

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова, Т. В. Левкина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям*

*1-56 01 01 Землеустройство, 1-56 01 02 Земельный кадастр,
1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий,
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство,
1-74 06 04 Техническое обеспечение мелиоративных
и водохозяйственных работ*

Горки
БГСХА
2019

УДК 51(075)

ББК 22.1я73

К93

Одобрено методическими комиссиями землеустроительного факультета 21.02.2018 (протокол № 7), факультета механизации сельского хозяйства 21.02.2018 (протокол № 6), мелиоративно-строительного факультета 26.02.2018 (протокол № 6) и Научно-методическим советом БГСХА 27.02.2018 (протокол № 6)

Авторы:

кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*;
старший преподаватель *Т. В. Левкина*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *М. П. Дымков*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*

Курзенков, С. В.

К93 Высшая математика. Интегральное исчисление функции одной переменной : учебно-методическое пособие / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова, Т. В. Левкина. – Горки : БГСХА, 2019. – 94 с.

ISBN 978-985-467-895-5.

Приведены краткий теоретический материал по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной», тестовые задания, варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-56 01 01 Землеустройство, 1-56 01 02 Земельный кадастр, 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство, 1-74 06 04 Техническое обеспечение мелиоративных и водохозяйственных работ.

УДК 51(075)

ББК 22.1я73

ISBN 978-985-467-895-5

© УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», 2019

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы выработать прочные навыки самостоятельной работы с книгой, формировать умение рационально организовать свой умственный труд. Самостоятельная работа студентов по математике способствует лучшему усвоению теоретического материала и методов решения практических задач.

Предлагаемое пособие содержит теоретический материал по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной», рекомендуемую литературу, задачи для аудиторного и самостоятельного решения.

Для того чтобы студенты могли оценить уровень своих знаний по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной», в данное издание включены: контрольный тест, типовый пример модульного задания, а также варианты индивидуального домашнего задания. После выполнения студентами персонального варианта индивидуального задания и проверки его преподавателем предусматривается защита задания в форме контрольной работы. При этом студент должен показать знание соответствующих теоретических вопросов раздела и приобретенные навыки при решении задач.

Данная разработка является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики и физики для студентов инженерных специальностей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник: в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Дрофа, 2004. – Т. 2. – 512 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учебник: в 2 т. / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – Т. 1. – 544 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебно-методическое пособие: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1996. – Т. 1. – 416 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 3 ч. / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$. Это означает, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций, отличающихся друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x) dx = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*. Переменная x называется *переменной интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x) dx$ – *подынтегральным выражением*.

Неопределенный интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций:

- Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

- Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$.

- Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.

- Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

• Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)dt = F(t) + C$. Такое свойство называется *инвариантностью формулы интегрирования*.

• Если известно, что $\int f(t)dt = F(t) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

1.2. Основная таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование функций

Правила интегрирования основных элементарных функций задаются основной таблицей неопределенных интегралов:

1.	$\int dx = x + C;$	2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C;$	4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C;$
5.	$\int e^x dx = e^x + C;$	6.	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C;$
7.	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C;$	8.	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C;$
9.	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C;$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C;$
11.	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$		

Интегралы данной таблицы называются *табличными*. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

Эти формулы и свойства позволяют производить непосредственное вычисление неопределенных интегралов. Таким образом, суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, чтобы данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределенного интеграла свести к одному из табличных интегралов. При

этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются *подведением под знак дифференциала*:

$$1) du = d(u + a), \quad 2) du = \frac{1}{a} d(au),$$

где a – некоторое не равное нулю число.

Пример. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x^6 dx$; б) $\int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$;

в) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx$; г) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$.

Решение: а) $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$;

$$\begin{aligned} \text{б) } \int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx &= 2 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + \\ &+ 5 \cdot x + C = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x + C; \\ \text{в) } \int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx &= \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx - \\ &- 4 \int \sin(x) dx + \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4 \cdot (-\cos(x)) + \operatorname{tg}(x) + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4 \cos(x) + \operatorname{tg}(x) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx - 2 \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \operatorname{arctg}(x) + C = \\ &= 3 \cdot \frac{4 \cdot x^{\frac{7}{4}}}{7} - 2 \cdot \frac{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{2} + \operatorname{arctg}(x) + C = \frac{12}{7} \sqrt[4]{x^7} - 3 \sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(x) + C. \end{aligned}$$

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью *метода замены переменной (подстановки)*. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если обозначить $x = s(t)$, $dx = s'(t)dt$ и сделать соответствующие преобразования в заданном подынтегральном выражении, полученный интеграл при удачном выборе функции $s(t)$ может оказаться более простым или даже табличным. Тогда справедлива формула замены в неопределенном интеграле:

$$\int f(x) dx = \int f(s(t))s'(t) dt.$$

Пример 1. Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x) dx$; б) $\int (3-x)^5 dx$; в) $\int \sqrt[5]{3x-4} dx$; г) $\int xe^{x^2} dx$;
д) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx$.

Решение: а) $\int \sin(3x) dx = | t = 3x, dt = 3dx, dx = \frac{dt}{3} | = \int \sin(t) \cdot \frac{dt}{3} =$
 $= \frac{1}{3} \int \sin(t) dt = \frac{1}{3} \cdot (-\cos(t)) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C;$

б) $\int (3-x)^5 dx = | t = 3-x, dt = -dx, dx = -dt | = \int t^5 (-dt) =$
 $= -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{(3-x)^6}{6} + C;$

в) $\int \sqrt[5]{3x-4} dx = | t = 3x-4, dt = 3dx, dx = \frac{dt}{3} | = \int \sqrt[5]{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{5}} dt =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{t^6} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{(3x-4)^6} + C;$

$$\begin{aligned} \text{г)} \int x e^{x^2} dx &= | t = x^2, \quad dt = 2x \, dx, \quad x \, dx = \frac{dt}{2} | = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \\ &= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 5} dx &= | t = x^3 - 3x + 5, \quad dt = (3x^2 - 3) dx = 3(x^2 - 1) dx, \\ (x^2 - 1) dx &= \frac{dt}{3} | = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| + C = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x + 5| + C . \end{aligned}$$

При вычислении неопределенных интегралов довольно-таки распространен случай, когда подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя. В этом случае такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной

величины знаменателя, т. е. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x \cdot \ln(x)}$.

$$\text{Решение.} \quad \int \frac{dx}{x \cdot \ln(x)} = \int \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) + C .$$

1.4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Формула интегрирования по частям следует из известной формулы нахождения дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = u \, dv + v \, du .$$

Проинтегрировав левую и правую часть приведенного выше равенства и выразив интеграл $\int u \, dv$, получим следующую формулу:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du .$$

Если в результате применения этой формулы окажется, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то ее применение считается оправданным. Обычно в подынтегральном выражении за функцию u принимают тот множитель, который после его дифференцирования становится более простым. Оставшуюся часть подынте-

грального выражения принимают за дифференциал dv некоторой функции v .

В ходе использования данного метода интегрирования удобно руководствоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin(x) dx$, $\int P(x)\cos(x) dx$ имеет смысл положить $u = P(x)$, а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

- в интегралах вида $\int P(x)\arcsin(x) dx$, $\int P(x)\arccos(x) dx$, $\int P(x)\arctg(x) dx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg}(x) dx$, $\int P(x)\ln(x) dx$ следует положить $dv = P(x) dx$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u ;

- в интегралах вида $\int e^{ax}\sin(bx) dx$, $\int e^{ax}\cos(bx) dx$ можно положить $u = e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за dv .

Пример. Найти интегралы:

а) $\int x \cos(x) dx$; б) $\int (2x+1)e^{3x} dx$; в) $\int \ln(x) dx$; г) $\int x^2 e^{5x} dx$.

Решение: а) $\int x \cos(x) dx = | u = x, du = dx, dv = \cos(x) dx,$

$$\int dv = \int \cos(x) dx, v = \sin(x) = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C;$$

б) $\int (2x+1)e^{3x} dx = | u = 2x+1, du = 2dx, dv = e^{3x} dx, \int dv = \int e^{3x} dx,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x} | = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 2dx = \frac{1}{3} \cdot (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3} \cdot (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} \left(2x + \frac{1}{3} \right) + C;$$

в) $\int \ln(x) dx = | u = \ln(x), du = \frac{1}{x} dx, dv = dx, \int dv = \int dx, v = x | =$

$$= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + C;$$

г) $\int x^2 e^{5x} dx = | u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx,$

$$v = \frac{1}{5}e^{5x} \mid = x^2 \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} \cdot 2x dx = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5} \int xe^{5x} dx \mid u = x,$$

$$\begin{aligned} du = dx, dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx, v = \frac{1}{5}e^{5x} \mid = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \\ - \frac{2}{5} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} dx \right) = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}e^{5x} \right) + C = \\ = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{25}xe^{5x} + \frac{2}{125}e^{5x} + C = \frac{1}{5}e^{5x} \left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25} \right) + C. \end{aligned}$$

1.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Функция вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной дробью*, если ее числитель и знаменатель являются многочленами. Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если же степень числителя больше либо равна степени знаменателя, то рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *неправильной*.

Из теории многочленов известно, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения многочленов, т. е. разложен на множители первой или второй степени. В соответствии с этим любую рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого

количества выражений следующих видов: $\frac{A}{(x-c)^m}, \frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^s},$

$A, B, C \in R, m, s \in N$, где x^2+px+q – трехчлен с действительными коэффициентами, который не имеет действительных корней.

Такие рациональные дроби будем называть *простейшими*. При интегрировании простейших рациональных дробей можно использовать преобразования дифференциала:

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C;$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C ;$$

$$3) \int \frac{Ax+B}{px^2+qx+r} dx = \frac{A}{2p} \int \frac{(2px+q) + \left(2p \frac{B}{A} - q\right)}{px^2+qx+r} dx =$$

$$= \frac{A}{2p} \int \frac{2px+q}{px^2+qx+r} dx + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2+qx+r} =$$

$$= \frac{A}{2p} \int \frac{d(px^2+qx+r)}{px^2+qx+r} + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2+qx+r} =$$

$$= \ln|px^2+qx+r| + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2+qx+r} =$$

$$= \ln|px^2+qx+r| + \frac{1}{p} \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}} =$$

$$= \ln|px^2+qx+r| + \frac{1}{p} \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4rp - q^2}{4p^2}} \ominus$$

Оставшийся интеграл имеет вид $k \int \frac{dx}{(x+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (\alpha = \frac{q}{2p},$

$\beta = \frac{4rp - q^2}{4p^2})$ и приводится к табличному интегралу с помощью под-

становки $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$, что дает в результате $\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right)$.

$$\ominus \ln|px^2+qx+r| + \frac{2}{\sqrt{4rp-q^2}} \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \operatorname{arctg} \left(\frac{2px+q}{\sqrt{4rp-q^2}} \right) + C ;$$

$$\begin{aligned}
 4) \int \frac{Ax+B}{(px^2+qx+r)^m} dx &= \frac{A}{2p} \int \frac{(2px+q) + \left(2p\frac{B}{A}-q\right)}{(px^2+qx+r)^m} dx = \\
 &= \frac{A}{2p} \int \frac{(2px+q)}{(px^2+qx+r)^m} dx + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{(px^2+qx+r)^m} = \\
 &= \frac{A}{2p(-m+1)} \cdot (px^2+qx+r)^{-m+1} + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{(px^2+qx+r)^m}.
 \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл подстановками сводится к виду

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}. \text{ Обозначим его } I_m. \text{ Для нахождения этого интеграла}$$

применим способ интегрирования по частям.

$$\text{Пусть } u = \frac{1}{(x^2-a^2)^m}, \quad du = -\frac{m \cdot 2x dx}{(x^2-a^2)^{m+1}}, \quad dv = dx, \quad v = x.$$

Тогда получим (для любого m):

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{x}{(x^2-a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^{m+1}} = \frac{x}{(x^2-a^2)^m} + 2m \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{(x^2-a^2)^{m+1}} dx = \\
 &= \frac{x}{(x^2-a^2)^m} + 2m(I_m + a^2 \cdot I_{m+1}).
 \end{aligned}$$

Из уравнения $I_m = \frac{x}{(x^2-a^2)^m} + 2m(I_m + a^2 \cdot I_{m+1})$ можно выразить

$$I_{m+1}: I_{m+1} = \frac{1-2m}{2ma^2} I_m - \frac{1}{2ma^2} \frac{x}{(x^2-a^2)^m}.$$

Полученная рекуррентная формула позволяет понизить степень выражения стоящего в знаменателе интеграла, а значит, за счет этой операции прийти к табличному интегралу.

Пример. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{2x-5}{(3x+5)^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5} dx.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Решение: а) } \int \frac{2x-5}{(3x+5)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{(3x-\frac{15}{2})}{(3x+5)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3x+5-5-\frac{15}{2}}{(3x+5)^2} dx = \\
& = \frac{2}{3} \int \frac{(3x+5)-\frac{25}{2}}{(3x+5)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{3x+5} dx - \frac{25}{3} \int \frac{1}{(3x+5)^2} dx = \frac{2}{9} \ln|3x+5| - \\
& - \frac{25}{9} \int (3x+5)^{-2} d(3x+5) = \frac{2}{9} \ln|3x+5| - \frac{25}{9} \cdot \frac{(3x+5)^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{9} \ln|3x+5| + \\
& + \frac{25}{9} \cdot \frac{1}{3x+5} + C; \\
& б) \int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5} dx = \int \frac{6x-4+7-7}{3x^2-7x+5} dx = \int \frac{(6x-7)+3}{3x^2-7x+5} dx = \\
& = \int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5} dx + 3 \int \frac{1}{3x^2-7x+5} dx = \int \frac{d(3x^2-7x+5)}{3x^2-7x+5} + \int \frac{1}{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}} dx = \\
& = \ln|3x^2-7x+5| + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{5}{3}} = \ln|3x^2-7x+5| + \\
& + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \left| t = x - \frac{7}{6}, \quad dt = dx \right| = \ln|3x^2-7x+5| + \int \frac{dt}{t^2 + \frac{11}{36}} = \\
& = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{36}{11} \int \frac{dt}{\left(\frac{6t}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1} = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6t}{\sqrt{11}}\right) + \\
& + C = \left| t = x - \frac{7}{6} \right| = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6\left(x-\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{11}}\right) = \\
& = \ln|3x^2-7x+5| + \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6x-7}{\sqrt{11}}\right) + C.
\end{aligned}$$

1.6. Интегрирование рациональных функций

Справедливо утверждение: *всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1. Представить неправильную дробь $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим под угол числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 2 \quad |x - 2 \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ x + 2 \\ \underline{x - 2} \\ 4 \end{array}$$

Это означает, что $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$.

Справедливо утверждение: *всякую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.*

При этом рассуждают следующим образом. Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей: $P(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu$, то она разлагается на простейшие дроби по схеме:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x - b)} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \dots + \\ & + \frac{R_1x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}, \end{aligned}$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ – некоторые постоянные величины.

Для нахождения величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ применяют *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

Применение этого метода рассмотрим на следующих примерах.

Пример 2. Разложить правильную дробь $\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$ на простей-

шие.

Решение. Для разложения дроби на простейшие используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{(x+1)(x-3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \\ &= \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}. \end{aligned}$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители:

$$2x-3 = (A+B)x - 3A+B. \text{ Решив систему уравнений } \begin{cases} A+B=2, \\ -3A+B=-3 \end{cases},$$

найдем: $A = \frac{5}{4}, B = \frac{3}{4}.$

Тогда разложение дроби на простейшие имеет вид: $\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)} =$

$$= \frac{5}{4} \frac{A}{x+1} + \frac{3}{4} \frac{B}{x-3}.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3} dx.$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби, предварительно разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 3 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^3 + 2x^2 - 3x} \\ -4x^2 + 3x + 3 \\ \underline{-4x^2 - 8x + 12} \\ 11x - 9 \end{array}$$

получим $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} = x - 4 + \frac{11x - 9}{x^2 + 2x - 3}$.

Разложим полученную правильную рациональную дробь на простейшие. Для этого вначале знаменатель разложим на множители: $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$. Тогда

$$\frac{11x - 9}{x^2 + 2x - 3} = \frac{11x - 9}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)}.$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители:

$$11x - 9 = A(x - 1) + B(x + 3).$$

Для определения A и B подберем значения переменной x таким образом, чтобы выражения, стоящие в правой части уравнения в скобках, обнулились, и подставим их в данное уравнение.

Рассмотрим $x = 1 \Rightarrow$, получаем уравнение $4B = 2$ или $B = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим $x = -3 \Rightarrow$, получаем уравнение $-4A = -42$ или $A = \frac{21}{2}$.

Тогда $\frac{11x - 9}{x^2 + 2x - 3} = \frac{11x - 9}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{21}{2(x + 3)} + \frac{1}{2(x - 1)}$.

Подставим в подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} dx &= \int \left(x - 4 + \frac{11x - 9}{(x + 3)(x - 1)} \right) dx = \\ &= \int \left(x - 4 + \frac{21}{2(x + 3)} + \frac{1}{2(x - 1)} \right) dx = \int x dx - 4 \int dx + \frac{21}{2} \int \frac{dx}{(x + 3)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 1)} = \\ &= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{21}{2} \ln|x + 3| + \frac{1}{2} \ln|x - 1| + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$.

Так как $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:

$$\begin{aligned} A(x - 4)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = \\ = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88; \text{ или } (A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + \\ + (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 9; \\ -4A - 2B - 6C + D = -30; \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28; \\ -16A - 8B + 8D = -88. \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B; \\ 2A + 2B + 4C - 3D = 14; \\ 2A + B - D = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14; \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11. \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 4A + 10B = 50; \\ 4A + 5B = 35. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 4A + 10B = 50; \\ 50 - 10B + 5B = 35. \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 4A + 10B = 50; \\ B = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5; \\ B = 3; \\ C = 1; \\ D = 2. \end{cases}$$

Тогда $\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{5}{x - 2} + \frac{3}{x - 4} + \frac{x + 2}{x^2 + 4}$, а результат инте-

грирования будет выглядеть:

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x - 2} dx + \int \frac{3}{x - 4} dx + \int \frac{x + 2}{x^2 + 4} dx = 5 \ln |x - 2| + 3 \ln |x - 4| + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \\ + \int \frac{2}{x^2 + 4} dx = 5 \ln |x - 2| + 3 \ln |x - 4| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + \arctg \left(\frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

1.7. Интегрирование иррациональных функций

Если подынтегральная функция иррациональна, то с помощью замены переменной во многих случаях можно привести ее к рациональному виду или к такой функции, интеграл от которой является табличным. Интегрирование с помощью замены переменной, которая приводит подынтегральное выражение к рациональному виду, называется *интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения*.

- Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}}) dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_s$.

- Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}) dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$.

Решение. Показателями степеней корней являются числа 3 и 2. Их наименьшее общее кратное равно 6. Поэтому применим подстановку $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$, $\sqrt{x} = t^3$. В результате

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^7}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt.$$

В подынтегральной функции выделим целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{t^4}{t-1} &= \frac{t^4 - 1 + 1}{t-1} = \frac{t^4 - 1}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \\ &= \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} = (t+1)(t^2+1) + \frac{1}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx = 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt = 6 \int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + C = |t = \sqrt[6]{x}| = \\
&= \frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C = \\
&= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C.
\end{aligned}$$

1.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

При нахождении интегралов

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx, \int \cos(ax) \cos(bx) dx, \int \sin(ax) \sin(bx) dx$$

подынтегральные функции из произведений преобразовываются в суммы с помощью приведенных ниже формул:

$$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} (\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x));$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} (\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x));$$

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)).$$

Если требуется найти интеграл вида $\int \cos^n(x) \sin^m(x) dx$, то при этом обычно используют следующие приемы:

1) подстановку $\sin(x) = t$, если n – целое положительное нечетное число;

2) подстановку $\cos(x) = t$, если m – целое положительное нечетное число;

3) пользуются формулами понижения порядка:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2},$$

если n и m – целые неотрицательные четные числа;

4) подстановку $\operatorname{tg}(x) = t$, если $n + m$ – есть четное отрицательное целое число.

Пример. Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x) \cos(5x) dx$; б) $\int \cos^3(x) dx$; в) $\int \cos^2(x) \sin^5(x) dx$;

$$\text{г)} \int \sin^4(x) \cos^2(x) dx; \quad \text{д)} \int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos(x)}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \text{ так как } \int \sin(3x) \cos(5x) dx &= \frac{1}{2} \cdot (\sin((3-5)x) + \sin((3+5)x)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x) + \sin(8x)), \text{ то } \int \sin(3x) \cos(5x) dx = -\frac{1}{2} \int \sin(2x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin(8x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(8x)}{8} \right) + C = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16} + C; \\ \text{б)} \int \cos^3(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos(x) dx = \int t = \sin(x), \end{aligned}$$

$$dt = \cos(x) dx \mid = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \cos^2(x) \sin^5(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot \sin^4(x) \cdot \sin(x) dx = \\ &= \int \cos^2(x) \cdot (\sin^2(x))^2 \cdot \sin(x) dx = \int \cos^2(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \cdot \sin(x) dx = \\ &= \int t = \cos(x), dt = -\sin(x) dx, \sin(x) dx = -dt \mid = \int t^2 (1 - t^2)^2 (-dt) = \\ &= -\int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) + C = \\ &= \frac{2\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^7(x)}{7} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \int \sin^4(x) \cos^2(x) dx &= \int \sin^2(x) \cdot \sin^2(x) \cdot \cos^2(x) dx = \\ &= \int (\sin(x) \cdot \cos(x))^2 \cdot \sin^2(x) dx = \int \frac{1}{4} \sin^2(2x) \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x)) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(4x)) dx - \\ &- \frac{1}{16} \int \sin^2(2x) d \sin(2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \cdot \sin(4x) - \frac{1}{48} \cdot \sin^3(2x) + C; \end{aligned}$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos(x)} = \int \sin^{-3}(x) \cdot \cos^{-1}(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} m+n &= -3-1=-4, \\ t &= \operatorname{tg}(x), \quad x = \operatorname{arctg}(t), \\ \sin(x) &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^3} = \\
&= \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^3} dt + \int \frac{1}{t} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2(x) + \ln|\operatorname{tg}(x)| + C.
\end{aligned}$$

1.9. Определенный интеграл и его основные свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ (рис. 1). Выполним следующие действия.

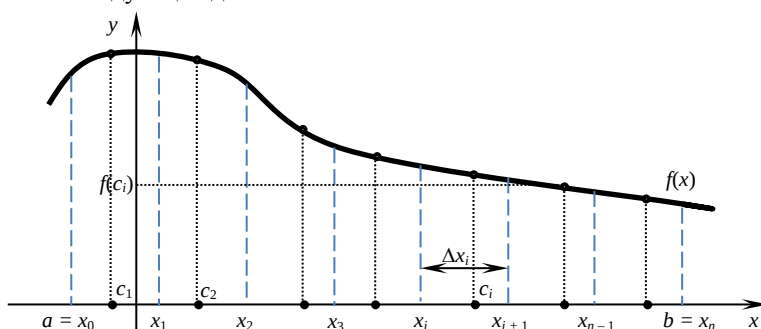


Рис. 1.

Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$, которые называются частичными.

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольно выберем точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, то он называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, $[a; b]$ – *отрезком интегрирования*.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox , сбоку прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Свойства определенного интеграла

- Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

- Определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак на противоположный,

т. е. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

- Если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю, т. е. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

- Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

- Если отрезок интегрирования $[a; b]$ разбит на две части $[a; c]$ и $[c; b]$ и если существуют интегралы $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ – любая первообразная функция для $f(x)$.

1.10. Методы вычисления определенных интегралов

При вычислении определенных интегралов используются методы *непосредственного интегрирования, замены переменной (подстановки) и интегрирования по частям*.

Непосредственное интегрирование предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использование формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^2 x dx$; б) $\int_0^\pi \sin(x) dx$;

в) $\int_0^1 e^x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$; д) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx$.

Решение: а) $\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

$$\text{б)} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{в)} \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1;$$

$$\text{г)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{д)} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3x^3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = 2 \frac{5}{8}.$$

Метод **замены переменной** в определенном интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

- функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную;
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной, и при этом справедлива формула $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. Часто вместо замены $x = \varphi(t)$ применяют замену $t = \psi(x)$.

Пример 2. Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$; б) $\int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx$;

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

Решение:

а) выполним замену $t = x + 1$, $dt = dx$. Вычислим пределы интегрирования для переменной t :

x	0	1
t	1	2

Тогда $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$;

б) выполним замену $t = 1 - 4x$ и продифференцируем обе части равенства: $dt = -4dx$, $dx = -\frac{dt}{4}$. Изменим пределы интегрирования:

x	-2	0
t	9	1

В результате $\int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx = \int_9^1 \sqrt{t} \left(-\frac{dt}{4}\right) = -\frac{1}{4} \int_9^1 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4} \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_9^1 =$
 $= -\frac{1}{6} \sqrt{t^3} \Big|_9^1 = -\frac{1}{6} \sqrt{1^3} - \left(-\frac{1}{6} \sqrt{9^3}\right) = -\frac{1}{6}(1-27) = \frac{13}{6} = 4\frac{1}{6}$;

в) в данном случае выполним замену $t = \sin(x)$, тогда $dt = \cos(x) dx$. Для переменной t вычислим пределы интегрирования:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Получим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos(x) dx = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда для определенного интеграла справедлива формула **интегрирования по частям**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 3. Вычислить интегралы: а) $\int_{\pi}^{2\pi} x \cos(x) dx$; б) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^5} dx$.

Решение: а) положим $u = x$, тогда $du = dx$. Оставшуюся часть подынтегрального выражения примем за dv : $dv = \cos(x) dx$. Проинте-

грируем это выражение: $\int dv = \int \cos(x) dx$, $v = \sin(x)$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int_{\pi}^{2\pi} x \cos(x) dx = x \sin(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = 2\pi \sin(2\pi) - \pi \sin(\pi) + \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \\ = \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2;$$

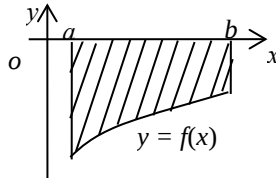
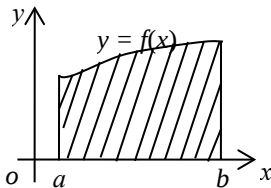
б) положим $u = \ln(x)$, $dv = \frac{1}{x^5} dx$. Тогда $du = \frac{1}{x} dx$, $\int dv = \int \frac{1}{x^5} dx$,
 $v = \int x^{-5} dx$, $v = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}$. По формуле интегрирования по частям

$$\text{запишем: } \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4 \cdot 2^4} \ln(2) + \\ + \frac{1}{4 \cdot 1^4} \ln(1) + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x^5} dx = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-4}}{-4} \Big|_1^2 = \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^4}\right) \Big|_1^2 = \\ = \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{15}{256}.$$

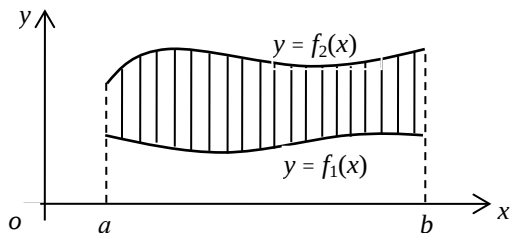
1.11. Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определенному интегралу от функции $f(x)$: $S = \int_a^b f(x) dx$. Если фигура расположена ниже оси абсцисс, то ее площадь вычисляется по формуле $S = -\int_a^b f(x) dx$.



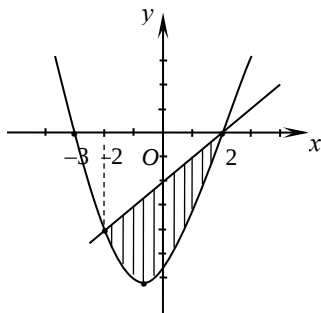
Пусть фигура ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.



Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью Ox : $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и вычислим площадь заштрихованной фигуры.



Найдем абсциссы точек пересечения линий: $x^2 + x - 6 = x - 2$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры

$$\begin{aligned} \text{равна } \int_{-2}^2 (x - 2 - (x^2 + x - 6)) dx &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \\ &= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10 \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

2. Вычисление объемов тел.

Если задана функция $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$), определяющая площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , то его объем вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$.

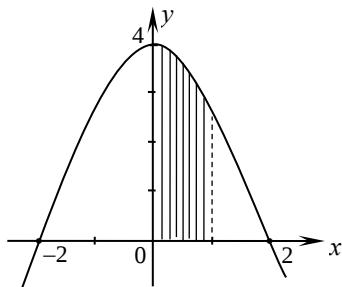
Рассмотрим случай, когда тело образуется путем вращения заданной уравнением $y = f(x)$ линии относительно оси координат Ox . Тогда поперечные сечения тела будут представляться окружностями радиуса $f(x)$, а значит, их площади будут определяться формулой $S(x) = \pi(f(x))^2$. В результате формулу вычисления тела вращения можно записать в виде

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Аналогичные формулы справедливы и в случае расположения тела вдоль оси Oy .

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Решение. Изобразим в системе координат плоскую фигуру, ограниченную заданными линиями.



Полученная плоская фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = -x^2 + 4$, а сбоку прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox , вычисляется по

формуле $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$. В нашем случае $V_x = \pi \int_0^1 (-x^2 + 4)^2 dx =$

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1^5}{5} - 8 \cdot \frac{1^3}{3} + 16 \cdot 1 \right) - \pi \cdot \left(\frac{0^5}{5} - 8 \cdot \frac{0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right) = 13 \frac{8}{15} \pi \text{ (куб. ед).} \end{aligned}$$

3. Вычисление длины дуги кривой.

Если линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$, где $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ – дифференцируемые функции аргумента t , то дифференциал длины дуги выражается формулой $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$. Интегрируя это равенство по промежутку $[a; b]$, получаем формулу для вычисления длины дуги линии:

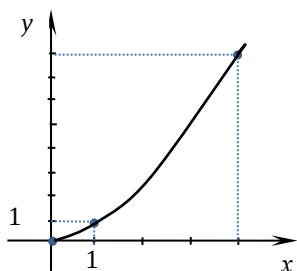
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги линии $y = \sqrt{x^3}$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Представим уравнение линии в виде ее параметрического уравнения:

$$\begin{cases} x = t; \\ y = \sqrt{t^3}, \quad t \in [0; 4]. \end{cases}$$

Тогда



$$l = \int_0^4 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} d\left(1 + \frac{9}{4}t\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot (10\sqrt{10} - 1) \text{ (ед. дл.)}.$$

1.12. Приближенное вычисление определенных интегралов

Известно, что определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница. Однако класс интегрируемых функций небольшой.

Например, функцию $\frac{x}{\sin(x)}$ нельзя отнести к классу интегрируемых функций, а значит, для вычисления $\int_0^1 \frac{x}{\sin(x)} dx$ аналитические

Разобьем отрезок интегрирования $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ разобьем на n равных элементарных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ и заменим полученные при этом элементарные криволинейные трапеции на соответствующие прямоугольные трапеции с высотами, равными длинам элементарных отрезков, и основаниями, равными ординатам точек разбиения. Тогда искомая площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна сумме площадей соответствующих прямоугольных трапеций.

$$\begin{aligned} S_{\text{кр. тр}} &\approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h = \left| h = \frac{b-a}{n} \right| = \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right) = \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \end{aligned}$$

Это означает, что значение искомого определенного интеграла будет равно:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Для оценки погрешности таких вычислений можно найти значение определенного интеграла при числе точек разбиения n и $2n$. Затем сравнивают полученные результаты и в ответ записывают все первые совпадающие цифры. Тогда разность найденных величин можно принять за погрешность вычислений.

Например, применив метод трапеций для определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ при числе точек разбиения n и $2n$, были получены следующие результаты: $S_n = 2,183148$ и $S_{2n} = 2,183456$. Тогда результат интегрирования можно принять равным $S \approx 2,183$ с предельной погрешностью, не превосходящей $\varepsilon < |S_{2n} - S_n| = 0,00031$.

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ И ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Практическое занятие 1.

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int x^3 dx; \quad \text{б)} \int \frac{x^{15}}{3} dx; \quad \text{в)} \int x^{106} dx; \quad \text{г)} \int 2x^{99} dx; \\ \text{д)} \int \frac{16}{x^5} dx; \quad \text{е)} \int \frac{2}{3x^{15}} dx; \quad \text{ж)} \int \frac{2}{x^{203}} dx; \quad \text{з)} \int \frac{49}{x^{99}} dx; \\ \text{и)} \int \sqrt[3]{x^5} dx; \quad \text{к)} \int \frac{3}{4\sqrt{x^3}} dx; \quad \text{л)} \int 4\sqrt{x^2} dx; \quad \text{м)} \int \frac{7}{2\sqrt[7]{x^3}} dx. \end{aligned}$$

2. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad \text{б)} \int \left(2x - 4\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx; \\ \text{в)} \int \left(x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x^6} \right) dx; \quad \text{г)} \int \left(x^2 + \frac{3}{x^4} - 8\sqrt[5]{x^3} \right) dx; \\ \text{д)} \int \left(8x - \frac{5}{x^6} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx; \quad \text{е)} \int \left(4x^3 + 8\sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx; \\ \text{ж)} \int \left(3x - 4\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx; \quad \text{з)} \int \left(4 - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} - 7\sqrt[6]{x} \right) dx; \\ \text{и)} \int \left(3^x - \frac{2}{x} + 4\sin(x) \right) dx; \quad \text{к)} \int \left(e^x - \frac{3}{2\cos^2(x)} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \\ \text{л)} \int \left(\frac{8}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{\cos(x)}{7} \right) dx; \quad \text{м)} \int \left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{\sin^2(x)} + \frac{2}{x \ln(3)} - 1 \right) dx. \end{aligned}$$

3. Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x} dx; \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{x}-1+x\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x^3}} dx; \\ \text{в)} \int \frac{\cos^3 x - 8\sqrt[5]{x^3} \cdot \cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx; \quad \text{г)} \int \frac{5x^2 - 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x}} dx; \end{aligned}$$

$$\text{д)} \int \sin(7x+4) dx;$$

$$\text{е)} \int \cos\left(\frac{x}{7}+12\right) dx;$$

$$\text{ж)} \int \left(\frac{2}{3}x+5\right)^5 dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{6}{(4x+5)} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{5}{\cos^2(2-3x)} dx;$$

$$\text{к)} \int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}} dx;$$

$$\text{л)} \int \frac{11}{\sin^2(5+9x)} dx;$$

$$\text{м)} \int \frac{3}{1+9x^2} dx.$$

Домашнее задание к занятию 1.

Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(4x^3 + 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^4} - 2\right) dx;$$

$$\text{б)} \int \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^5}\right) dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{(1-x)^2 - x^2 \cos(x)}{x^2} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{\cos^2(x) - \sin(x) \cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)} dx;$$

$$\text{д)} \int \sin(8-7x) dx;$$

$$\text{е)} \int \cos(4x+1) dx;$$

$$\text{ж)} \int (7x+5)^4 dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{1}{(9x-3)} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{3}{\cos^2(4-5x)} dx;$$

$$\text{к)} \int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx;$$

$$\text{л)} \int \frac{7}{\sin^2(2+3x)} dx;$$

$$\text{м)} \int \frac{8}{1+6x^2} dx.$$

Практическое занятие 2.

1. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}};$$

$$\text{б)} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}};$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{\cos^2(x) \sqrt{1+\lg(x)}};$$

$$\text{г)} \int \cos^3(x) \sin(x) dx;$$

$$\text{д)} \int 3e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{е)} \int 2x \sqrt{x^2+1} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}};$$

$$\text{з)} \int \frac{\sin x}{\cos^4(x)} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx;$$

$$\text{к)} \int \frac{e^{2x} dx}{(1+e^{2x})^2};$$

$$\text{л)} \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}};$$

$$\text{м)} \int e^{\sin(3x)} \cos(3x) dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а)} \int (3x-4) \cos(x) dx;$$

$$\text{б)} \int (2x+5)e^{6x-2} dx;$$

$$\text{в)} \int \sqrt{x} \ln(x) dx;$$

$$\text{г)} \int x \operatorname{arctg}(x) dx;$$

$$\text{д)} \int e^x \sin(x) dx;$$

$$\text{е)} \int e^{2x} \cos(x) dx;$$

$$\text{ж)} \int (x^2+2)e^{-x} dx;$$

$$\text{з)} \int x \sin(4x) dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{\ln(x)}{x^3} dx;$$

$$\text{к)} \int \arcsin(x) dx;$$

$$\text{л)} \int e^{-x+3} \sin(2x) dx;$$

$$\text{м)} \int e^{\frac{x}{3}} \cos(4x+2) dx.$$

Домашнее задание к занятию 2.

Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+1}};$$

$$\text{в)} \int e^{\sin(3x)} \cos(3x) dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{\operatorname{arctg}^2(2x)}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

$$\text{е)} \int e^{x^4+6} x^3 dx;$$

$$\text{ж)} \int x \cos(3x-4) dx;$$

$$\text{з)} \int (5x-8) \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx;$$

$$\text{и)} \int \sqrt[3]{x^3} \ln(x) dx;$$

$$\text{к)} \int \arccos(x) dx;$$

$$\text{л)} \int e^{5x+3} \cos(7x) dx;$$

$$\text{м)} \int e^{\frac{x}{2}} \cos(6x+1) dx.$$

Практические занятия 3–4.

1. Найти неопределенные интегралы от простейших рациональных дробей:

$$\text{а)} \int \frac{2}{x-4} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{3}{5-x} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{1}{(x+3)^4} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{5}{(x-3)^5} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{8}{(7-x)^9} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{4}{(x+6)^5} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{x}{x^2-7x+13} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{4x^2+4x+5};$$

$$\text{к)} \int \frac{(x+1)dx}{2x^2+x+1};$$

$$\text{л)} \int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18};$$

$$\text{м)} \int \frac{5x-7}{8x^2+x+1} dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей:

$$\text{а)} \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)};$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)};$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2};$$

$$\text{ж)} \int \frac{x^3+x+1}{x^3+x} dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{x^4 dx}{x^4-1};$$

$$\text{и)} \int \frac{5dx}{x^3+2x^2+5x};$$

$$\text{к)} \int \frac{dx}{x^4-x^2};$$

$$\text{л)} \int \frac{dx}{x^3+1};$$

$$\text{м)} \int \frac{9x}{(x-5)(x^2+2x+10)} dx.$$

Домашнее задание к занятиям 3–4.

Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей:

а) $\int \frac{7}{(2x+3)^4} dx;$

б) $\int \frac{4}{(2-5x)^4} dx;$

в) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx;$

г) $\int \frac{3-4x}{3x^2-3x+1} dx;$

д) $\int \frac{(x+4)dx}{(x+2)(x-3)};$

е) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx;$

ж) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx;$

з) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx;$

и) $\int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+9)} dx;$

к) $\int \frac{dx}{x^3-x};$

л) $\int \frac{3dx}{x^3+3x^2+4x};$

м) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+3)}.$

Практическое занятие 5.

Найти неопределенные интегралы, содержащие иррациональности под знаком интеграла:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}};$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}};$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}};$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}};$

д) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx;$

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}};$

ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx;$

з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}};$

к) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)};$

м) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$

Домашнее задание к занятию 5.

Найти неопределенные интегралы, содержащие иррациональности под знаком интеграла:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}};$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}};$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}};$

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx;$

д) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})};$

е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};$

ж) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} dx;$

з) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}.$

Практическое занятие 6.

Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \sin^3(x) \cos(x) dx;$

б) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx;$

в) $\int \operatorname{tg}^2(x) dx;$

г) $\int \operatorname{ctg}^2(3x) dx;$

д) $\int 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$

е) $\int \frac{dx}{\cos(2x) + \sin^2(x)};$

ж) $\int \frac{1 + \cos^2(x)}{1 + \cos(2x)} dx;$

з) $\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx;$

и) $\int \frac{dx}{1 + \sin(x)};$

к) $\int \frac{dx}{4 - 5 \cos(x)};$

л) $\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)};$

м) $\int \frac{dx}{\cos(x) + 2 \sin(x) - 3}.$

Домашнее задание к занятию 6.

Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \cos^3(x) \sin(2x) dx;$

б) $\int \cos(2x) \cos(3x) dx;$

$$\text{в)} \int \operatorname{ctg}^2(x) dx ; \quad \text{г)} \int \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) dx ;$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{3 \sin(x) + 4 \cos(x) + 5} ; \quad \text{е)} \int \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)} dx .$$

Практическое занятие 7.

1. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\text{а)} \int_0^1 (4x^3 + 4\sqrt[3]{x} + 2) dx ; \quad \text{б)} \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x} + x^2}{x^2} dx ;$$

$$\text{в)} \int_1^8 \left(3x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2} - \sqrt[3]{x^2} - 1 \right) dx ; \quad \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x - \frac{1}{2} \cos(x) + 3 \sin(x) - \frac{x}{3} \right) dx ;$$

$$\text{д)} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - 3 \cos(x) - \frac{1}{\sin^2(x)} \right) dx ; \quad \text{е)} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 3e^x - \frac{x-3}{2} - 1\frac{2}{3} \right) dx .$$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

$$\text{а)} \int_0^4 \sqrt{3x+4} dx ; \quad \text{б)} \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+4x^2} ;$$

$$\text{в)} \int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^3} dx ; \quad \text{г)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx ;$$

$$\text{д)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^2(x) dx ; \quad \text{е)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx .$$

3. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\text{а)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin(x) dx ; \quad \text{б)} \int_0^1 x e^x dx ;$$

$$\text{в)} \int_0^1 x \operatorname{arctg}(x) dx ; \quad \text{г)} \int_1^3 \ln(x) dx ;$$

$$\text{д) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin(x) dx;$$

$$\text{е) } \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx.$$

Домашнее задание к занятию 7.

1. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\text{а) } \int_{-8}^0 \left(\frac{4}{3} \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + 1 \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \left(6x - \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\pi} \right) dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

$$\text{а) } \int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx.$$

3. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_1^e x \ln(x) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Практическое занятие 8.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$\text{а) } y = 6x - x^2, \quad y = 0;$$

$$\text{б) } y = x^2 - 4, \quad x = 4, \quad y = 0;$$

$$\text{в) } y = x^2, \quad y = 8 - x^2;$$

$$\text{г) } y = -x^2, \quad x + y + 2 = 0;$$

$$\text{д) } y = x, \quad y = (x-2)^2, \quad y = 0; \quad \text{е) } y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[3]{x}.$$

2. Вычислить длину дуги заданной кривой:

$$\text{а) } y = 2x\sqrt{x}, \text{ от } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 7; \quad \text{б) } y = \frac{x^2}{3\sqrt{x}}, \text{ от } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 12;$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2}{2}, \text{ от } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 1; \quad \text{г) } 2y = x^2 - 2 \text{ между точками пересечения с осью } Ox;$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - 1, \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$$

$$\text{от } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \sqrt{5};$$

$$\text{от } t_1 = 1 \text{ до } t_2 = 2.$$

3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями:

вокруг оси Ox

а) $xy = 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; б) $y^2 = 4x$, $x = 2$;

в) $y = x^2 + 1$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$; г) $y = x^2 - 4x - 6$, $y = -1$;

вокруг оси Oy

д) $xy = 9$, $y = 3$, $y = 9$;

е) $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

Домашнее задание к занятию 8.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $xy = 6$, $y = 7 - x$;

б) $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$.

2. Вычислить длину дуги заданной кривой:

а) $y = \ln x$, б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

от $x_1 = \frac{3}{4}$ до $x_2 = 2$;

от $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$.

3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями:

а) *вокруг оси Ox*

б) *вокруг оси Oy*

$y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$;

$y = x^3$, $x = -2$, $y = 0$.

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = (-1)^G G x^2 + 2(G - N/15)x + N$ и $y = (G - 4)x + N$.

2. Вычислить объем тела, которое получается при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = (G - 4)x$, $y = 0$, $x = N - 15$, вокруг оси Ox , если G – четное, и вокруг оси Oy , если G – нечетное.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{N-15} x \cdot e^{\frac{x^2}{G}} dx$ по формуле трапеций, сделав 10 разбиений отрезка интегрирования. Оценить погрешность вычислений по методу двойного пересчета.

4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

1.1. $\int \cos (x) d x$:

1) $\sin (x)+C$; 2) $-\sin (x)+C$; 3) $-\cos (x)+C$; 4) $\operatorname{tg}(x)+C$.

1.2. $\int e^x d x$:

1) $x+C$; 2) $\ln (x)+C$; 3) e^x+C ; 4) $-e^x+C$.

1.3. $\int x d x$:

1) $2 x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+C$; 3) $\frac{x^3}{3}+C$; 4) 1.

1.4. $\int a^x d x$:

1) $x+C$; 2) a^x+C ; 3) $a^{-x}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln (a)}+C$.

1.5. $\int x^2 d x$:

1) x^3+C ; 2) $2 x+C$; 3) $\frac{x^3}{3}+C$; 4) x^3+C .

1.6. $\int \frac{d x}{x}$:

1) $\ln |x|+C$; 2) $x+C$; 3) $\frac{1}{x^2}+C$; 4) $2 x+C$.

1.7. $\int \sin (x) d x$:

1) $\cos (x)+C$; 2) $-\sin (x)+C$; 3) $x+C$; 4) $-\cos (x)+C$.

1.8. $\int x^3 d x$:

1) $3 x^2+C$; 2) x^2+C ; 3) $\frac{x^4}{4}+C$; 4) x^4+C .

1.9. $\int \frac{d x}{\cos ^2(x)}$:

1) $\cos (x)+C$; 2) $\operatorname{tg}(x)+C$; 3) $\sin (x)+C$; 4) $\operatorname{ctg}(x)+C$.

1.10. $\int 2 x d x$:

$$1) x + C; \quad 2) x^3 + C; \quad 3) 2x^2 + C; \quad 4) x^2 + C.$$

$$1.11. \int 3^x dx:$$

$$1) \frac{3^x}{\ln(3)} + C; \quad 2) 3^x + C; \quad 3) 3x + C; \quad 4) 3^x \ln(3) + C.$$

$$1.12. \int \frac{dx}{1+x^2}:$$

$$1) 2x + C; \quad 2) \operatorname{arctg}(x) + C; \quad 3) \frac{1}{2x} + C; \quad 4) x^2 + C.$$

$$1.13. \int 5x^4 dx:$$

$$1) 5x^5 + C; \quad 2) x^4 + C; \quad 3) x^5 + C; \quad 4) -x^5 + C.$$

$$1.14. \int \frac{dx}{\sin^2(x)}:$$

$$1) \operatorname{tg}(x) + C; \quad 2) \sin(x) + C; \quad 3) \operatorname{ctg}(x) + C; \quad 4) -\operatorname{ctg}(x) + C.$$

$$1.15. \int 4e^x dx:$$

$$1) 4x + C; \quad 2) 4e^x + C; \quad 3) e^x + C; \quad 4) x^2 + C.$$

$$1.16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}:$$

$$1) \arcsin(x) + C; \quad 2) \sqrt{1-x^2} + C; \quad 3) x^2 + 1; \quad 4) \operatorname{arctg}(x) + C.$$

$$1.17. \int 4x^3 dx:$$

$$1) 6x^2 + C; \quad 2) x^3 + C; \quad 3) 2x^4 + C; \quad 4) x^4 + C.$$

$$1.18. \int 2^x dx:$$

$$1) 2^x + C; \quad 2) \ln(2) + C; \quad 3) x + C; \quad 4) \frac{2^x}{\ln(2)} + C.$$

$$1.19. \int \frac{1}{2} \cos(x) dx:$$

$$1) \frac{1}{2} \sin(x) + C; \quad 2) \sin(x) + C; \quad 3) \frac{1}{2} \cos(x) + C; \quad 4) 2 \sin(x) + C.$$

$$1.20. \int 6x^2 dx:$$

$$1) 12x + C; \quad 2) 2x^3 + C; \quad 3) \frac{x^3}{3} + C; \quad 4) 6x^2 + C.$$

$$1.21. \int 3 \sin(x) dx:$$

$$1) 3 \cos(x) + C; \quad 2) -\cos(x) + C; \quad 3) -3 \cos(x) + C; \quad 4) 3 \sin(x) + C.$$

$$1.22. \int (x^2 + 1) dx:$$

$$1) 2x + C; \quad 2) x^3 + x + C; \quad 3) \frac{x^3}{3} + C; \quad 4) \frac{x^3}{3} + x + C.$$

$$1.23. \int 4x^3 dx:$$

$$1) x^4 + C; \quad 2) \frac{x^4}{4} + C; \quad 3) 3x^2 + C; \quad 4) x^3 + C.$$

$$1.24. \int 2x dx:$$

$$1) \frac{x^2}{2} + C; \quad 2) x^2 + C; \quad 3) 2x + C; \quad 4) 2x^2 + C.$$

$$1.25. \int \frac{3dx}{1+x^2}:$$

$$1) \operatorname{arctg}(x) + C; \quad 2) -\operatorname{arctg}(x) + C; \quad 3) 3 \operatorname{arctg}(x) + C; \quad 4) 3x + C.$$

$$1.26. \int \frac{2dx}{\sin^2(x)}:$$

$$1) 2 \operatorname{ctg}(x) + C; \quad 2) 2 \operatorname{tg}(x) + C; \quad 3) \operatorname{ctg}(x) + C; \quad 4) -2 \operatorname{ctg}(x) + C.$$

$$1.27. \int \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}:$$

$$1) 3 \arcsin(x) + C; \quad 2) \arcsin(x) + C; \quad 3) \sqrt{1-x^2} + C; \quad 4) \arcsin(3x) + C.$$

$$1.28. \int \frac{e^x}{5} dx:$$

$$1) e^x + C; \quad 2) \frac{e^x}{5} + C; \quad 3) \frac{x}{5} + C; \quad 4) 5e^x + C.$$

$$1.29. \int x^4 dx:$$

$$1) 4x^3 + C; \quad 2) x^3 + C; \quad 3) \frac{x^5}{5} + C; \quad 4) x^5 + C.$$

$$1.30. \int \frac{3dx}{x}:$$

- 1) $\ln|x|$; 2) $3x+C$; 3) $x+C$; 4) $3\ln|x|+C$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x^3 - 4^x + 3\sin(x))dx.$$

Решение. Интегрируем непосредственно на основании свойств и формул неопределенного интеграла, получаем:

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 4^x + 3\sin(x))dx &= 2 \cdot \int x^3 dx - \int 4^x dx + 3 \cdot \int \sin(x) dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{4^x}{\ln 4} + 3 \cdot (-\cos(x)) + C = \frac{x^4}{2} - \frac{4^x}{\ln 4} - 3 \cdot \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Задание 2. Найти неопределенный интеграл.

$$2.1. \int \frac{dx}{x^2}:$$

- 1) $-\frac{1}{x}+C$; 2) $\frac{1}{x}+C$; 3) $\frac{1}{x^2}+C$; 4) $\frac{1}{2x}+C$.

$$2.2. \int \frac{dx}{x^4}:$$

- 1) $\frac{1}{x^3}+C$; 2) $-\frac{1}{3x^3}+C$; 3) $\frac{1}{3x^2}+C$; 4) $\frac{1}{4x^3}+C$.

$$2.3. \int \frac{2dx}{x^3}:$$

- 1) $\frac{2}{x^2}+C$; 2) $-\frac{1}{3x^2}+C$; 3) $-\frac{1}{x^2}+C$; 4) $\frac{2}{x^3}+C$.

$$2.4. \int \frac{3dx}{x^4}:$$

- 1) $\frac{3}{x^3}+C$; 2) $\frac{1}{4x^3}+C$; 3) $\frac{3}{x^3}+C$; 4) $-\frac{1}{x^3}+C$.

$$2.5. \int \frac{dx}{x^5}:$$

$$1) -\frac{1}{4x^4} + C; \quad 2) \frac{1}{x^4} + C; \quad 3) \frac{1}{5x^4} + C; \quad 4) \frac{1}{4x^4} + C.$$

$$2.6. \int \frac{4dx}{x^2}:$$

$$1) \frac{4}{x} + C; \quad 2) -\frac{4}{x} + C; \quad 3) \frac{2}{x} + C; \quad 4) \frac{1}{x} + C.$$

$$2.7. \int \frac{3dx}{x^2}:$$

$$1) \frac{3}{x^2} + C; \quad 2) \frac{3}{x} + C; \quad 3) -\frac{3}{x} + C; \quad 4) 3x + C.$$

$$2.8. \int \frac{2dx}{x^5}:$$

$$1) \frac{2}{x^6} + C; \quad 2) \frac{1}{x^5} + C; \quad 3) -2x + C; \quad 4) -\frac{1}{2x^4} + C.$$

$$2.9. -\int \frac{dx}{x^3}:$$

$$1) \frac{1}{2x^2} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^2} + C; \quad 3) \frac{1}{x^3} + C; \quad 4) -\frac{1}{3x^2} + C.$$

$$2.10. \int \frac{5dx}{x^6}:$$

$$1) \frac{1}{x^5} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^5} + C; \quad 3) \frac{5}{x^5} + C; \quad 4) -\frac{5}{x^5} + C.$$

$$2.11. \int \frac{8dx}{x^3}:$$

$$1) \frac{4}{x^2} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^2} + C; \quad 3) -\frac{4}{x^2} + C; \quad 4) \frac{4}{x^3} + C.$$

$$2.12. -\int \frac{9dx}{x^4}:$$

$$1) \frac{3}{x^3} + C; \quad 2) \frac{9}{x^3} + C; \quad 3) -\frac{3}{x^3} + C; \quad 4) \frac{9}{x^4} + C.$$

$$2.13. \int \frac{dx}{x^7}:$$

$$1) \frac{1}{6x^6} + C; \quad 2) -\frac{1}{6x^6} + C; \quad 3) \frac{1}{x^7} + C; \quad 4) \frac{1}{7x^6} + C.$$

$$2.14. \int \frac{7dx}{x^8}:$$

$$1) \frac{1}{x^8} + C; \quad 2) \frac{7}{x^7} + C; \quad 3) -\frac{7}{x^7} + C; \quad 4) -\frac{1}{x^7} + C.$$

$$2.15. -\int \frac{dx}{x^2}:$$

$$1) -\frac{1}{2x} + C; \quad 2) \frac{1}{x} + C; \quad 3) -\frac{1}{x} + C; \quad 4) \frac{1}{x^2} + C.$$

$$2.16. -\int \frac{2dx}{x^3}:$$

$$1) -\frac{2}{x^2} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^2} + C; \quad 3) \frac{1}{x^2} + C; \quad 4) \frac{2}{x^3} + C.$$

$$2.17. \int \frac{4dx}{x^5}:$$

$$1) \frac{1}{x^4} + C; \quad 2) -\frac{4}{x^5} + C; \quad 3) -\frac{4}{x^4} + C; \quad 4) -\frac{1}{x^4} + C.$$

$$2.18. \int \frac{12dx}{x^4}:$$

$$1) -\frac{4}{x^3} + C; \quad 2) -\frac{12}{x^3} + C; \quad 3) \frac{3}{x^3} + C; \quad 4) -\frac{1}{x^4} + C.$$

$$2.19. \int \frac{6dx}{x^7}:$$

$$1) \frac{1}{x^6} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^6} + C; \quad 3) \frac{6}{x^6} + C; \quad 4) -\frac{6}{x^7} + C.$$

$$2.20. -\int \frac{5dx}{x^2}:$$

$$1) -\frac{5}{x} + C; \quad 2) \frac{1}{x^2} + C; \quad 3) \frac{5}{x} + C; \quad 4) \frac{1}{x} + C.$$

$$2.21. \int \frac{3dx}{x^{10}}:$$

$$1) \frac{3}{x^9} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^9} + C; \quad 3) \frac{1}{9x^9} + C; \quad 4) -\frac{1}{3x^9} + C.$$

$$2.22. \int \frac{12dx}{x^7}:$$

$$1) -\frac{12}{x^6} + C; \quad 2) -\frac{2}{x^6} + C; \quad 3) \frac{2}{x^6} + C; \quad 4) \frac{1}{x^6} + C.$$

$$2.23. -\int \frac{dx}{x^9}:$$

$$1) \frac{1}{x^8} + C; \quad 2) \frac{1}{x^{10}} + C; \quad 3) \frac{1}{8x^8} + C; \quad 4) -\frac{2}{x^{10}} + C.$$

$$2.24. \int \frac{8dx}{x^5}:$$

$$1) -\frac{8}{x^4} + C; \quad 2) \frac{1}{x^6} + C; \quad 3) \frac{1}{x^4} + C; \quad 4) -\frac{2}{x^4} + C.$$

$$2.25. -\int \frac{10dx}{x^3}:$$

$$1) -\frac{5}{x^2} + C; \quad 2) \frac{5}{x^2} + C; \quad 3) \frac{2}{x^3} + C; \quad 4) \frac{5}{x^3} + C.$$

$$2.26. \int \frac{3dx}{x^7}:$$

$$1) -\frac{3}{x^6} + C; \quad 2) \frac{1}{7x^6} + C; \quad 3) \frac{1}{x^7} + C; \quad 4) -\frac{1}{2x^6} + C.$$

$$2.27. \int \frac{9dx}{x^{10}}:$$

$$1) \frac{9}{x^9} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^9} + C; \quad 3) \frac{1}{x^{10}} + C; \quad 4) -\frac{9}{x^9} + C.$$

$$2.28. \int \frac{5dx}{x^{11}}:$$

$$1) -\frac{1}{2x^{10}} + C; \quad 2) \frac{5}{x^{10}} + C; \quad 3) \frac{1}{x^{10}} + C; \quad 4) -\frac{1}{x^{10}} + C.$$

$$2.29. -\int \frac{4dx}{x^3}:$$

$$1) -\frac{1}{x^2} + C; \quad 2) -\frac{1}{x^3} + C; \quad 3) \frac{2}{x^2} + C; \quad 4) \frac{1}{x^2} + C.$$

$$2.30. \int \frac{10dx}{x^6}:$$

$$1) \frac{10}{x^5} + C; \quad 2) -\frac{2}{x^5} + C; \quad 3) \frac{1}{x^6} + C; \quad 4) -\frac{1}{x^5} + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^5} \right) dx.$$

Решение. Интегрируем непосредственно, используя свойство степеней $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$, получаем:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^5} \right) dx &= \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-2} dx - 2 \cdot \int x^{-5} dx = \\ &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} - 2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C. \end{aligned}$$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл.

$$3.1. \int \sqrt[3]{x} dx:$$

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C; \quad 2) \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C; \quad 3) \sqrt[3]{x^4} + C; \quad 4) \sqrt[3]{x} + C.$$

$$3.2. \int 6\sqrt{x} dx:$$

$$1) \frac{1}{\sqrt{x}} + C; \quad 2) 6\sqrt{x} + C; \quad 3) 4\sqrt{x^3} + C; \quad 4) \sqrt{x^3} + C.$$

$$3.3. \int \sqrt[4]{x} dx:$$

$$1) \sqrt[4]{x^5} + C; \quad 2) 4\sqrt{x} + C; \quad 3) \frac{1}{4\sqrt[4]{x}} + C; \quad 4) \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} + C.$$

$$3.4. \int \frac{dx}{\sqrt{x}}:$$

1) $2\sqrt{x} + C$; 2) $\sqrt{x} + C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x}} + C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

3.5. $\int 5\sqrt[3]{x^2} dx$:

1) $5\sqrt[3]{x^5} + C$; 2) $3\sqrt[3]{x^5} + C$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{3} + C$; 4) $5\sqrt[3]{x} + C$.

3.6. $\int \sqrt{x} dx$:

1) $2\sqrt{x} + C$; 2) $\sqrt{x} + C$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$; 4) $\sqrt{x^3} + C$.

3.7. $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$:

1) $3\sqrt[3]{x^2} + C$; 2) $\sqrt[3]{x^2} + C$; 3) $2\sqrt[3]{x^2} + C$; 4) $2\sqrt[3]{x} + C$.

3.8. $\int \sqrt[5]{x} dx$:

1) $5\sqrt{x^6} + C$; 2) $\frac{5\sqrt[5]{x^6}}{6} + C$; 3) $\frac{5\sqrt{x}}{6} + C$; 4) $\sqrt[5]{x^6} + C$.

3.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$:

1) $\frac{1}{\sqrt{x}} + C$; 2) $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 3) $\sqrt{x} + C$; 4) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

3.10. $\int 2\sqrt[3]{x} dx$:

1) $3\sqrt[3]{x} + C$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$; 3) $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + C$; 4) $\frac{3\sqrt[3]{x}}{4} + C$.

3.11. $\int 7\sqrt[6]{x} dx$:

1) $\sqrt[6]{x^7} + C$; 2) $6\sqrt[6]{x^7} + C$; 3) $\sqrt[6]{x^5} + C$; 4) $\frac{\sqrt[6]{x}}{6} + C$.

3.12. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$:

1) $4\sqrt[4]{x} + C$; 2) $\sqrt[4]{x^3} + C$; 3) $\sqrt[4]{x} + C$; 4) $\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$.

3.13. $\int 3\sqrt{x} \, dx :$

1) $6\sqrt{x^3} + C ;$ 2) $3\sqrt{x} + C ;$ 3) $2\sqrt{x^3} + C ;$ 4) $\sqrt{x^3} + C .$

3.14. $\int \sqrt[5]{x^4} \, dx :$

1) $\frac{5\sqrt{x^9}}{9} + C ;$ 2) $\frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} + C ;$ 3) $5\sqrt[5]{x} + C ;$ 4) $\frac{\sqrt[5]{x^4}}{9} + C .$

3.15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} :$

1) $\sqrt[3]{x} + C ;$ 2) $\sqrt[3]{x^2} + C ;$ 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3} + C ;$ 4) $3\sqrt[3]{x} + C .$

3.16. $\int 4\sqrt[7]{x} \, dx :$

1) $7\sqrt[7]{x^8} + C ;$ 2) $4\sqrt{x^7} + C ;$ 3) $\frac{7\sqrt[7]{x^8}}{2} + C ;$ 4) $\frac{\sqrt[7]{x}}{8} + C .$

3.17. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x}} :$

1) $4\sqrt{x} + C ;$ 2) $2\sqrt{x} + C ;$ 3) $\frac{1}{\sqrt{x}} + C ;$ 4) $\sqrt{x} + C .$

3.18. $\int 5\sqrt[4]{x} \, dx :$

1) $\sqrt[4]{x^5} + C ;$ 2) $4\sqrt{x^5} + C ;$ 3) $4\sqrt[4]{x^5} + C ;$ 4) $\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} + C .$

3.19. $\int \sqrt[8]{x^3} \, dx :$

1) $8\sqrt[8]{x^{11}} + C ;$ 2) $\frac{8\sqrt[8]{x^{11}}}{11} + C ;$ 3) $\frac{\sqrt[8]{x}}{11} + C ;$ 4) $\frac{\sqrt{x^{11}}}{8} + C .$

3.20. $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{x}} :$

1) $\sqrt[4]{x^3} + C ;$ 2) $3\sqrt[4]{x} + C ;$ 3) $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} + C ;$ 4) $4\sqrt[4]{x^3} + C .$

3.21. $\int \sqrt[5]{x^4} \, dx :$

$$1) 5\sqrt[5]{x^9} + C; \quad 2) \frac{\sqrt[5]{x^9}}{9} + C; \quad 3) \frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} + C; \quad 4) \frac{\sqrt[5]{x}}{9} + C.$$

$$3.22. \int \frac{3dx}{\sqrt[5]{x^2}} :$$

$$1) 5\sqrt[5]{x^3} + C; \quad 2) \sqrt[5]{x^3} + C; \quad 3) 5\sqrt{x^3} + C; \quad 4) \frac{\sqrt[5]{x}}{3} + C.$$

$$3.23. \int \sqrt[6]{x^5} dx :$$

$$1) 6\sqrt[6]{x^{11}} + C; \quad 2) \frac{6\sqrt[6]{x^{11}}}{11} + C; \quad 3) \frac{\sqrt[6]{x}}{11} + C; \quad 4) \sqrt[6]{x^{11}} + C.$$

$$3.24. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} :$$

$$1) \sqrt{x} + C; \quad 2) 2\sqrt{x} + C; \quad 3) \frac{1}{\sqrt{x}} + C; \quad 4) 4\sqrt{x} + C.$$

$$3.25. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} :$$

$$1) \sqrt{x} + C; \quad 2) -2\sqrt{x} + C; \quad 3) -\frac{2}{\sqrt{x}} + C; \quad 4) \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

$$3.26. \int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{4} dx :$$

$$1) \sqrt[4]{x^7} + C; \quad 2) \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{4} + C; \quad 3) \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{3} + C; \quad 4) \frac{\sqrt[4]{x^7}}{7} + C.$$

$$3.27. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} :$$

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C; \quad 2) -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C; \quad 3) -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C; \quad 4) 3\sqrt[3]{x} + C.$$

$$3.28. \int \sqrt[7]{x^2} dx :$$

$$1) 7\sqrt[7]{x^9} + C; \quad 2) \frac{\sqrt[7]{x^3}}{9} + C; \quad 3) \frac{7\sqrt[7]{x^9}}{9} + C; \quad 4) \sqrt[7]{x^9} + C.$$

3.29. $\int 5\sqrt[7]{x^3} dx :$

1) $\frac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{2} + C ;$ 2) $7\sqrt[7]{x^4} + C ;$ 3) $\frac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{2} + C ;$ 4) $\frac{\sqrt[7]{x^7}}{7} + C .$

3.30. $\int \frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}} :$

1) $\frac{\sqrt[5]{x}}{5} + C ;$ 2) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + C ;$ 3) $\sqrt[5]{x^2} + C ;$ 4) $\sqrt[5]{x} + C .$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) dx.$$

Решение. Интегрируем непосредственно и используем свойство степени $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ и $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$, получаем:

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \right) dx &= \int \sqrt[4]{x} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{6} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{6} \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - \frac{1}{6} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^2} + C. \end{aligned}$$

Задание 4. Найти неопределенный интеграл.

4.1. $\int \sin (2x-1) dx :$

1) $-\frac{1}{2} \cos (2x-1) + C ;$ 2) $-\cos (2x-1) + C ;$
3) $2 \sin (2x-1) + C ;$ 4) $2 \cos (2x-1) + C .$

4.2. $\int (1+x)^9 dx :$

1) $\frac{x^{10}}{10} + C ;$ 2) $\frac{(1+x)^{10}}{10} + C ;$
3) $(1+x)^{10} + C ;$ 4) $(1+x)^9 + C .$

$$4.3. \int \frac{dx}{\cos^2(4x)} :$$

$$1) -\operatorname{tg}(4x) + C ;$$

$$2) \frac{1}{4} \operatorname{tg}(x) + C ;$$

$$3) \frac{1}{4} \operatorname{tg}(4x) + C ;$$

$$4) \operatorname{tg}(4x) + C .$$

$$4.4. \int \frac{dx}{1-3x} :$$

$$1) -\frac{1}{3} \ln|x| + C ;$$

$$2) \ln|1-3x| + C ;$$

$$3) \ln|x| + C ;$$

$$4) -\frac{1}{3} \ln|1-3x| + C .$$

$$4.5. \int \cos(4x) dx :$$

$$1) \frac{1}{4} \sin(4x) + C ;$$

$$2) \sin(4x) + C ;$$

$$3) \sin(x) + C ;$$

$$4) -\sin(4x) + C .$$

$$4.6. \int (1+2x)^3 dx :$$

$$1) (1+2x)^4 + C ;$$

$$2) \frac{1}{8} (1+2x)^4 + C ;$$

$$3) \frac{1}{4} (1+2x)^4 + C ;$$

$$4) \frac{x^4}{4} + C .$$

$$4.7. \int \sqrt{x+1} dx :$$

$$1) \frac{2\sqrt{x+1}}{3} + C ;$$

$$2) \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + C ;$$

$$3) \frac{\sqrt{x+1}}{3} + C ;$$

$$4) \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + C .$$

$$4.8. \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx :$$

$$1) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C ;$$

$$2) -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C ;$$

$$3) -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C ;$$

$$4) 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C .$$

$$4.9. \int \frac{dx}{(1+x)^2} :$$

$$1) -\frac{1}{1+x} + C ;$$

$$2) \frac{1}{1+x} + C ;$$

$$3) \frac{2}{(1+x)^2} + C ;$$

$$4) -\frac{2}{1+x} + C .$$

$$4.10. \int (1+3x)^3 dx :$$

$$1) 2(1+3x) + C ;$$

$$2) \frac{(1+3x)^4}{12} + C ;$$

$$3) \frac{(1+3x)^3}{3} + C ;$$

$$4) \frac{1+3x}{9} + C .$$

$$4.11. \int \frac{dx}{\sin^2(5x)} :$$

$$1) -\operatorname{ctg}(5x) + C ;$$

$$2) \operatorname{tg}(5x) + C ;$$

$$3) -\frac{\operatorname{ctg}(5x)}{5} + C ;$$

$$4) \frac{\operatorname{tg}(5x)}{5} + C .$$

$$4.12. \int \cos(1-x) dx :$$

$$1) -\sin(1-x) + C ;$$

$$2) \sin(1-x) + C ;$$

$$3) \cos(1-x) + C ;$$

$$4) 2\sin(1-x) + C .$$

$$4.13. \int 4\sqrt[3]{x-1} dx :$$

$$1) \sqrt[3]{(x-1)^4} + C ;$$

$$2) 3\sqrt[3]{(x-1)^4} + C ;$$

$$3) 4\sqrt[3]{(x-1)^2} + C ;$$

$$4) 3\sqrt[3]{x-1} + C .$$

$$4.14. \int \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx :$$

$$1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) + C ;$$

$$2) -\sin\left(\frac{x}{3}\right) + C ;$$

$$3) 3\sin\left(\frac{x}{3}\right) + C;$$

$$4) -3\sin\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

$$4.15. \int e^{-x} dx:$$

$$1) -e^{-x} + C;$$

$$2) e^{-x} + C;$$

$$3) -e^x + C;$$

$$4) e^x + C.$$

$$4.16. \int \frac{dx}{4x-3}:$$

$$1) \ln|4x-3| + C;$$

$$2) 4\ln|4x-3| + C;$$

$$3) 4\ln|x| + C;$$

$$4) \frac{\ln|4x-3|}{4} + C.$$

$$4.17. \int \sin\left(1 + \frac{x}{2}\right) dx:$$

$$1) -\cos\left(1 + \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$2) \cos\left(1 + \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$3) -2\cos\left(1 + \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$4) 2\cos\left(1 + \frac{x}{2}\right) + C.$$

$$4.18. \int e^{x-1} dx:$$

$$1) e^x + C;$$

$$2) e^{x-1} + C;$$

$$3) 2e^x + C;$$

$$4) -e^{x-1} + C.$$

$$4.19. \int (1-x)^4 dx:$$

$$1) -\frac{(1-x)^5}{5} + C;$$

$$2) (1-x)^5 + C;$$

$$3) \frac{(1-x)^5}{5} + C;$$

$$4) (1-x)^4 + C.$$

$$4.20. \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}:$$

$$1) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) + C;$$

$$2) 3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) + C;$$

$$3) \operatorname{tg}(x) + C;$$

$$4) \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

$$4.21. \int \frac{dx}{(5+4x)^2}:$$

$$1) -\frac{1}{5+4x} + C;$$

$$2) \frac{1}{5+4x} + C;$$

$$3) -\frac{1}{4x} + C;$$

$$4) -\frac{1}{4(5+4x)} + C.$$

$$4.22. \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx:$$

$$1) 5 \sin(x) + C;$$

$$2) -\sin\left(\frac{x}{5}\right) + C;$$

$$3) 5 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + C;$$

$$4) \sin\left(\frac{x}{5}\right) + C.$$

$$4.23. \int 3^{x-1} dx:$$

$$1) 3^{x-1} + C;$$

$$2) \frac{3^{x-1}}{\ln(3)} + C;$$

$$3) \frac{3^x}{\ln(3)} + C;$$

$$4) 3^x + C.$$

$$4.24. \int \sin(5x-3) dx:$$

$$1) -\frac{\cos(5x-3)}{5} + C;$$

$$2) \frac{\cos(5x-3)}{5} + C;$$

$$3) -\cos(5x-3) + C;$$

$$4) -\cos 5x + C.$$

$$4.25. \int \sqrt{1-4x} dx:$$

$$1) \frac{\sqrt{1-4x}}{6} + C;$$

$$2) \frac{2\sqrt{(1-4x)^3}}{3} + C;$$

$$3) \frac{\sqrt{1-4x}}{3} + C;$$

$$4) -\frac{\sqrt{(1-4x)^3}}{6} + C.$$

$$4.26. \int e^{7x} dx:$$

$$1) e^{7x} + C;$$

$$2) \frac{e^{7x}}{7} + C;$$

$$3) e^x + C;$$

$$4) \frac{e^7}{7} + C.$$

$$4.27. \int \sin(6x) dx :$$

$$1) \frac{\cos(6x)}{6} + C;$$

$$2) 6 \cos(6x) + C;$$

$$3) -\frac{\cos(6x)}{6} + C;$$

$$4) -\cos(6x) + C.$$

$$4.28. \int (5-2x)^3 dx :$$

$$1) -\frac{(5-2x)^4}{8} + C;$$

$$2) \frac{(5-2x)^4}{4} + C;$$

$$3) \frac{(5-2x)^3}{4} + C;$$

$$4) -\frac{(5-2x)^4}{4} + C.$$

$$4.29. \int \frac{dx}{\sin^2 6x} :$$

$$1) \frac{\operatorname{ctg}(6x)}{6} + C;$$

$$2) -\operatorname{ctg}(6x) + C;$$

$$3) \operatorname{ctg}(6x) + C;$$

$$4) -\frac{\operatorname{ctg}(6x)}{6} + C.$$

$$4.30. \int 2^{1-x} dx :$$

$$1) -\frac{2^{1-x}}{\ln(2)} + C;$$

$$2) \frac{2^{1-x}}{\ln(2)} + C;$$

$$3) -2^{1-x} + C;$$

$$4) 2^{1-x} + C.$$

Пример 4. Найти неопределенные интегралы:

$$a) \int (1-2x)^4 dx; \quad б) \int \frac{dx}{\cos^2(3x-1)}.$$

Решение: а) используем метод замены переменной:

$$\int f(u(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\substack{t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx}} f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

получаем:

$$\int (1-2x)^4 dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-2x \\ dt = (1-2x)' dx \\ dt = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int t^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int t^4 dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{10} t^5 + C = -\frac{1}{10} \cdot (1-2x)^5 + C.$$

Этот интеграл можно найти, используя правило линейной замены:

если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} F(a \cdot x + b) + C$.

Получаем:

$$\int (1-2x)^4 dx = \frac{1}{-2} \cdot \frac{(1-2x)^5}{5} + C = -\frac{1}{10} (1-2x)^5 + C;$$

б) используем правило линейной замены, получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x-1)} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + C.$$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл.

5.1. $\int x \sin(x) dx$:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $-x \cos(x) + \sin(x) + C$; | 2) $x \cos(x) + \sin(x) + C$; |
| 3) $-x \cos(x) - \sin(x) + C$; | 4) $x \cos(x) - \sin(x) + C$. |

5.2. $\int (x-2) \cos(x) dx$:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(x-2) \sin x + \cos(x) + C$; | 2) $-(x-2) \sin x + \cos(x) + C$; |
| 3) $-(x-2) \sin(x) - \cos(x) + C$; | 4) $(x-2) \sin(x) - \cos(x) + C$. |

5.3. $\int \ln(x) dx$:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x \ln(x) - x + C$; | 2) $x \ln(x) + x + C$; |
| 3) $-x \ln(x) - x + C$; | 4) $-x \ln(x) + x + C$. |

5.4. $\int x e^x dx$:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $x e^x + e^x + C$; | 2) $x e^x - e^x + C$; |
|------------------------|------------------------|

$$3) -xe^x + e^x + C;$$

$$4) -xe^x - e^x + C.$$

$$5.5. \int \arccos(x) dx:$$

$$1) x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$2) x \arccos(x) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + C;$$

$$3) x \arccos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C;$$

$$4) x \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$5.6. \int \arcsin(x) dx:$$

$$1) x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$2) x \arccos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C;$$

$$3) x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$4) x \arccos(x) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

$$5.7. \int x^5 \ln(x) dx:$$

$$1) \frac{x^6}{6} \ln(x) + \frac{x^6}{6} + C;$$

$$2) \frac{x^6}{6} \ln(x) + \frac{x^6}{36} + C;$$

$$3) \frac{x^6}{6} \ln(x) - \frac{x^6}{6} + C;$$

$$4) \frac{x^6}{6} \ln(x) - \frac{x^6}{36} + C.$$

$$5.8. \int (x+3) \sin(x) dx:$$

$$1) -(x+3) \cos(x) + \sin(x) + C;$$

$$2) (x+3) \cos(x) - \sin(x) + C;$$

$$3) -(x+3) \cos(x) - \sin(x) + C;$$

$$4) (x+3) \cos(x) + \sin(x) + C.$$

$$5.9. \int (2x+3) \cos(x) dx:$$

$$1) (2x+3) \sin(x) + \cos(x) + C;$$

$$2)$$

$$(2x+3) \sin(x) - 2 \cos(x) + C;$$

$$3) (2x+3) \sin(x) + 2 \cos(x) + C;$$

$$4) -(2x+3) \sin(x) - 2 \cos(x) + C.$$

$$5.10. \int \arctg(x) dx:$$

$$1) x \arctg(x) + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C;$$

$$2) \arctg(x) - \ln|1+x^2| + C;$$

$$3) x \arctg(x) + \ln|1+x^2| + C;$$

$$4) \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

$$5.11. \int (3x^2 - \frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}) dx :$$

$$1) x^3 + \sqrt{x} - \frac{12}{x^5} + C ;$$

$$2) x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} + C ;$$

$$3) 3x^3 - \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} + C ;$$

$$4) 3x^3 - \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{x^5} + C .$$

$$5.12. \int (x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x^6}) dx :$$

$$1) \frac{x^4}{4} - 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^5} + C ;$$

$$2) \frac{x^4}{4} - 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{x^5} + C ;$$

$$3) 3x^2 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{30}{x^7} + C ;$$

$$4) \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{6x^5} + C .$$

$$5.13. \int (6x^5 - \frac{1}{x^2} + 7\sqrt[6]{x}) dx :$$

$$1) x^6 + \frac{1}{x} + 6\sqrt[6]{x^7} + C ;$$

$$2) 30x^4 + \frac{2}{x^3} + \frac{7}{6\sqrt[6]{x^5}} + C ;$$

$$3) \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x} + 42\sqrt[5]{x} + C ;$$

$$4) x^6 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{6}x + C .$$

$$5.14. \int (8x - \frac{5}{x^6} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}) dx :$$

$$1) 2x^2 - \frac{6x^5}{5} - 15\sqrt{x} + C ;$$

$$2) 4x^2 - \frac{5}{6x^5} - \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{3} + C ;$$

$$3) 8 - 30x^5 + \frac{18}{5\sqrt[5]{x^8}} + C ;$$

$$4) 4x^2 + \frac{1}{x^5} - 15\sqrt[5]{x^2} + C .$$

$$5.15. \int (3 - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} - 7\sqrt[5]{x}) dx :$$

$$1) 3x - 6\sqrt[6]{x} - \frac{35}{6}\sqrt[5]{x^6} + C ;$$

$$2) 3x - \frac{6}{5x^4} - \frac{7\sqrt[5]{x^4}}{5} + C ;$$

$$3) -6\sqrt[5]{x^6} - \frac{7}{5\sqrt[5]{x^4}} + C ;$$

$$4) 3x - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^6} + C .$$

$$5.16. \int (4x^3 + 8\sqrt[7]{x^3} - \frac{1}{x^2}) dx :$$

$$1) x^4 - \frac{28}{5}\sqrt[7]{x^{10}} + \frac{1}{x} + C ;$$

$$2) 12x^2 - \frac{24}{7}\sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{2x} + C ;$$

$$3) \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}\sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^3} + C ;$$

$$4) x^4 - \frac{24}{7}\sqrt[7]{x} - \frac{1}{x} + C .$$

$$5.17. \int (x^2 + \frac{3}{x^4} - 8\sqrt[5]{x}) dx :$$

$$1) 2x - \frac{12}{x^3} - \frac{8}{\sqrt[5]{x}} + C ;$$

$$2) x^2 - \frac{3}{4x^3} - \frac{8}{5\sqrt[5]{x}} + C ;$$

$$3) \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^3} - \frac{20}{3}\sqrt[5]{x^6} + C ;$$

$$4) \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4x^3} - \frac{8}{2\sqrt[5]{x}} + C .$$

$$5.18. \int (2 - \frac{1}{x^6} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}}) dx :$$

$$1) \frac{6}{x^7} - \frac{24}{5}\sqrt[5]{x} + C ;$$

$$2) 2x + \frac{1}{5x^5} + 30\sqrt[5]{x} + C ;$$

$$3) 2x - \frac{1}{6x^5} - \frac{3}{2\sqrt[5]{x^3}} + C ;$$

$$4) 2x + \frac{1}{6x^5} - \frac{2\sqrt[5]{x}}{3} + C .$$

$$5.19. \int (5x^4 - \frac{3}{5x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx :$$

$$1) 20x^3 - \frac{1}{15x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + C ;$$

$$2) 20x^3 - \frac{3}{20x^3} - 2\sqrt{x} + C ;$$

$$3) x^5 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{20x^3} + C ;$$

$$4) x^5 + \frac{1}{5x^3} + 4\sqrt{x} + C .$$

$$5.20. \int (3x^2 + \frac{8}{x^6} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}) dx :$$

$$1) 6x^2 - \frac{4}{3x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x} + C ;$$

$$2) x^3 - \frac{8}{5x^5} - 4\sqrt[4]{x} + C ;$$

$$3) 6x^2 + \frac{4}{3x^5} - \sqrt[4]{x} + C ;$$

$$4) x^3 - \frac{8}{x^5} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}} + C .$$

$$5.21. \int (2 - 3x)^{10} dx :$$

$$1) (2-3x)^{11} + C ;$$

$$2) \frac{1}{11}(2-3x)^{11} + C ;$$

$$3) -\frac{1}{33}(2-3x)^{11} + C ;$$

$$4) 33(2-3x)^{11} + C .$$

$$5.22. \int e^{3x+4} dx :$$

$$1) \frac{1}{3}e^{3x+4} + C ;$$

$$2) \frac{1}{3e^{3x+4}} + C ;$$

$$3) e^{3x+4} + C ;$$

$$4) 3e^{3x+4} + C .$$

$$5.23. \int x^3 \sqrt[5]{x^4+1} dx :$$

$$1) \frac{1}{32} \sqrt[5]{(x^4+1)^6} + C ;$$

$$2) \frac{5}{24} \sqrt[5]{(x^4+1)^6} + C ;$$

$$3) \frac{1}{24} \sqrt[5]{(x^4+1)^6} + C ;$$

$$4) \frac{5}{32} \sqrt[5]{(x^4+1)^6} + C .$$

$$5.24. \int x\sqrt{x^2+3} dx :$$

$$1) 3\sqrt{x^2+3} + C ;$$

$$2) \frac{1}{3}\sqrt{x^2+3} + C ;$$

$$3) \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} + C ;$$

$$4) \frac{3}{\sqrt{x^2+3}} + C .$$

$$5.25. \int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx :$$

$$1) -3\sqrt{1-3x^2} + C ;$$

$$2) -\frac{3}{\sqrt{1-3x^2}} + C ;$$

$$3) 3\sqrt{1-3x^2} + C ;$$

$$4) -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x^2} + C .$$

$$5.26. \int \sin^3(x) \cos(x) dx :$$

$$1) 4\cos^4(x) + C ;$$

$$2) -4\sin^4(x) + C ;$$

$$3) \frac{1}{4}\sin^4(x) + C ;$$

$$4) -\frac{1}{4}\cos^4(x) + C .$$

$$5.27. \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx :$$

$$1) \frac{1}{\cos(x)} + C;$$

$$2) \frac{1}{2} \cos(x) + C;$$

$$3) \frac{1}{\sin(x)} + C;$$

$$4) -\frac{1}{2} \sin(x) + C.$$

$$5.28. \int \frac{1}{\cos^2(x) \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x)}} dx:$$

$$1) 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}(x)} + C;$$

$$2) \frac{2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}(x)}} + C;$$

$$3) \frac{2}{\cos^2(x)} + C;$$

$$4) 2 \cos^2(x) + C.$$

$$5.29. \int \frac{\arcsin^3(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx:$$

$$1) -\frac{4}{\arcsin^4(x)} + C;$$

$$2) 4\sqrt{1-x^2} + C;$$

$$3) \frac{1}{4} \arcsin^4(x) + C;$$

$$4) 4 \arcsin^4(x) + C.$$

$$5.30. \int \frac{\sqrt[3]{\ln(x)}}{x} dx:$$

$$1) \frac{3}{4\sqrt[3]{\ln^4(x)}} + C;$$

$$2) \frac{3}{8\sqrt[3]{\ln^4(x)}} + C;$$

$$3) \frac{3}{8} \sqrt[3]{\ln^4(x)} + C;$$

$$4) \frac{3}{4} \sqrt[3]{\ln^4(x)} + C.$$

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

$$a) \int \left(4 + \sqrt[5]{x^4} - \frac{4}{x^3} \right) dx; \quad б) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad в) \int (x+2)e^x dx.$$

Решение:

а) применяем непосредственное интегрирование:

$$\int \left(4 + \sqrt[5]{x^4} - \frac{4}{x^3} \right) dx = 4 \cdot \int dx + \int x^{\frac{4}{5}} dx - 4 \cdot \int x^{-3} dx = 4x + \frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} -$$

$$-4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = 4x + \frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} - 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = 4x + \frac{5}{9} \sqrt[5]{x^9} + \frac{2}{x^2} + C;$$

б) применяем метод замены переменной:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = (1 - x^2)' dx \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C;$$

в) применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

получаем:

$$\int (x+2) e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+2 & dv = e^x dx \\ du = (x+2)' dx & dv = \int e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= (x+2) \cdot e^x - \int e^x dx + C = e^x \cdot (x+2) - e^x + C = e^x \cdot (x+1) + C.$$

Задание 6. Найти неопределенный интеграл.

6.1. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}:$

1) $\frac{1}{6(3x+2)^2} + C;$

2) $-\frac{1}{6(3x+2)^2} + C;$

3) $\frac{1}{2(3x+2)^2} + C;$

4) $-\frac{1}{3(3x+2)^2} + C.$

6.2. $\int \frac{dx}{(5x-8)^4}:$

$$1) -\frac{1}{15(5x+8)^3} + C;$$

$$2) \frac{1}{15(5x+8)^3} + C;$$

$$3) -\frac{1}{5(5x+8)^3} + C;$$

$$4) \frac{1}{5(5x+8)^3} + C.$$

$$6.3. \int \frac{dx}{(9-x)^5}:$$

$$1) -\frac{1}{4(9-x)^4} + C;$$

$$2) \frac{1}{36(9-x)^4} + C;$$

$$3) \frac{1}{3(9-x)^4} + C;$$

$$4) -\frac{1}{36(9-x)^4} + C.$$

$$6.4. \int \frac{dx}{(7-3x)^5}:$$

$$1) -\frac{1}{12(3x-7)^4} + C;$$

$$2) \frac{1}{21(3x-7)^4} + C;$$

$$3) -\frac{1}{12(3x-7)^4} + C;$$

$$4) \frac{1}{12(3x-7)^4} + C.$$

$$6.5. \int \frac{dx}{(2x-9)^7}:$$

$$1) \frac{1}{12(2x-9)^6} + C;$$

$$2) -\frac{1}{18(2x-9)^6} + C;$$

$$3) -\frac{1}{12(2x-9)^6} + C;$$

$$4) \frac{1}{18(2x-9)^6} + C.$$

$$6.6. \int \frac{dx}{(12-9x)^3}:$$

$$1) -\frac{1}{18(12-9x)^2} + C;$$

$$2) \frac{1}{108(12-9x)^2} + C;$$

$$3) -\frac{1}{108(12-9x)^2} + C;$$

$$4) \frac{1}{18(12-9x)^2} + C.$$

$$6.7. \int \frac{dx}{(x+6)^5}:$$

$$1) -\frac{1}{4(x+6)^4} + C;$$

$$2) \frac{1}{4(x+6)^4} + C;$$

$$3) \frac{1}{6(x+6)^4} + C;$$

$$4) -\frac{1}{6(x+6)^4} + C;$$

$$6.8. \int \frac{dx}{(8x+1)^5}:$$

$$1) \frac{1}{8(8x+1)^4} + C;$$

$$2) -\frac{1}{32(8x+1)^4} + C;$$

$$3) -\frac{1}{8(8x+1)^4} + C;$$

$$4) \frac{1}{32(8x+1)^4} + C.$$

$$6.9. \int \frac{dx}{(7x+5)^3}:$$

$$1) -\frac{1}{14(7x+5)^2} + C;$$

$$2) \frac{1}{14(7x+5)^2} + C;$$

$$3) \frac{1}{35(7x+5)^2} + C;$$

$$4) -\frac{1}{35(7x+5)^2} + C.$$

$$6.10. \int \frac{dx}{(6x+2)^3}:$$

$$1) \frac{1}{12(6x+2)^2} + C;$$

$$2) -\frac{1}{2(6x+2)^2} + C;$$

$$3) -\frac{1}{12(6x+2)^2} + C;$$

$$4) \frac{1}{2(6x+2)^2} + C.$$

$$6.11. \int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx:$$

$$1) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C;$$

$$2) 5 \cdot \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + C;$$

$$3) -\ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C.$$

$$6.12. \int \frac{x}{(x-3)(x+2)} dx:$$

$$1) \frac{2}{5} \ln |x+2| + \frac{3}{5} \ln |x-3| + C;$$

$$2) \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right|;$$

$$3) \frac{3}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C;$$

$$4) \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C.$$

$$6.13. \int \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} dx:$$

$$1) \frac{4}{5} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{5} \ln |(x-3)^4 (x+2)| + C;$$

$$3) \frac{4}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C;$$

$$4) \frac{2}{5} \ln \left| \frac{(x+2)^3}{x-3} \right| + C.$$

$$6.14. \int \frac{x+2}{(x+1)(x+4)} dx:$$

$$1) -\ln \left| \frac{(x+4)^2}{x+1} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{3} \ln |(x+4)^2 (x+1)| + C;$$

$$4) \ln \left| \frac{(x+1)^3}{x+4} \right| + C.$$

$$6.15. \int \frac{x}{(x+1)(x+4)} dx:$$

$$1) \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C;$$

$$2) \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+4}{x+1} \right| + C;$$

$$3) \ln \left| \frac{(x+1)^4}{x+4} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+4)^4}{x+1} \right| + C.$$

$$6.16. \int \frac{1}{(x+1)(x+4)} dx:$$

$$1) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+4}{x+1} \right| + C;$$

$$3) \frac{2}{3} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x+4} \right| + C;$$

$$4) \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+4}{(x+1)^2} \right| + C.$$

$$6.17. \int \frac{1}{(x-2)(x-5)} dx:$$

$$1) \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{3} \ln |(x-2)(x-5)| + C;$$

$$4) \ln \left| \frac{(x-5)^2}{x-2} \right| + C.$$

$$6.18. \int \frac{x}{(x-2)(x-5)} dx:$$

$$1) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{3} (5 \ln |x-5| - 2 \ln |x-2|) + C;$$

$$4) \frac{1}{7} \ln |(x-2)(x-5)| + C.$$

$$6.19. \int \frac{x+4}{(x-2)(x-5)} dx:$$

$$1) \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-2}{x-5} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x-2)^2}{x-5} \right| + C;$$

$$4) \ln \frac{|x-5|^3}{|x-2|^2} + C.$$

$$6.20. \int \frac{x+4}{(x-2)(x+5)} dx:$$

$$1) \frac{1}{7} \ln |(x-2)^6(x+5)| + C;$$

$$2) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+5} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{(x+5)^2} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{7} \ln \left| \frac{(x-2)^2}{x+5} \right| + C.$$

$$6.21. \int \frac{x+1}{(x-1)x^2} dx:$$

$$1) \ln \left| \frac{x+1}{(x-1)x^2} \right| + C;$$

$$3) 2\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C;$$

$$2) 2\ln|x-1| - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C;$$

$$4) 2\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

$$6.22. \int \frac{x+1}{(x-2)x^2} dx:$$

$$1) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C;$$

$$3) \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{1}{2x} + C;$$

$$2) \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| + C;$$

$$4) 3\ln|x-2| + \frac{1}{x} + C.$$

$$6.23. \int \frac{x+1}{(x-2)^2 x} dx:$$

$$1) \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C;$$

$$3) \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{(x-2)^2 x} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{3}{2(x-2)} + C.$$

$$6.24. \int \frac{x-1}{(x-2)^2 x} dx:$$

$$1) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{1}{2(x-2)} + C.$$

$$3) \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C;$$

$$2) \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| + C;$$

$$4) \ln \left| \frac{x+1}{(x-2)^2 x} \right| + C.$$

$$6.25. \int \frac{x-1}{(x+3)^2 x} dx:$$

$$1) \ln \left| \frac{x+1}{(x+3)^2 x} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| - \frac{4}{3(x+3)} + C;$$

$$3) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$$

$$6.26. \int \frac{x-2}{(x+3)^2 x} dx:$$

$$1) \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| - \frac{5}{3(x+3)} + C;$$

$$2) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-2}{(x+3)^2 x} \right| + C;$$

$$3) \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C;$$

$$4) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$$

$$6.27. \int \frac{x-2}{(x+3)x^2} dx:$$

$$1) \ln \left| \frac{x-2}{(x+3)x^2} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C;$$

$$3) \frac{5}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C;$$

$$4) \frac{5}{9} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{2}{3x} + C.$$

$$6.28. \int \frac{x-5}{(x+3)x^2} dx:$$

$$1) \frac{8}{9} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{5}{3x} + C;$$

$$2) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x-5} \right| + C;$$

$$4) \ln \left| \frac{x-5}{(x+3)x^2} \right| + C.$$

$$6.29. \int \frac{x-5}{(x-3)x^2} dx:$$

$$1) \ln \left| \frac{x-5}{(x-3)x^2} \right| + C;$$

$$2) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C;$$

$$3) \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| - \frac{5}{3x} + C;$$

$$4) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-5}{x-3} \right| + C.$$

$$6.30. \int \frac{x+4}{(x-3)x^2} dx:$$

$$1) \frac{6}{9} \ln \left| \frac{x+4}{x-3} \right| + C;$$

$$2) \ln \left| \frac{x+4}{(x-3)x^2} \right| + C;$$

$$3) \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+4}{x} \right| + C;$$

$$4) \frac{7}{9} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + \frac{4}{3x} + C.$$

Пример 6. Найти неопределенные интегралы:

$$а) \int \frac{dx}{(2-3x)^5}; \quad б) \int \frac{x-2}{(x+1)(x-4)} dx; \quad в) \int \frac{x+1}{(x-2)x^2} dx.$$

Решение:

а) интегрируем простейшую рациональную дробь, применяя правило линейной замены:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2-3x)^5} &= \int (2-3x)^{-5} dx = \frac{1}{-3} \cdot \frac{(2-3x)^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{1}{-3} \cdot \frac{(2-3x)^{-4}}{-4} + C = \\ &= \frac{1}{12(2-3x)^4} + C; \end{aligned}$$

б) разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x(A+B) + (-4A+B)}{(x+1)(x-4)}.$$

Приравниваем числители исходной дроби и полученной, используя тождественное равенство многочленов, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x-2 = x(A+B) + (-4A+B), \quad 1 = A+B \quad \text{и} \quad -2 = -4A+B.$$

$$\text{Из полученной системы } \begin{cases} A+B=1; \\ -4A+B=-2 \end{cases} \text{ находим } A=\frac{3}{5}, B=\frac{2}{5}.$$

Интегрируем

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{(x+1)(x-4)} dx &= \int \frac{\frac{3}{5}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{2}{5}}{x-4} dx = \frac{3}{5} \ln|x+1| + \frac{2}{5} \ln|x-4| + C = \\ &= \frac{1}{5} \ln|(x+1)^3(x-4)^2| + C; \end{aligned}$$

в) разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-2)x^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x-2) + C(x-2)}{(x-2)x^2} = \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(-2B+C) + (-2C)}{(x-2)x^2},\end{aligned}$$

$$x+1 = x^2(A+B) + x(-2B+C) + (-2C), \quad 0 = A+B, \quad 1 = -2B+C, \quad 1 = -2C.$$

$$\text{Из полученной системы } \begin{cases} A+B=0; \\ -2B+C=1; \\ -2C=1 \end{cases} \text{ будем иметь следующие}$$

$$\text{значения: } C = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad A = \frac{3}{4}.$$

Интегрируем

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-2)x^2} dx &= \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} \right) dx = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-2| - \frac{3}{4} \ln|x| - \frac{1}{2} \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{1}{2x} + C.\end{aligned}$$

Задание 7. Представить дробно-рациональное выражение в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$7.1. \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1};$$

$$1) 1 + \frac{4-4x}{x^2-1};$$

$$2) 1 + \frac{4x-4}{x^2-1};$$

$$3) 1 - \frac{4x+2}{x^2-1};$$

$$4) 1 - \frac{2-4x}{x^2-1}.$$

$$7.2. \frac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1};$$

$$1) x + \frac{2x-4}{x^2-2x+1};$$

$$2) x + 2 + \frac{4-2x}{x^2-2x+1};$$

$$3) 2 + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1};$$

$$4) x + 2 - \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$7.3. \frac{x^4 - 2x + 6}{x - 1};$$

$$1) x^3 - x^2 + x + 1 + \frac{5}{x - 1};$$

$$2) -x^3 + x - 1 - \frac{3}{x - 1};$$

$$3) x^3 + x^2 + x - 1 + \frac{5}{x - 1};$$

$$4) x^3 + x^2 - 6 + \frac{7}{x - 1}.$$

$$7.4. \frac{x^3 - 2x + 6}{x - 3};$$

$$1) x^2 + 2x - 1 + \frac{13}{x - 3};$$

$$2) x^2 + 5x - 2 - \frac{17}{x - 3};$$

$$3) 2x^2 - x + 2 - \frac{27}{x - 3};$$

$$4) x^2 + 3x + 7 + \frac{27}{x - 3}.$$

$$7.5. \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x - 2};$$

$$1) x^3 + 2x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x - 2};$$

$$2) x^3 + 4x^2 + 5 - \frac{3}{x - 2};$$

$$3) -x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + \frac{3}{x - 2};$$

$$4) x^3 + 2x^2 + 2x - 1 + \frac{9}{x - 2}.$$

$$7.6. \frac{3x^4 - 3x^2 - 8}{x + 1};$$

$$1) x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{x + 1};$$

$$2) 3x^3 - 3x^2 - \frac{8}{x + 1};$$

$$3) 3x^3 - 3x^2 + \frac{4}{x + 1};$$

$$4) 3x^3 - 3x^2 + x - \frac{7}{x + 1}.$$

$$7.7. \frac{-3x^4 - 2x^2}{x + 2};$$

$$1) -3x^3 + 6x^2 - 14x + 28 - \frac{56}{x + 2};$$

$$2) 3x^3 + 5x^2 - 12 + \frac{2}{x + 2};$$

$$3) -3x^2 + 19x - 12 + \frac{14}{x + 2};$$

$$4) -3x^3 + 16x^2 - 3x + 1 + \frac{2}{x + 2}.$$

$$7.8. \frac{-2x^3 - 3x^2}{x+1}:$$

$$1) x^2 - x + 1 + \frac{1}{x+1};$$

$$3) -2x^2 + x - 2 - \frac{3}{x+1};$$

$$2) -2x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1};$$

$$4) -2x^2 + 4 - \frac{5}{x+1}.$$

$$7.9. \frac{2x^3 - 3x + 4}{x+3}:$$

$$1) 2x^2 - 5x + 1 - \frac{12}{x+3};$$

$$3) 2x^2 - 6x + 15 - \frac{41}{x+3};$$

$$2) 2x^2 - x + 1 + \frac{14}{x+3};$$

$$4) -2x^2 + 5x - 2 - \frac{14}{x+3}.$$

$$7.10. \frac{5x^2 - 3x + 4}{x+3}:$$

$$1) 5x - 9 + \frac{13}{x+3};$$

$$3) 5x + 1 - \frac{85}{x+3};$$

$$2) -5x + 12 - \frac{1}{x+3};$$

$$4) 5x - 18 + \frac{58}{x+3}.$$

$$7.11. \frac{-5x^2 - 4x + 1}{x+5}:$$

$$1) -5x^2 - 21 + \frac{12}{x+5};$$

$$3) -5x^2 - 16x + 3 - \frac{14}{x+5};$$

$$2) -5x^2 + 21x - \frac{5}{x+5};$$

$$4) -5x + 21 - \frac{104}{x+5}.$$

$$7.12. \frac{6x^2 + 4x + 1}{x+2}:$$

$$1) 6x - 8 + \frac{17}{x+2};$$

$$3) -6x + 1 - \frac{3}{x+2};$$

$$2) x + 7 - \frac{18}{x+2};$$

$$4) 6x + 4 - \frac{9}{x+2}.$$

$$7.13. \frac{x^2 + 8x + 1}{x+6}:$$

$$1) x-1+\frac{13}{x+6};$$

$$2) x+2-\frac{11}{x+6};$$

$$3) -x+2-\frac{14}{x+6};$$

$$4) x+3-\frac{6}{x+6}.$$

$$7.14. \frac{-2x^2+8x+2}{x-6};$$

$$1) -2x+5-\frac{12}{x-6};$$

$$2) 2x-1+\frac{11}{x-6};$$

$$3) -2x-4-\frac{22}{x-6};$$

$$4) -2x+7-\frac{14}{x-6}.$$

$$7.15. \frac{-2x^3+x+2}{x-1};$$

$$1) -2x^2-3x+1-\frac{4}{x-1};$$

$$2) -2x^2+5x+2-\frac{1}{x-1};$$

$$3) 2x^2+7x-3+\frac{4}{x-1};$$

$$4) -2x^2-2x-1+\frac{1}{x-1}.$$

$$7.16. \frac{-2x^4+x+2}{x-2};$$

$$1) -2x^3-4x^2+3x+1-\frac{2}{x-2};$$

$$2) -2x^3-x^2+5+\frac{9}{x-2};$$

$$3) -2x^3-4x^2-8x-15-\frac{28}{x-2};$$

$$4) 2x^3+x^2-x+1-\frac{1}{x-2}.$$

$$7.17. \frac{-7x^2+3x+5}{x-4};$$

$$1) -7x-25-\frac{95}{x-4};$$

$$2) -7x+21-\frac{13}{x-4};$$

$$3) 7x-25+\frac{59}{x-4};$$

$$4) -7x+16+\frac{14}{x-4}.$$

$$7.18. \frac{-5x^3+5}{x+2};$$

$$1) -5x^2+9x-2+\frac{1}{x+2};$$

$$2) -5x^2+10x-20+\frac{45}{x+2};$$

$$3) -5x^2 + x - 4 - \frac{1}{x+2};$$

$$4) -5x^2 + x + 2 - \frac{6}{x+2}.$$

$$7.19. \frac{5x^3 + 1}{x+3};$$

$$1) 5x^2 - 15x + 1 - \frac{12}{x+3};$$

$$2) -5x^2 - 12x + 14 - \frac{34}{x+3};$$

$$3) 5x^2 + x - 2 - \frac{102}{x+3};$$

$$4) 5x^2 - 15x + 45 - \frac{134}{x+3}.$$

$$7.20. \frac{8x^2 + x}{x-2};$$

$$1) 8x + 2 - \frac{16}{x-2};$$

$$2) 8x + 4 - \frac{x}{x-2};$$

$$3) -8x + 3 + \frac{43}{x-2};$$

$$4) 8x + 17 + \frac{34}{x-2}.$$

$$7.21. \frac{4x^2 + 5x - 3}{x-2};$$

$$1) 4x + 13 + \frac{23}{x-2};$$

$$2) 4x + 13 + \frac{12}{x-2};$$

$$3) -4x - 1 - \frac{6}{x-2};$$

$$4) 4x + 1 - \frac{1}{x-2}.$$

$$7.22. \frac{4x^3 + 2x - 3}{x-2};$$

$$1) 4x^2 - 8x + 9 + \frac{12}{x-2};$$

$$2) 4x^2 + 8x + 18 + \frac{33}{x-2};$$

$$3) -4x^2 - x + 1 + \frac{6}{x-2};$$

$$4) 4x^2 + 18x - 1 - \frac{3}{x-2}.$$

$$7.23. \frac{4x^4 - 7}{x-1};$$

$$1) 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - \frac{3}{x-1};$$

$$2) 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4 + \frac{3}{x-1};$$

$$3) 4x^3 - x^2 + x + \frac{9}{x-1};$$

$$4) -4x^3 + x + 3 - \frac{5}{x-1}.$$

$$7.24. \frac{4-7x^3}{x-1}:$$

$$1) -7x^2+6x-1-\frac{2}{x-1};$$

$$2) 4x^2+3x-9+\frac{1}{x-1};$$

$$3) -7x^2-7x-7-\frac{3}{x-1};$$

$$4) -7x^2+6x+2-\frac{3}{x-1}.$$

$$7.25. \frac{5-7x^2}{x+1}:$$

$$1) 5x-3x^2+4-\frac{1}{x+1};$$

$$2) 5x-7-\frac{3}{x+1};$$

$$3) -7x+2+\frac{3}{x+1};$$

$$4) -7x+7-\frac{2}{x+1}.$$

$$7.26. \frac{x^3-x^2+8}{x+1}:$$

$$1) x^2-x+2-\frac{3}{x+1};$$

$$2) x^2-2x+\frac{6}{x+1}+2;$$

$$3) x^2+4x-6+\frac{1}{x+1};$$

$$4) -x^2+x-1+\frac{19}{x+1}.$$

$$7.27. \frac{x^3-x+7}{x+1}:$$

$$1) x^2-x+\frac{7}{x+1};$$

$$2) x^2+x-\frac{9}{x+1};$$

$$3) -x^2+x-\frac{3}{x+1};$$

$$4) x^2+4x-\frac{7}{x+1}.$$

$$7.28. \frac{x^2-x+7}{x+1}:$$

$$1) x+3-\frac{6}{x+1};$$

$$2) x+7-\frac{4}{x+1};$$

$$3) -x+2+\frac{4}{x+1};$$

$$4) x-2+\frac{9}{x+1}.$$

$$7.29. \frac{x^2-9x-2}{x+2}:$$

$$1) x + 12 - \frac{3}{x+2};$$

$$2) x + 11 - \frac{16}{x+2};$$

$$3) x - 11 + \frac{20}{x+2};$$

$$4) x - 12 + \frac{1}{x+2}.$$

$$7.30. \frac{x^3 - 9x - 2}{x+2};$$

$$1) x^2 + 3x - 4 + \frac{1}{x+1};$$

$$2) x^2 - 2x - 5 + \frac{8}{x+2};$$

$$3) -x^2 + x + 1 - \frac{2}{x+2};$$

$$4) x^2 - 6x + 1 + \frac{9}{x+2}.$$

Пример 7. Представить дробно-рациональное выражение $\frac{x^3 + 3x^2 - 6}{x - 4}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Для представления неправильной рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби разделим «уголком» числитель на знаменатель дроби:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 6 \quad | \quad x - 4 \\ x^3 - 4x^2 \quad x^2 + 7x + 28 \\ \hline -7x^2 - 6 \\ -7x^2 - 28x \\ \hline 28x - 6 \\ 28x - 112 \\ \hline 106 \end{array}$$

$$\text{Получаем: } \frac{x^3 + 3x^2 - 6}{x - 4} = x^2 + 7x + 28 + \frac{106}{x - 4}.$$

Задание 8. Вычислить определенный интеграл.

$$8.1. \int_1^3 2x^3 dx :$$

$$1) 45; \quad 2) 40; \quad 3) 41; \quad 4) 52.$$

$$8.2. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} :$$

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 5.

8.3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx :$

1) 0; 2) 0,25; 3) 1; 4) 0,5.

8.4. $\int_{-2}^1 (x+1) dx :$

1) 0,5; 2) 0; 3) 1,5; 4) -1.

8.5. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx :$

1) $\frac{3}{4}$; 2) 1; 3) $\frac{4}{3}$; 4) -1.

8.6. $\int_{-2}^0 2x dx :$

1) 4; 2) -4; 3) 2; 4) 0.

8.7. $\int_0^4 \sqrt{x} dx :$

1) 2; 2) 16; 3) 1; 4) $\frac{16}{3}$.

8.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx :$

1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 0,5.

8.9. $\int_0^1 e^x dx :$

1) 1; 2) $e - 1$; 3) 0; 4) e .

8.10. $\int_{-1}^1 6x^2 dx :$

1) 4; 2) 6; 3) 0; 4) -3.

8.11. $\int_1^2 (3-2x) dx :$

1) 3; 2) 10; 3) 1; 4) 0.

8.12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)} :$

1) -1 ; 2) $\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 0.

8.13. $\int_1^e \frac{2dx}{x} :$

1) 2; 2) $2e$; 3) 1; 4) 3.

8.14. $\int_0^2 (x^2 - 1) dx :$

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 3; 4) 0.

8.15. $\int_{-1}^0 (1 - 4x) dx :$

1) 5; 2) -1 ; 3) 1; 4) 3.

8.16. $\int_0^1 (e^x - 1) dx :$

1) e ; 2) 2; 3) $e - 2$; 4) 1.

8.17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x)} :$

1) 1; 2) π ; 3) 0; 4) $\sqrt{2}$.

8.18. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin(x) dx :$

1) 1; 2) -2 ; 3) 2; 4) π .

8.19. $\int_{-2}^1 6 dx :$

1) 6; 2) 18; 3) 12; 4) -18 .

8.20. $\int_1^2 2^x dx :$

1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{\ln(2)}$; 4) $\frac{2}{\ln(2)}$.

8.21. $\int_{-2}^0 (2-x) dx :$

1) 6; 2) 4; 3) 0; 4) -6.

8.22. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3 \cos(x) dx :$

1) 3; 2) π ; 3) 0; 4) -3.

8.23. $\int_{-1}^2 8x^3 dx :$

1) 32; 2) 3; 3) 30; 4) 25.

8.24. $\int_0^3 \frac{dx}{x+1} :$

1) 1; 2) $\ln(4)$; 3) $\ln(3)$; 4) 0.

8.25. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} :$

1) 3; 2) -1,5; 3) 0,5; 4) 1.

8.26. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{\sin^2(x)} :$

1) $2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8.27. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} :$

1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) π ; 4) $\frac{\pi}{2}$.

8.28. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} :$

1) 0; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

$$8.29. \int_0^1 5\sqrt[4]{x} dx :$$

- 1) 1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 4; 4) 5.

$$8.30. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - 1) dx :$$

- 1) $1 - \frac{\pi}{2}$; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 0.

Пример 8. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-1}^2 (4x - 3) dx.$$

Решение. Для вычисления применяем свойства определенного интеграла и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4x - 3) dx &= 4 \int_{-1}^2 x dx - 3 \int_{-1}^2 dx = \left(4 \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^2 = (2x^2 - 3x) \Big|_{-1}^2 = \\ &= (2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) = 3 - 5 = -2. \end{aligned}$$

Задание 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$9.1. y = 0; x = 0; \frac{x}{6} + \frac{y}{7} = 1:$$

- 1) 23; 2) 22; 3) 21; 4) 20.

$$9.2. y = 0; x = 0; \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1:$$

- 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 1.

$$9.3. y = 0; x = 0; \frac{x}{7} + \frac{y}{6} = 1:$$

1) 20; 2) 21; 3) 22; 4) 23.

$$9.4. y = 0; x = 0; \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1:$$

1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9.

$$9.5. y = 0; x = 0; \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1:$$

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

$$9.6. y = 0; x = 0; \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1:$$

1) 7; 2) 10; 3) 8; 4) 8.

$$9.7. y = 0; x = 0; \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1:$$

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

$$9.8. y = 0; x = 0; \frac{x}{4} + \frac{y}{1} = 1:$$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

$$9.9. y = 0; x = 0; \frac{x}{1} + \frac{y}{6} = 1:$$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

$$9.10. y = 0; x = 0; \frac{x}{1} + \frac{y}{8} = 1:$$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

$$9.11. y = 0; x = 0; \frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1:$$

1) 2; 2) 5; 3) 4; 4) 3.

$$9.12. y = 0; x = 0; \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1:$$

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

$$9.13. y = 0; x = 0; \frac{x}{-5} + \frac{y}{-4} = 1:$$

1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7.

$$9.14. y = 0; x = 0; \frac{x}{7} + \frac{y}{-4} = 1:$$

1) 15; 2) 14; 3) 13; 4) 12.

9.15. $y = 0; x = 0; \frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1:$

1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10.

9.16. $y = 0; x = 0; x = 2; y = -x + 3:$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

9.17. $y = 0; x = 0; x = 2; y = -x + 5:$

1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11.

9.18. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x:$

1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 2.

9.19. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 1:$

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

9.20. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 4:$

1) 10; 2) 11; 3) 12; 4) 13.

9.21. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 5:$

1) 11; 2) 12; 3) 14; 4) 13.

9.22. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 7:$

1) 18; 2) 19; 3) 20; 4) 21.

9.23. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 6:$

1) 15; 2) 16; 3) 17; 4) 18.

9.24. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 8:$

1) 18; 2) 19; 3) 20; 4) 21.

9.25. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 9:$

1) 22; 2) 21; 3) 20; 4) 19.

9.26. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x - 1:$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

9.27. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 10:$

1) 22; 2) 23; 3) 24; 4) 25.

9.28. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 11:$

1) 23; 2) 24; 3) 25; 4) 26.

9.29. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 12:$

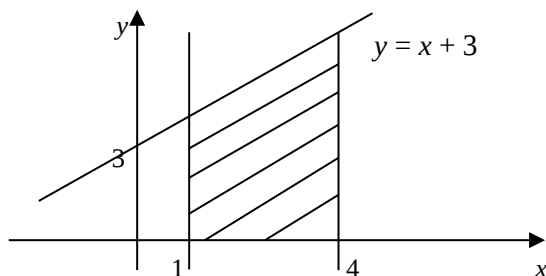
1) 28; 2) 27; 3) 26; 4) 25.

9.30. $y = 0; x = 1; x = 3; y = x + 13:$

1) 28; 2) 30; 3) 29; 4) 27.

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y=0$; $x=1$; $x=4$; $y=x+3$.

Решение. Выполним чертёж и заштрихуем полученную фигуру:



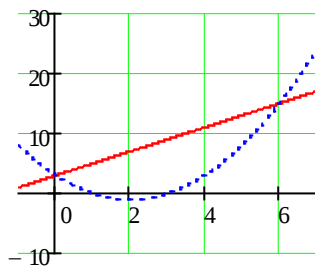
Площадь полученной фигуры равна:

$$S = \int_1^4 (x+3) dx = \int_1^4 x dx + 3 \int_1^4 dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{16}{2} + 12 \right) - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = 20 - 3,5 = 16,5.$$

Задание 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой.

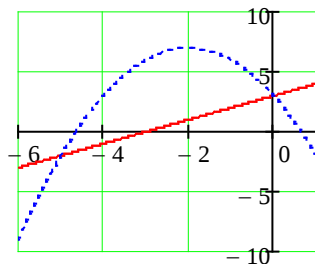
10.1. $y = x^2 - 4x + 3$; $y = 2x + 3$:

- 1) 42;
- 2) 36;
- 3) 24;
- 4) 19.



10.2. $y = -x^2 - 4x + 3$; $y = x + 3$:

- 1) $125/6$;
- 2) 21;
- 3) 20;
- 4) $119/5$.



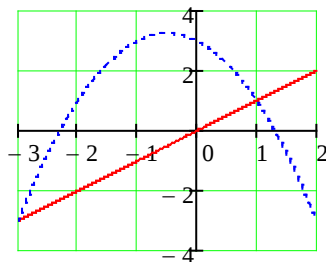
10.3. $y = -x^2 - x + 3$; $y = x$:

1) $73/6$;

2) 11;

3) 10;

4) $32/3$.



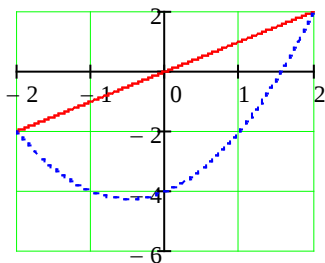
10.4. $y = x^2 + x - 4$; $y = x$:

1) $73/6$;

2) 11;

3) 10;

4) $32/3$.



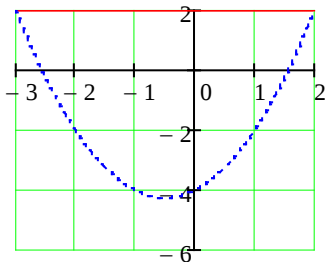
10.5. $y = x^2 + x - 4$; $y = 2$:

1) $73/6$;

2) $125/6$;

3) 10;

4) $32/3$.



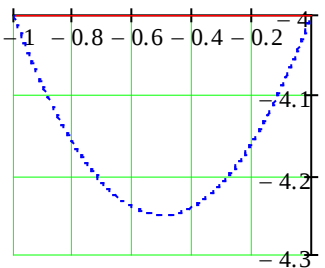
10.6. $y = x^2 + x - 4$; $y = -4$:

1) $1/6$;

2) $5/6$;

3) 1;

4) $2/3$.



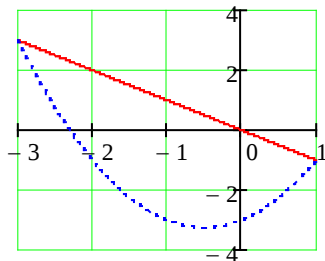
10.7. $y = x^2 + x - 3$; $y = -x$:

1) $11/6$;

2) $25/6$;

3) $32/3$;

4) $22/3$.



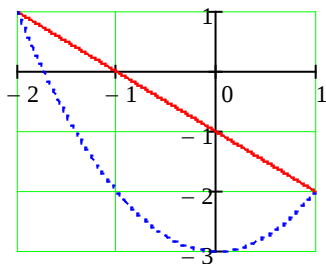
10.8. $y = x^2 - 3$; $y = -x - 1$:

1) $7/3$;

2) $5/6$;

3) $2/3$;

4) $9/2$.



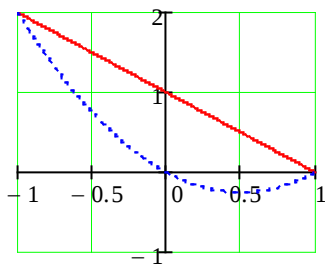
10.9. $y = x^2 - x$; $y = -x + 1$:

1) $4/3$;

2) $5/6$;

3) $2/3$;

4) $9/2$.



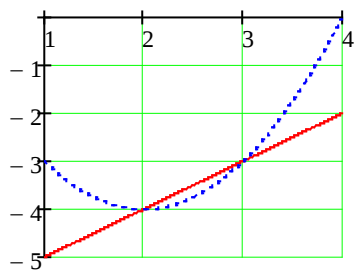
10.10. $y = x^2 - 4x$; $y = x - 6$:

1) $2/3$;

2) $1/6$;

3) $7/3$;

4) 9.



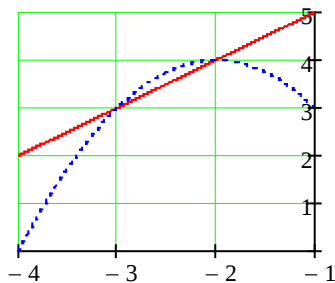
10.11. $y = -x^2 - 4x$; $y = x + 6$:

1) 1;

2) $1/6$;

3) 3;

4) 4.



10.12. $y = -x^2 - 4x - 1$; $y = x + 3$:

1) $1/3$;

2) $1/6$;

3) $9/2$;

4) 5.

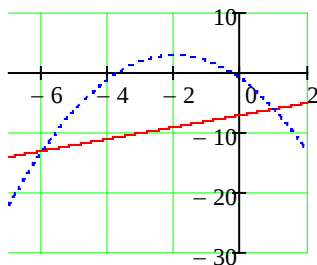
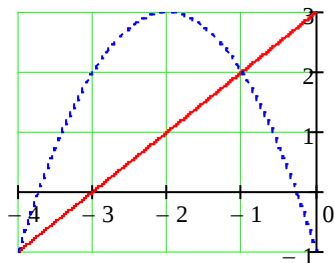
10.13. $y = -x^2 - 4x - 1$; $y = x - 7$:

1) $1/3$;

2) $72/5$;

3) $245/2$;

4) $343/6$.



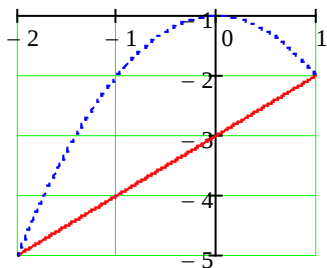
10.14. $y = -x^2 - 1$; $y = x - 3$:

1) $1/3$;

2) $2/5$;

3) $9/2$;

4) $5/6$.



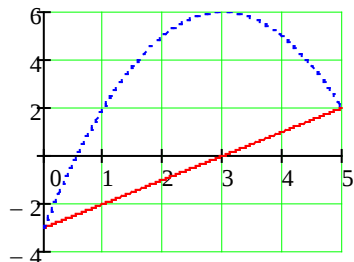
10.15. $y = -x^2 + 6x - 3$; $y = x - 3$:

1) $111/3$;

2) $125/6$;

3) $119/2$;

4) $73/6$.



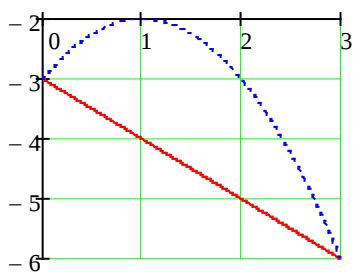
10.16. $y = -x^2 + 2x - 3$; $y = -x - 3$:

1) $9/2$;

2) $25/6$;

3) $19/2$;

4) $14/5$.



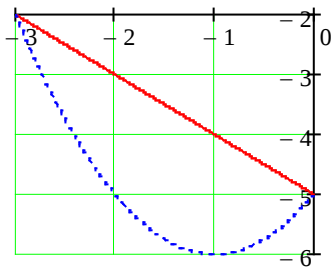
10.17. $y = x^2 + 2x - 5$; $y = -x - 5$:

1) $9/2$;

2) $25/6$;

3) $19/2$;

4) $14/5$.



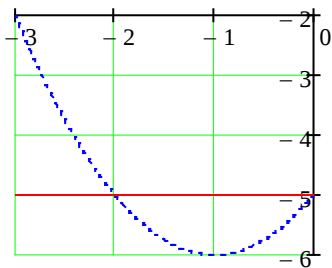
10.18. $y = x^2 + 2x - 5$; $y = -5$:

1) $9/2$;

2) $4/3$;

3) $1/2$;

4) $4/5$.



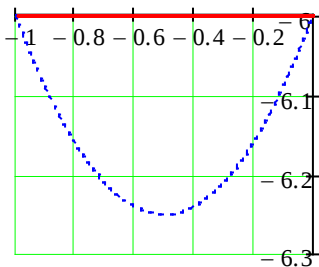
10.19. $y = x^2 + x - 6$; $y = -6$:

1) $9/2$;

2) $4/3$;

3) $1/2$;

4) $1/6$.



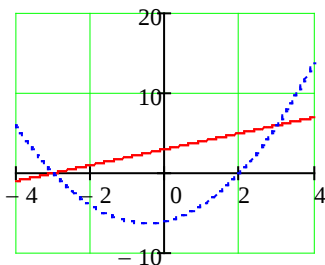
10.20. $y = x^2 + x - 6$; $y = x + 3$:

1) 9;

2) 40;

3) 36;

4) 11.



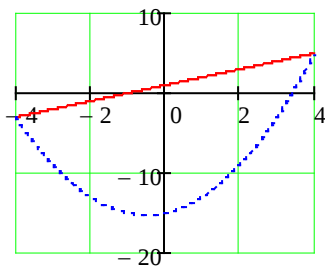
10.21. $y = x^2 + x - 15$; $y = x + 1$:

1) 9;

2) $256/3$;

3) $37/2$;

4) $11/4$.



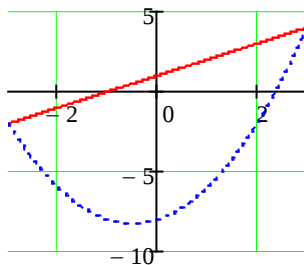
10.22. $y = x^2 + x - 8$; $y = x + 1$:

1) 17;

2) 6;

3) 36;

4) 4.



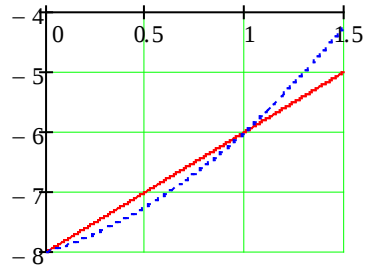
10.23. $y = x^2 + x - 8$; $y = 2x - 8$:

1) 7;

2) $1/6$;

3) 6;

4) 4.



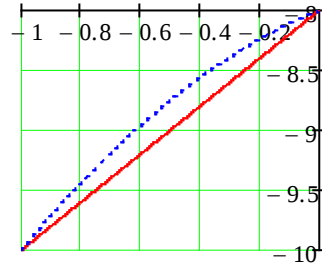
10.24. $y = -x^2 + x - 8$; $y = 2x - 8$:

1) 4;

2) $1/6$;

3) 5;

4) 1.



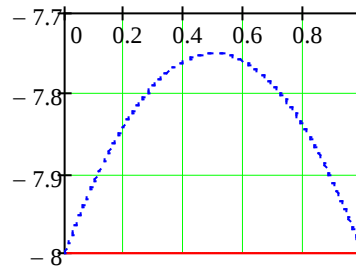
10.25. $y = -x^2 + x - 8$; $y = -8$:

1) 4;

2) $5/6$;

3) 5;

4) $1/6$.



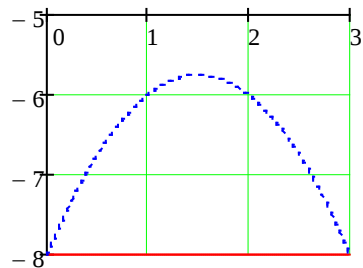
10.26. $y = -x^2 + 3x - 8$; $y = -8$:

1) 4;

2) $5/6$;

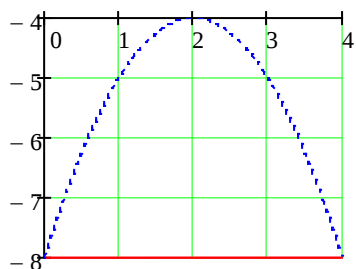
3) $9/2$;

4) $1/6$.



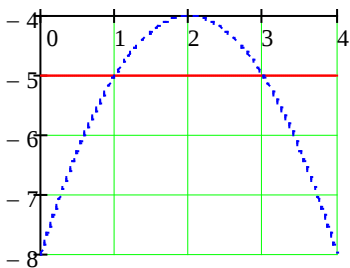
10.27. $y = -x^2 + 4x - 8$; $y = -8$:

- 1) 4;
- 2) $5/6$;
- 3) $9/2$;
- 4) $32/3$.



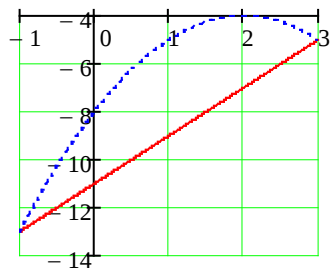
10.28. $y = -x^2 + 4x - 8$; $y = -5$:

- 1) 4;
- 2) $5/6$;
- 3) $9/2$;
- 4) $4/3$.



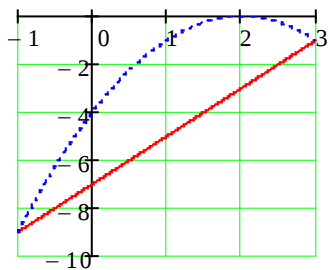
10.29. $y = -x^2 + 4x - 8$; $y = 2x - 11$:

- 1) $32/3$;
- 2) $5/6$;
- 3) $9/2$;
- 4) $1/3$.



10.30. $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$:

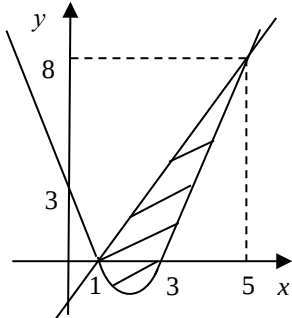
- 1) $32/5$;
- 2) $5/6$;
- 3) $32/3$;
- 4) $1/3$.



Пример 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой:

$$y = x^2 - 4x + 3; y = 2x - 2.$$

Решение. Выполним чертеж и заштригуем полученную фигуру. Тогда площадь полученной фигуры равна:



$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^5 \left((2x - 2) - (x^2 - 4x + 3) \right) dx = \\
 &= \int_1^5 (6x - 5 - x^2) dx = \\
 &= 6 \int_1^5 x dx - 5 \int_1^5 dx - \int_1^5 x^2 dx = \\
 &= \left(3x^2 - 5x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^5 = \\
 &= \left(3 \cdot 25 - 25 - \frac{125}{3} \right) - \left(3 - 5 - \frac{1}{3} \right) = 52 - \frac{124}{3} = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

5. ПРИМЕР МОДУЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Найти неопределенный интеграл $\int \left(10x^6 - \frac{1}{3\sqrt{x^3}} - \frac{6}{x^{10}} \right) dx$ и результат интегрирования проверить дифференцированием.

2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(5-7x)^{10}}$; б) $\int \frac{5x+1}{x^2-10x+2} dx$; в) $\int x^4 \cdot \ln(x) dx$; г) $\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)} dx$.

3. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^4 \frac{x^3 - 3x - 5}{\sqrt{x^3}} dx$; б) $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+12x^4} dx$;

в) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(2x) dx$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Список рекомендуемой литературы.....	3
1. Интегральное исчисление функции одной переменной	4
1.1. Неопределенный интеграл и его свойства.....	4
1.2. Основная таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование функций	5
1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле	7
1.4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	8
1.5. Интегрирование простейших рациональных дробей.....	10
1.6. Интегрирование рациональных функций.....	14
1.7. Интегрирование иррациональных функций.....	18
1.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.....	19
1.9. Определенный интеграл и его основные свойства.....	21
1.10. Методы вычисления определенных интегралов.....	23
1.11. Приложения определенного интеграла	26
1.12. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	29
2. Задания для аудиторных занятий и домашнее задание.....	32
3. Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.....	40
4. Тестовые задания	41
5. Пример модульного задания	93

У ч е б н о е и з д а н и е

Курзенков Сергей Владимирович
Воронкова Татьяна Борисовна
Левкина Татьяна Викторовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. В. Ширалиева*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 01.03.2019. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,12.
Тираж 50 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.