(2t)} = -\dfrac{3}{4}\sin(t)$. При $t = \dfrac{\pi}{6}$ она будет равна $y'_x = -\dfrac{3}{4} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8}$.

Определим координаты точки касания $(x_0;\ y_0)$:

$$x_0 = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};\ \ y_0 = \sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Тогда касательная заданной функции в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$ определяется уравнением

$$y-\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right); \; y=-\frac{3}{8}x+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}; \; y=-\frac{3}{8}x+\frac{5}{16},$$

а уравнение нормали –

$$y-\frac{1}{8}=\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right); \quad y=\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}+\frac{1}{8}; \quad y=\frac{8}{3}x-\frac{29}{24}.$$

5.5. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ в области D имеет конечную производную $y' = f'(x)$, которая, в свою очередь, также является функцией от переменной x в этой же области. Производная y' называется *производной первого порядка*. Если существует производная от производной первого порядка, то она называется *производной второго порядка* или *второй производной* от функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т. д. Производные, начиная со второго порядка и выше, называются *производными высших порядков*.

Пример 14. Найти производную четвертого порядка функции $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$.

Решение. $y' = 3x^2 + 10x - 4$; $y'' = 6x + 10$; $y''' = 6$; $y^{(4)} = 0$.

Пример 15. Вычислить значение производной третьего порядка функции $y = \sin(3x)$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Найдем производную третьего порядка:

$$y' = \cos(3x)\cdot 3 = 3\cos(3x); \; y'' = 3\cdot(-\sin(3x))\cdot 3 = -9\sin(3x);$$

$$y''' = -9\cos(3x)\cdot 3 = -27\cos(3x). \text{ Тогда } y'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -27\cdot\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -27\cos(\pi) = -27\cdot(-1) = 27.$$

5.6. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей

При вычислении предела отношения двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке x_0 может оказаться, что при $x \to x_0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. одновременно являются или бесконечно малыми, или бесконечно большими функциями. Вычисление предела в этом случае называется *раскрытием неопределенности* и может выполняться по ***правилу Лопиталя***, суть которого в следующем.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to x_0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Это означает, что в случае неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***вычисление предела отношения функций можно заменить вычислением предела отношения их производных***, что может оказаться более простым.

Если же и отношение производных приводит к одной из неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то и к этому отношению можно применить правило Лопиталя, т. е. исследовать предел отношения производных второго порядка и т. д.

Пример 16. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Решение: а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} =$

$$= \left(\frac{(-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 8}{(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 16 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 15} = \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\left(x^3-5x^2+2x+8\right)'}{\left(x^4-2x^3-16x^2+2x+15\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{3\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)+2}{4\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2-32\cdot(-1)+2}=\frac{5}{8};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin(x))'}{(x^3)'}= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x^2}=$

$$=\left(\frac{1-\cos(0)}{3\cdot 0^2}=\frac{0}{0}\right)= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\left(\frac{\sin(0)}{6\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(6x)'}= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{\cos(0)}{6}=\frac{1}{6};$$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\left(\dfrac{\ln(+\infty)}{+\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}\right)= \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln(x))'}{x'}= \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1}{+\infty}\right)=0$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$. Тогда нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))$ приводит к неопределенности вида $\infty-\infty$. В этом случае разность $f(x)-\varphi(x)$ можно представить в виде

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)f(x)}} \text{ и } \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)f(x)}}.$$

В результате получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которую можно раскрыть с помощью правила Лопиталя.

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ функции $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ и $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$ являются бесконечно большими одного и того же знака. Поэтому их разность приводит к неопределенности вида $\infty-\infty$. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=$$

$$=\left(\frac{1-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Тогда при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)$ приходим к неопределенности вида $0\cdot\infty$. Выражение $f(x)\cdot\varphi(x)$ преобразуется к виду $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ или $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, что приводит к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые можно раскрывать с помощью правила Лопиталя.

5.7. Экстремум функции

При исследовании функции приходится определять характер ее поведения. Для этого можно использовать средства дифференциального исчисления.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале (a; b). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если производная $f'(x)$ в интервале (a; b) положительна, то функция $y=f(x)$ в этом интервале возрастает;

2) если производная $f(x)$ в интервале (a; b) отрицательна, то функция $y=f(x)$ в этом интервале убывает.

Эти утверждения являются *достаточными условиями возрастания и убывания (монотонности) функции*.

Пример 18. Исследовать функцию $y=x^3-3x-4$ на монотонность.

Решение. Функция определена на всем множестве действительных чисел, т. е. $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную $y'=3x^2-3$. Функция возрастает, если $3x^2-3>0$, т. е. $x^2-1>0$ или же $(x-1)(x+1)>0$. Решив это неравенство, получим, что функция возрастает при

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Функция убывает, если $3x^2 - 3 < 0$, т. е. $x^2 - 1 < 0$ или $(x-1) \cdot (x+1) < 0$. Решив последнее неравенство, получим, что при $x \in (-1; 1)$ функция убывает. Таким образом, интервалами монотонности функции являются $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

Пример 19. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{x-3}$ на монотонность.

Решение. Функция определена в интервалах $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$. Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода. Производная функции $y' = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$ отрицательна во всех точках области определения. Поэтому функция убывает в интервалах $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$, которые и являются интервалами монотонности функции.

Особую роль в исследовании функции играют такие значения x, которые отделяют интервалы возрастания и убывания функции. В этих точках функция меняет характер своего поведения.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***максимум***, если $f(x_0)$ есть наибольшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***минимум***, если $f(x_0)$ есть наименьшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***, а максимум и минимум называются ***экстремумами функции***.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует. Это утверждение является ***необходимым признаком (условием) экстремума***.

Следует иметь в виду, что необходимый признак экстремума не является достаточным. Это означает, что если в какой-то точке производная функции равна нулю, то эта точка не обязательно будет точкой экстремума.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются ***критическими***.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и всюду в этой окрестности имеет производную, а в точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует. Тогда имеет место *первый достаточный признак (первое достаточное условие) экстремума*:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 функция имеет максимум;

2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 функция имеет минимум;

3) если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знак, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

При исследовании функции на экстремум имеет смысл придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;

2) найти производную функции и приравнять ее к нулю;

3) решить полученное уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки;

4) все полученные точки расположить в порядке возрастания и разбить область определения этими точками на частичные интервалы, в каждом из которых производная сохраняет знак;

5) найти знак производной в каждом из частичных интервалов и по знаку производной определить характер изменения функции в этих интервалах: возрастает или убывает;

6) по изменению знака производной при переходе через границы интервалов определить точки экстремума;

7) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 20. Найти экстремум функции $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+1$.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную, приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение: $y'=x^2-4x$, $x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$, $x_1=0$, $x_2=4$. Точки $x_1=0$ и $x_2=4$ являются критическими. Разобьем область определения функции критическими точками на частичные интервалы, которые являются интервалами монотонности функции, и по знаку производной определим характер изменения функции в каждом из этих интервалов:

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 4)$	4	$(4;\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	1 max	↘	$-9\frac{2}{3}$ min	↗

$$y(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)=5>0\,;\;\; y'(2)=2^2-4\cdot 2=-4<0\,;\;\; y'(5)=4>0\,.$$

По первому достаточному признаку экстремума в точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = 4$ – минимум. При этом:

$$y_{\max}=\frac{1}{3}\cdot 0^3-2\cdot 0^2+1=1\,,\;\; y_{\min}=\frac{1}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2+1=-9\frac{2}{3}\,.$$

Таким образом, $y = 1$ и $y=-9\frac{2}{3}$ являются экстремумами функции.

Пример 21. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ на экстремум.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = 1$, т. е. $D(y):(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. Найдем производную функции: $y'=\dfrac{(x^2)'\cdot(x-1)-x^2(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Приравняем ее к нулю и решим уравнение $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$. В точках $x = 0$ и $x = 2$ производная обращается в нуль. Таким образом, критическими точками функции являются $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$. Составим таблицу:

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	+	0	–		–	0	+
y	↗	0 max	↘		↘	4 min	↗

$$y'(-1)=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0\,,\;\; y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=-3<0\,,$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=-3<0\,,\;\; y'(3)=\frac{3^2-2\cdot 3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0\,.$$

По первому достаточному признаку экстремума в точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = 2$ – минимум. При этом максимум функции равен $y_{\max}=\frac{0^2}{0-1}=0$, минимум – $y_{\min}=\frac{2^2}{2-1}=4$.

При исследовании функции на экстремум иногда более удобно использовать производную второго порядка. Пусть в точке x_0 производная функции $y=f(x)$ равна нулю, и в этой точке существует производная второго порядка $f''(x_0)$. Тогда имеет место ***второй достаточный признак (второе достаточное условие) экстремума***:

1) если $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 функция имеет минимум;

2) если $f''(x_0)<0$, то в точке x_0 функция имеет максимум;

3) если $f''(x_0)=0$, то для исследования функции на экстремум нужно применять первый достаточный признак.

Пример 22. Исследовать функцию $y=x^3-3x^2-9x+2$ на экстремум.

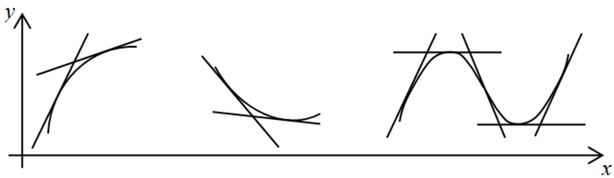
Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $D(y):(-\infty;+\infty)$. Найдем производную $y'=3x^2-6x-9$ и критические точки функции: $3x^2-6x-9=0$, $x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$. Найдем производную второго порядка $y''=6x-6$ и вычислим ее значение в критических точках: $y''(-1)=6\cdot(-1)-6=-12<0$ и $y''(3)=6\cdot 3-6=12>0$. Таким образом, в точке $x = -1$ функция имеет максимум, а в точке $x = 3$ – минимум.

При этом $y_{\max}=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+2=-1-3+9+2=7$, а $y_{\min}=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+2=-25$.

5.8. Выпуклость, вогнутость и асимптоты графика функции

Дуга кривой называется ***выпуклой***, если она целиком лежит ниже касательной, проведенной в любой точке дуги. Дуга кривой называется ***вогнутой***, если она целиком лежит выше касательной, проведенной в любой точке дуги. Точка, которая отделяет выпуклую часть дуги от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

Пусть функция $y = f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны в интервале $(a;\ b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ в интервале $(a;\ b)$, то график функции в этом интервале будет выпуклым. Если же $f''(x) > 0$ в интервале $(a;\ b)$, то график функции в этом интервале будет вогнутым.



Точки, в которых производная второго порядка $f''(x)$ функции $y = f(x)$ равна нулю, называются ***критическими точками второго рода***. Если производная второго порядка $f''(x)$ при переходе через критическую точку второго рода меняет знак, то эта точка является ***точкой перегиба графика функции***. Если же при переходе через эту точку производная второго порядка знак не меняет, то эта точка не является точкой перегиба.

Пример 23. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем производную второго порядка: $y' = 3x^2 - 6x + 2$, $y'' = 6x - 6$. Решим уравнение $6x - 6 = 0$ и найдем критическую точку второго рода x = 1. Разобьем область определения функции этой точкой на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как $f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$, то в интервале $(-\infty; 1)$ график функции выпуклый. В интервале $(1; +\infty)$ график функции вогнутый, так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$. При переходе через точку $x = 1$ производная второго порядка меняет знак. Следовательно, $x = 1$ является абсциссой точки перегиба. Тогда $y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + {}$ $+ 2 \cdot 1 + 1 = 1$ есть ордината точки перегиба.

5.9. Полное исследование функции, построение ее графика

При полном исследовании функции $y = f(x)$ и построении ее графика целесообразно придерживаться определенной схемы:

1) найти область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, если они есть, и интервалы непрерывности;
3) определить вертикальные асимптоты, если они есть;
4) найти наклонные и горизонтальные асимптоты, если они есть;
5) исследовать функцию на четность, нечетность;
6) исследовать функцию на экстремум;
7) исследовать функцию на перегиб;
8) определить значения функции в дополнительных точках, если это необходимо;
9) построить график функции.

Пример 24. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ и построить ее график.

Решение.

1. $D(f)$; $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$, т. е. $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

2. Функция терпит разрыв при $x = 2$.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = -\infty; \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = +\infty .$$

Значит, при $x = 2$ функция терпит разрыв второго рода.

3. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции.

4. Определим наклонные асимптоты вида $y = kx + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x - 5}{(x - 2) \cdot x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1 .$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-5}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-2}=3\,.$$

Следовательно, $y = x + 3$ есть уравнение наклонной асимптоты.

5. Четность и нечетность функции.

Так как область определения функции $x\in(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$ не симметрична относительно начала координат, то функция является функцией общего вида.

6. Функция непериодическая.

7. Найдем интервалы монотонности и точки экстремума заданной функции.

Определим критические точки функции:

$$y'=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\,.$$

Производная функции равна нулю при $x = 1$ и $x = 3$. Значит, ее критическими точками являются: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Результаты исследования знака производной и выводы сведем в таблицу:

x	(–¥; 1)	1	(1; 2)	2	(2; 3)	3	(3; +¥)
$f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f(x)$	↗	3 max	↘		↘	7 min	↗

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба ее графика.

Определим точки, подозрительные на перегиб функции:

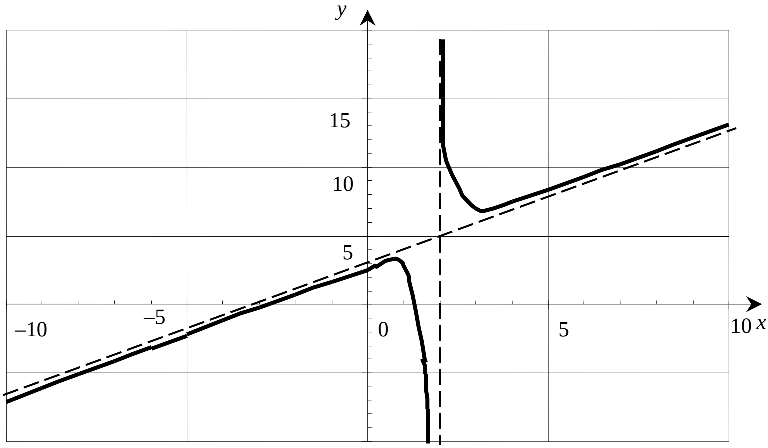
$$y''=\left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{2}{(x-2)^3}\,.$$

Видно, что вторая производная не обращается в нуль. Исследуем выпуклость и вогнутость заданной функции на интервалах области определения функции:

x	(–¥; 2)	2	(2; +¥)
$f''(x)$	–		+

$f(x)$	$\cap$		$\cup$

9. В данном случае этот пункт можно пропустить.



10. Построим график функции по результатам исследования.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она достигает своего наименьшего и наибольшего значений. Эти значения функция может принимать либо во внутренних точках отрезка, либо на его концах.

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции следует:

1) найти критические точки функции на отрезке $[a; b]$;

2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка;

3) среди вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 25. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -3x^4 + 8x^3 + 18x^2$ на отрезке [0; 4].

Решение. Найдем производную $y' = -12x^3 + 24x^2 + 36x$, приравняем ее к нулю и найдем критические точки: $-12x^3 + 24x^2 + 36x = 0$, $-12x(x^2 - 2x - 3) = 0$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$. Из найденных точек $x = -1$ не принадлежит отрезку [0; 4].

Вычислим значения функции в точках $x=0$, $x=3$, $x=4$;

$$y(0)=0,\quad y(3)=-3\cdot 3^4+8\cdot 3^3+18\cdot 3^2=135,$$
$$y(4)=-3\cdot 4^4+8\cdot 4^3+18\cdot 4^2=32.$$

Следовательно, наименьшее значение функции равно 0, а наибольшее – 135.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные функций:

а) $y=14x-3x^2+2x^4+3$; б) $y=6x+9x^2+3x^3-4$;

в) $y=15x^3+\dfrac{1}{4x^3}-4\sqrt[5]{x^3}-2$; г) $y=8x^6-\dfrac{1}{5x^5}-3\sqrt[3]{x^2}+7$;

д) $y=3\ln(x)-2\operatorname{tg}(x)+7\operatorname{arctg}(x)-4$; е) $y=\dfrac{e^x}{3}-7\cos(x)+7\arccos(x)$;

ж) $y=(2x^4+\dfrac{1}{4x^3})\cdot 2^x$; з) $y=(7x^3+9x-1)\cdot\log_5(x)$;

и) $y=\operatorname{ctg}(x)\cdot\dfrac{1}{x^2}$; к) $y=\arcsin(x)\cdot\sqrt{x}$;

л) $y=\dfrac{\ln(x)}{x^2+3}$; м) $y=\dfrac{8^x}{\cos(x)}$.

2. Найти производные сложных функций:

а) $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$; б) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{3}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2(x)\right)$; г) $y=\ln\left(\ln(x)\right)$.

3. Вычислить дифференциал заданных функций:

а) $s=7t-12t^2+16t^4+8$; б) $m=15n+9n^3+3n^8-3$;

в) $z=15p^5+\dfrac{1}{4p^4}-4\sqrt[8]{p^3}-2$; г) $u=\dfrac{7^d}{3}-7\sin(d)+7\operatorname{arctg}(d)$.

4. Найти производные функций, заданных неявно:

а) $x^2+5xy+y^2-7=0$; б) $3x^2+4xy-4x-8y=0$;

в) $x^3+3x^2y+3xy+y^2-8=0$; г) $x^2+xy+\sin(y)=0$.

5. Найти производные степенно-показательных функций:

а) $y=x^x$; б) $y=(2x+1)^{x-3}$;

в) $y=x^{\sin(5x-4)}$; г) $y=\cos(x)^{x^2}$.

6. С помощью предварительного логарифмирования найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{(4x-5)^5\cdot\sqrt[4]{(x+3)^3}}{\sin^2(5x)}$; б) $y=\dfrac{(2x+3)^6\cdot\sqrt[6]{(x-4)^5}}{\operatorname{tg}^3(2x)}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt[7]{(3x-1)^5}\cdot(2-3x)^4}{\operatorname{ctg}^4 3x}$; г) $y=\dfrac{\sqrt[6]{(4-5x}\cdot(6x-5)^3}{\sin^4(2x)}$.

7. Найти производные параметрических функций:

а) $\begin{cases}x=-2+3t-t^3,\\ y=t+2t^2+t^3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x=\dfrac{1-t}{1+t},\\ y=-\dfrac{2t}{1+t};\end{cases}$ г) $\begin{cases}x=\dfrac{(t+1)^2}{4},\\ y=\dfrac{(t-1)^2}{4}.\end{cases}$

8. Составить уравнения касательной и нормали в точке x_0 к заданной кривой. Выполнить построение.

а) $y=x^2-4x+1$, $x_0=-1$; б) $y=2x^2-4x+2$, $x_0=-2$;

в) $y=x^2+6x-1$, $x_0=1$; г) $y=2x^2+8x-3$, $x_0=-1$.

9. Задан закон $S(t)$ перемещения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0.

а) $S(t)=3t^4+2t^2-t+1$, $t_0=1$; б) $S(t)=t^4+t^2-5t+1$, $t_0=2$;
в) $S(t)=4t^4-2t^3+t^2-3$, $t_0=1$; г) $S(t)=3t^4-2t^3+7t^2+t$, $t_0=1$.

10. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

11. Исследовать функции на экстремум:

а) $y=\dfrac{1}{2}x^3+3x^2-7$; б) $y=-\dfrac{1}{2}x^3+6x-1$; в) $y=\dfrac{3x^2-6x}{x-1}$.

12. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функций:

а) $y=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{9}{2}x+2$; б) $y=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$;

в) $y=x^6-6x^5+7{,}5x^4+3$.

13. Найти наименьшее и наибольшее значения функций на заданных отрезках:

а) $y=x^3-3x^2+3,\quad [1;\ 3]$; б) $y=2x^3-15x^2+24x+5,\quad [0;\ 3]$;

в) $y=\dfrac{2x-3}{x^2+4},\quad [-2;\ 2]$.

14. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=x^3-6x^2+9x-4$; б) $y=\dfrac{3x^2+2x+8}{x+4}$;

в) $y=4x^2-x^4-3$; г) $y=\dfrac{x^2-3x-6}{x+2}$.

15. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом 3 см.

16. Из прямоугольного листа жести размером 24×9 см требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

17. Равнобедренный треугольник, периметр которого равен 12 см, вращается вокруг основания. Найти длину основания, при которой полученное тело вращения имеет наибольший объем?

Лекция 6. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Функция нескольких переменных, ее основные понятия и способы задания

Обозначим через D некоторое множество точек в n-мерном пространстве.

Если задан закон f, в силу которого каждой точке $M(x_1; ...; x_n) \in D$ ставится в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве D определена *функция n переменных* $y = f(x_1; \dots; x_n)$. При этом $x_1; ...; x_n$ называют *независимыми переменными*, или ее *аргументами*, а y – *зависимой переменной*, или *значением* функции n переменных.

Множество точек $M(x_1; ...; x_n)$, для которых функция $y = f(x_1; ...; x_n)$ определена, называют *областью определения* этой функции и обозначают $D(f)$, а всевозможные значения зависимой переменной y, которые она принимает на $D(f)$, – *областью значений функции* и обозначают $E(f)$.

Функцию многих переменных можно обозначать одним символом $y = f(M)$, указывая размерность пространства, которому принадлежит точка M.

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y на множестве D и записывается $z = f(x; y)$, если каждой паре значений $(x; y) \in D$ соответствует единственное значение величины z.

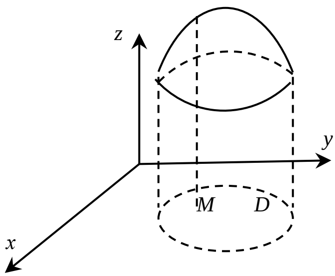
Как и функция одной переменной, функция двух переменных может быть задана *аналитически*, *таблично* и *графически*.

Задать функцию аналитически означает определить формулу, по которой каждой паре значений независимых переменных $(x; y) \in D$ ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной z.

Например, $z = 2x^3 + 3x^2 y + 6xy - y$ – аналитическое задание функции двух переменных.

Табличное задание функции двух переменных подразумевает определение функции в виде двумерной таблицы, где соответствующей паре значений независимых переменных $(x_i;\ y_j) \in D$ ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной z_{ij}.

Значения независимых переменных	y_1	y_2	…	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	…	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	…	z_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	z_{n1}	z_{n2}	…	z_{nm}



Функции двух переменных можно изобразить графически в виде некоторой поверхности.

Графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется геометрическое место точек в трехмерном пространстве, координаты которых $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $z = f(x; y)$ или $F(x; y; z) = 0$. При этом каждой точке M с координатами $(x; y)$ из области D должно ставиться в соответствие определенное значение переменной z.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$. Положим $z = C$, где C – постоянная величина. Тогда уравнение $C = f(x; y)$ дает зависимость между переменными x и y, при которой заданная функция z сохраняет свое значение, равное C. Геометрически это означает, что поверхность $z = f(x; y)$ пересекается плоскостью $z = C$, параллельной плоскости xOy. В результате такого пересечения полученная линия проектируется на плоскость xOy и задается уравнением $C = f(x; y)$.

Линия на плоскости xOy, в каждой точке которой функция $z = f(x; y)$ сохраняет постоянное значение, называется *линией уровня* этой функции.

Пример 1. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Поверхность, определяемая функцией $z = x^2 + y^2$, является параболоидом вращения. Линиями уровня являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = C$.

6.2. Нахождение области определения функции двух переменных

В общем случае область определения функции двух переменных задается одним или несколькими неравенствами, зависящими от двух переменных. В отличие от области определения функции одной переменной, эту область можно лишь описать словестно или показать графически. При этом можно выделить следующие основные случаи, когда область определения не совпадает с плоскостью xOy:

1) $z = \dfrac{Q(x;y)}{f(x;y)} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) \neq 0;$

2) $z = \sqrt{f(x;y)} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) \geq 0;$

3) $z = \dfrac{Q(x;y)}{\sqrt{f(x;y)}} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) > 0;$

4) $z = \log_a(f(x;y))$, где $a > 0$ и $a \neq 1 \Rightarrow D(z):\ f(x;y) > 0;$

5) $z = \log_{f(x;y)}(b)$, где $b > 0 \Rightarrow D(z):\ \begin{cases} f(x;y) > 0, \\ f(x;y) \neq 1; \end{cases}$

6) $z = \arccos(f(x;y)) \Rightarrow D(z):\ |f(x;y)| \leq 1;$

7) $z = \arcsin(f(x;y)) \Rightarrow D(z):\ |f(x;y)| \leq 1.$

Для того чтобы показать область определения функции двух переменных, необходимо:

1) задать эту область неравенством или системой неравенств;

2) рассмотреть и показать графически границы этой области. Договоримся, что границы области определения при строгом неравенстве показывать пунктирной линией, а при нестрогом неравенстве – непрерывной линией. В результате вся координатная плоскость xOy разобьется границей на части;

3) чтобы определить ту ее часть, которая будет относиться к $D(z)$, необходимо выбрать произвольную испытуемую точку, не лежащую на границе, и подставить ее координаты в каждую математическую зависимость п. 1. При этом если образуется истинное неравенство, то от соответствующей границы показать стрелки по направлению к испытуемой точке, иначе стрелки от границы направить в противоположную сторону;

4) на основании проведенных исследований сделать вывод, в котором описательно охарактеризовать $D(z)$.

Разберем эту схему исследований на примерах.

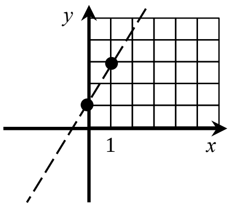
Пример 2. Найти области определения функции $z = \dfrac{3x^2 - 4y + 5}{2x - y + 1}$.

Решение. 1. $D(z)$: $2x - y + 1 \neq 0$.

Границу этой области будет определять уравнение прямой линии $2x - y + 1 = 0$.

2. Для построения этой границы достаточно знать две точки. Определим их и выполним построение:

x	0	1
y	1	3



Так как в п. 1 неравенство строгое, то соответствующую его границу показываем пунктирной линией.

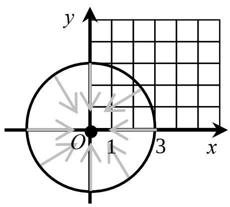
3. Исходное неравенство определяет знак «≠», а это значит, что из всех точек координатной плоскости следует исключить только точки, лежащие на границе.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости *xOy*, не лежащих на прямой $2x - y + 1 = 0$.

Пример 3. Найти области определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Решение. 1. $D(z)$: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Границу этой области будет определять уравнение линии $9 - x^2 - y^2 = 0$. Для того чтобы понять, что это за линия, выполним преобразование ее уравнения $x^2 + y^2 = 9$. Это уравнение окружности с центром в начале координат $O(0; 0)$ и радиуса $R = 3$.



2. Построим эту окружность. Так как в п. 1 неравенство нестрогое, то соответствующую его границу показываем непрерывной линией.

3. Исходное неравенство определяет знак «≥», а это значит, что к искомой нами области могут относиться точки, лежащие либо внутри, либо снаружи границы, включая саму границу. Чтобы определиться с этим, выберем произвольную испытуемую точку, не лежащую на окружности. В ка-

честве такой точки можно взять, например, точку $O(0;\ 0)$. Подставим ее координаты в исходное неравенство. При этом получим $9-0^2-0^2=9$, т. е. $9 \geq 0$, а это *истинное* неравенство. Это означает, что в данном случае для обозначения области определения заданной функции стрелки следует направить от границы к испытуемой точке O.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости xOy, лежащих внутри окружности $x^2+y^2=9$, включая точки самой окружности.

Пример 4. Найти области определения функции

$$z=\log_3(y-x^2+4x-1).$$

Решение. 1. $D(z)$: $y-x^2+4x-1>0$.

Границу этой области будет определять уравнение линии $y-x^2+4x-1=0$. Данное уравнение можно преобразовать к виду $y=x^2-4x+1$, а это уравнение параболы с ветвями, симметричными прямой, параллельной оси Oy, и направленными вверх.

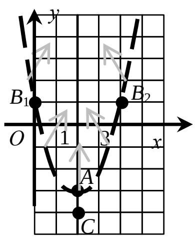
2. Для построения параболы достаточно знать ее вершину и две точки, лежащие на различных ее ветвях. Определим эти точки для нашего случая:

$$x_{\text{в}}=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2,\ y_{\text{в}}=2^2-4\cdot 2+1=4-8+1=-3.$$

Таким образом, вершина параболы находится в точке $A(2;\ -3)$.

Две другие точки параболы выберем так, чтобы их абсциссы были симметричны относительно $x_{\text{в}}$ и одна из них совпадала с нулем. В качестве таких значений возьмем $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. В этом случае ординаты этих точек совпадут и будут равны $y_1 = y_2 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$. Определились еще две точки $B_1(0;\ 1)$ и $B_2(4;\ 1)$.

Так как в п. 1 неравенство строгое, то соответствующую его границу показываем пунктирной линией.



3. Исходное неравенство определяет знак «>», а это значит, что к искомой нами области могут относиться точки, лежащие либо внутри, либо снаружи границы. Сама граница в эту область включаться не будет, так как знак неравенства строгий.

Чтобы определиться с выбором, возьмем произвольную испытуемую точку, не лежащую на параболе. В качестве такой точки можно взять, например, точку $C(2;\ -4)$.

Подставим ее координаты в исходное неравенство, при этом получим $-4-2^2+4\cdot 2-1=-1$, т. е. $-1 > 0$, а это *ложное* неравенство. Это означает, что для обозначения области определения заданной функции стрелки следует направить от границы в сторону, противоположную испытуемой точке C.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости xOy, лежащих внутри параболы $y=x^2-4x+1$, исключая точки самой параболы.

6.3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Обозначим через $\rho(M;\ M_0)$ *расстояние* между точками M и M_0. Если $n = 2$, $M(x;\ y)$, $M_0(x_0;\ y_0)$, то $\rho(M;\ M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. В n-мерном пространстве $\rho(M;\ M_0)=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2}$.

Пусть на множестве D задана функция $y = f(M)$.

Число A называется *пределом функции* $y = f(M)$ в точке M_0, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $M \in D$, которые удовлетворяют условию $0 < \rho(M;\ M_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$\left|f(M)-A\right|<\varepsilon .$$

Свойства пределов функций одной переменной сохраняются и для функций многих переменных, т. е. если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в точке M_0 конечные пределы, то:

1. $\lim\limits_{M\to M_0} cf(M)=\text{c}\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.
2. $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\pm g(M))=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\pm\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$.
3. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M)=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\cdot\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$.
4. $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}$, если $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)\neq 0$.

Заметим, что если предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ существует, то он не должен зависеть от пути, по которому точка M стремится к точке M_0.

Функция $y = f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Функция $y = f(M)$ называется *непрерывной* на множестве D, если она непрерывна в каждой точке $M \in D$.

Точки, в которых непрерывность функции нарушается, называются *точками разрыва функции*. Точки разрыва могут быть изолированными, создавать линии разрыва, поверхности разрыва и т. д. Например, функция $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ имеет разрыв в точке (0; 0), а функция $z = \dfrac{1}{y - 2x^2}$ имеет разрыв в точках параболы $y = 2x^2$.

6.4. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x; y)$ – функция двух переменных.

Придадим независимой переменной x приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y),$$

которое называется *частным приращением* z *по* x.

Аналогично, если независимой переменной y придадим приращение Δy, оставляя при этом неизменной переменную x, то z получит приращение $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$, называемое *частным приращением* z *по* y.

Частной производной по x от функции z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.$$

Эта производная обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x; y).$$

Аналогично определяется частная производная от функции $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad z'_y,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad f'_y(x;y)\ .$$

Пример 5. Найти значения частных производных функции $z = 2x^3 + 3x^2 y + 6xy - y^3$ в точке $M_0(-1;\ 2)$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию переменной x, находим частную производную по x:

$$z'_x = (2x^3)'_x + (3x^2 y)'_x + (6xy)'_x - (y^3)'_x = 6x^2 + 6xy + 6y - 0 =$$

$$= 6x^2 + 6xy + 6y\ .$$

Вычислим значение этой производной в точке M_0:

$$z'_x(-1;2) = 6(-1)^2 + 6\cdot(-1)\cdot 2 + 6\cdot 2 = 6\ .$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, находим частную производную по y:

$$z'_y = (2x^3)'_y + (3x^2 y)'_y + (6xy)'_y - (y^3)'_y = 0 + 3x^2 + 6x - 3y^2 =$$

$$= 3x^2 + 6x - 3y^2\ .$$

Вычислим значение производной в точке M_0:

$$z'_y(-1;\ 2) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 3\cdot 2^2 = -15\ .$$

6.5. Дифференцируемость и полный дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M(x;\ y)$ вместе со своими частными производными $f'_x(x;y)$, $f'_y(x;y)$. Выберем приращение Δx и Δy так, чтобы ($x + \Delta x$; $y + \Delta y$) принадлежала рассматриваемой окрестности.

Полное приращение функции двух переменных $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ определяется формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)\ ,$$

где $x;\ y;\ x+\Delta x;\ y+\Delta y$ принадлежат области определения функции.

Если полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x\ ;\ y + \Delta y\ ) - f(x;\ y)$ функции $z = f(x;\ y)$ в точке $M(x;\ y)$ можно записать в виде

$$\Delta z = f'_x\left(x;y\right)\ \Delta x + \ f'_y\left(x;y\right)\ \Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\ ,$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функция $z = f(x; y)$ называется дифференцированной в точке $M(x; y)$, а линейная часть ее полного приращения Δz относительно Δx и Δy называется полным дифференциалом функции и обозначается dz.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy. Обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то формулу полного дифференциала можно записать в виде

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y .$$

Пример 6. Найти полный дифференциал функции $z = e^{x^2 - y^2}$.
Решение. Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2-y^2} \cdot 2x , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2-y^2} \cdot (-2y).$$

Тогда в соответствии с формулой полный дифференциал запишем в виде $\mathrm{d}z = \left(e^{x^2-y^2} \cdot 2x\right)\mathrm{d}x + \left(e^{x^2-y^2} \cdot \left(-2y\right)\right)\mathrm{d}y$.

Пример 7. Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{xy} + \frac{\sqrt{x}}{y} .$$

Решение. Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{x}y} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} x - \frac{\sqrt{x}}{y^2}.$$

Тогда полный дифференциал запишем в виде

$$\mathrm{d}z = \left(e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{x}y}\right)\mathrm{d}x + \left(e^{xy} x - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)\mathrm{d}y .$$

6.6. Формула приближенного вычисления значения функции двух переменных

Пусть функция $f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x;\ y)$. Из формулы полного приращения функции $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$ следует, что

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) = f(x; y) + \Delta z.$$

При малых приращениях независимых переменных полное приращение функции мало отличается от полного ее дифференциала, т. е.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Тогда получим приближенную формулу вычисления значения функции в окрестности точки, для которой это значение находится без калькулятора:

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x; y) + \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y\,.$$

Пример 8. Вычислить приближенно значение $1{,}04^{1{,}99}$, исходя из значения функции $z = x^y$ в точке $M(1;\ 2)$.

Решение. Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = –0,01.

Найдем значение функции $z(x;\ y)$ = $1^2 = 1$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1};\ \ \frac{\partial z}{\partial x}(M) = 2 \cdot 1^1 = 2\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;\ \frac{\partial z}{\partial y}(M) = 1^2 \cdot \ln(1) = 0\,.$$

Полный дифференциал функции z равен:

$$dz = 0{,}04 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 = 0{,}08 + 0 = 0{,}08.$$

Тогда $1{,}04^{1{,}99} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08$.

Точное значение этого выражения: 1,08117587.

6.7. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные функций нескольких переменных называют также частными производными первого порядка, или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка от функции $f(x;y)$ называются соответствующие частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Для функции $z=f(x;y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x(x;y)\right)'_x=f''_{xx}(x;y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(f'_y(x;y)\right)'_y=f''_{yy}(x;y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x(x;y)\right)'_y=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(f'_y(x;y)\right)'_x=f''_{yx}(x;y).$$

Частные производные второго порядка, взятые по одной переменной, называются *повторными*, а по различным переменным – *смешанными*.

Справедливо утверждение, что если функция $z=f(x;y)$ и ее смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M(x;y)$ и непрерывны в этой точке, то смешанные производные второго порядка этой функции равны:

$$f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)\ .$$

Дифференцируя частные производные второго порядка как по *x*, так и по *y*, получают частные производные третьего порядка и т. д.

Пример 9. Дана функция $z=x^3+2x^2y-8xy^2+y^3$. Найти ее частные производные второго порядка.

Решение. Находим частные производные функции *z*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy-8y^2\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2-16xy+3y^2\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[3x^2+4xy-8y^2\right]'_x=6x+4y\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]'_y = -16x + 6y\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 + 4xy - 8y^2\right]'_y = 4x - 16y\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]'_x = 4x - 16y\ .$$

Пример 10. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3y^2 + \sin(xy+1)$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + y\cos(xy+1);\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_x = 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_y = 6x^2y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^3y + x\cos(xy+1)\right]'_x = 6x^2y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left[2x^3y + x\cos(xy+1)\right]'_y = 2x^3 - x^2\sin(xy+1).$$

Дифференциалы второго порядка определяют по формуле

$$d^2z = d(dz).$$

Тогда

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2.$$

6.8. Производная по направлению. Градиент и его свойства

Производная функции z = $f(x;\, y)$ в *направлении вектора* $\vec{l} = (l_x;\, l_y)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos(\beta),$$

где $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}, \quad \cos(\beta) = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}.$$

Если частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей, то производная в направлении вектора $\vec{l}$ определяет скорость изменения функции в указанном вектором $\vec{l}$ направлении.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ называется вектор

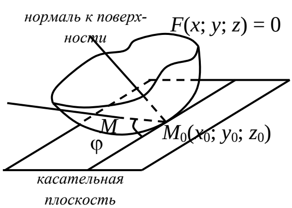
$$\overrightarrow{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Свойства градиента

1. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента, причем это наибольшее значение производной равно $\left|\overrightarrow{grad}(z)\right|$.

2. Производная в направлении вектора, перпендикулярного градиенту, равна нулю.

6.9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Пусть задана некоторая поверхность уравнением $F(x; y; z) = 0$.

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ называется плоскость, содержащая множество всех касательных, проведенных в этой точке.

Касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)(z - z_0) = 0.$$

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в данной точке M_0.

Уравнение нормали к поверхности в точке M_0 будет иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{z-z_0}{f'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)}.$$

Пример 11. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M(1;\ 1)$.

*Решение***.** Запишем уравнение поверхности в виде $F(x;\ y;\ z)=0$:

$$z-x^2+2xy-y^2+x-2y=0\,.$$

Определим аппликату точки касания, проекцией которой в плоскости xOy является точка $M(1;\ 1)$:

$$z=1^2-2\cdot1\cdot1+1^2-1+2\cdot1=1\,.$$

Значит, точка касания имеет координаты $M'(1;\ 1;\ 1)$.

Вычислим частные производные первого порядка функции $F(x;\ y;\ z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+2y+1;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2x-2y-2;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

и их значения в точке $M'(1;\ 1;\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M'}=1;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M'}=-2;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M'}=1.$$

Тогда уравнение касательной плоскости будет иметь вид:

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0,\ \text{или}\quad x-2y+z=0,$$

а уравнение нормали соответственно запишем в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

6.10. Экстремум функции двух переменных

Максимумом (*минимумом*) функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0;y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x;y)$, достаточно близких к точке M_0 и отличных от нее.

Точки максимума и минимума называют точками *экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными.*

Необходимые условия экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т. е.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x;y)$.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0;y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x;y)$ и пусть

$$z''_{xx}(M_0) = A, \; z''_{xy}(M_0) = B, \; z''_{yy}(M_0) = C, \; \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

– если $\Delta < 0$, то в стационарной точке M_0 нет экстремума;

– если $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум, причем максимум, если $A < 0$, минимум, если $A > 0$;

– если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 12. Исследовать функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Решение. Найдем частные производные $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$, $z'_y = 2xy + 2y$ и решим систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения $2y(x + 1) = 0$, $y = 0$, $x = -1$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение: $6x^2 + 10x = 0$, $2x(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\dfrac{5}{3}$. Таким образом, найдены две критические точки $M_1(0;\,0)$, $M_2\left(-\dfrac{5}{3};\,0\right)$. Теперь в первое уравнение подставим $x = -1$: $6 + y^2 - 10 = 0$, $y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$. Следовательно, стали известны еще две критические точки $M_3(-1;\,-2)$, $M_4(-1;\,2)$. Найдем частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 12x + 10$, $z''_{xy} = 2y$, $z''_{yy} = 2x + 2$.

Проверим достаточное условие экстремума для стационарных точек:

$\underline{M_1(0;\ 0):}$

$$A = z''_{xx}(0;\ 0) = 12 \cdot 0 + 10 = 10\ ,\ B = z''_{xy}(0;\ 0) = 2 \cdot 0 = 0\ ,$$

$$C = z''_{yy}(0;\ 0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2\ ,\ AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 10\ .$$

Следовательно, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет экстремум. Так как $A > 0$, то это минимум. При этом $z_{\min} = 2 \cdot 0^3 - 0 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 0^2 = 0.$

$\underline{M_2\left(-\frac{5}{3};\ 0\right):}$

$$A = z''_{xx}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 12 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = -10\ ,\ B = z''_{xy}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 2 \cdot 0 = 0\ ,$$

$$C = z''_{yy}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 2 = -\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}\ ,$$

$$AC - B^2 = -10 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3}\ .$$

Следовательно, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет экстремум. Так как $A < 0$, то это максимум. При этом

$$z_{\max} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2 = 4\frac{17}{27}\ .$$

$M_3(-1;\ -2):$

$$A = z''_{xx}(-1; -2) = 12 \cdot (-1) + 10 = -2\ ,\ B = z''_{xy}(-1; -2) = 2 \cdot (-2) = -4\ ,$$

$$C = z''_{yy}(-1; -2) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0\ ,\ AC - B^2 = -2 \cdot 0 - (-4)^2 = -16\ .$$

Следовательно, в точке $M_3(-1;\ -2)$ экстремума нет.

$M_4(-1;\ 2):$

$$A = z''_{xx}(-1;\ 2) = 12 \cdot (-1) + 10 = -2\ ,\ B = z''_{xy}(-1;\ 2) = 2 \cdot (2) = 4\ ,$$

$$C = z''_{yy}(-1;\ 2) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0\ ,\ AC - B^2 = -2 \cdot 0 - 4^2 = -16\ .$$

Следовательно, в точке $M_4(-1; 2)$ экстремума нет.

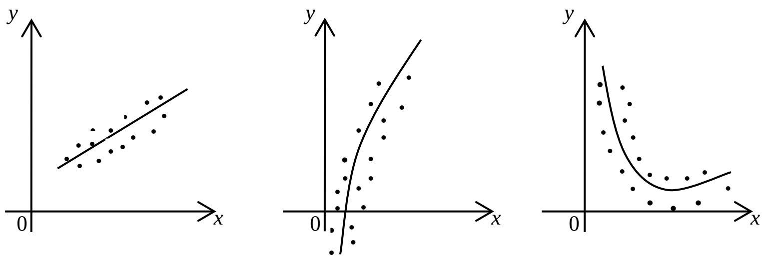
6.11. Метод наименьших квадратов

В различных областях деятельности при изучении всевозможных процессов часто устанавливаются зависимости между участвующими в процессах величинами. Эти зависимости обычно выражаются математическими формулами. Формулы, которые составлены на основании обработки изучаемых данных, называются *эмпирическими*. Одним из наилучших методов получения эмпирических формул является *метод наименьших квадратов*.

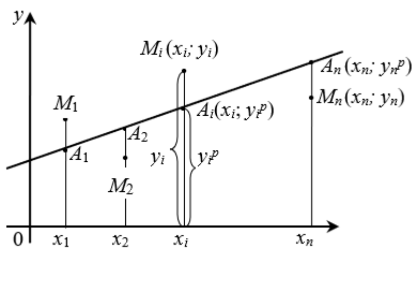
Пусть существует некоторая зависимость между переменными величинами x и y. Занесем результаты наблюдений этих величин и их значения в таблицу:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Эта таблица выражает некоторую функциональную зависимость между переменными x и y. Требуется установить форму этой зависимости в аналитическом виде.



Будем рассматривать упорядоченные пары чисел $(x_i; y_i)$ данной таблицы как точки в прямоугольной системе координат. Может оказаться, что эти точки на графике будут группироваться около некоторой линии. Если этой линией будет прямая, то целесообразно приближенно считать зависимость между переменными x и y линейной и искать ее в виде уравнения прямой линии $y^p = ax + b$, где коэффициенты a и b нужно определить. Таким образом, перед нами стоит задача так определить коэффициенты a и b, чтобы полученная прямая «наилучшим образом» проходила через множество точек $(x_i;\ y)$.



Обозначим через $M_i(x_i; y_i)$ наблюдаемые пары значений

$(x_i; y_i)$, а через $A_i(x_i; y_i^p)$ – соответствующие точки на прямой $y^p = ax + b$.

Если сумма расстояний точек $M_i(x_i; y_i)$ от соответствующих точек $A_i(x_i; y_i^p)$ будет наименьшей, то прямая $y^p = ax + b$ будет «наилучшим образом» проходить через точки $M_i(x_i; y_i)$, т. е. в этом случае должно выполняться условие:

$$\left|y_1^p - y_1\right| + \left|y_2^p - y_2\right| + \ldots + \left|y_i^p - y_i\right| + \ldots + \left|y_n^p - y_n\right| \to \min$$

или $f(a;b) = \left|ax_1 + b - y_1\right| + \left|ax_2 + b - y_2\right| + \ldots + \left|ax_i + b - y_i\right| +$
$+ \ldots + \left|ax_n + b - y_n\right| \to \min$.

Разности $y_i^p - y_i$ или $ax_i + b - y_i$ называются погрешностями, а функция $f(a;b)$ есть функция двух переменных a и b. Следовательно, задача сводится к подбору таких коэффициентов a и b, чтобы сумма абсолютных величин погрешностей была наименьшей.

Рассмотрим функцию

$$F(a;b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2 .$$

Эта функция является функцией двух независимых переменных a и b. Если можно будет найти минимум функции $F(a;b)$ при некоторых значениях a и b, то при этих же значениях функция $f(a;b)$ также будет иметь минимум. Таким образом, задача отыскания «наилучшей прямой» сводится к задаче отыскания минимума функции двух переменных.

Необходимым условием экстремума функции $F(a;b)$ в точке $(a;b)$ является равенство нулю ее частных производных $F_a^{'}$ и $F_b^{'}$, т. е.

$$\begin{cases} 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \ldots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = 0, \\ 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \ldots + 2(ax_n + b - y_n) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем и получим:

$$\begin{cases} a\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) + b\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \\ a\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) + bn = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \end{cases}$$

Запишем суммы в сокращенном виде:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

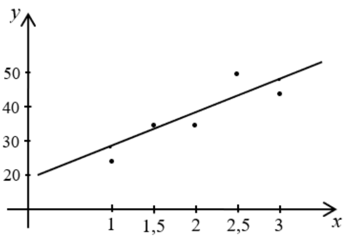
Тогда система примет вид: $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$

Полученная система двух уравнений с двумя неизвестными называется *нормальной системой метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой*. Решив эту систему, найдем значения a и b и подставим их в уравнение $y^p = ax + b$. Полученная прямая и будет «наилучшей». Уравнение $y^p = ax + b$ называется *уравнением регрессии* и выражает линейную зависимость переменной *y* от переменной *x*. Коэффициент *a* называется *коэффициентом регрессии* и показывает, как изменится переменная *y* при изменении переменной *x* на единицу.

Пример 13. На основании опытных данных построить точки $M_i(x_i\,;\,y_i)$ и по точечной диаграмме определить вид эмпирической зависимости. Затем методом наименьших квадратов найти параметры эмпирической функции.

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	25	36	35	50	45

Решение. Построим точки $M_i(x_i\,;y_i)$.



На диаграмме видно, что эти точки группируются около прямой линии. Поэтому эмпирическую зависимость будем считать линейной и искать ее в виде уравнения прямой линии $y^p = ax + b$. Для определения параметров a и b заполним таблицу:

№ п. п.	x_i	y_i	x_i^2	$x \cdot y_i$	y^p
1	1	25	1	25	27,4
2	1,5	36	2,25	54	32,8
3	2	35	4	70	38,2
4	2,5	50	6,25	125	43,6
5	3	45	9	135	49
$n=5$	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 191$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 22,5$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 409$	

Запишем нормальную систему: $\begin{cases} 22,5a + 10b = 409, \\ 10a + 5b = 191. \end{cases}$

Решив эту систему, получим a = 10,8; b = 16,6.

Следовательно, эмпирическая зависимость задается уравнением $y^p = 10,8x + 16,6$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти область определения заданных функций двух переменных:

а) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{3xy}}$; б) $z = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}$;

в) $z = \ln(xy)$; г) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} - 1}$;

д) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$; е) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

2. Вычислить частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$:

а) $z = x^2 y + 3y^2 + 2x + 4$; б) $z = 5xy^2 + y^3 + 2x$;

в) $z = e^{x^2 y^3}$; г) $z = \sin(3xy)$;

д) $z = \operatorname{arctg}(xy)$; е) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

3. Найти полный дифференциал функции:

а) $z = x^2 y^2$; б) $z = x^2 + y^2$;

в) $z = e^{xy}$; г) $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2\right)$;

д) $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$; е) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

4. Найти величину вектора градиента от заданной функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

а) $z = x^2 y + y - 2x + 4$, $M_0(0; –1)$; б) $z = 2xy^2 - y^3 + 2x$, $M_0(1; –1)$;

в) $z = e^{3x} - y^2$, $M_0(0; 2)$; г) $z = \sin\left(3xy\right)$, $M_0(0; \frac{\pi}{2})$.

5. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F\left(x;\ y;\ z\right) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $z - x^2 + 4y - 2x + 4 = 0$, $M_0(0; –1; 0)$;

б) $z - 2xy^2 - y^3 + 2x = 0$, $M_0(1; –1; 5)$.

6. Найти частные производные второго порядка заданных функций:

а) $z = xy + 5y^2 + 6x^3$; б) $z = x^3 y^4 - 5y^5 + 7x^2 + 2x - 3$;

в) $z = \sin\left(2x + 3y\right)$; г) $z = x \cdot \ln(y)$.

7. Исследовать на экстремум заданные функции:

а) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x - 6y + 1$; б) $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$;

в) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; г) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

д) $z = 8x^3 + y^3 - 24xy - 7$; е) $z = x^2 y + 2xy^2 - 18xy$.

8. На основании опытных данных построить точечный график, определить вид эмпирической зависимости. Методом наименьших квадратов найти параметры теоретической линии и построить ее, совместив с точечным графиком на одной координатной плоскости.

а)

x_i	–2	–1	0	2	4
y_i	–12	–9	–6	0	6

б)

x_i	–2	–1	0	2	4
y_i	–3	–4,5	–6	–9	–12

в)

x_i	–2,5	1,5	2,4	3	5
y_i	12,5	–3,5	–7,1	–9,5	–17,5

Лекция 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$. Это означает, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций, отличающихся друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*. Переменная x называется *переменной интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ – *подынтегральным выражением*.

Неопределенный интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций:

- производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$;
- дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$;
- неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$;
- постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$;
- неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$;

• результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$. Такое свойство называется *инвариантностью формулы интегрирования*;

• если известно, что $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$, то $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = {}$ $= \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$.

7.2. Основная таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование функций

Правила интегрирования основных элементарных функций задаются основной таблицей неопределенных интегралов:

1	$\int \mathrm{d}x = x+C$	2	$\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
3	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	4	$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln(a)}+C$
5	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$	6	$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+C$
7	$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)+C$	8	$\int \dfrac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x)+C$
9	$\int \dfrac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}(x)+C$	10	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x)+C$
11	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x)+C$		

Интегралы данной таблицы называются *табличными*. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

Эти формулы и свойства позволяют производить непосредственное вычисление неопределенных интегралов. Таким образом, суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, чтобы данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределенного интеграла свести к одному из табличных интегралов. При этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются *подведением под знак дифференциала*:

$$1)\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}(u+a), \qquad 2)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{a}\mathrm{d}(au),$$

где a – некоторое не равное нулю число.

Пример 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x^6 \mathrm{d}x$; б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right)\mathrm{d}x$; в) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

г) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\mathrm{d}x$.

Решение: а) $\int x^6 \mathrm{d}x = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right)\mathrm{d}x = 2\int x^3 \mathrm{d}x - 4\int x^2 \mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\cdot\frac{x^3}{3} +$

$+5\cdot x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C$;

в) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 3\int x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$

$= 3\int x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x - 2\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \operatorname{arctg}(x) + C =$

$= 3\cdot\frac{4\cdot x^{\frac{7}{4}}}{7} - 2\cdot\frac{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}{2} + \operatorname{arctg}(x) + C = \frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - 3\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(x) + C$;

г) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4\sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int e^x \mathrm{d}x -$

$-4\int \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4\cdot(-\cos(x)) + \operatorname{tg}(x) + C =$

$= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4\cos(x) + \operatorname{tg}(x) + C.$

7.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью *метода замены переменной (подстановки)*. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если обозначить $x = s(t)$, $\mathrm{d}x = s'(t)\mathrm{d}t$ и сделать соответствующие преобразования в заданном подынтегральном выражении, полученный интеграл при удачном выборе функции $s(t)$ может оказаться более простым или даже табличным. Тогда справедлива формула замены в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(s(t))s'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$; б) $\int (3-x)^5\,\mathrm{d}x$; в) $\int \sqrt[5]{3x-4}\,\mathrm{d}x$; г) $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$;

д) $\int \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+5}\,\mathrm{d}x$.

Решение: а) $\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x = |\ t = 3x,\ \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}\ | = \int \sin(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{3} =$

$= \dfrac{1}{3}\int \sin(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\cdot(-\cos(t)) + C = -\dfrac{1}{3}\cos(3x) + C$;

б) $\int (3-x)^5\,\mathrm{d}x = |\ t = 3-x,\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t| = \int t^5(-\mathrm{d}t) =$

$= -\int t^5\mathrm{d}t = -\dfrac{t^6}{6} + C = -\dfrac{(3-x)^6}{6} + C$;

в) $\int \sqrt[5]{3x-4}\,\mathrm{d}x = |\ t = 3x-4,\ \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}\,| = \int \sqrt[5]{t}\,\dfrac{\mathrm{d}t}{3} = \dfrac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \dfrac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(3x-4)^6} + C$;

г) $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = |\ t = x^2,\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x,\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}\ | = \int e^t\,\dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \dfrac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{1}{2}e^t + C = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$;

д) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5}\mathrm{d}x = \left| t = x^3-3x+5,\ \mathrm{d}t = \left(3x^2-3\right)\mathrm{d}x = 3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x,\right.$

$$\left.\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}\right| = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-3x+5\right| + C.$$

При вычислении неопределенных интегралов довольно-таки распространен случай, когда подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя. В этом случае такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т. е. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln(x)}$.

Решение. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln(x)} = \int \frac{\left(\ln(x)\right)'}{\ln(x)}\mathrm{d}x = \ln(\ln(x)) + C$.

7.4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Формула интегрирования по частям следует из известной формулы нахождения дифференциала произведения двух функций:

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u.$$

Проинтегрировав левую и правую часть приведенного выше равенства и выразив интеграл $\int u\,\mathrm{d}v$, получим следующую формулу:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Если в результате применения этой формулы окажется, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то ее применение считается оправданным. Обычно в подынтегральном выражении за функцию u принимают тот множитель, который после его дифференцирования становится более простым. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал $\mathrm{d}v$ некоторой функции v.

В ходе использования данного метода интегрирования удобно руководствоваться следующими рекомендациями:

• в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}\mathrm{d}x$, $\int P(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ имеет смысл положить $u = P(x)$, а в качестве $\mathrm{d}v$ взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

• в интегралах вида $\int P(x)\arcsin(x)\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\arccos(x)\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,(x)\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x$ следует положить $\mathrm{d}v = P(x)\,\mathrm{d}x$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u;

• в интегралах вида $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ можно положить $u = e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за $\mathrm{d}v$.

Пример 4. Найти интегралы:

а) $\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$; б) $\int (2x+1)e^{3x}\mathrm{d}x$; в) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$; г) $\int x^2e^{5x}\mathrm{d}x$.

Решение: а) $\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = |\, u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \cos(x)\,\mathrm{d}x,$

$\int \mathrm{d}v = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x,\ v = \sin(x) = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C$;

б) $\int (2x+1)e^{3x}\mathrm{d}x = |\, u = 2x+1,\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^{3x}\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int e^{3x}\mathrm{d}x,$

$v = \frac{1}{3}e^{3x} \,|= (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{3}\cdot(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}\cdot(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$

$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x + \frac{1}{3}\right) + C$;

в) $\int \ln(x)\mathrm{d}x = |\, u = \ln(x),\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int \mathrm{d}x,\ v = x \,| =$

$= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$;

г) $\int x^2e^{5x}\mathrm{d}x = |\, u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^{5x}\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int e^{5x}\mathrm{d}x,$

$$v=\frac{1}{5}e^{5x} \;|= x^2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}-\int\frac{1}{5}e^{5x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}\mathrm{d}x=|\; u=x,$$

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\; \mathrm{d}v=e^{5x}\mathrm{d}x,\; \int\mathrm{d}v=\int e^{5x}\mathrm{d}x,\; v=\frac{1}{5}e^{5x}\;|=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\left(x\cdot\frac{1}{5}e^{5x}-\int\frac{1}{5}e^{5x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}xe^{5x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}e^{5x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{25}xe^{5x}+\frac{2}{125}e^{5x}+C=\frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}\right)+C.$$

7.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Функция вида $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной дробью*, если ее числитель и знаменатель являются многочленами. Рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если же степень числителя больше либо равна степени знаменателя, то рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *неправильной*.

Из теории многочленов известно, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения многочленов, т. е. разложен на множители первой или второй степени. В соответствии с этим любую рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого количества выражений следующих видов: $\dfrac{A}{(x-c)^m}$, $\dfrac{Bx+c}{\left(x^2+px+q\right)^s}$, $A, B, C\in R$, $m, s\in N$, где x^2+px+q – трехчлен с действительными коэффициентами, который не имеет действительных корней.

Такие рациональные дроби будем называть *простейшими*. При интегрировании простейших рациональных дробей можно использовать преобразования дифференциала:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$;

2) $\int \frac{A}{(x-a)^m}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-m}\mathrm{d}(x-a) = \frac{A(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C =$

$= \frac{A}{(1-m)\,(x-a)^{m-1}} + C$;

3) $\int \frac{Ax+B}{px^2+qx+r}\mathrm{d}x = \frac{A}{2p}\int \frac{(2px+q)+\left(2p\frac{B}{A}-q\right)}{px^2+qx+r}\mathrm{d}x =$

$$= \frac{A}{2p}\int \frac{2px+q}{px^2+qx+r}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{px^2+qx+r} =$$

$$= \frac{A}{2p}\int \frac{\mathrm{d}\left(px^2+qx+r\right)}{px^2+qx+r} + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{px^2+qx+r} =$$

$$= \ln\left|px^2+qx+r\right| + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{px^2+qx+r} =$$

$$= \ln\left|px^2+qx+r\right| + \frac{1}{p}\left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}} =$$

$$= \ln\left|px^2+qx+r\right| + \frac{1}{p}\left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{4rp-q^2}{4p^2}} =$$

Оставшийся интеграл имеет вид $k\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ ($\alpha = \frac{q}{2p}$, $\beta = \frac{4rp-q^2}{4p^2}$) и приводится к табличному интегралу с помощью подстановки $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$, что дает в результате $\frac{1}{\beta}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

$$= \ln\left|px^2+qx+r\right| + \frac{2}{\sqrt{4rp-q^2}}\left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{2px+q}{\sqrt{4rp-q^2}}\right) + C;$$

4) $\int \frac{Ax+B}{\left(px^2+qx+r\right)^m}\mathrm{d}x = \frac{A}{2p}\int \frac{\left(2px+q\right)+\left(2p\frac{B}{A}-q\right)}{\left(px^2+qx+r\right)^m}\mathrm{d}x =$

$$= \frac{A}{2p}\int \frac{\left(2px+q\right)}{\left(px^2+qx+r\right)^m}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(px^2+qx+r\right)^m} =$$

$$= \frac{A}{2p\left(-m+1\right)}\cdot\left(px^2+qx+r\right)^{-m+1} + \left(B-\frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(px^2+qx+r\right)^m}.$$

Оставшийся интеграл подстановками сводится к виду $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-a^2\right)^m}$. Обозначим его I_m. Для нахождения этого интеграла применим способ интегрирования по частям.

Пусть $u = \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^m}$, $\mathrm{d}u = -\frac{m\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2-a^2\right)^{m+1}}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$.

Тогда получим (для любого m):

$$I_m = \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^m} + 2m\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\left(x^2-a^2\right)^{m+1}} = \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^m} + 2m\int \frac{\left(x^2-a^2\right)+a^2}{\left(x^2-a^2\right)^{m+1}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^m} + 2m\left(I_m + a^2\cdot I_{m+1}\right).$$

Из уравнения $I_m = \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^m} + 2m\left(I_m + a^2\cdot I_{m+1}\right)$ можно выразить I_{m+1}: $I_{m+1} = \frac{1-2m}{2ma^2}I_m - \frac{1}{2ma^2}\frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^m}$.

Полученная рекуррентная формула позволяет понизить степень выражения стоящего в знаменателе интеграла, а значит, за счет этой операции прийти к табличному интегралу.

Пример 5. Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x-5}{\left(3x+5\right)^2}\mathrm{d}x$; б) $\int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5}\mathrm{d}x$.

Решение: а) $\int \frac{2x-5}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{(3x-\frac{15}{2})}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3x+5-5-\frac{15}{2}}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{(3x+5)-\frac{25}{2}}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{1}{3x+5}\,\mathrm{d}x - \frac{25}{3}\int \frac{1}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln|3x+5| -$$

$$-\frac{25}{9}\int (3x+5)^{-2}\,\mathrm{d}(3x+5) = \frac{2}{9}\ln|3x+5| - \frac{25}{9}\cdot\frac{(3x+5)^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{9}\ln|3x+5| +$$

$$+\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{3x+5} + C;$$

б) $\int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6x-4+7-7}{3x^2-7x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(6x-7)+3}{3x^2-7x+5}\,\mathrm{d}x =$

$$= \int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{3x^2-7x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(3x^2-7x+5)}{3x^2-7x+5} + \int \frac{1}{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|3x^2-7x+5| + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{5}{3}} = \ln|3x^2-7x+5| +$$

$$+ \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \left| t = x - \frac{7}{6},\ \ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \right| = \ln|3x^2-7x+5| + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{11}{36}} =$$

$$= \ln|3x^2-7x+5| + \frac{36}{11}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{6t}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1} = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6t}{\sqrt{11}}\right) +$$

$$+ C = \left| t = x - \frac{7}{6} \right| = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6\left(x-\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{11}}\right) =$$

$$= \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-7}{\sqrt{11}}\right) + C.$$

7.6. Интегрирование рациональных функций

Справедливо утверждение: *всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 6. Представить неправильную дробь $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим под угол числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2-4x} & 2x+1 \\ x+2 & \\ \underline{x-2} & \\ 4 & \end{array}$$

Это означает, что $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-2}=2x+1+\dfrac{4}{x-2}$.

Справедливо утверждение: *всякую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.*

При этом рассуждают следующим образом. Если $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей: $P(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$, то она разлагается на простейшие дроби по схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu},$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Применение этого метода рассмотрим на следующих примерах.

Пример 7. Разложить правильную дробь $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$ на простейшие.

Решение. Для разложения дроби на простейшие используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}.$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители: $2x-3=(A+B)x--3A+B.$ Решив систему уравнений $\begin{cases} A+B=2, \\ -3A+B=-3 \end{cases}$ найдем: $A=\dfrac{5}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$. Тогда разложение дроби на простейшие имеет вид: $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)}==\dfrac{5}{4}\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{B}{x-3}$.

Пример 8. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби, предварительно разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+3 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x^2-3x} & x-4 \\ \quad -4x^2+3x+3 & \\ \quad \underline{-4x^2-8x+12} & \\ \qquad\qquad 11x-9 & \end{array}$$

получим $\dfrac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}= x-4+\dfrac{11x-9}{x^2+2x-3}$.

Разложим полученную правильную рациональную дробь на простейшие. Для этого вначале знаменатель разложим на множители: $x^2+2x-3=0$, $x_1=-3$, $x_2=1$, $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

Тогда

$$\frac{11x-9}{x^2+2x-3}=\frac{11x-9}{(x+3)\,(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}.$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители:

$$11x-9=A(x-1)+B(x+3).$$

Для определения A и B подберем значения переменной x таким образом, чтобы выражения, стоящие в правой части уравнения в скобках, обнулились, и подставим их в данное уравнение.

Рассмотрим $x = 1 \Rightarrow$, получаем уравнение $4B = 2$, или $B=\dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим $x = -3 \Rightarrow$, получаем уравнение $-4A = -42$, или $A=\dfrac{21}{2}$.

Тогда $\dfrac{11x-9}{x^2+2x-3}=\dfrac{11x-9}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{21}{2(x+3)}+\dfrac{1}{2(x-1)}$.

Подставим в подынтегральную функцию:

$$\int\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x=\int\left(x-4+\frac{11x-9}{(x+3)\,(x-1)}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\left(x-4+\frac{21}{2(x+3)}+\frac{1}{2(x-1)}\right)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x-4\int\mathrm{d}x+\frac{21}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{21}{2}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

Решение.

Так как $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)\,(x-4)\,(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=$$

$=9x^3-30x^2+28x-88$; или $(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+$
$+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=9x^3-30x^2+28x-88.$

$$\begin{cases}A+B+C=9;\\-4A-2B-6C+D=-30;\\4A+4B+8C-6D=28;\\-16A-8B+8D=-88.\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B;\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B;\\2A+2B+4C-3D=14;\\2A+B-D=11.\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14;\\2A+B-24+2A+4B=11.\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\4A+10B=50;\\4A+5B=35.\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\4A+10B=50;\\50-10B+5B=35.\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\4A+10B=50;\\B=3.\end{cases}\qquad\begin{cases}A=5;\\B=3;\\C=1;\\D=2.\end{cases}$$

Тогда $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{x+2}{x^2+4}$, а результат интегрирования будет выглядеть:

$$\int\frac{5}{x-2}\mathrm{d}x+\int\frac{3}{x-4}\mathrm{d}x+\int\frac{x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x+$$

$$+\int\frac{2}{x^2+4}\mathrm{d}x=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

7.7. Интегрирование иррациональных функций

Если подынтегральная функция иррациональна, то с помощью замены переменной во многих случаях можно привести ее к рациональному виду или к такой функции, интеграл от которой является табличным. Интегрирование с помощью замены переменной, которая приводит подынтегральное выражение к рациональному виду, называется *интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения*.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ..., \sqrt[n_s]{x^{m_s}})\,\mathrm{d}x$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, ..., n_s$.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. Показателями степеней корней являются числа 3 и 2. Их наименьшее общее кратное равно 6. Поэтому применим подстановку $x = t^6$. Тогда $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$, $\sqrt{x} = t^3$. В результате

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^4}{t-1}\mathrm{d}t.$$

В подынтегральной функции выделим целую часть:

$$\frac{t^4}{t-1} = \frac{t^4 - 1 + 1}{t-1} = \frac{t^4 - 1}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} =$$

$$= \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} = (t+1)(t^2+1) + \frac{1}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}.$$

Тогда $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\mathrm{d}x = 6\int \frac{t^4}{t-1}\mathrm{d}t = 6\int \left(t_3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right)\mathrm{d}t =$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + C = |\, t = \sqrt[6]{x} \,| =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C.$$

7.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

При нахождении интегралов

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx,\ \int \cos(ax)\cos(bx)\,dx,\ \int \sin(ax)\sin(bx)\,dx$$

подынтегральные функции из произведений преобразовываются в суммы с помощью приведенных ниже формул:

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\bigl(\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x)\bigr);$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\bigl(\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)\bigr);$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\bigl(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\bigr).$$

Если требуется найти интеграл вида $\int \cos^n(x)\sin^m(x)\,dx$, то при этом обычно используют следующие приемы:

1) подстановку $\sin(x) = t$, если n – целое положительное нечетное число;

2) подстановку $\cos(x) = t$, если m – целое положительное нечетное число;

3) пользуются формулами понижения порядка:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},\quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2},\quad \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2},$$

если n и m – целые неотрицательные четные числа;

4) подстановку $\mathrm{tg}(x) = t$, если $n + m$ – есть четное отрицательное целое число.

Пример 11. Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$; б) $\int \cos^3(x)\,dx$; в) $\int \cos^2(x)\sin^5(x)\,dx$;

г) $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(x)\cos(x)}$.

Решение:

а) так как $\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\bigl(\sin((3-5)\,x) + \sin((3+5)\,x)\bigr) =$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-\sin(2x)+\sin(8x)),\quad \text{то}\quad \int\sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin(8x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos(2x)}{2}-\frac{\cos(8x)}{8}\right)+C=\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{\cos(8x)}{16}+C\ ;$$

б) $\int\cos^3(x)\mathrm{d}x=\int\cos^2(x)\cdot\cos(x)\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x=|$

$$t=\sin(x),\quad \mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x\,|=\int(1-t^2)\,\mathrm{d}t=t-\frac{t^3}{3}+C=\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}+C\ ;$$

в) $\int\cos^2(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x=\int\cos^2(x)\cdot\sin^4(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x=$

$$=\int\cos^2(x)\cdot(\sin^2(x))^2\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x=\int\cos^2(x)\cdot(1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=|\,t=\cos(x),\ \mathrm{d}t=-\sin(x)\,\mathrm{d}x,\ \sin(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\,|=\int t^2(1-t^2)^2(-\mathrm{d}t)=$$

$$=-\int t^2(1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t=-\int(t^2-2t^4+t^6)\,\mathrm{d}t=-\left(\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)+C=$$

$$=\frac{2\cos^5(x)}{5}-\frac{\cos^3(x)}{3}-\frac{\cos^7(x)}{7}+C\ ;$$

г) $\int\sin^4(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\sin^2(x)\cdot\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=$

$$=\int(\sin(x)\cdot\cos(x))^2\cdot\sin^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4}\sin^2(2x)\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\int\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(4x))\,\mathrm{d}x-$$

$$-\frac{1}{16}\int\sin^2(2x)\,\mathrm{d}\sin(2x)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\cdot\sin(4x)-\frac{1}{48}\cdot\sin^3(2x)+C\ ;$$

д) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(x)\cos(x)}=\int\sin^{-3}(x)\cdot\cos^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=$

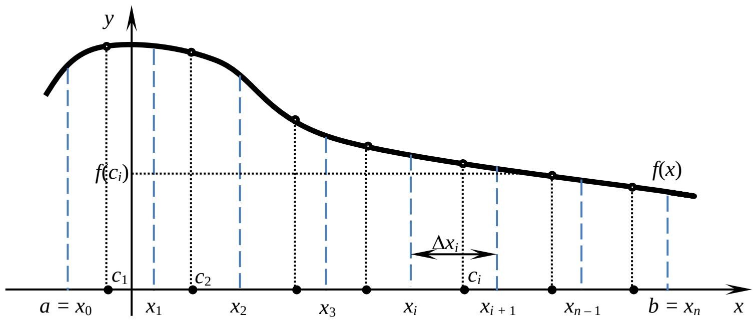
$$=\left|\begin{array}{l}m+n=-3-1=-4,\\ t=\mathrm{tg}(x),\ x=\mathrm{arctg}(t),\\ \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \sin(x)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\ \cos(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}=$$

$$=\int\frac{1+t^2}{t^3}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int t^{-3}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2(x)+\ln|\mathrm{tg}(x)|+C.$$

7.9. Определенный интеграл и его основные свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\,b]$. Выполним следующие действия.



Разобьем отрезок $[a;\,b]$ точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n=b$ на n отрезков $[x_0;\,x_1]$, $[x_1;\,x_2]$, …, $[x_{n-1};\,x_n]$, которые называются частичными.

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};\,x_i]$ произвольно выберем точку $c_i\in[x_{i-1};\,x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;\,b]$, ни от выбора точек $c_i\in[x_{i-1};\,x_i]$, то он называется *определенным интегралом* от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\ .$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ – *подынтегральным выражением*, *x* – *переменной интегрирования*, $[a;\, b]$ – *отрезком интегрирования*.

Пусть на отрезке $[a;\, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью *Ox*, сбоку прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак на противоположный, т. е. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x.$

4. Если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю, т. е. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

5. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$

6. Если отрезок интегрирования $[a; b]$ разбит на две части $[a; c]$ и $[c; b]$ и если существуют интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) ,$$

где $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ – любая первообразная функция для $f(x)$.

7.10. Методы вычисления определенных интегралов

При вычислении определенных интегралов используются методы *непосредственного интегрирования, замены переменной (подстановки) и интегрирования по частям*.

Непосредственное интегрирование предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использование формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 12. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^1 e^x \mathrm{d}x$; г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$; д) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$.

Решение: а) $\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

б) $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$;

в) $\int\limits_0^1 e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{3}$;

д) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} x^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{3x^3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{3\cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right) = 2\frac{5}{8}$.

Метод ***замены переменной*** в определенном интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

- функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$;
- функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha;\, \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную;
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной, и при этом справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Часто вместо замены $x = \varphi(t)$ применяют замену $t = \psi(x)$.

Пример 13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-2}^0 \sqrt{1-4x}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) выполним замену $t = x+1$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Вычислим пределы интегрирования для переменной *t*.

x	0	1
t	1	2

Тогда $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(t)\Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$;

б) выполним замену $t = 1 - 4x$ и продифференцируем обе части равенства: $\mathrm{d}t = -4\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{4}$. Изменим пределы интегрирования.

x	–2	0
t	9	1

В результате $\int_{-2}^{0} \sqrt{1-4x}\,\mathrm{d}x = \int_{9}^{1} \sqrt{t}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{4}\right) = -\frac{1}{4}\int_{9}^{1} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{9}^{1} =$

$= -\frac{1}{6}\sqrt{t^3}\Big|_{9}^{1} = -\frac{1}{6}\sqrt{1^3} - \left(-\frac{1}{6}\sqrt{9^3}\right) = -\frac{1}{6}(1-27) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$;

в) в данном случае выполним замену $t = \sin(x)$, тогда $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Для переменной t вычислим пределы интегрирования.

x	0	$\pi/2$
t	0	1

Получим $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} t^2\mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{3}$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда для определенного интеграла справедлива формула ***интегрирования по частям*** $\int_{a}^{b} u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,\mathrm{d}u$.

Пример 14. Вычислить интегралы: а) $\int_{\pi}^{2\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$; б) $\int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x^5}\mathrm{d}x$.

Решение: а) положим $u = x$, тогда $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Оставшуюся часть подынтегрального выражения примем за $\mathrm{d}v$: $\mathrm{d}v = \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Проинтегрируем это выражение: $\int \mathrm{d}v = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$, $v = \sin(x)$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \;\; x\sin(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\sin(2\pi) - \pi\sin(\pi) + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2;$$

б) положим $u = \ln(x)$, $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^5}\mathrm{d}x$. Тогда $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{d}v = \int \dfrac{1}{x^5}\mathrm{d}x$,

$v = \int x^{-5}\mathrm{d}x$, $v = \dfrac{x^{-4}}{-4} = -\dfrac{1}{4x^4}$. По формуле интегрирования по частям

запишем: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^5}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4x^4}\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2\left(-\frac{1}{4x^4}\right)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\cdot 2^4}\ln(2) +$

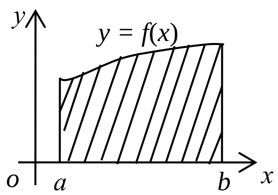
$$+\frac{1}{4\cdot 1^4}\ln(1) + \frac{1}{4}\int_1^2\frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_1^2 = \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x^4}\right)\Big|_1^2 =$$

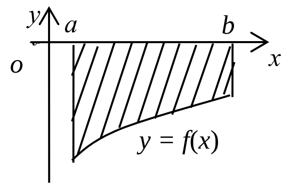
$$= \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{15}{256}.$$

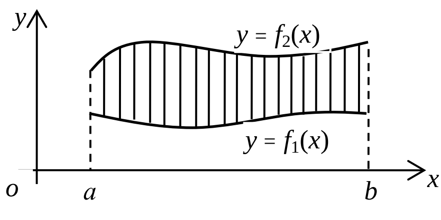
7.11. Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определенному интегралу от функции $f(x)$: $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Если фигура расположена ниже оси абсцисс, то ее площадь вычисляется по формуле $S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



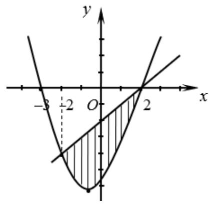




Пусть фигура ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) \mathrm{d}x$.

Пример 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$.



Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью *Ox:* $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и вычислим площадь заштрихованной фигуры.

Найдем абсциссы точек пересечения линий: $x^2 + x - 6 = x - 2$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$\int_{-2}^{2} (x - 2 - (x^2 + x - 6))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

2. Вычисление объемов тел.

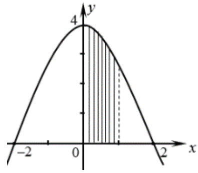
Если задана функция $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, определяющая площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, то его объем вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Рассмотрим случай, когда тело образуется путем вращения заданной уравнением $y = f(x)$ линии относительно оси координат *Ox*. Тогда поперечные сечения тела будут представляться окружностями радиуса $f(x)$, а значит, их площади будут определяться формулой $S(x) = \pi(f(x))^2$. В результате формулу вычисления тела вращения можно записать в виде

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x .$$

Аналогичные формулы справедливы и в случае расположения тела вдоль оси Oy.

Пример 16. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.



Решение. Изобразим в системе координат плоскую фигуру, ограниченную заданными линиями.

Полученная плоская фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = -x^2 + 4$, а сбоку прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox, вычисляется по формуле $V_x = \pi \int_a^b y^2 \mathrm{d}x$. В нашем случае

$$V_x = \pi \int_0^1 (-x^2 + 4)^2 \mathrm{d}x = = \pi \int_0^1 \left(x^4 - 8x^2 + 16 \right) \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1^5}{5} - 8 \cdot \frac{1^3}{3} + 16 \cdot 1 \right) - \pi \cdot \left(\frac{0^5}{5} - 8 \cdot \frac{0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right) = 13\frac{8}{15}\pi \text{ (куб. ед).}$$

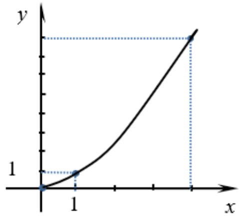
3. Вычисление длины дуги кривой.

Если линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$, где $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ – дифференцируемые функции аргумента t, то дифференциал длины дуги выражается формулой $\mathrm{d}l = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, \mathrm{d}t$. Интегрируя это равенство по промежутку $[a; b]$, получаем формулу для вычисления длины дуги линии:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, \mathrm{d}t .$$

Пример 17. Вычислить длину дуги линии $y = \sqrt{x^3}$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Представим уравнение линии в виде ее параметрического уравнения:



$$\begin{cases} x = t; \\ y = \sqrt{t^3}, \ t \in [0; 4]. \end{cases}$$

Тогда

$$l = \int_0^4 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t}\, \mathrm{d}t = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t}\, \mathrm{d}\left(1 + \frac{9}{4} t\right) = \frac{4}{9} \cdot \left. \frac{\left(1 + \frac{9}{4} t\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{8}{27} \cdot \left(\sqrt{10^3} - 1\right) =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot \left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ (ед. дл.).}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы:

а) $\int x^3 \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{x^{15}}{3} \mathrm{d}x$; в) $\int x^{106} \mathrm{d}x$; г) $\int \frac{16}{x^5} \mathrm{d}x$; д) $\int \frac{2}{3x^{15}} \mathrm{d}x$;

е) $\int \frac{2}{x^{203}} \mathrm{d}x$; ж) $\int \sqrt[3]{x^5} \mathrm{d}x$; з) $\int \frac{3}{4\sqrt{x^3}} \mathrm{d}x$; к) $\int 4\sqrt[7]{x^2} \mathrm{d}x$.

2. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$; б) $\int \left(2x - 4\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x$;

в) $\int \left(x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x^6}\right) \mathrm{d}x$; г) $\int \left(x^2 + \frac{3}{x^4} - 8\sqrt[5]{x^3}\right) \mathrm{d}x$.

3. Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}{x} \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{\sqrt{x} - 1 + x\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{\cos^3 x - 8\sqrt[5]{x^3} \cdot \cos^2 x + 3}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$; г) $\int \frac{5x^2 - 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

4. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$; б) $\int \frac{x^4 \mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^5}}$;

в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 (x)\sqrt{1+\mathrm{tg}\,(x)}}$; г) $\int \cos^3 (x) \sin (x) \mathrm{d}x$.

5. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (3x-4)\cos (x)\mathrm{d}x$; б) $\int (2x+5)e^{6x-2}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \sqrt{x} \ln (x) \mathrm{d}x$; г) $\int x \,\mathrm{arctg}\,(x) \mathrm{d}x$.

6. Найти неопределенные интегралы от простейших рациональных дробей:

а) $\int \frac{2}{x-4} \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{3}{5-x} \mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{1}{(x+3)^4} \mathrm{d}x$; г) $\int \frac{5}{(x-3)^5} \mathrm{d}x$.

7. Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей:

а) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \mathrm{d}x$; г) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} \mathrm{d}x$.

8. Найти неопределенные интегралы, содержащие иррациональности под знаком интеграла:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$; б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

9. Найти неопределенные интегралы, содержащие иррациональности под знаком интеграла:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

10. Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int s\,\mathrm{in}^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$; б) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$; в) $\int \mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x$; г) $\int \mathrm{ctg}^2(3x)\,\mathrm{d}x$.

11. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница:

а) $\int_0^1 (4x^3+4\sqrt[3]{x}+2)\mathrm{d}x$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x-\frac{1}{2}\cos(x)+3\sin(x)-\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x.$

12. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

а) $\int_0^4 \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x$; б) $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^3}\mathrm{d}x.$

13. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$; б) $\int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y=6x-x^2,\quad y=0$; б) $y=x^2-4,\quad x=4,\quad y=0$;

в) $y=x^2,\quad y=8-x^2$; г) $y=-x^2,\ x+y+2=0$.

15. Вычислить длину дуги заданной кривой:

а) $y=2x\sqrt{x}$, от $x_1=0$ до $x_2=7$; б) $y=\frac{x^2}{3\sqrt{x}}$, от $x_1=0$ до $x_2=12.$

16. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями:

вокруг оси Ox

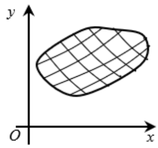
а) $xy=3,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3$; б) $y^2=4x,\quad x=2$;

вокруг оси Oy

в) $xy=9,\quad y=3,\quad y=9$; г) $y=9-x^2,\quad y=x^2+1$.

Лекция 8. ДВОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8.1. Двойной интеграл и его свойства



Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости Oxy. Разобьем область D произвольным образом на n частей s_1, s_2, …, s_n с площадями Δs_1, Δs_2, …, Δs_n. Внутри каждой элементарной области s_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и найдем значение функции $f(x_i, y_i)$ в этой точке.

Составим сумму:

$$I_n = f(M_1)\Delta s_1 + f(M_2)\Delta s_2 + \ \dots \ + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Эта сумма называется ***n-й интегральной суммой*** для функции $f(x, y)$ по области D.

Диаметром области s_i назовем наибольшее из расстояний между точками границы этой области и обозначим d_i.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм I_n при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей s_i, не зависящий ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек M_i, то он называется ***двойным интегралом*** от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s$.

Таким образом, $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойного интеграла.

1. $\iint\limits_D cf(x, y)\mathrm{d}s = c\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s$, $c = \mathrm{const}$.

2. $\iint\limits_D (f_1(x, y) + f_2(x, y))\mathrm{d}s = \iint\limits_D f_1(x, y)\mathrm{d}s + \iint\limits_D f_2(x, y)\mathrm{d}s$.

3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

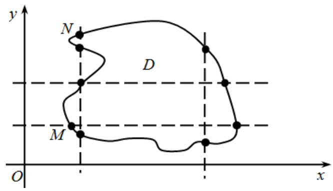
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

8.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Тогда

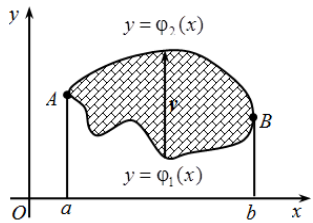
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Область D называется ***правильной (простой) в направлении оси*** Ox (или Oy), если любая прямая, проходящая параллельно этой оси, пересекает границу области D не более чем в двух точках.



Например, область D на показанной схеме является неправильной в направлении оси Oy и правильной в направлении оси Ox (прямая MN пересекает границу области D в четырех точках).

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла следующим образом.



1. Пусть область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $y = b$, причем $a < b$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

При выборе внешнего интегрирования по переменной x видно, что $a \le x \le b$. Для определения внутренних пределов интегрирования по переменной y по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Oy, снизу вверх. Прямая сначала пересекает кривую $y = \varphi_1(x)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $y = \varphi_2(x)$, которую назовем *линией выхода*. Значение переменной y в области D меняется в пределах $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$ Правая часть формулы называется ***повторным интегралом***.

Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению повторного (двух определенных интегралов) интеграла вида

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

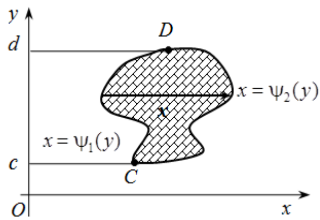
При вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в квадратных скобках) x считается постоянной.

2. Аналогичная формула вычисления двойного интеграла справедлива в случае, когда область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = \mathrm{d}$, причем $c < \mathrm{d}$, $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$$

При вычислении «внутреннего интеграла» y считается постоянной.



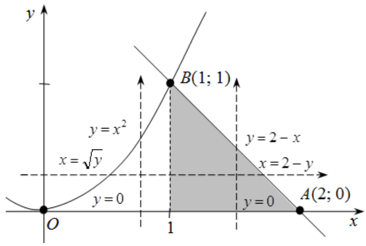
Формулы перехода от двойного интеграла к повторному показывают, что в двойном интеграле можно изменять порядок интегрирования:

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$$

Если область интегрирования является неправильной, то ее можно представить как объединение правильных областей. Тогда двойной интеграл равен сумме двойных интегралов по этим областям.

Пример 1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$.

Решение. Построим область D.



Найдем точки пересечения линий $y = x^2$, $x + y = 2$, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad x + x^2 = 2, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad D = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,\,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2.$$

Например, из первого уравнения системы находим: $y_1 = (x_1)^2 = 1$, $y_2 = (x_2)^2 = 4$. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (1; 1) и (–2; 4), одна из которых $B(1;\ 1)$ принадлежит границе области D.

Внешнее интегрирование по переменной y.

Область интегрирования D расположена между прямыми $y = 0$, $y = 1$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x = \sqrt{y}$ до точек прямой $x = 2 - y$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

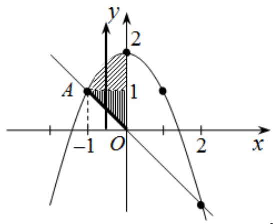
Внешнее интегрирование по переменной x.

Так как верхний участок границы OBA области D задан двумя линиями OB и BA, то прямая $x = 1$ разбивает область D на области D_1: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ и D_2: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. В результате получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\mathrm{d}y + \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $y = -x$, $y = 2 - x^2$.

Решение. Построим область D. Найдем точки пересечения линий из системы уравнений



$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \quad -x = 2 - x^2, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,\,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \; x_1 = 2,\; x_2 = -1.$$

Таким образом, $A(-1;\ 1)$ – точка пересечения линий в рассматриваемой области.

Область интегрирования D расположена между прямыми $x = -1$, $x = 0$, снизу ограничена прямой $y = -x$, сверху – параболой $y = 2 - x^2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int\limits_{-x}^{2-x^2} x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{0} xy\Big|_{-x}^{2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} x\big(2 - x^2 - (-x)\big)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 + x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}\left(2x - x^3 + x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\left(1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{7}{12}\right) = -\frac{5}{12}.$$

Если проводить внешнее интегрирование по переменной y, то область D необходимо разбивать на две области прямой $y = 1$ и считать не один, а сумму двух повторных интегралов.

8.3. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии и механики

1. *Площадь плоской фигуры,* занимающей область D, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. *Объем V тела,* ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,\ y)$, снизу – плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, можно найти по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. *Площадь поверхности* $z = f(x,\ y)$, которая проектируется на область D плоскости Oxy, вычисляется по формуле

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. *Масса пластинки* с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, занимающей область D плоскости Oxy, вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. *Статические моменты относительно осей* Ox и Oy плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

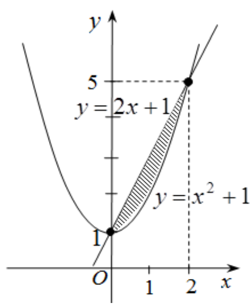
6. *Координаты центра масс плоской* пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m},$$

где M_x, M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно;

m – масса пластинки.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$.



Решение. Найдем точки пересечения линий из системы уравнений $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = x^2 + 1, \end{cases}$

$x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

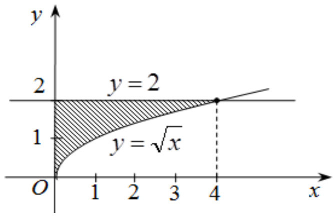
Построим область интегрирования D.

Тогда

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2 \mathrm{d}x\int\limits_{x^2+1}^{2x+1}\mathrm{d}y=\int\limits_0^2 \mathrm{d}x[y]\Big|_{x^2+1}^{2x+1}=\int\limits_0^2\left(2x+1-x^2-1\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Пример 4. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2y$, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.



Решение. Построим область интегрирования. Массу пластинки найдем по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Область D задается неравенствами: $0\le x\le 4,\quad \sqrt{x}\le y\le 2.$

Следовательно,

$$m=\iint\limits_D 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^4\mathrm{d}x\int\limits_{\sqrt{x}}^2 2y\mathrm{d}y=\int\limits_0^4\mathrm{d}x\; y^2\Big|_{\sqrt{x}}^2=\int\limits_0^4\mathrm{d}x\left(4-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)=$$

$$=\int\limits_0^4(4-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 4\mathrm{d}x-\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=16-8=8.$$

Пример 5. Вычислить объем V тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

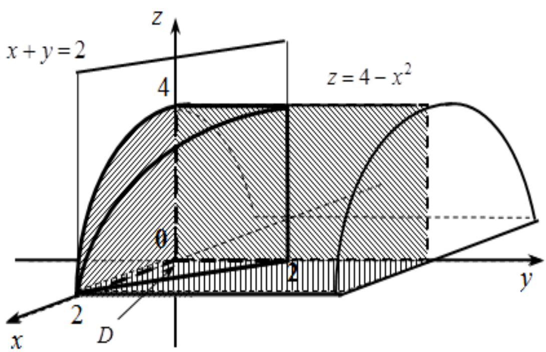
Решение. Данное тело ограничено параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси Oy, и плоскостями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

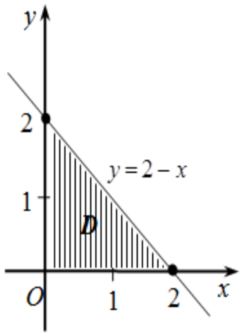
Проекцией тела на плоскости Oxy является треугольник. Область интегрирования D задается неравенствами: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x.$ Тогда

$$V=\iint\limits_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\int\limits_0^{2-x}\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x[y]\Big|_0^{2-x}=$$

$$=\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)(2-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(8-2x^2-4x+x^3\right)\mathrm{d}x=$$

$$= \left(8x - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 = 16 - 2 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$$





8.4. Определение криволинейного интеграла первого рода

Криволинейные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой. Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы первого и второго рода.

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую гладкую или кусочно-гладкую кривую AB. Напомним, что кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (т. е. кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется ***кусочно-гладкой***.

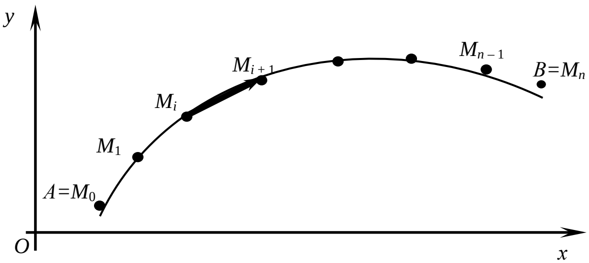
Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой AB. Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $A = M_0$, M_1, M_2, …, M_i, …, M_{n-1}, $M_n = B$.

Выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i,$$

где Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$.

Такая сумма называется *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y) = f(M)$ по кривой AB.



Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$.

Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный I, то этот предел называется ***криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x, y)$ по кривой AB и обозначается одним из следующих символов:

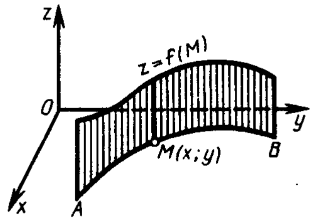
$$I = \int_{AB} f(M)\mathrm{d}l = \int_{AB} f(x, y)\mathrm{d}l.$$

Функция $f(x, y)$ называется ***интегрируемой*** вдоль кривой AB, кривая AB – ***контуром интегрирования***, A – начальной, а B – конечной ***точками интегрирования***.

Криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл за исключением того, что определенный интеграл $\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$ при перестановке пределов интегрирования меняет знак, а криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую – конечной, т. е. $\int_{AB} f(x, y)\mathrm{d}l = \int_{BA} f(x, y)\mathrm{d}l.$

8.5. Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода

Криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(M)\mathrm{d}l$ при $f(M) \geq 0$ численно равен площади куска цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости Oxy, восставленных в точках $M(x, y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$.



В частности, если AB – не кривая, а отрезок прямой $[a; b]$, расположенный на оси Ox, то $f(x, y) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$ и криволинейный интеграл будет обычным определенным интегралом.

Если положить $f(M) \equiv 1$, то получим криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \mathrm{d}l$, который определяет длину дуги кривой AB.

8.6. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывные функции и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, а $f(x, y)$ – функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке A соответствует значение $t = \alpha$, а точке B – значение $t = \beta$. Тогда для любой точки $M(\varphi(t); \psi(t))$ кривой AB длину l дуги AM можно вычислять по формуле

$$l = l(t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Тогда

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t, \text{ а } \int\limits_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{0}^{L} f\left(x(l),\ y(l)\right)\mathrm{d}l =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t),\ \psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, т. е. имеющая непрерывную производную, то, принимая x за параметр ($t = x$), получим:

$$\int_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2\mathrm{d}l$, где AB – часть окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Так как

$$y^2 = a^2\sin^2 t,\ \ \mathrm{d}l = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = a\mathrm{d}t, \text{ то } \int_{AB} y^2\mathrm{d}l =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\, a\mathrm{d}t = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(1-\cos 2t\big)\mathrm{d}t = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y\mathrm{d}l$, где AB – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

Решение. Так как $y = \sqrt{2x}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, $\mathrm{d}l = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+\dfrac{1}{2x}}\mathrm{d}x$,

то $\displaystyle\int_{AB} y\mathrm{d}l = \int_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\mathrm{d}x = \int_0^2\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\big(2x+1\big)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}\big(5\sqrt{5}-1\big).$

Исходя из геометрического смысла криволинейных интегралов первого рода, с их помощью можно вычислять площадь цилиндрических поверхностей и длины дуг, находить массу материальной кривой по ее плотности, моменты инерции относительно координатных осей, координаты центра масс кривых.

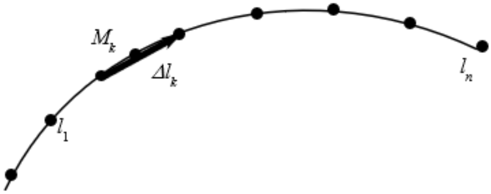
8.7. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода)

Рассмотрим на плоскости Oxy ориентированную гладкую дугу L (т. е. на дуге L указано направление и в каждой точке существует касательная). Пусть на L определена и непрерывна вектор-функция

$$\overline{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

Разобьем дугу L на n элементарных дуг l_1, l_2, …, l_n и построим векторы $\Delta\vec{l}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, направленные из начала в конец дуги l_k. На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольную точку $M_k(x_k;\ y_k)$ и составим сумму скалярных произведений $\vec{a}(x_k,\ y_k)\Delta\vec{l}_k$, которая называется ***n-й интегральной суммой***.

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k,\ y_k)\Delta\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{n} (P(x_k,\ y_k)\Delta x_k + Q(x_k,\ y_k)\Delta y_k).$$



Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max\left|\Delta\vec{l}_k\right| \to 0$, называется ***криволинейным интегралом по координатам*** (***второго рода***) и обозначается

$$\int_L \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла от вектор-функции $\vec{a}(x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)\vec{i} + Q(x,\ y,\ z)\vec{j} + R(x,\ y,\ z)\vec{k}$ по пространственной дуге L:

$$\int_L \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L P\left(x,\ y,\ z\right)\mathrm{d}x + Q\left(x,\ y,\ z\right)\mathrm{d}y + R\left(x,\ y,\ z\right)\mathrm{d}z =$$

$$\lim_{\max|\Delta\vec{l}_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}\left(x_k,\ y_k,\ z_k\right)\Delta\vec{l}_k.$$

Свойства криволинейного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, из определения следует, что

$$\int_{\breve{AB}} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{\breve{BA}} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

т. е. при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл меняет знак.

Механический смысл криволинейного интеграла.

Пусть тело под действием переменной силы

$$\vec{F} = P(x,\ y,\ z)\vec{i} + Q(x,\ y,\ z)\vec{j} + R(x,\ y,\ z)\vec{k}$$

движется по дуге кривой. Тогда работа A этой силы может быть вычислена по формуле

$$A=\int_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ =\int_L P(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x+Q(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y+R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z.$$

8.8. Вычисление криволинейного интеграла по координатам

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла следующим образом.

1. Если пространственная дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$\int_L P(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x+Q(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y+R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z=$$

$$=\int_\alpha^\beta \left[P(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t)+Q(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t)+R(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

2. В частности, если плоская дуга L задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, то $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b \left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\,y'(x)\right]\mathrm{d}x.$

Пример 8. Вычислить $\int_L xy\mathrm{d}x+(x^2+y)\mathrm{d}y,$ если L:

1) дуга параболы $y=\dfrac{x^2}{2}+1,$ расположенная между точками $A(0; 1)$ и $B(2; 3)$;

2) отрезок прямой AB.

Решение.

1. Сведем вычисление криволинейного интеграла к определенному, полагая $y=\dfrac{x^2}{2}+1,\ \ \mathrm{d}y=\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)'\mathrm{d}x=x\mathrm{d}x,\ \ 0\le x\le 2.$

Тогда $\int_L xy\mathrm{d}x+\left(x^2+y\right)\mathrm{d}y=\int_0^2\left[x\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+\dfrac{x^2}{2}+1\right)x\mathrm{d}x\right]=$

$$=\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}+x+\frac{3}{2}x^3+x\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x^3+2x\right)\mathrm{d}x=\left(2\frac{x^4}{4}+x^2\right)\Bigg|_0^2=8+4=12.$$

2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{3-1};\ \ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2};\ \ y=x+1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L xy\mathrm{d}x+(x^2+y)\mathrm{d}y=\left|y=x+1,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\ 0\le x\le 2\right|=\int\limits_0^2[x(x+1)\mathrm{d}x+$$

$$+\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x]=\int\limits_0^2\left(2x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(2\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right|_0^2=\frac{16}{3}+4+2=\frac{34}{3}.$$

Пример 9. Вычислить работу силового поля $\vec{F}=y^2\vec{i}+2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура окружности $x^2+y^2=4$, пробегаемой против часовой стрелки.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности: $x=2\cos(t),\ y=2\sin(t), 0\le t\le 2\pi$ (так как обход окружности ведется против часовой стрелки).

Работу A силы $\vec{F}=\left(F_x;\ F_y\right)$ найдем по формуле

$$A=\int\limits_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_L F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y=\int\limits_L y^2\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x=2\cos(t), & \mathrm{d}x=-2\sin(t)\mathrm{d}t,\quad 0\le t\le 2\pi \\ y=2\sin(t), & \mathrm{d}y=2\cos(t)\mathrm{d}t \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[(2\sin(t))^2(-2\sin(t))\mathrm{d}t+2\cdot 2\cos(t)\cdot 2\cos(t)\mathrm{d}t\ \right]=$$

$$=8\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(t)\mathrm{d}\cos(t)+8\int\limits_0^{2\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=8\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}\cos(t)+4\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos(2t)\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\left.\left(8\cos(t)-\frac{8}{3}\cos^3(t)+4t+4\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right|_0^{2\pi}=$$

$$=8(1-1)-\frac{8}{3}(1-1)+4\cdot 2\pi+0=8\pi.$$

8.9. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой области D с границей L, то справедлива следующая ***формула Грина***:

$$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где замкнутый контур L обходится против часовой стрелки.

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ не зависел от пути интегрирования, целиком лежащем в области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось равенство $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Если выполняется это условие, то выражение $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ представляет собой *полный дифференциал* некоторой функции u, т. е. $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

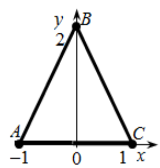
Эту функцию $u(x, y)$ можно найти по следующей формуле:

$$u(x,y) = \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y + C; \\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + C, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная.

Начальную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были определены в этой точке.

Пример 10. Вычислить $\oint\limits_L (2xy - y)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(1;\ 0)$.



Решение. Поскольку контур является замкнутым, применим формулу Грина с учетом того, что $P(x, y) = 2xy - y,\ Q(x, y) = x^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$

Следовательно,

$$\oint_L (2xy - y)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(2x - 2x + 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y = S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2.$$

Пример 11. Найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу:

$$\mathrm{d}u(x, y) = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\mathrm{d}y.$$

Решение. Выберем за начальную точку $M_0(1; 1)$. Получим

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y_0\right)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y}\frac{x}{y}\mathrm{d}y + C = \left|x_0 = 1,\ y_0 = 1\right| =$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln(1)\right)\mathrm{d}x + \int_1^y \frac{x}{y}\mathrm{d}y + C = (\mathrm{arctg}(x) - \ln(x))\Big|_1^x + x\ln(y)\Big|_1^y + C =$$

$$= \mathrm{arctg}(x) - \ln(x) - \mathrm{arctg}(1) + x\ln(y) + C = \mathrm{arctg}(x) - \ln(x) + x\ln(y) + C.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Изменить порядок интегрирования, здесь $f = f(x, y)$.

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ по заданной области D: $y = x,\ y = x^3$.

3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3,\ y = 6 - 4x,\ y = 0.$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0,\ x + z - 6 = 0.$$

5. Найти координаты центра масс плоской пластины D плотности $\rho(x, y)$, ограниченной заданными линиями: $y = x^2,\ y = 1,\ \mu\left(x, y\right) = x^2 y.$

6. Вычислить криволинейный интеграл по координатам:
$\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y,\ L:\ y=x^2,$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy\mathrm{d}s$ по следующему контуру L: $x=0,\quad x=2,\quad y=1,\ y=2.$

8. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу:

$$\mathrm{d}u=(3x^2+e^{2y})\mathrm{d}x+(\sin y+2xe^{2y})\mathrm{d}y.$$

9. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (4-xy^2)\mathrm{d}x+(x^2-3y)y\mathrm{d}y$ по различным путям и объяснить совпадение результатов:

1) по отрезку OB прямой $y=2x$;

2) по ломаной OAB, где $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $B(2;\,4)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл от полных дифференциалов:

а) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,0)}^{(6;\,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,\pi)}^{(2;\,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y.$

11. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x+y)^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y,\ L:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1.$

Лекция 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. Основные понятия обыкновенных дифференциальных уравнений

Изучение любого процесса, значения параметров которого изменяются с изменением времени, как правило, сводится к выявлению его закономерностей и получению функциональной зависимости между переменными параметрами этого процесса. В большинстве случаев отыскание связи между переменными приводит к решению уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ДУ). *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок высшей производной, входящей в это уравнение.

Например, ДУ n-го порядка представляется в следующем виде:

$$F(x, y, y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция;

$y', y'', ..., y^{(n)}$ – производные искомой функции до n-го порядка включительно.

Рассмотрим ДУ $F(x, y, y') = 0.$ Его можно охарактеризовать как *дифференциальное уравнение первого порядка*, так как в него входит независимая переменная x, искомая функция $y(x)$ и производная только первого порядка y' от искомой функции. Если в этом уравнении можно выразить производную искомой функции и записать его в виде

$$y' = f(x, y),$$

то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*.

Решением ДУ называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает это уравнение в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \text{ или } \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения – *интегральной кривой* этого уравнения. Если решение дифференциального уравнения получено в виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения.

Общим решением ДУ называется семейство функций вида $y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n,\ ...)$, каждая из которых является решением ДУ при любом допустимом значении произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n, а количество этих произвольных постоянных соответствует порядку ДУ. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при подстановке в нее конкретных значений произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Чтобы из этого множества решений ДУ выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения при заданных условиях называется *задачей Коши*. Эта задача является одной из важнейших в теории дифференциальных уравнений.

Формулируется задача Коши следующим образом: *среди всех решений дифференциального уравнения найти такое решение* $y = y(x)$, *в котором функция* $y(x)$ *принимает заданное числовое значение* y_0, *если независимая переменная* x *принимает заданное числовое значение* x_0, т. е. $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$, где D – область определения функции $f(x, y)$.

Значение y_0 называется *начальным значением функции*, а x_0 – *начальным значением независимой переменной*. Само условие называется *начальным условием*, или *условием Коши*.

С геометрической точки зрения задачу Коши для дифференциального уравнения можно сформулировать следующим образом: *из множества интегральных кривых уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

9.2. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Простейшим ДУ первого порядка является дифференциальное уравнение, не содержащее искомой функции $y' = f(x)$. Его решение производится путем однократного интегрирования левой и правой частей:

$$\int y' \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ или } y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$.

Решение. Проинтегрируем левую и правую части этого ДУ:

$$\int y'\mathrm{d}y = \int (3x^2 - \sqrt[4]{x})\mathrm{d}x,\ \ y = 3\int x^2\mathrm{d}x - \int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x,\ \ y = \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C,$$

$y = x^3 - \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$ – общее решение ДУ.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \cos(2x)$, если $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2.$

Решение. Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$\int y'\mathrm{d}y = \int \cos(2x)\mathrm{d}x,\ \ y = \int \cos(2x)\mathrm{d}x;$$

$y = \dfrac{1}{2}\sin(2x) + C$ – общее решение ДУ.

Согласно начальному условию найдем частное решение ДУ. Для этого в его общее решение вместо x подставим $\dfrac{\pi}{4}$, а вместо y – 2. Получим уравнение $2 = \dfrac{1}{2}\sin(2\dfrac{\pi}{4}) + C,$ или $2 = \dfrac{1}{2} + C,$ из которого выразим произвольную постоянную $C = 2 - \dfrac{1}{2} = 1\dfrac{1}{2}.$ Тогда частное решение заданного ДУ будет иметь вид

$$y = \frac{1}{2}\sin(2x) + 1\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Получить математическую модель некоторого процесса без привязки его во времени. Известно, что изучаемый процесс определяется некоторой гладкой функцией $\delta(t)$, изменение значений которой обратно пропорционально времени его протекания t с коэффициентом пропорциональности k. Также установлено, что за 1 час значения искомой функции изменились от 1000 до 10. Построить графическую зависимость полученной математической модели.

Решение. Математическую постановку данной задачи можно рассмотреть в виде простейшего ДУ первого порядка $\dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{k}{t}\ (t \neq 0)$ с дополнительными условиями: так как $t \neq 0$ и нам не важна привязка по времени, то можем считать, что через 1 с протекания процесса значение изучаемого параметра δ было равно 1000, или $\delta(\frac{1}{3600}) = 1000$, а спустя 1 ч его значение составило $\delta(1\frac{1}{3600}) = 10$.

Найдем общее решение ДУ:

$$\delta' = \frac{k}{t}, \ \delta = \int \frac{k}{t}\mathrm{d}t, \ \delta = k\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

$\delta(t) = k\ln(t) + C$ – общее решение рассматриваемого ДУ.

Воспользуемся заданными дополнительными условиями и определим неизвестные параметры k и C этой зависимости.

Так как $\delta(\frac{1}{3600}) = 1000$, то $1000 = k\ln\left(\frac{1}{3600}\right) + C$, или $-k\ln(3600) + C = 1000$. Аналогично, так как $\delta(1\frac{1}{3600}) = 10$, то $10 = k\ln\left(\frac{3601}{3600}\right) + C$, или $k(\ln(3601) - \ln(3600)) + C = 10$. Решим систему линейных уравнений относительно неизвестных k и C:

$$\begin{cases} -\ln(3600)k + C = 1000; \\ (\ln(3601) - \ln(3600))k + C = 10. \end{cases}$$

Для этого исключим из системы параметр C, отняв из второго уравнения системы первое. Получим:

$$(\ln(3601) - \ln(3600))k + \ln(3600)k = 10 - 1000, \ \ln(3601)k = -990.$$

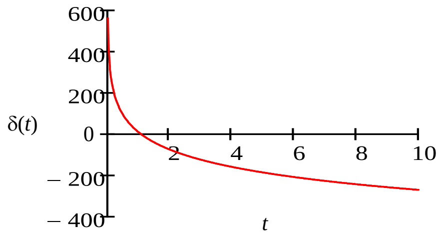
Откуда $k = -\frac{990}{\ln(3601)}$.

Подставим найденное значение параметра k в первое уравнение системы: $\frac{990\ln(3600)}{\ln(3601)} + C = 1000$, или $C = 1000 - \frac{990\ln(3600)}{\ln(3601)}$.

Это означает, что изучаемый нами процесс можно описать математической моделью следующего вида:

$$\delta(t) = -\frac{990}{\ln(3601)}\ln(t) + 1000 - \frac{990\ln(3600)}{\ln(3601)}.$$

Построим ее график.



9.3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными называются уравнения следующих видов (или сводящиеся к ним):

1) $P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0$ (дифференциальная форма записи ДУ);

2) $P_1(x)Q_1(y)y' + P_2(x)Q_2(y) = 0$ (запись ДУ через производную искомой функции).

Связь между данными формами записи ДУ первого порядка с разделяющимися переменными осуществляется через дифференциальную запись производной искомой функции

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Чтобы решить ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, необходимо выполнить следующие действия:

1. Разделить в уравнении переменные, т. е. преобразовать уравнение таким образом, чтобы выражения с разноименными переменными оказались в различных его частях, при этом дифференциалы этих переменных были в числителях преобразованных частей.

Для ДУ в дифференциальной форме данное действие будет выглядеть следующим образом:

$$P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = -P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x,\ \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\mathrm{d}y = -\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x,$$

а для ДУ, записанного через производную, –

$$P_1(x)Q_1(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P_2(x)Q_2(y),\ \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\mathrm{d}y = -\frac{P_2(x)}{P_1(x)}\mathrm{d}x.$$

Разделение переменных в ДУ можно представить как деление обеих частей уравнения на произведение некоторых функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y: $P(x)Q(y)$. Поэтому следует помнить, что при почленном делении частей ДУ на переменные величины могут быть потеряны *особые* его решения, которые не могут быть получены из общего решения уравнения. Особые решения ДУ следует искать из уравнения $P(x)Q(y) = 0$.

2. Проинтегрировать левую и правую части преобразованного уравнения по соответствующим переменным. В результате интегрирования частей образуется равенство, которое будем воспринимать как общее решение заданного ДУ, записанное в неявном виде. Если из него выразить искомую функцию, то общее решение примет явный вид.

Пример 4. Решить ДУ $y' = y^2$.

Решение. Уравнение $y' = y^2$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменив в нем производную искомой функции $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, получим дифференциальную форму записи ДУ: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$.

1. Разделим в нем переменные: $\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$.

2. Проинтегрируем части этого равенства: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x.$

В результате получим: $-\frac{1}{y} = x + C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде.

Выразим из данного равенства искомую функцию:

$$y = -\frac{1}{x+C} \text{ – явный вид общего решения ДУ.}$$

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на y (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $y = 0$). Очевидно, что $y = 0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

Пример 5. Решить ДУ $(xy^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - x^2 y)\mathrm{d}y = 0.$

Решение. Уравнение $(xy^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - x^2 y)\mathrm{d}y = 0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное в дифференциальной форме.

1. Слагаемое, содержащее дифференциал искомой функции, оставим в левой части уравнения, а первое слагаемое перенесем в его правую часть, вынесем за скобки в образованных частях общие множители и разделим переменные:

$$(x^2 - x^2 y)\mathrm{d}y = -(xy^2 + y^2)\mathrm{d}x, \; x^2(1-y)\mathrm{d}y = -y^2(x+1)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{(1-y)}{y^2}\mathrm{d}y = -\frac{(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Упростим полученное уравнение:

$$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = -\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Получим: $-\frac{1}{y} - \ln|y| = \frac{1}{x} - \ln|x| + C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде. Так как из равенства выразить искомую функцию y нельзя, то записать явный вид данного решения не представляется возможным.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на x^2y^2 (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $x^2y^2 = 0$). Очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

Если в процессе интегрирования частей ДУ с разделенными переменными результаты записываются в виде натуральных логарифмов, то целесообразно и произвольную константу представлять в виде натурального логарифма. Это позволит упростить запись общего решения ДУ. Рассмотрим это на примере.

Пример 6. Решить ДУ $\operatorname{tg}(x)yy' - 2y^2 + 1 = 0$.

Решение. Уравнение $\operatorname{tg}(x)yy' - 2y^2 + 1 = 0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменим в ДУ производную искомой функции $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, а второе и третье слагаемые перенесем в его правую часть. В результате получим: $\operatorname{tg}(x)y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y^2 - 1$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\frac{y}{2y^2-1}\mathrm{d}y = \operatorname{ctg}(x)\mathrm{d}x.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int \frac{y}{2y^2-1}\mathrm{d}y = \int \operatorname{ctg}(x)\mathrm{d}x.$$

Выпишем результат интегрирования левой части:

$$\int \frac{y}{2y^2-1}\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} t = 2y^2 - 1 \\ \mathrm{d}t = 4y\mathrm{d}y \\ y\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}t}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}t}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln\left|2y^2-1\right| + C.$$

Выпишем результат интегрирования правой части:

$$\int \operatorname{ctg}(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \sin(x) \\ \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|\sin(x)| + C.$$

Тогда общим решением ДУ, записанным в неявном виде, будет:

$$\frac{1}{4}\ln\left|2y^2-1\right| = \ln|\sin(x)| + \ln|C|,\ \ln\left|2y^2-1\right|^{\frac{1}{4}} = \ln|C\sin(x)|,$$

$$\text{или}\quad \sqrt[4]{2y^2-1} = C\sin(x).$$

В явном виде общее решение этого ДУ запишется как

$$y = \pm\sqrt{C_1 \sin^4(x) + \frac{1}{2}},$$

где $C_1 = \dfrac{C^4}{2}$.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на $\mathrm{tg}(x)(2y^2 - 1)$ (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $\mathrm{tg}(x)(2y^2 - 1) = 0$). Но решение $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ входит в общее решение данного ДУ, поэтому оно не будет являться особым.

Пример 7. Найти общее решение ДУ $y' = \dfrac{e^x}{\cos^2(y)}$.

Решение. Уравнение $y' = \dfrac{e^x}{\cos^2(y)}$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменив в ДУ производную искомой функции $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, получим: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x}{\cos^2(y)}$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\cos^2(y)\,\mathrm{d}y = e^x \mathrm{d}x.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x.$$

Выпишем результат интегрирования левой части равенства:

$$\int \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2y))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) + C.$$

Тогда общим решением ДУ, записанным в неявном виде, будет:

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) = e^x + C.$$

Пример 8. Найти частное решение ДУ $2xyy' + 1 + y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Решение. Найдем общее решение ДУ $2xyy' + 1 + y^2 = 0$, которое можем охарактеризовать как уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменив в ДУ производную искомой функции $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, получим: $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(y^2+1)$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\frac{2y\mathrm{d}y}{(y^2+1)} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int \frac{2y\mathrm{d}y}{y^2+1} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Выпишем результат интегрирования левой части равенства:

$$\int \frac{2y\mathrm{d}y}{y^2+1} = \left| \begin{aligned} t &= y^2+1 \\ \mathrm{d}t &= 2y\mathrm{d}y \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|y^2+1\right| + C.$$

Тогда общее решение ДУ запишется в следующем виде:

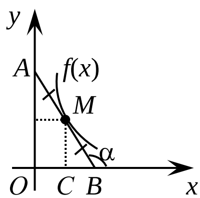
$$\ln\left|y^2+1\right| = \ln|x| + \ln|C|,\ \ln\left|y^2+1\right| = \ln|Cx|,\ y^2+1 = Cx.$$

Согласно начальному условию найдем частное решение ДУ. Для этого в его общее решение вместо x и y подставим 1:

$$1^2+1 = C,\ \ C = 2.$$

Значит, частные решения ДУ могут быть записаны как $y^2+1 = 2x$ или в явном виде $y = \pm\sqrt{2x-1}$.

Пример 9. Известно, что кривая проходит через точку $M(4;\ 1)$ и отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. Для нахождения данной кривой сделать постановку задачи Коши и выполнить ее решение.



Решение. Математически сформулируем задачу Коши согласно заданным условиям.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка кривой $y = f(x)$, располагающейся (для определенности) в первой четверти. Воспользуемся геометрическим смыслом первой производной функции в точке, которая характеризует угловой коэффициент касательной в этой точке $k_{\text{кас}} = y'$.

Из схемы видно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M может быть найден из равенства $k_{\text{кас}} = \mathrm{tg}(\alpha) =$ $=$ MC : CB. С другой стороны, $\angle\alpha$ дополняет $\angle B$ треугольника MBC до 180°. Значит, $\angle B = -\mathrm{tg}(\alpha)$. Также видно, что $MC = y$, а из равенства треугольников ADM и MCB следует равенство $DM = OC = CB = x$. Таким образом, уравнение искомой кривой является решением ДУ $y' = -\dfrac{y}{x}$. А так как эта кривая проходит через точку $M(4;\ 1)$, то для нахождения частного решения дополнительное условие будет выглядеть $y(4) = 1$.

Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x}; \\ y(4) = 1. \end{cases}$$

Найдем общее решение ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную $y' = -\dfrac{y}{x}$. Заменив в ДУ производную искомой функции $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, получим: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y}{x}$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

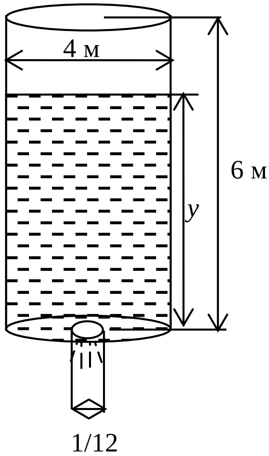
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x},\ \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,\ \ln|y| = -\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\ y = \frac{C}{x}.$$

Согласно начальному условию найдем частное решение ДУ. Для этого в его общее решение вместо x подставим 4, а вместо y – 1, получим: $1 = \dfrac{C}{4}$, или $C = 4$.

Это означает, что искомая кривая имеет вид $y = \dfrac{4}{x}$ и представляет собой гиперболу.

Пример 10. Установлено, что процесс истечения жидкости из сосуда через отверстие площадью q (м^2) может быть описан ДУ

$$\mathrm{d}t + \frac{S(y)}{kq\sqrt{2gy}}\mathrm{d}y = 0,$$ где t – время истечения жидкости (с), y – высота жидкости в сосуде (м), k – коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия, g = 9,8 – ускорение свободного падения (м/с^2).



Использовать данную математическую модель и установить зависимость уровня воды в цилиндрическом резервуаре с вертикальной осью высотой 6 м и диаметром 4 м от времени $y(t)$ при истечении ее из резервуара через круглое отверстие радиусом 1/12 м. При этом коэффициент скорости истечения принять для воды k = 0,6 и считать, что в начальный момент времени резервуар полностью заполнен водой. Определить время, в течение которого вытечет вся вода.

Решение. Из условия задачи следует, что $S(y) = 4\pi$, а $q = \dfrac{\pi}{144}$.

Тогда ДУ примет вид:

$$\mathrm{d}t + \frac{4\cdot 144\cdot 10}{6\sqrt{2\cdot 9{,}8}\sqrt{y}}\mathrm{d}y = 0, \text{ или } \mathrm{d}t = -\frac{216{,}842}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y.$$

Проинтегрируем левую и правую части этого равенства:

$$\int \mathrm{d}t = -216{,}842\int\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y, \quad t = -216{,}842\cdot 2\sqrt{y} + C,$$

$$\text{или } t = -433{,}684\sqrt{y} + C.$$

Так как в начальный момент времени резервуар полностью был заполнен водой, то примем, что $t(6) = 0$. Тогда получим равенство для определения постоянной C: $0 = -433{,}684\sqrt{6} + C$. Откуда C = 1062,3.

Таким образом, зависимость уровня воды в цилиндрическом резервуаре при ее истечении из него через круглое отверстие для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид:

$$t = 1062{,}304 - 433{,}684\sqrt{y}.$$

Вода полностью вытечет из резервуара, когда ее уровень y станет равен нулю, а значит, через 1062,3 секунды, или примерно через 17,7 минуты.

9.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

К уравнению с разделяющимися переменными приводят однородные ДУ первого порядка $y' = f(x; y)$.

Функцию $f(x; y)$ называют *однородной функцией n-го порядка*, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т. е.

$$f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x; y).$$

Например, функция $f(x; y) = x^3 - 3x^2y$ является однородной функцией третьего порядка, поскольку

$$f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^3 f(x; y).$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ называется однородным, если функция $f(x; y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородное ДУ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью замены

$$U = \frac{y}{x}, \text{ или } y = Ux.$$

Действительно, подставив $y = Ux$ и $y' = U'x + U$ в однородное ДУ первого порядка, получим: $U'x + U = \varphi(U) - U$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 11. Найти общее решение ДУ $(x^2 - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$.

Решение. Приведем это ДУ к виду $y' = f(x;\ y)$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Не трудно заметить, что $f(x;\ y) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 xy} = \frac{\lambda^2 (y^2 - x^2)}{\lambda^2 2xy} = \frac{(y^2 - x^2)}{2xy} = f(x; y).$$

Сведем данное ДУ к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замен $y = Ux$ и $y' = U'x + U$. Получим:

$$U'x + U = \frac{U^2x^2 - x^2}{2Ux^2},\ U'x + U = \frac{U^2 - 1}{2U},\ U'x = \frac{U^2 - 1}{2U} - U,\ U'x = -\frac{U^2 + 1}{2U},$$

$$\frac{2U}{U^2+1}\mathrm{d}U=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \int\frac{2U}{U^2+1}\mathrm{d}U=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \ln\left|U^2+1\right|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\ln\left|U^2+1\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\ U^2+1=\frac{C}{x}.$$

Заменив в равенстве U на $\frac{y}{x}$, получим общее решение заданного ДУ: $\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{C}{x}$, или $y^2+x^2=Cx$.

Пример 12. При условии $y(1) = -2$ найти частное решение ДУ $y'=-\frac{x+2y}{y}$.

Решение. Данное ДУ является однородным ДУ первого порядка, так как $f(x;\ y)=-\frac{x+2y}{y}$ является однородной функцией нулевого порядка: $f(\lambda x;\ \lambda y)=-\frac{\lambda x+2\lambda y}{\lambda y}=-\frac{\lambda(x+2y)}{\lambda y}=-\frac{x+2y}{y}=f(x;y)$.

Сведем данное ДУ к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замен $y=Ux$ и $y'=U'x+U$. Получим:

$$y'=-\frac{x}{y}-2,\ U'x+U=-\frac{1}{U}-2,\ U'x=-\frac{1}{U}-2-U,\ U'x=\frac{-1-2U-U^2}{U},$$

$$U'x=-\frac{1+2U+U^2}{U},\ U'x=-\frac{(U+1)^2}{U},\ \frac{U}{(U+1)^2}\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\int\frac{U}{(U+1)^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\ \int\frac{(U+1)-1}{(U+1)^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\int\frac{1}{U+1}\mathrm{d}y-\int\frac{1}{(U+1)^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\ \ln|U+1|+\frac{1}{U+1}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Заменив в равенстве U на $\frac{y}{x}$, получим общее решение заданного ДУ: $\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

Найдем частное решение ДУ при условии $y(1) = -2$:

$$\ln\left|\frac{-2}{1}+1\right|+\frac{1}{\frac{-2}{1}+1}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\quad \ln\left|-1\right|+\frac{1}{-1}=\ln\left|C\right|,\ \ln\left|C\right|=-1,\ C=\frac{1}{e},$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=\ln\left|\frac{1}{ex}\right|.$$

9.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение $y'+p(x)y=q(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в это уравнение линейно, а функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале $(a;\,b)$.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение $y'+p(x)y=0$ называется *линейным однородным*, если $q(x)\neq 0$ – *линейным неоднородным*.

В линейном однородном уравнении $y'+p(x)y=0$ переменные разделяются: $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\,\mathrm{d}x,$ и поэтому его интегрирование сводится к вычислению интегралов от обеих частей равенства:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int p(x)\,\mathrm{d}x+C.$$

Для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения обычно используют *метод подстановки (Бернулли)*, суть которого заключается в следующем.

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций:

$$y(x)=u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые непрерывные в интервале $(a;\,b)$ функции.

Подставим $y=uv$ и производную $y'=u'v+uv'$ в уравнение:

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x),\ \text{или}\ u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x).$$

Функцию v будем подбирать таким образом, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Тогда $u'v = q(x)$.

В результате решения этих простейших дифференциальных уравнений получим:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)v = 0\,,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)dx\,,\ \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\int p(x)\mathrm{d}x\,,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)\mathrm{d}x + \ln|C|\,,\ v = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

В качестве функции $v(x)$ можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т. е. при $C = 1$ $v = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$. Подставим во второе уравнение:

$$u'e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x) \text{ или } u' = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x).$$

Тогда $u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)\mathrm{d}x + C.$ Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x + C\right).$$

Пример 13. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin(x)}{x}$.

Решение. Данное ДУ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение будем искать в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда производная этой функции может быть найдена по правилу дифференцирования произведения двух функций $y' = u'v + uv'$. Выполним подстановку этих выражений в заданное ДУ:

$$u'v + v'u + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию u вынесем за скобки. В результате получим:

$$u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Ввиду произвольности выбора функций u и v функцию v можно выбрать таким образом, чтобы выражение в скобках левой части уравнения обнулялось. Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' + \frac{1}{x}v = 0; \qquad 2)\ u'v = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Из первого ДУ найдем функцию v:

$$v' + \frac{1}{x}v = 0,\ v' = -\frac{1}{x}v,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}v,\ \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,\ \ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ \ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ v = \frac{1}{x}.$$

Подставим выражение функции v во второе ДУ и найдем из него функцию u:

$$u'v = \frac{\sin(x)}{x},\ \ u'\frac{1}{x} = \frac{\sin(x)}{x},\ u' = \sin(x),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin(x),\ \mathrm{d}u = \sin(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int\mathrm{d}u = \int\sin(x)\mathrm{d}x,\ \ u = -\cos(x) + C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь следующий вид:

$$y(x) = (C - \cos(x))\frac{1}{x}\ .$$

Пример 14. Решить задачу Коши:

$$y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2},\ \ y(0) = -5.$$

Решение. Положим, $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в данное уравнение, сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию u вынесем за скобки:

$$u'v + u\,(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}.$$

Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' + 2xv = 0; \qquad 2)\ u'v = 2x^2e^{-x^2}.$$

Из первого ДУ найдем функцию v:

$$v' + 2xv = 0,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2xv,\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\int x\mathrm{d}x,\ \ln|v| = -x^2,\ \ v = e^{-x^2}.$$

Подставим выражение функции v во второе ДУ и найдем из него функцию u:

$$u'v = 2x^2e^{-x^2},\ u'e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x^2,\ \mathrm{d}u = 2x^2\mathrm{d}x,\ \int\mathrm{d}u = \int 2x^2\mathrm{d}x,$$

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь вид:

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right).$$

Найдем частное решение ДУ при условии, что $y(0)=-5$:

$$-5y=e^0\left(\frac{2}{3}\cdot 0+C\right),\ C=-5.$$

Тогда решением поставленной задачи Коши будет функция

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3-5\right).$$

Пример 15. Известно, что скорость охлаждения двигателя автомобиля пропорциональна разности между температурой двигателя и температурой окружающей среды. В момент, когда двигатель автомобиля был заглушен, его температура была равна 80 °С при температуре окружающей среды 18 °С. За 30 мин он охладился на 20 °С при снижении температуры воздуха на 2 °С в течение следующего часа. Считая, что изменение температуры окружающей среды в течение следующего часа после остановки двигателя происходило по линейному закону, получить закон охлаждения двигателя и определить его температуру через час после остановки.

Решение. Пусть $T(t)$ – температура двигателя (°С), $T_в(t) = at + b$ – температура окружающей среды (°С), t – время охлаждения двигателя (ч), k – коэффициент пропорциональности. Тогда согласно условию задачи изучаемый процесс может быть описан дифференциальным уравнением

$$T'=k(T-T_в).$$

Так как температура окружающей среды не постоянна, то данное ДУ представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$T'-kT=-kT_в.$$

Из условия задачи нам известно, что в начальный момент времени ($t = 0$) температура двигателя составляла 80 °С. Запишем это следующим образом: $T(0) = 80$. А через полчаса двигатель охладился на 20 °С, т. е. $T(0{,}5) = 60$. Также нам известно, что в течение следующего часа после остановки двигателя происходило снижение температуры окружающей среды по линейному закону с 18 до 16 °С. Тогда изменение температуры воздуха можно определить из следующих условий:

$$T_в(t) = at + b,\ T_в(0) = 18,\ a\cdot 0 + b = 18, \text{ или } b = 18;$$

$$T_в(t) = at + 18,\ T_в(1) = 16,\ a\cdot 1 + 18 = 16, \text{ или } a = -2.$$

Это означает, что температура воздуха в течение следующего часа после остановки двигателя подчинялась следующей зависимости:

$$T_{\text{в}}(t) = -2t + 18.$$

Найдем общее решение ДУ $T' - kT = -k(18-2t)$.

Данное ДУ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение будем искать в виде $T(t) = u(t)v(t)$. Тогда производная этой функции может быть найдена по правилу дифференцирования произведения двух функций $T' = u'v + uv'$. Выполним подстановку этих выражений в заданное ДУ:

$$u'v + uv' - kuv = -k(18-2t).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию u вынесем за скобки. В результате получим:

$$u'v + u(v' - kv) = -k(18-2t).$$

Ввиду произвольности выбора функций u и v функцию v можно выбрать таким образом, чтобы выражение в скобках левой части уравнения обнулялось. Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' - kv = 0; \qquad 2)\ u'v = -k(18-2t).$$

Из первого ДУ найдем функцию v:

$$v' - kv = 0,\ v' = kv,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kv,\ \frac{\mathrm{d}v}{v} = k\mathrm{d}t,\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v} = k\int\mathrm{d}t,\ \ln(v) = kt,\ v = e^{kt}.$$

Подставим выражение функции v во второе ДУ и найдем из него функцию u:

$$u'e^{kt} = -k(18-2t),\ u' = -k(18-2t)e^{-kt},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k(18-2t)e^{-kt},$$

$$\mathrm{d}u = -k(18-2t)e^{-kt}\mathrm{d}t,\ \int\mathrm{d}u = -k\int(18-2t)e^{-kt}\mathrm{d}t.$$

Вычислим отдельно интеграл правой части данного равенства, используя формулу интегрирования по частям:

$$-k\int(18-2t)e^{-kt}\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} z = 18-2t,\ \mathrm{d}z = -2\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}p = e^{-kt}\mathrm{d}t,\ p = -\dfrac{1}{k}e^{-kt} \end{vmatrix} =$$

$$= -k\left(-\frac{1}{k}(18-2t)e^{-kt} - \int -\frac{1}{k}e^{-kt}\cdot(-2\mathrm{d}t)\right) = (18-2t)e^{-kt} + 2\int e^{-kt}\mathrm{d}t =$$

$$= (18-2t)e^{-kt} - \frac{2}{k}e^{-kt} + C.$$

Тогда $u = (18-2t)e^{-kt} - \frac{2}{k}e^{-kt} + C,$ а общее решение ДУ будет иметь вид $T(t) = ((18-2t)e^{-kt} - \frac{2}{k}e^{-kt} + C)\cdot e^{kt}$, или $T(t) = (18-2t) - \frac{2}{k} + Ce^{kt}$.

Для того чтобы установить закон охлаждения двигателя автомобиля, нам остается определить параметры k и C этой зависимости с учетом условий: $T(0) = 80$ и $T(0{,}5) = 60$.

Так как $T(0) = 80$, то $80 = (18 - 2\cdot 0) - \frac{2}{k} + Ce^{k\cdot 0}$, или $80 = 18 - \frac{2}{k} + C,$ $C - \frac{2}{k} = 62.$

Из условия $T(0{,}5) = 60$ получим: $60 = (18 - 2\cdot\frac{1}{2}) - \frac{2}{k} + Ce^{k\cdot\frac{1}{2}}$, или $60 = 17 - \frac{2}{k} + Ce^{\frac{1}{2}k}$, $Ce^{\frac{1}{2}k} - \frac{2}{k} = 43.$

Это означает, что искомые параметры будут определяться из системы уравнений

$$\begin{cases} C - \dfrac{2}{k} = 62, \\ Ce^{\frac{k}{2}} - \dfrac{2}{k} = 43. \end{cases}$$

Исключим из этой системы параметр k, отняв из первого уравнения системы второе. В результате получим: $C - Ce^{\frac{k}{2}} = 19,$ или $C(1 - e^{\frac{k}{2}}) = 19,$ откуда $C = \dfrac{19}{1 - e^{\frac{k}{2}}}$.

Подставим найденное значение в первое уравнение системы. Получим:

$$\frac{19}{1 - e^{\frac{k}{2}}} - \frac{2}{k} = 62.$$

Выразить аналитически k из этого равенства не представляется возможным, поэтому решим его приближенными методами:

$$k \approx -0{,}77084.$$

Это означает, что закон охлаждения двигателя в рассматриваемом случае будет иметь следующий вид:

$$T(t) = (18 - 2t) - \frac{2}{-0,77084} + \frac{19}{1 - e^{\frac{-0,77084}{2}}} e^{-0,77084t}.$$

Тогда, подставив в данную зависимость $t = 1$, мы получим температуру двигателя через час после его остановки: $T(1) = 46{,}08$ °C.

9.6. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Суть метода *понижения порядка* состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, методика решения которого известна.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x).$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, предположив, что $y' = p(x)$.

Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения.

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, решаемое уравнение можно записать в виде $dy' = f(x)dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)dx$, или $y' = \varphi_1(x) + C_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$ – общее решение данного уравнения.

Пример 16. Решить ДУ $y'' = \cos(3x)$.

Решение. Дважды проинтегрируем данное уравнение и получим общее решение этого ДУ:

$$y' = \int \cos(3x)\mathrm{d}x,\ \ y' = \frac{1}{3}\sin(3x) + C_1,\ \ y = \int\left(\frac{1}{3}\sin(3x) + C_1\right)\mathrm{d}x,$$

$$y = -\frac{1}{9}\cos(3x) + C_1 x + C_2.$$

2. Пусть дано уравнение $y'' = f(x;\ y')$, не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и рассматриваемое уравнение принимает вид $p' = f(x;\ p)$. Пусть $p = p(x;\ C_1)$ – общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем ДУ $y' = \varphi(x;\ C_1)$. Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения будет иметь вид $y = \int (\varphi(x;\ C_1)\mathrm{d}x + C_2$.

Частным случаем уравнения является уравнение

$$y'' = f(y'),$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Пример 17. Решить ДУ $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Решение. Пусть $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$. Получаем однородное ДУ первого порядка $p' = \dfrac{p}{x}$. Заменим $\dfrac{p}{x}$ на U, а p' на $U + U'x$. В результате ДУ перепишется в виде $U + U'x = U$, или $U'x = 0$, $U' = 0$, $U = C_1$, $\dfrac{p}{x} = C_1$, $p = C_1 x$, $y' = C_1 x$, $y = \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2$ – общее решение ДУ.

3. Рассмотрим ДУ $y'' = f(y;\ y')$, которое не содержит явно переменную x.

Для понижения порядка уравнения введем следующие замены:

$$y' = p,\ p = p(y),\ \ y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p.$$

Тогда рассматриваемое уравнение примет вид:

$$\frac{dp}{dy}p = f(y; p).$$

Предположим, что записанное ДУ первого порядка имеет общее решение $p = \varphi(y; C_1)$. Тогда, делая обратную замену $p = \varphi(y; C_1)$, получим ДУ первого порядка с разделяющимися переменными $y' = \varphi(y; C_1)$. Интегрируя его, находим общее решение рассматриваемого ДУ:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2.$$

Пример 18. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' - (y')^2 = y'(1-y), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как заданное ДУ явно не содержит переменную x, то выполним следующие замены: $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy}p$. Получим:

$$\frac{dp}{dy}p - (p)^2 = p(1-y),\ p' - p = (1-y).$$

Полученное уравнение является линейным ДУ первого порядка, а значит, сделаем замены в нем: $p = uv$, $p' = u'v + v'u$. В результате будем иметь равенство $u'v + v'u - uv = 1 - y$. Сделав в нем преобразование $u'v + u(v' - v) = 1 - y$, решение исходного ДУ сведем к решению двух ДУ с разделяющимися переменными:

$$v' - v = 0,\ u'v = 1 - y.$$

Первое ДУ будет иметь решение $v = e^y$. Тогда после преобразований второе равенство примет вид: $u' = (1-y)e^{-y}$. Интегрируя его, находим, что $u = (y-1)e^{-y} + e^{-y} + C_1$. Следовательно, $p = uv = \left((y-1)e^{-y} + e^{-y} + C_1\right)e^y = y + C_1e^y$. Заменяя p на y', получаем: $y' = y + C_1e^y$. Воспользуемся вторым начальным условием и найдем C_1: $1 = 1 + C_1e^1$, $C_1 = 0$. Получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными $y' = y$, с решением $y = C_2e^x$. Используя первое начальное условие $y(0) = 1$, получим: $1 = C_2e^0$, или $C_2 = 1$. Это означает, что поставленная задача Коши имеет решение $y = e^x$.

9.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где a, b и c – некоторые числа, одновременно не обращающиеся в ноль.

Запись общего решения линейных однородных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами производится на основании корней соответствующего им характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$, представляющего собой квадратное уравнение. При этом возможны три случая.

Случай 1. Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительные и различные ($D = b^2 - 4ac > 0$), то общее решение рассматриваемого ДУ будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Случай 2. Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительные и совпадающие: $k = k_1 = k_2$ ($D = 0$), то общее решение рассматриваемого ДУ запишется как

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Случай 3. Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_1 = \alpha - \beta i$ ($D < 0$), то общее решение ДУ примет следующий вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)).$$

Пример 19. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' - 7y = 0$.

Решение. ДУ $y'' - 6y' - 7y = 0$ является линейным однородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующим ему характеристическим уравнением является $k^2 - 6k - 7 = 0$. Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64 = 8^2 > 0$, $k_1 = \dfrac{6-8}{2} = -1$, $k_2 = \dfrac{6+8}{2} = 7$. Согласно первому случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{7x}$.

Пример 20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид $k^2 - 8k + 16 = 0.$ Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0,$ $k = k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$ Тогда согласно второму случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x).$

Пример 21. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид $k^2 - 4k + 5 = 0.$ Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4,$ $k_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i,$ $k_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i.$ Согласно найденным корням характеристического уравнения определяем действительную их часть $\alpha = 2$ и мнимую часть по абсолютной величине $\beta = 1.$ Тогда согласно третьему случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = e^{2x}(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)).$

9.8. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

где a, b и c – некоторые числа, одновременно не обращающиеся в ноль;

$f(x)$ – некоторая заданная функция переменной x.

Рассмотрим решение такого ДУ в случае, когда его правая часть имеет так называемый специальный вид $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$, т. е. представляется в виде произведения многочлена n-й степени и экспоненциального выражения.

Установлено, что общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде суммы любого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения $y_о(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения: $y(x) = \tilde{y}(x) + y_о(x).$

Нахождение общего решения $y_о(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения было рассмотрено в п. 1.7. Частное решение неоднородного уравнения формируется по следующим принципам:

1) сравнивается эталонная правая часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью. Исходя из этого сравнения определяется степень многочлена n и числовой коэффициент экспоненциального выражения λ;

2) записывается ожидаемая форма частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В общем случае она представляет собой произведение трех сомножителей:

$$\tilde{y}(x) = P_n(x; A; B; ...) \cdot e^{\lambda x} \cdot x^p,$$

где $P_n(x; A; B; ...)$ – это многочлен n-й степени с неопределенными коэффициентами A, B, …;

$e^{\lambda x}$ – экспоненциальное выражение, присутствующее в фактически заданной правой части;

x^p – степенное выражение, целая степень которого p определяется количеством совпадения λ с корнями соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка k_1 и k_2;

3) определяются неизвестные коэффициенты A, B, … путем подстановки сформированного частного решения в рассматриваемое ДУ.

Пример 22. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$.

Решение. ДУ $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$ является неоднородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его решение будем искать в виде $y(x) = \tilde{y} + y_о$.

1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_о:\ \ k^2 - 3k - 4 = 0,\ D = 9 + 16 = 25 = 5^2,\ k_1 = -1,\ k_2 = 4.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид:

$$y_о = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $3x - 2$ уравнения. Определяем, что в нашем случае

$n = 1$, а $\lambda = 0$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = (Ax + B) \cdot e^{0x} \cdot x^0 = Ax + B.$

3. Найдем неизвестные параметры A и B. Для того чтобы подставить сформированное решение в ДУ, найдем его производные первого и второго порядка:

$$\tilde{y}'(x) = A, \ \ \tilde{y}''(x) = 0.$$

Подставим эти выражения в ДУ: $-3A - 4(Ax + B) = 3x - 2$, приведем подобные величины левой части: $-4Ax + (-4B - 3A) = 3x - 2$ и уравняем коэффициенты при степенях переменной x:

x: $-4A = 3$, откуда $A = -\dfrac{3}{4}$;

1: $-4B - 3A = -2, \ \ -4B - 3\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -2, \ \ -4B + \dfrac{9}{4} = -2, \ -4B = -2 - \dfrac{9}{4},$

$-4B = -\dfrac{17}{4}, \ B = \dfrac{17}{16}.$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{16}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{16}.$

Пример 23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_{\text{о}}: \ k^2 + 3k + 2 = 0, \ D = 9 - 8 = 1 = 1^2, \ k_1 = -1, \ k_2 = -2.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью e^{3x} уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 0$, а $\lambda = 3$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = A \cdot e^{3x} \cdot x^0 = Ae^{3x}$.

3. Найдем неизвестный параметр A. Для этого найдем производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = 3Ae^{3x}, \ \tilde{y}''(x) = 9Ae^{3x}.$$

Подставим эти выражения в ДУ: $9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = Ae^{3x}$, сократим левую и правую части полученного равенства на e^{3x}, приведем подобные величины и выразим A:

$$20A = 1, \ A = \frac{1}{20}.$$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = \frac{1}{20}e^{3x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{20}e^{3x}$.

Пример 24. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_{\text{о}}: \ k^2 - 4k + 4 = 0, \ D = 16 - 16 = 0, \ k_{1,2} = 2.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид:

$$y_{\text{о}} = e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью e^{2x} уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 1$, а $\lambda = 2$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в следующем виде: $\tilde{y}(x) = A \cdot e^{2x} \cdot x^2 = Ax^2e^{2x}$.

3. Найдем неизвестный параметр A. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$: $\tilde{y}'(x) = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}$, $\tilde{y}''(x) = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}$.

Подставим эти выражения в ДУ: $2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}$, сократим левую и правую части полученного равенства на e^{2x}, приведем подобные величины и выразим A:

$$2A+8Ax+4Ax^2-8Ax-8Ax^2+4Ax^2=1,\ 2A=1,\ A=\frac{1}{2}.$$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Пример 25. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-6y'+5y=x^2-1$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_\text{о}:\ k^2-6k+5=0,\ D=36-20=16=4^2,\ k_1=\frac{6-4}{2}=1,\ k_2=5.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид:

$$y_\text{о}=C_1e^x+C_2e^{5x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью x^2-1 уравнения. Определяем, что в нашем случае n = 2, а λ = 0. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)x^0=Ax^2+Bx+C$.

3. Найдем неизвестные параметры A, B, C. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x)=(Ax^2+Bx+C)'=2Ax+B,\ \tilde{y}''(x)=(2Ax+B)'=2A.$$

Подставим эти выражения в ДУ:

$$2A-6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)=x^2-1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные величины по степеням переменной x:

$$2A-12Ax-6B+5Ax^2+5Bx+5C=x^2-1,$$

$$5Ax^2+x(-12A+5B)+1(2A+5C-6B)=x^2-1.$$

Приравняем коэффициенты при степенях x левой и правой частей уравнения:

x^2: $5A = 1$, $A = \dfrac{1}{5}$;

x: $-12A + 5B = 0$, $-\dfrac{12}{5} + 5B = 0$, $5B = \dfrac{12}{5}$, $B = \dfrac{12}{25}$;

1: $2A + 5C - 6B = -1$, $2 \cdot \dfrac{1}{5} + 5C - 6 \cdot \dfrac{12}{25} = -1$, $5C = -1 + \dfrac{72}{25} - \dfrac{2}{5}$,

$5C = \dfrac{-25 + 72 - 10}{25}$, $5C = \dfrac{37}{25}$, $C = \dfrac{37}{125}$.

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{12}{25}x + \dfrac{37}{125}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{37}{125}.$$

Пример 26. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = (2x + 7)e^{-x}$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$y_{\text{о}}$: $k^2 - 2k + 5 = 0$, $D = 4 - 20 = -16 = (\pm 4i)^2$, $k_1 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$,

$k_2 = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$.

В данном случае действительная часть полученных комплексных корней $\alpha = 1$, а абсолютная величина их мнимой части $\beta = 2$.

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид:

$$y_{\text{о}} = e^x (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)).$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $(2x + 7)e^{-x}$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 1$, а $\lambda = -1$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = (Ax + B) \cdot e^{-x} \cdot x^0 = (Ax + B)e^{-x}$.

3. Найдем неизвестные параметры A и B. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = ((Ax+B)e^{-x})' = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x},$$

$$\tilde{y}''(x) = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x} = -2Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}.$$

Подставим эти выражения в ДУ:

$$-2Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x} - 2(Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}) + 5(Ax+B)e^{-x} = (2x+7)e^{-x}.$$

Сократим левую и правую части полученного равенства на e^{-x}, приведем подобные величины и выразим искомые параметры:

$$-2A + (Ax+B) - 2A + 2(Ax+B) + 5(Ax+B) = 2x+7,$$

$$-4A + Ax + B + 2Ax + 2B + 5Ax + 5B = 2x+7,$$

$$8Ax - 4A + 8B = 2x+7.$$

Приравняем коэффициенты при степенях x левой и правой частей уравнения:

x: $8A = 2$, $A = \dfrac{1}{4}$;

1: $-4A + 8B = 7$, $-4 \cdot \dfrac{1}{4} + 8B = 7$, $8B = 8$, $B = 1$.

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = (\dfrac{1}{2}x+1)e^{-x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом:

$$y = e^{x}(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)) + (\frac{1}{2}x+1)e^{-x}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти общее решение ДУ:

1) $y' = x^3 - 4x^2 + 7x - 9$;

2) $y' = 2x^4 - \dfrac{3}{x^3} + 7\sqrt[4]{x^5} - 12$;

3) $y' = 4\sin(2x) - 4e^{x^2} + 7\operatorname{tg}(3x) - 15$;

4) $y' = \ln(x) - 3\sqrt[5]{x^3} + \arcsin(7x)$;

5) $y' = \dfrac{(4x - 6x^7 + 3)}{\sqrt[5]{x}}$;

6) $y' = x^2\sqrt{x^3 - 4}$.

2. Найти частное решение ДУ:

1) $y' = 5x^2 - 2x^3 + 4x - 1,$ если $y(-1) = 16$;

2) $y' = x^4 - \dfrac{3}{x^6} + 7\sqrt[3]{x^2} - 2,$ если $y(1) = -2$;

3) $y' = 6\cos(3x) - \dfrac{6}{\pi},$ если $y(\dfrac{\pi}{6}) = -12$;

4) $y' = \ln(4x) + \dfrac{2}{e},$ если $y(\dfrac{e}{4}) = 9$;

5) $y' = (2x-7)^3$, если $y(0) = 106$;

6) $y' = (x^2 - 2x + 1)^{-1}$, если $y(-2) = -4$.

3. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $\mathrm{tg}(y)\mathrm{d}x - x\ln(x)\mathrm{d}y = 0, \quad y(e) = \dfrac{\pi}{2};$

2) $x(y^2+1)\mathrm{d}x + y(1-x^2)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = \sqrt{3};$

3) $(e^{2x}+5)\mathrm{d}y + ye^{2x}\mathrm{d}x = 0, \quad y(0) = \sqrt{6};$

4) $\sqrt{3+y^2}\,\mathrm{d}x = (y + x^2y)\mathrm{d}y, \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = 1;$

5) $y(e^x+4)\mathrm{d}y - e^x\mathrm{d}x = 0, \quad y(0) = 5.$

4. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти зависимость температуры T тела от времени t, если за a минут температура тела снизилась от T_1 до T_2, а температура воздуха была постоянной и равнялась C.

1) $a = 20$, $T_1 = 120$ °C, $T_2 = 40$ °C, $C = 18$ °C;

2) $a = 15$, $T_1 = 80$ °C, $T_2 = 30$ °C, $C = 12$ °C;

3) $a = 10$, $T_1 = 90$ °C, $T_2 = 70$ °C, $C = 16$ °C.

5. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y;$ 2) $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y};$

3) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3;$ 4) $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y;$

5) $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right);$ 6) $xyy' = 8x^2 + y^2.$

6. Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1;$

2) $y' + y\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x), \quad y(0) = 0;$

3) $y' - y\operatorname{ctg}(x) = 2x\sin(x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

4) $y' + y\operatorname{tg}(x) = \cos^2(x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$

5) $y' - \dfrac{1}{x+2}y = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2};$

6) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin(x)}{x}, \quad y(\pi) = 0.$

7. Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' + 8y = 6x + 1;$ 2) $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2;$

3) $y'' - 2y' = 2x + 1;$ 4) $y'' + 2y' + 9y = 2e^{3x};$

5) $y'' - 4y = 7xe^{5x};$ 6) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$

Лекция 10. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

10.1. Числовые ряды

Основные понятия. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Числовым рядом называется сумма этих чисел

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются членами ряда, a_n – общим или n-м членом ряда. Конечная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется n-й частичной суммой ряда.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, ряд называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Если ряд сходится, число $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ называется суммой ряда, а разность $r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ называется остатком ряда.

Пример 1. По заданному общему члену $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ записать ряд и найти его сумму.

Решение. Пусть n принимает значения 1, 2, 3, …, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ \dots \ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда найдем предел при $n \to \infty$ n-й частичной суммы:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ \dots, \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$S_n = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ ...\ +(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}),\ \text{т. е. } S_n = 1-\frac{1}{n+1},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1.$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Необходимое условие сходимости числового ряда: если числовой ряд сходится, то его общий член ряда a_n при неограниченном увеличении его номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ (Это необходимый, но не достаточный признак сходимости числового ряда.)

Пример 2. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\ ...;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1} = 1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ ...\ .$

Решение. Найдем предел общего члена каждого ряда при $n\to\infty$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = 0.$

Необходимый признак сходимости для первого ряда не выполняется. Поэтому этот ряд расходится. Для второго ряда необходимый признак выполняется. Вопрос о его сходимости может быть решен после дополнительных исследований.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами $a_1+a_2+\ ...\ +a_n+\ ...\ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b_1+b_2+\ ...\ +b_n+\ ...\ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, тогда, если

1) $a_n \le b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится;

2) $a_n \ge b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

Другими словами, ***из сходимости ряда с большими членами ряда следует сходимость ряда с меньшими членами ряда, а из рас-***

ходимости ряда с меньшими членами ряда следует расходимость ряда с большими членами ряда.

При использовании данного признака исследуемый ряд иногда сравнивают с бесконечной геометрической прогрессией

$$1+q+q^2+q^3+\dots q^n+\dots=\sum_n q^n,\ q>0,$$

которая при $q<1$ сходится, а при $q\geq 1$ расходится, или с расходящимся гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

Предельный признак сравнения.

Теорема. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, $0<A<\infty$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5n}\right)$.

Решение. Применим предельный признак сравнения для данного и гармонического рядов.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5n}:\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{5}$ – конечное число, то исходный ряд расходится, как и гармонический ряд.

Признак Даламбера.

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho,$$

тогда при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ – расходится. При $\rho=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Радикальный признак Коши.

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Как и для признака Даламбера, в случае когда $\rho < 1$, ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

Решение. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$, то применим радикальный признак Коши к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$ сходится, а следовательно, сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

Интегральный признак Коши.

Теорема. Пусть дан ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, члены которого являются значениями некоторой функции $f(n)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1; \infty)$. Тогда, если $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, если же этот интеграл расходится, то исследуемый ряд также расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Решение. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\ln x = t,\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \text{если } x = 2,\ t = \ln 2\\ \text{если } x = b,\ t = \ln b\end{array}\right| = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{t^2}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(\ln b)^2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}\right) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}\quad -$$

конечное число.

$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x$ – сходящийся, а следовательно, и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ – сходящийся.

10.2. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимися рядами называют ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки. Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots,$$

где $a_n > 0$.

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов).

Теорема. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда монотонно убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$), то ряд сходится.

Пример 6. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

10.3. Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где числа a_1, a_2, …, a_n могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольно. Такой ряд называют ***знакопеременным*** рядом.

Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то сходится и знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 7. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$ сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$.

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членов этого ряда, расходится (гармонический ряд).

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Пример 8. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+...$ – абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$$

также сходится. (Оба ряда – геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.)

Пример 9. Ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...$ – условно сходящийся, так как сам ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...$ расходится (легко проверить с помощью интегрального признака).

Для абсолютно сходящихся рядов сумма ряда равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда. Для условно сходящихся рядов это свойство не выполняется.

10.4. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

называется ***степенным рядом***. Числа a_0, a_1, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда.

Придавая x различные числовые значения, получают различные числовые ряды, которые могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Множество всех тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется ***областью сходимости*** степенного ряда. Очевидно, при $x = 0$ любой степенной ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Пример 10. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. Так как $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, а радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, то данный ряд сходится на интервале (–1; 1). Вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т. е. в точках $x = \pm 1$, исследуется дополнительно.

При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится, а при $x = -1$ – знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, сходящийся на основании признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится на полуинтервале [–1; 1).

Пример 11. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$, так как его радиус сходимости составляет

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right) = 0.$$

Пример 12. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится для любого $x \in (-\infty;\ \infty)$, так как его радиус сходимости равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

10.5. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x - a$ вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

При $a = 0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x: $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$

который называют ***рядом Маклорена***.

Разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\quad (|x| < \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\quad (|x| < \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\quad (|x| < \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ (|x| < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\quad (-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,\quad (-1 \le x \le 1);$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$
$$\left(|x| \le 1\right).$$

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу умножения многочленов. При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Эти правила применяют, в частности, для приближенных вычислений значений функций и интегралов.

Пример 13. Используя разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$ $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена и правила умножения и сложения степенных рядов, найти разложения в ряд по степеням x для следующих функций:

1) $(1+x)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$; 4) $e^x \sin x$; 5) $\ln\left(1+3x+2x^2\right)$.

Решения: 1) умножим почленно $1 + x$ на ряд Маклорена для функции e^x, который сходится на всей числовой оси, получим ряд

$$(1+x)e^x = (1+x)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n+1}{n!}x^n + \ldots,$$

сходящийся при всех значениях x;

2) разложение в ряд Маклорена $\sin^2 x$ можно получить следующим образом: $\sin^2 x = \sin x \sin x = \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \right)\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \right) =$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots .$$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех значениях x.

Такой же результат можно получить, используя формулу

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

и заменяя x на $2x$ в разложении $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots;$$

3) так как $\frac{x-3}{(x+1)^2} = (x-3)(x+1)^{-2}$, а

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \ldots,$$

то, умножая почленно этот ряд на $x-3$, получим

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = -3 + 7x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1} + \ldots .$$

Этот ряд сходится на интервале (–1; 1), так как на этом интервале сходится $(1+x)^{-2}$;

4) разложение в ряд функции $e^{-x}\sin x$ найдем почленным умножением ряда для e^{-x}, получаемого из ряда Маклорена для e^x заменой x на $-x$, на ряд Маклорена для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots .$$

Полученный ряд сходится к функции $e^{-x}\sin x$ на всей числовой оси;

5) функцию $\ln(1 + 3x + 2x^2)$ можно представить в виде

$$\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln((1 + x)(1 + 2x)) = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x).$$

Так как $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $(-1 < x \le 1)$, заменяя в этом разложении x на $2x$, получим $\ln(1+2x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right)$.

Тогда $\ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) = \ln(1 + 3x + 2x^2) =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n}, \ \left(-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right).$$

Пример 14. Вычислить с точностью до 0,0001: 1) ln 1,1; 2) $\sqrt[4]{17}$.

Решения: 1) так как

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \ (-1 < x \le 1),$$

то, полагая, что x = 0,1, получим ряд для вычисления ln 1,1 с любой точностью: $\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \dots$.

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления приближенного значения ln 1,1 с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}0953;$$

2) так как $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$, то для вычисления $\sqrt[4]{17}$ воспользуемся разложением:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+\frac{m(m-1)\ \dots\ (m-n+1)}{n!}x^n + \dots,\ \left(|x|<1\right),$$

полагая в разложении функции $(1+x)^m$ $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$.

Тогда

$$2\cdot(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = 2\cdot\left(1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^2} - \dots\right).$$

Для достижения требуемой точности $\sqrt[4]{17}$ достаточно ограничиться суммой трех первых членов ряда.

$$\sqrt[4]{17} \approx 2\cdot(1+0{,}01562-0{,}00037) \approx 2{,}0305.$$

Пример 15. Вычислить интегралы, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена: 1) $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$; 2) $\int \sqrt{x}e^x \mathrm{d}x$; 3) $\int \sqrt{1-x^3}\mathrm{d}x$.

Решения: 1) пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ и заменяя в нем x на x^2, получим $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots$.

Тогда

$$\int \sin x^2 \mathrm{d}x = \sin x^2 = \int\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \frac{x^{15}}{7!\cdot 15} + \dots + C,\ \left(|x|<\infty\right);$$

2) заменим функцию e^x ее рядом Маклорена.

Тогда получим $\int \sqrt{x}e^x \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...)\mathrm{d}x =$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} + ... + \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + ...)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1!\cdot 5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{2!\cdot 7}x^{\frac{7}{2}} + ... + \frac{2}{n!\cdot(2n+3)}x^{\frac{2n+3}{2}} + ... + C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x \ge 0$;

3) так как $\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}}$, то

$$\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - ... .$$

Тогда

$$\int \sqrt{1-x^3}\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - ...\right)\mathrm{d}x =$$

$$= x - \frac{x^4}{1!\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^7}{2!\cdot 2^2\cdot 7} - \frac{1\cdot 3x^{10}}{3!\cdot 2^3\cdot 10} - ... + C,$$

ряд, который сходится при $|x| < 1$.

Пример 16. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 значения следующих интегралов:

$$1)\ I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}};\ \ 2)\ I_2 = \int_0^1 \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x;\ \ 3)\ I_3 = \int_1^{1,5} \frac{1}{x}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}\mathrm{d}x.$$

Решения: 1) так как $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + ...\ \left(|x| < 1\right).$$

Тогда $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}} = t - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{13}}{13} + ...\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}} + ...$$

Для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда $I_1 \approx 0{,}4969$;

2) пользуясь разложением $\cos x$ в ряд Маклорена, получим

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \ldots \ (x \geq 0).$$

Тогда

$$I_2 = \int_0^1 \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x = x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \frac{x^5}{8!\cdot 5} - \ldots\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 2} + \frac{1}{4!\cdot 3} - \frac{1}{6!\cdot 4} + \frac{1}{8!\cdot 5} - \ldots .$$

Для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно взять сумму четырех первых членов ряда:

$$I_2 \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0{,}7635;$$

3) пользуясь разложением $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^3\cdot 3} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5} + \frac{x^7}{4^7\cdot 7} + \ldots\left(|x| \leq 4\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} + \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \ldots\left(|x| \leq 4\right).$$

$$I_3 = \int_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\mathrm{d}x = \int_1^{1,5}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} + \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \ldots\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^3}{4^3\cdot 3} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5} + \frac{x^7}{4^7\cdot 7} + \ldots\right)\Big|_1^{1,5} = \frac{1{,}5 - 1}{4} - \frac{1{,}5^3 - 1}{4^3\cdot 3} + \frac{1{,}5^5 - 1}{4^5\cdot 5} - \frac{1{,}5^7 - 1}{4^7\cdot 7} + \ldots .$$

Получили знакочередующийся сходящийся ряд. Для достижения требуемой точности достаточно взять сумму трех первых членов полученного ряда. $I_3 \approx 0{,}1211$.

Задания для самостоятельной работы

1. Записать n-й член ряда.

1) $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{9\cdot 7} + \frac{1}{14\cdot 9} + \ldots$; 2) $\frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{11\cdot 9} + \frac{1}{15\cdot 11} + \ldots$;

3) $\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{8\cdot 13}+\ldots;$ 4) $\frac{1}{7\cdot 4}+\frac{1}{10\cdot 9}+\frac{1}{13\cdot 14}+\ldots$.

2. С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость ряды.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^3};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^{2n}};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}.$

3. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряды.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-2)(3n+1)};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n^2+1}.$

4. С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость ряды.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{n^n};$ 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n.$

5. Исследовать на сходимость ряды с помощью интегрального признака Коши.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1};$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-2n}.$

6. Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)n}}.$

7. Исследовать сходимость степенного ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt{n}};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^n\sqrt[5]{n}};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\ln n}.$

8. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1) $\int\limits_0^1\cos x^2\mathrm{d}x;$ 2) $\int\limits_0^{0,2}e^{-3x^2}\mathrm{d}x;$ 3) $\int\limits_1^2\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x;$ 4) $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

9. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y=f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения.

1) $y'=\arcsin y+x,\ y(0)=0,5;$ 2) $y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x},\ y(1)=1,\ y'(1)=0;$

3) $y'=x+y^{-1},\ y(0)=1;$ 4) $y''=xe^x+2yy',\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Лекция 11. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

11.1. Предмет теории вероятностей

Исходными понятиями в теории вероятностей являются понятия испытания и события. Под испытанием (опытом) будем понимать всякое действие, результат которого фиксируется. Результат испытания будем называть событием. События, как правило, обозначаются большими латинскими буквами A, B, … . Результатом одинаковых испытаний могут быть разные события. Например, подбрасываем монету – это испытание. Результатом этого испытания могут быть два события: A_1 – выпал «герб», A_2 – выпала «решка». Конечно, монета может стать и на ребро, но это событие, если и появляется, то настолько редко, что его можно считать практически невозможным событием.

Проведем испытание: на k делянках одинаковой площади с близкими почвенными и климатическими характеристиками посеян один и тот же сорт некоторой культуры. Результатом этого испытания будет совокупность событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$, представляющих собой урожайность с каждой делянки. Причем значения $A_1, A_2, \ldots, A_k$ будут различными.

Рассмотрим еще пример. Испытание: на откорм поставлено k бычков. Результат испытания – совокупность событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – привес каждого из бычков за определенный период.

Подобных примеров можно привести сколь угодно много. Что является общим в этих примерах? Подбрасываний монеты в одних и тех же условиях может быть много. Количество засеваемых делянок, количество поставленных на откорм бычков может быть достаточно большим. Значит, эти испытания мы можем проводить в массовом масштабе. О результатах же испытаний мы можем только строить предположения, но сказать заранее, какими они будут точно в каждом конкретном случае, не можем. Как бы мы ни старались учесть все условия проводимого испытания, всегда будут оставаться факторы, которые мы не в состоянии учесть, но которые оказывают влияние на результат испытания.

Рассматриваемые события можно разделить на *достоверные, невозможные и случайные*.

Событие, которое в данном испытании обязательно происходит, называется *достоверным событием.*

Событие, которое в данном испытании не может произойти, называется *невозможным событием.*

Событие, которое в данном испытании может произойти, может и не произойти, называется *случайным событием.*

Например, в испытании с монетой событие A – монета испарится – невозможное, событие B – монета упадет на землю – достоверное, событие A_1 – выпадет «герб» и A_2 – выпадет «решка» – случайные.

Теория вероятностей как наука изучает закономерности появления массовых случайных явлений (событий). Практика показывает, что наблюдая в совокупности массы однородных случайных явлений, мы можем обнаружить вполне определенные закономерности в их наступлении. Выявление и глубокое изучение этих закономерностей проводится методами теории вероятностей и математической статистики.

Рассмотрим виды случайных событий: *несовместные, равновозможные и единственно возможные события.*

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из событий не является более возможным, чем другие.

События называются единственно возможными, если в результате испытания хотя бы одного из них есть достоверное событие.

Совокупность единственно возможных и несовместных событий испытания образуют полную группу событий.

Рассмотрим пример. Некто купил один билет спортлото и отметил 6 номеров из 49 – это испытание. Результатом его могут быть события: A_0 – угадано 0 номеров, A_1 – угадан 1 номер и т. д., A_6 – угадано 6 номеров. Какое из этих событий произойдет в реальности, будет известно только после того, как будет опубликована таблица выигравших номеров. Однако жизненный опыт подсказывает, что скорее всего это будет событие A_0 или A_1. Появление же события A_6 будет рассматриваться как чудо. Это значит, что в отдельных случаях мы умеем оценивать до некоторой степени возможность появления (вероятность) того или другого случайного события.

В этом примере четко усматриваются следующие свойства случайных событий: 1) события A_0, A_1, …, A_6 являются единственно возможными, т. е. в результате проводимого испытания не может появиться никакое событие, отличное от перечисленных; 2) результатом испытания является одно и только одно из событий A_0, A_1, …, A_6, т. е. эти события **несовместные**. Следовательно, события A_0, A_1, …, A_6 образуют полную группу событий.

11.2. Формулы комбинаторики

Часто при решении задач по теории вероятностей бывает удобно пользоваться понятиями *перестановки, размещения, сочетания*.

Перестановками из n элементов называются всевозможные упорядоченные множества, содержащие все данные n элементов.

Например, перестановкам из трех элементов a, b, c будут следующие множества: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$, $\{b, c, a\}$, $\{b, a, c\}$.

Ясно, что перестановки отличаются друг от друга только порядком следования в них элементов. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают P_n. Легко показать, что

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ (! – факториал).}$$

Размещениями из n элементов по m элементов (m < n) называются всевозможные упорядоченные множества по m элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся друг от друга либо хотя бы одним элементом, либо порядком следования элементов в этих множествах.

Например, размещениями из трех элементов a, b, c по два элемента будут следующие множества: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$.

Число всех размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)).$$

Очевидно, что при $m = n$ размещения совпадают с перестановками $A_n^m = P_n$.

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются всевозможные множества по m элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Сочетаниями из трех элементов a, b, c по два элемента будут множества: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m.

Очевидно, что

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}.$$

Иногда удобно пользоваться следующими свойствами сочетаний:

1) $C_n^n=C_n^0=1$, 2) $C_n^m=C_n^{n-m}$, 3) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$.

Разницу между перестановками, размещениями и сочетаниями рассмотрим на следующих примерах.

1. Пять студентов приобрели 5 билетов в театр. Сколькими способами студенты могут разместиться на приобретенных местах?

Очевидно, число способов размещения студентов в театре равно числу перестановок из 5 элементов: $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из 5 различных цифр, если каждая цифра входит в число по одному разу?

Число трехзначных чисел из 5 цифр равно числу размещений из 5 элементов по три: $A_5^3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=5\cdot4\cdot3=60.$

3. Пять студентов приобрели три билета в театр. Сколькими способами можно выбрать делегацию студентов в театр?

Число всевозможных способов выбора делегации в театр из пяти человек на три места равно числу сочетаний из пяти элементов по три:

$$C_5^3=\frac{A_5^3}{P_3}=\frac{60}{3!}=10.$$

11.3. Вероятность события и ее свойства. Статистическая вероятность случайного события

События, которые являются несовместными и единственно возможными, называются «*элементарными исходами*» в рассматриваемом испытании.

Вероятностью события А называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих появлению события А, к общему числу всевозможных элементарных исходов испытания:

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

где k – число исходов, благоприятствующих появлению события A;

n – число всевозможных элементарных исходов испытания, в результате которых событие A наступит или не наступит.

Это определение называется классическим определением вероятности.

Из определения вероятности следует, что:

1) вероятность достоверного события равна 1;

2) вероятность невозможного события равна 0;

3) вероятность случайного события находится в интервале (0; 1).

Пример 1. Пусть на машинном дворе стоят 17 грузовых машин, семь из которых имеют грузоподъемность 1,5 т, шесть – 3 т и четыре – 5 т. За некоторым грузом отправляются две наудачу взятые машины. Какова вероятность того, что отправленные машины заберут весь груз, если его 6,5 т?

Решение. Введем событие A – отправленные машины заберут весь груз и найдем число всевозможных исходов испытания n и число исходов k, благоприятствующих событию A. Очевидно, число способов, которыми можно отправить две машины из имеющихся 17, равно C_{17}^2, значит $n = C_{17}^2 = 136$.

Но не каждая пара может забрать 6,5 т груза. Груз будет весь взят, если будут отправлены: или одна полуторатонная и одна пятитонная машины (таких способов $7 \cdot 4 = 28$); или одна трехтонная и одна пятитонная машины (таких способов $6 \cdot 4 = 24$); или две пятитонные машины (таких способов $C^2 = 6$). Итак, $k = 28 + 24 + 6 = 58$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{58}{136} = \dfrac{29}{68}$.

Проведем серию из n одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, может не появиться, и допустим, что событие A появилось в k испытаниях из проведенных n.

Частотой или статистической вероятностью p^* случайного события A называется отношение числа испытаний, в которых случайное событие A появилось, к общему числу проведенных испытаний, т. е.

$$P^* = \frac{k}{n}.$$

Экспериментально установлено, что с ростом числа испытаний, проводимых в одинаковых условиях, частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа p, которое естественно принять за объективную меру возможности появления этого события, т. е. за его вероятность.

Вероятность случайного события A обозначает $P(A)$. Таким образом, $P(A) = p = \lim\limits_{n\to\infty} p^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n}$.

11.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой A + B двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий, т. е. событие A + B наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A, B.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема справедлива и для нескольких попарно несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1,$$

где A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу событий.

Противоположными называют два единственно возможных, несовместных события, образующих полную группу. Эти события обозначают A и $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q, тогда $p + q = 1$.

Пример 2. В куче картофеля 20 % клубней, пораженных болезнью. Найти вероятность того, что клубень, взятый случайным образом из этой кучи, не поражен болезнью.

Решение. Введем элементарные события. Событие A – взятый клубень поражен болезнью, тогда противоположное событие $\overline{A}$ – клубень не поражен болезнью.

Имеем $P(A) = p = 0,2.$ Тогда найдем $P(\overline{A}) = q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8.$

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Два события называют *независимыми,* если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло другое или нет.

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Формула совмещения n независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n) .$$

Пример 3. В поле работают 3 комбайна. Вероятность того, что в течение смены первый комбайн не потребует ремонта, равна 0,9, второй – 0,6, третий – 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены не потребует ремонта: 1) два комбайна; 2) хотя бы один комбайн.

Решение. Введем события: A_i – в течение смены i-й комбайн не потребует ремонта, $\overline{A}_i$ – в течение смены i-й комбайн потребует ремонта, где $i = \overline{1,3}$.

Тогда $P(A_1) = 0,9;$ $P(A_2) = 0,6;$ $P(A_3) = 0,7$; $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,9 = 0,1;$ $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,6 = 0,4;$ $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,7 = 0,3$.

1. Обозначим событие B – в течение смены два комбайна не потребуют ремонта. Тогда событие B можно представить в виде

$$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 .$$

Написанные слагаемые представляют собой несовместные события, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем: $P(B) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3) + PA_1 \overline{A}_2 A_3) + P(\overline{A}_1 A_2 A_3).$

Поскольку события $A_1, A_2, A_3,$ $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ независимые, то применяя теорему умножения вероятностей независимых событий, имеем:

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,456 .$$

2. Обозначим событие C – в течение смены хотя бы один комбайн не потребует ремонта.

Если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых в совокупности событий A_1, A_2, …, A_n равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$

$$P(C) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Следовательно,

$$P(C) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) 1 - 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,988.$$

Пусть событие A и B зависимые. Это значит, что вероятность одного из событий зависит от появления или непоявления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ *называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A произошло.*

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Пример 4. Многолетними наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Определить вероятность того, что первые 3 дня не будут дождливыми.

Решение. Обозначим события: A_1 – 1 сентября не будет дождливым днем; A_2 – 2 сентября не будет дождливым днем; A_3 – 3 сентября не будет дождливым днем; B – первые 3 дня не будут дождливыми. Тогда

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

События A_1, A_2, A_3 являются зависимыми, так как проходит один день и изменяется общее количество недождливых дней.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = \frac{57}{203} \approx 0,28.$$

Если появление события A не исключает появления события B, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

11.5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Формула полной вероятности. Пусть H_1, H_2, …, H_n – совокупность единственно возможных и попарно несовместных событий некоторого испытания, т. е. образуют полную группу событий, а случайное событие A наступает только с одним из этих событий и, следовательно, представимо в виде $A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$. Тогда вероятность события A определяется по формуле

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + \ldots + H_nA) =$$

$$= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_1}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События H_1, H_2, …, H_n называются гипотезами.

Формула Байеса. Если известно, что в результате испытания наступило некоторое событие A, то вероятность того, что событие произошло с гипотезой H_i , определяется по формулам Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Здесь $P(A)$ определяется по вышенаписанной формуле.

Пример 5. На откорм поставлено 100 бычков, из которых 30 – породы a, 25 – породы b и 45 – породы c. Вероятность того, что бычок породы a даст суточный привес более 500 г, равна 0,7, для пород b и c она равна 0,6 и 0,5 соответственно. Для контрольного взвешивания наудачу взят один бычок. Какова вероятность того, что его привес будет более 500 г?

Решение. Введем события: H_1 – взят бычок породы a; H_2 – взят бычок породы b; H_3 – взят бычок породы c.

События H_1, H_2, H_3 – попарно несовместные, так как взят только один бычок, и единственно возможные, так как пород, отличных от a, b, c, во взятой совокупности бычков нет. Интересующее нас событие – привес взятого бычка более 500 г – обозначим через А. Тогда

$$A = H_1A + H_2A + H_3A,$$

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A),$$

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0,30,\ \ P(H_2) = \frac{25}{100} = 0,25,\ \ P(H_3)\frac{45}{100} = 0,45\,.$$

Вероятности $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), P_{H_3}(A)$ даны в условии задачи. Остается вычислить искомую вероятность:

$$P(A) = 0,30 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,6 + 0,45 \cdot 0,5 = 0,585.$$

Пример 6. На откорме стоят те же бычки. Для контроля взвешен один наудачу взятый бычок. Какова вероятность, что этот бычок: породы *a*; породы *b*; породы *c*, если его привес более 500 г?

Решение. Здесь нужно найти $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$, $P_A(H_3)$. Воспользуемся формулами Байеса, причем $P(A)$ мы нашли выше.

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,7}{0,585} = 0,36,$$

Аналогично $P_A(H_2) = \dfrac{0,25 \cdot 0,6}{0,585} = 0,26,\ P_A(H_3) = \dfrac{0,45 \cdot 0,5}{0,585} = 0,38.$

11.6. Повторные независимые испытания

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления одного и того же события A постоянна и равна p. Такие испытания *называются последовательностью независимых испытаний*.

Формула Бернулли. *Вероятность* $P_n(m)$ *того, что из* n *испытаний событие A наступит* m *раз, вычисляется по формуле Бернулли:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m;

p – вероятность появления одного и того же события A в каждом из n испытаний;

q – вероятность непоявления события A, $q = 1 - p$;

m – число появления события A, $0 \le m \le n$;

$P_n(m)$ – вероятность того, что из n испытаний событие A наступит m раз.

Пример 7. Предположим, что в случае распространения некоторой эпидемии корова породы *a* заболеет с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что из десяти коров этой породы заболеют не более четырех, если указанная эпидемия распространяется.

Решение. Для решения задачи представим интересующее нас событие A (заболеют не более четырех коров) в виде суммы несовместных событий A_0, A_1, A_2, A_3, A_4(A_i – заболеет ровно i коров из десяти, $i = \overline{0,4}$. Тогда $A = A_0 + A_1 + A_3 + A_4$, а вероятность этого события можно найти по формуле

$$P(A) = P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_0 + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Вероятности $P(A_i) = P_{10}(i)$ определяются по формуле Бернулли. Окончательно записываем

$$P(A) = C_{10}^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{10} + C_{10}^1 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 + C_{10}^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 +$$
$$+ C_{10}^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 + C_{10}^4 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 = 0,850\ .$$

Вычисления рекомендуем проводить с использованием микрокалькулятора.

Если число испытаний n велико, использование формулы Бернулли затруднительно. В этих случаях ее заменяют асимптотическими приближениями, рассматриваемыми ниже.

Формула Пуассона. Если число испытаний n велико (n > 100), а вероятность p появления случайного события A в единичном испытании мала (p < 0,1), то вероятность того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, определяется по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$ называют средним числом появления события в n независимых испытаниях.

Формулы Муавра – Лапласа. Если число независимых испытаний велико, а вероятность p появления случайного события A в единичном испытании близка к 0,5, то для определения вероятности появления события A m раз в n испытаниях целесообразно пользоваться локальной формулой Муавра – Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений ее аргумента x даны в приложениях к любому учебному пособию (в данном методическом пособии см. прил. 1). При отрицательных значениях x используется та же таблица, так как функция $\varphi(x)$ – четная $\left(\varphi(-x)=\varphi(x)\right)$.

Если нужно вычислить вероятность появления события A от k_1 до k_2 раз, следует использовать интегральную формулу Муавра – Лапласа:

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\Phi(x)$ также следует искать в приложениях к учебным пособиям (здесь это прил. 2), учитывая нечетность функции $\left(\Phi(-x)=-\Phi(x)\right)$.

Пример 8. Некоторое хозяйство на зимний период поставило 1000 овец. Известно, что падеж овец за зимний период составляет 2 %. Найти вероятность того, что за зимний период погибнет: а) ровно 15 овец; б) от 10 до 30 овец.

Решение.

а) воспользуемся формулой Пуассона при $\lambda=1000\cdot 0,02=20$:

$$P_{1000}(15)\approx\frac{20^{15}}{15!}\cdot e^{-20}=0,052.$$

Можно было бы воспользоваться формулой Муавра – Лапласа:

$$P_{1000}(15)\approx\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\cdot\varphi\left(\frac{15-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,098}}\right)=0,048.$$

Разность полученных результатов объясняется тем, что использовались формулы приближенного вычисления вероятностей;

б) здесь будем использовать интегральную формулу Муавра – Лапласа:

$$P_{1000}(10\le m\le 30)\approx\Phi\left(\frac{30-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)-\Phi\left(\frac{10-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)=$$

$$=\Phi(2,26)-\Phi(-2,26)=2\Phi(2,26)=0,9762.$$

11.7. Случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает только одно из возможных значений, заранее неизвестное и зависящее от ряда причин.

Случайные величины бывают *дискретными и непрерывными*. *Дискретной случайной величиной (ДСВ)* называется случайная величина, которая может принимать конечное число изолированных друг от друга значений, т. е. если возможные значения этой величины можно пересчитать. *Непрерывной случайной величиной (НСВ)* называется случайная величина, все возможные значения которой сплошь заполняют некоторый числовой промежуток.

Рассмотрим примеры случайных величин:

1) монету бросают один раз, при этом герб может выпасть или 0 раз, или 1 раз, т. е. случайная величина (частота появления герба) может принять в результате испытания только одно из этих двух возможных значений, следовательно, частота появления герба есть случайная величина;

2) расстояние полета снаряда есть случайная величина. Эта случайная величина может принять любое, но только одно значение на некотором промежутке, который является множеством возможных значений.

11.8. Функция распределения и ее свойства

Рассмотрим событие, состоящее в том, что случайная величина X примет какое-нибудь значение, меньшее произвольного числа x, т. е. $X < x$. Это событие имеет определенную вероятность.

При изменении x меняется вероятность $P(X < x)$, которую можно рассматривать как функцию переменной величины x. $F(x) = P(X < x)$. Случайную величину можно считать полностью охарактеризованной, если для каждого x $(-\infty < x < +\infty)$ известно значение $F(x)$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x), выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение, меньшее x.

Через функцию $F(x)$ легко выражаются следующие вероятности:

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$;

$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

Функция распределения обладает свойствами:

1. $F(x) \in [0; 1]$;
2. Если $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in R$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) = 0$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X < x) = 1$;
5. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Свойство 5 говорит о том, что функция распределения $F(x)$ непрерывна слева в любой точке $x \in R$.

Пример 9. Анализируется группа из десяти коров. Известно, что в этой группе есть четыре рекордсменки. Из группы случайно отбирают пять коров. Записать закон распределения случайной величины X – числа рекордсменок среди отобранных коров. Получить ее функцию распределения $F(x)$ и построить ее. Вычислить вероятность события, что среди отобранных будет не менее 3 рекордсменок.

Решение. Число рекордсменок, попавших в группу отбора, может быть 0, 1, 2, 3, 4. Составим закон распределения случайной величины X. Для этого каждому из ее значений поставим в соответствие вероятность их появления. Заметим, что рассматриваемые события попарно несовместные, поэтому найдем вероятности, руководствуясь классическим определением вероятности:

$$P(X = 0) = C_6^5 : C_{10}^5 = \frac{6!}{5!1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{1}{42};$$

$$P(X = 1) = (C_4^1 \cdot C_6^4) : C_{10}^5 = \frac{5}{21} = \frac{10}{42};$$

$$P(X = 2) = (C_4^2 \cdot C_6^3) : C_{10}^5 = \frac{20}{42};$$

$$P(X = 3) = (C_4^3 \cdot C_6^2) : C_{10}^5 = \frac{10}{42};$$

$$P(X = 4) = (C_4^{24} \cdot C_6^1) : C_{10}^5 = \frac{1}{42}.$$

Тогда закон распределения рассматриваемой случайной величины может быть представлен в виде следующей таблицы:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{1}{42}$

Найдем значения функции распределения $F(x)$ при различных значениях ее аргумента x. Ясно, что случайная величина X принять отрицательные значения не может. Это значит, что:

для $x \le 0$ событие $(X < x) = \varnothing$ (невозможное);

для $0 < x \le 1$ событие $(X < x) = (X = 0)$;

для $1 < x \le 2$ событие $(X < x) = (X = 0) + (X = 1)$;

для $2 < x \le 3$, $(X < x) = (X = 0) + (X = 1) + (X = 2)$;

для $3 < x \le 4$, $(X < x) = (X = 0) + (X = 1) + (X = 2) + (X = 3)$;

для $x > 4$, $(X < x) = (X = 0) + (X = 1) + (X = 2) + (X = 3) + (X = 4) = \Omega$ (достоверное событие).

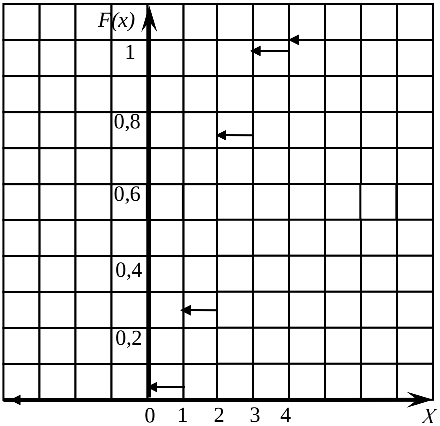
Поэтому для получения функции распределения случайной величины X составим таблицу накопленных вероятностей:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{42}$	$\frac{11}{42}$	$\frac{31}{42}$	$\frac{41}{42}$	1

Тогда функция распределения случайной величины X будет иметь вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \frac{1}{42}, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ \frac{11}{42}, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ \frac{31}{42}, & \text{если } 1 < x \le 3; \\ \frac{41}{42}, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Построим функцию распределения случайной величины.



Вероятность того, что среди отобранных будет не менее трех рекордсменок, найдем, воспользовавшись равенством

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Тогда $P(3 \le X \le \infty) = F(\infty) - F(3) = 1 - \dfrac{31}{42} = \dfrac{11}{42}$.

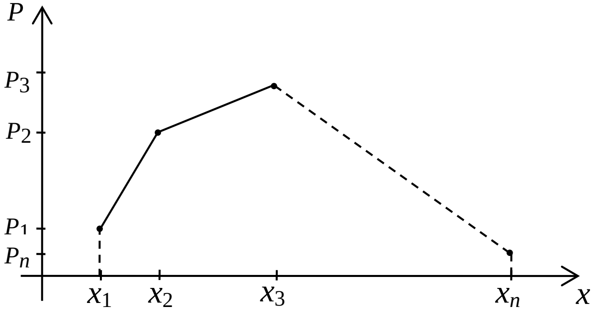
11.9. Закон распределения дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина характеризуется значениями, которые она может принимать, и вероятностями, с которыми эти значения принимаются. Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями называется *законом распределения дискретной случайной величины.*

Если известны все возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X и вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ появления этих значений, то считают, что закон распределения ДСВ X известен и он может быть записан в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	$\sum p_i = 1$
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2		p_i		p_n	

Закон распределения ДСВ можно изобразить графически, если в прямоугольной системе координат изобразить точки $(x_1;\ p_1)$, $(x_2;\ p_2)$, ..., $(x_n;\ p_n)$ и соединить их отрезками прямых линий. Полученная фигура называется многоугольником распределения.



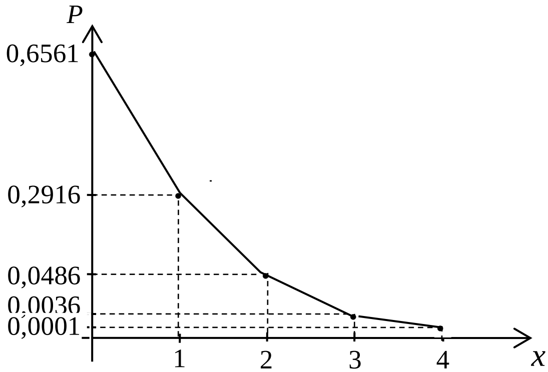
Пример 10. В зерне, предназначенном для очистки, содержится 10 % сорняков. Наугад отобраны 4 зерна. Обозначим случайную величину X = {число сорняков среди четырех отобранных}. Построить закон распределения ДСВ X и многоугольник распределения.

Решение. По условию примера $n = 4,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9$. Тогда:

$$p_1 = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561;$$
$$p_2 = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916;$$
$$p_3 = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486;$$
$$p_4 = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036;$$
$$p_5 = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001.$$

Запишем закон распределения ДСВ X в виде таблицы и построим многоугольник распределения:

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001



11.10. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Наиболее важные свойства дискретной случайной величины описываются ее характеристиками. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание* случайной величины.

Пусть известен закон распределения ДСВ X:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	$\sum p_i = 1$
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2		p_i		p_n	

Математическим ожиданием ДСВ X называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математическое ожидание случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений. Поэтому в практических задачах часто за математическое ожидание принимают среднее значение этой случайной величины.

Пример 11. Стрелок выбивает 4, 8, 9 и 10 очков с вероятностями 0,1; 0,45; 0,3 и 0,15. Найти математическое ожидание числа очков при одном выстреле.

Решение. Обозначим случайную величину X = {число выбитых очков}. Тогда $M(X) = 4 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}45 + 9 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}15 = 8{,}2$. Таким образом, ожидаемое среднее значение числа выбитых очков при одном выстреле равно 8,2, а при 10 выстрелах – 82.

Математическое ожидание имеет следующие основные свойства:

1) $M(C) = C$;

2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

3) $a \le M(X) \le b$, где $a = \min(x_i)$, $b = \max(x_i)$;

4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

5) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где X и Y – независимые случайные величины.

Разность $X - M(X)$ называется ***отклонением*** случайной величины X от ее математического ожидания. Эта разность является случайной величиной и ее математическое ожидание равно нулю, т. е. $M(X - M(X)) = 0$.

Для характеристики случайной величины, кроме математического ожидания, используется и дисперсия, которая дает возможность оценить рассеяние (разброс) значений случайной величины около ее математического ожидания. При сравнении двух однородных случайных величин с равными математическими ожиданиями «лучшей» считается та величина, которая имеет меньший разброс, т. е. меньшую дисперсию.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M\left((X - M(X))^2\right)$.

В практических задачах для вычисления дисперсии используют равносильную формулу $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$.

Дисперсия имеет следующие основные свойства:

1) $D(C) = 0$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

3) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$, где X и Y – независимые случайные величины.

Дисперсия характеризует разброс случайной величины около ее математического ожидания и, как видно из формулы, измеряется в квадратных единицах по сравнению с единицами самой случайной величины. Поэтому для согласования единиц измерения разброса случайной величины с единицами измерения самой величины вводится *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример 12. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ *X*, заданной законом распределения:

X	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсия ДСВ *X* вычисляется по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2.$$

Найдем математическое ожидание данной случайной величины: $M(X)=-5\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=-0,3$.

Запишем закон распределения для случайной величины X^2:

X^2	25	4	9	16
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Тогда $M(X^2)=25\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=15,3$,

$D(X)=15,3-(-0,3)^2=15,21$, $\sigma(X)=\sqrt{15,21}\approx 3,9$.

11.11. Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывную случайную величину можно задать только аналитическим способом. Функция распределения $F(x)$ этой случайной величины является непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией. Кроме интегральной функции распределения $F(x)$ непрерывную случайную величину можно задать также дифференциальной функцией распределения $f(x)$.

Функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины называется производная функции распределения: $f(x)=F'(x)$. Из определения следует, что функция распределения $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Свойства плотности вероятностей $f(x)$:

1. Плотность вероятностей $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \geq 0$.

2. Вероятность попадания в интервал для непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

3. Несобственный интеграл от функции плотности равен 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = 1.$$

Пример 13. Непрерывная случайная величина задана функцией плотности вероятностей $f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ C\left(2x+1\right), & \text{если} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \text{если} \quad x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти значение постоянной C;

2) найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Плотность вероятностей должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = 1.$$

Поскольку вне отрезка $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$ плотность нулевая, то получаем:

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} C\left(2x+1\right) \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow C \cdot \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \left(2x+1\right) \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \cdot \left(x^2 + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow C \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow C \cdot \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{4}.$$

Таким образом, функция плотности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{9}{4}(2x+1), & \text{если } 0\le x\le \dfrac{1}{3},\\ 0, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Найдем функцию распределения. При $x<0$ плотность вероятностей нулевая и также $F(x)=0.$

При $0\le x\le \dfrac{1}{3}$ функция $f(x)=\dfrac{4}{9}(2x+1),$ поэтому

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{9}{4}(2t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{9}{4}\left(t^2+t\right)\Big|_0^x=\frac{9}{4}\left(x^2+x\right).$$

При $x>\dfrac{1}{3}$ функция $f(x)=0,$ поэтому

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{9}{4}(2t+1)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{3}}^{x}0\mathrm{d}t=\frac{9}{4}\left(t^2+t\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9}=1.$$

Итак, функция распределения равна

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{9}{4}\left(x^2+x\right), & \text{если } 0\le x\le \dfrac{1}{3},\\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

11.12. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если вне отрезка $[a;\,b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то $M(X)=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$ Если вне отрезка $[a;\,b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то

$$D(X)=\int\limits_a^b\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Получим рабочую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X)=\int\limits_a^b\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(x^2-2xM(X)+M^2(X)\right)f(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x-2M(x)\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x+M^2(x)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-M^2(X)\,.$$

Пример 14. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & \text{если } 1\le x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

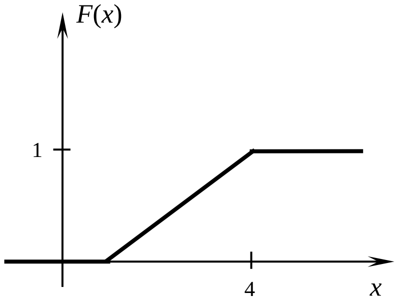
3) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины;

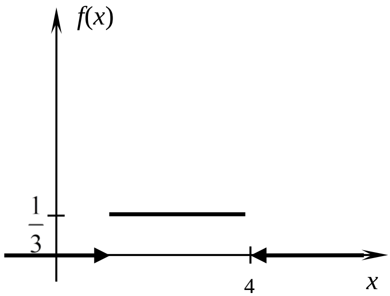
4) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2).

Решение. Плотность распределения вероятностей

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1,\\ \left(\dfrac{1}{3}(x-1)\right)', & \text{если } 1\le x\le 4,\\ 0, & \text{если } x>4\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{если } x<1\\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } 1\le x\le 4,\\ 0, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание равно

$$M(X)=\int_1^4 xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 \frac{1}{3}x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4=\frac{16}{6}-\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=2,5.$$

Дисперсия равна

$$D(X)=\int_1^4 x^2 f(x)\mathrm{d}x-M^2(x)=\int_1^4 \frac{1}{3}x^2\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^4-\frac{25}{4}=$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{1}{9}-\frac{25}{4}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,75}\approx 0,87.$$

Вероятность попадания в заданный интервал вычислим по формуле

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$

Получим $P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{3}\cdot(2-1)-\frac{1}{3}\cdot(1-1)=\frac{1}{3}.$

11.13. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x\in(-\infty,+\infty).$$

Нормальный закон имеет два параметра a, σ. Получим вероятностный смысл этих параметров, для этого найдем математическое ожидание и дисперсию нормальной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

Введем новую переменную

$$t=\frac{x-a}{\sigma}\Rightarrow x=\sigma t+a,\ \mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t.$$

Получим:

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+a\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

Первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку относительно нуля. Второй интеграл есть интеграл Пуассона: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1.$ Поэтому $M(X)=a.$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

Введем новую переменную $t=\frac{x-a}{\sigma}\Rightarrow x=\sigma t+a,\ \mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t.$

Получим: $D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$

Интегрируя по частям при $u=t,\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}v=te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\ v=-e^{-\frac{t^2}{2}}$, получим:

$$D(X)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\, te^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0+\sigma^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sigma^2.$$

Итак, параметры нормального закона случайной величины равны ее числовым характеристикам: $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$.

График функции плотности вероятностей $f(x)$ называется *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса.* Для ее построения запишем основные свойства функции $f(x)$:

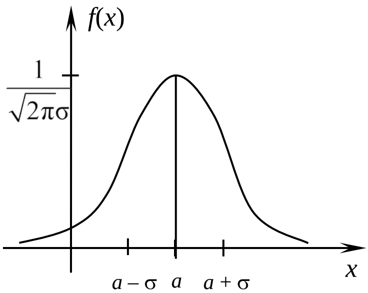
1. Функция $f(x)>0$ для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. Прямая $x = a$ является осью симметрии графика.

3. Точка $x = a$ является точкой максимума и $f_{\max}(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. При $x \in (-\infty, a)$ нормальная кривая возрастает, а при $x \in (a, +\infty)$ убывает.

4. Точки $x = a - \sigma$ и $x = a + \sigma$ являются точками перегиба графика, значение функции в этих точках равно $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}\sigma}$.

5. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика $f(x)$. Нормальная кривая изображена.



Отметим влияние параметров a, σ на нормальную кривую. Параметр a не влияет на форму нормальной кривой, его изменения приводят только к сдвигу кривой вдоль оси Ox. Параметр σ влияет на форму нормальной кривой, с увеличением σ максимальная ордината графика уменьшается и кривая становится более пологой, с уменьшением σ максимальная ордината графика увеличивается и кривая вытягивается вдоль оси Oy.

Найдем вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + a$, $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}t$, с новыми пределами интегрирования от $\dfrac{\alpha - a}{\sigma}$ до $\dfrac{\beta - a}{\sigma}$.

Получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t,$ получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}\right).$$

Вероятность заданного отклонения δ нормальной случайной величины от ее математического ожидания a вычисляется по формуле

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При отклонении $\delta = 3\sigma$ получим

$$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973 = 99,73\ \%.$$

Значит, вероятность отклонения значений нормальной случайной величины от ее математического ожидания более чем на 3σ равна 100 – 99,73 = 0,27 %. По принципу невозможности маловероятных событий это невозможное событие. Таким образом, практически все значения нормальной случайной величины отклоняются от ее математического ожидания не более чем на 3σ, т. е. попадают в интервал $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. В этом заключается правило трех «σ».

Пример 15. Станок изготавливает детали, размер которых распределен нормально. Математическое ожидание размера детали равно 240 мм, среднее квадратическое отклонение – 0,8 мм. Годными считаются детали размером от 238,5 до 242 мм. Вычислить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность станка снизится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.

Решение. Запишем кратко условие задачи: $a = 240;$ $\sigma_1 = 0,8;$ $\sigma_2 = 1;$ $\alpha = 238,5;$ $\beta = 242.$

1. Вычислим вероятность попадания в заданный интервал (238,5; 242) по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$

$$P(238,5 < X < 242) = \Phi\left(\frac{242-240}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{238,5-240}{0,8}\right) =$$

$$= \Phi(2,5) + \Phi(1,88) = 0,4938 + 0,4699 = 0,9637 = 96,37\ \%.$$

Итак, процент годных деталей при $\sigma_1 = 0,8$ составляет 96,37 %.

2. Вычислим вероятность попадания в тот же интервал при $\sigma_2 = 1$:

$$P(238,5 < X < 242) = \Phi\left(\frac{242-240}{1}\right) - \Phi\left(\frac{238,5-240}{1}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1,5) = 0,4772 + 0,4332 = 0,9104 = 91,04\ \%.$$

Таким образом, при снижении точности станка или при увеличении σ процент годных деталей уменьшится. Процент брака при этом составит: $100 - 91,04 = 8,96$ %.

Пример 16. Расход семян на 1 га является случайной величиной, распределенной нормально. Норма высева на 1 га составляет 150 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода семян равно 10 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; 2) количество семян, обеспечивающих посев 100 га с вероятностью 0,99.

Решение. Вычислим параметры нормальной случайной величины – расхода семян на 100 га, которая равна сумме 100 независимых случайных величин X_i – расхода семян на 1 га с параметрами $a_i = 150$ кг и $\sigma_i = 10$ кг, $i = \overline{1,100}$. Используем свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 150 \cdot 100 = 15000 \text{ кг} = 15 \text{ т},$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2 = 100 \cdot 100 = 10000 \Rightarrow \sigma = 100 \text{ кг} = 0,1 \text{ т}.$$

1. Запишем кратко условие задачи: a = 15 т; σ = 0,1 т; $\alpha = 0$ т; $\beta = 15,1$ т.

Вычислим вероятность попадания в заданный интервал по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(0 < X < 15,1) = \Phi\left(\frac{15,1-15}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{0-15}{0,1}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(150) = 0,3413 + 0,5 = 0,8413.$$

Итак, вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т, равна 84,13 %.

2. Запишем кратко условие задачи: $a = 15$ т; $\sigma = 0{,}1$ т; $P(0 < X < \beta) = 0{,}99$.

Решение. Запишем вероятность попадания в заданный интервал

$$P(0 < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 15}{0{,}1}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + \Phi(150) =$$

$= \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5.$ Из равенства $\Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5 = 0{,}99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) = 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49 \Rightarrow \frac{\beta - 15}{0{,}1} = 2{,}32 \Rightarrow \beta = 15{,}23 \text{ т.}$$

Итак, количество семян, обеспечивающих посев 100 га, в 99 % случаях, не превысит 15,23 т.

Задания для самостоятельной работы

1. Сколькими способами студент может выбрать в библиотеке 3 книги из 5 ему предложенных?

2. В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя?

3. В хоровом кружке занимаются 10 человек. Необходимо выбрать 3 солиста. Сколькими способами можно это сделать?

4. В урне находится 15 белых и 5 красных шаров. Наугад извлекается 1 шар. Найти вероятность того, что он будет: 1) красным; 2) белым.

5. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записаны на отдельных карточках. Карточки перемешивают и наугад вынимают 1 карточку. Найти вероятность того, что на этой карточке написано: 1) четное число; 2) двузначное число.

6. Из слова ФАКТОРИАЛ случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбрана буква А?

7. Подбрасывается 2 игральных кубика. Найти вероятность того, что на верхних гранях кубиков выпало одинаковое количество очков.

8. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: 1) 2 раза; 2) 1 раз?

9. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет 3 %, для станка № 2 –

4 %. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали стандартные; 2) 1 деталь стандартная.

10. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условное место, соответственно равны 0,8; 0,4 и 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться хотя бы двум друзьям.

11. На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70 % микросхем поступает от первого поставщика, и 30 % – от второго. Брак среди микросхем первого поставщика составляет 2 %, второго – 3 %. Какова вероятность того, что взятая наудачу микросхема окажется без брака?

12. На склад поступает продукция двух фабрик, причем доля продукции первой фабрики составляет 60 %, второй –40 %. Средний процент нестандартных изделий в продукции первой фабрики равен 2,5 %, второй – 3 %. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось стандартным.

13. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,6. По мишени производится 5 независимых выстрелов. Найти вероятность того, что попаданий будет: 1) ровно 4; 2) не более 2.

14. Всхожесть семян пшеницы составляет 75 %. Найти вероятность того, что из высаженных 300 зерен пшеницы взойдет от 200 до 230 зерен.

15. Проводится 50 раз опыт с подбрасыванием монеты. Найти вероятность выпадения герба равно в половине случаев.

16. При изготовлении подшипников нестандартные детали составляют 0,5 %. Найти вероятность того, что в партии из 1 000 деталей нестандартных подшипников окажется не более 2.

17. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

X		–3	–1	2	4	7
P		0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Необходимо: 1) построить многоугольник распределения вероятностей; 2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) вычислить числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

18. Проводится 4 независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,7. Составить закон распре-

деления случайной величины – числа появления события A в этих испытаниях. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

19. Случайная величина задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x > 5, \end{cases} \qquad (2;\, 4).$$

Требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

3) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины;

4) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(x_1;\, x_2)$

20. Случайная величина задана функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -2, \\ 2c, & \text{если} \quad -2 \le x \le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти значение постоянной c;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

21. Глубина посева семян считается нормальной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 0,8 см. Средняя глубина посева семян составляет 5 см. Определить: 1) процент семян, посеянных на глубину более 7 см; 2) процент семян, посеянных на глубину менее 4 см.

22. При изготовлении изделия его вес подвержен случайным колебаниям и распределен по нормальному закону. Стандартный вес изделия равен 40 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,9 г. Найти: 1) вероятность того, что вес наудачу выбранного изделия находится в пределах от 38 до 41 г; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого изделия с вероятностью 0,98.

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е и з д а н и е

Крючков Евгений Николаевич
Курзенков Сергей Владимирович

МАТЕМАТИКА

Курс лекций

Редактор *С. Н. Кириленко*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 02.11.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 16,97. Уч.-изд. л. 15,22.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.