

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

В. В. Масич, А. В. Цвыр, Т. М. Чубукова

ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений образования, обеспечивающих
получение общего высшего образования по специальностям
6-05-0811-03 Мелиорация и водное хозяйство,
6-05-0532-03 Землеустройство и кадастры*

Горки
БГСХА
2024

УДК 53:536.7(075.8)

ББК 22.3я73

МЗ1

*Одобрено методическими комиссиями
мелиоративно-строительного факультета 30.10.2023 (протокол № 2),
землеустроительного факультета 28.11.2023 (протокол № 3)
и Научно-методическим советом БГСХА 27.09.2023 (протокол № 1)*

Авторы:

доктор педагогических наук, профессор В. В. Масич;
старшие преподаватели А. В. Цвыр, Т. М. Чубукова

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент А. И. Слободянюк;
кандидат физико-математических наук И. Н. Сидоренко

Масич, В. В.

МЗ1 Физика. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика :
учебно-методическое пособие / В. В. Масич, А. В. Цвыр,
Т. М. Чубукова. – Горки : БГСХА, 2024. – 87 с.
ISBN 978-985-882-566-9.

Приведены краткий теоретический материал по разделу «Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика», вопросы по теоретическому материалу, основные типы задач и методы их решения, предложены контрольные вопросы, задачи для самостоятельного решения и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений образования, обеспечивающих получение общего высшего образования по специальностям 6-05-0811-03 Мелиорация и водное хозяйство, 6-05-0532-03 Землеустройство и кадастры.

УДК 53:536.7(075.8)

ББК 22.3я73

ISBN 978-985-882-566-9

© УО «Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия», 2024

ВВЕДЕНИЕ

При самостоятельной работе над лекционным курсом используются записи лекций, учебники и учебные пособия, в которых содержится соответствующий теоретический материал. Для подготовки к лабораторной работе имеются описания соответствующих задач практикума, которые содержат необходимые теоретические сведения. Однако в настоящее время недостаточно пособий, которые помогали бы соискателю организовать его самостоятельную работу по развитию умения решать задачи. Существующие сборники задач являются, как правило, пособиями по контролю умения решать задачи, а не пособиями по развитию этого умения. Поэтому полезно иметь пособие, которое может быть использовано в самостоятельной работе над решениями задач примерно так же, как учебник используется для изучения теоретического материала. За неимением времени на практических занятиях не удастся рассмотреть все важные типы задач и методы их решения. Наличие пособия позволяет включить в круг обязательных такие вопросы, не рассмотренные на занятиях точно так же, как это делается применительно к теоретическому материалу, который не рассмотрен на лекциях, но входит в обязательную программу.

Данное пособие составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться самостоятельно. Весь материал курса разбит на разделы. Разбор заданий всех разделов производится по единой схеме и составляет для каждого раздела единое целое. Каждый раздел можно проработать независимо от других, в произвольном порядке. Поэтому не следует рассматривать последовательность разделов и объем материала, содержащегося в них, как рекомендацию о последовательности и объеме практических занятий. Практические занятия должны проводиться в соответствии с планом лекции, особенностями подготовки групп и т. п.

Рекомендуется следующий порядок изучения каждого из разделов. В первом подразделе, в котором изложен теоретический материал, предоставлены те вопросы, которые студент должен знать прежде, чем приступить к решению задач раздела. Читая вопрос подраздела, студент должен убедиться в том, что с этим материалом он знаком. Нет необходимости пытаться дать подробное освещение вопросов, по-

скольку это займет много времени. Достаточно лишь уверенности в том, что соответствующий материал глубоко проработан и может быть восстановлен без обращения к учебнику. Если встречается вопрос, в котором такой уверенности нет, то необходимо обратиться к соответствующим лекциям или учебникам.

Во втором подразделе «Вопросы по теоретическому материалу» содержатся вопросы, которые позволяют соискателю произвести самоконтроль качества усвоения теоретического материала. Если на все вопросы он может быстро и ясно дать ответ, то это означает, что теоретический материал усвоен достаточно хорошо и можно переходить к следующим подразделам. Если же некоторые вопросы вызывают трудности и на них не удастся найти ответы даже после более или менее длительного размышления, то это означает, что соответствующий материал проработан недостаточно глубоко и к нему надо вернуться, чтобы уметь ответить на вопросы.

Затем можно приступить к третьему подразделу «Основные типы задач и методы их решения». При разбивке задач по типам, встречающимся в курсе, авторы исходили главным образом из методической необходимости иметь определенную классификацию задач, которая позволяет упорядочить подход к решению задач и методам их решения. Разбивка по типам не является конечной и однозначной и в процессе использования пособия может совершенствоваться.

Студентам рекомендуется, прежде всего, пересмотреть и продумать подраздел 1.3.1. *Классификация* в целом. В результате должно получиться целостное представление о различных типах задач, методах их решения, формулах и законах, которые при этом используются. В каждом случае необходимо добиться четкого представления, что исходные данные являются необходимыми и достаточными, т. е. задача является определенной. При рассмотрении методов решения необходимо добиться ясного понимания пути, ведущего от исходных данных к конечному результату.

После этого можно приступить к подразделу 1.3.2. *Примеры* для остаточной отработки каждого типа задач. Рекомендуется такой порядок работы. Прочитать условие задачи и убедиться, что она действительно относится к рассматриваемому типу. Затем вернуться в соответствующий подраздел (1.3.1. *Классификация*) и, прочитав общую формулировку методов решения, попытаться самостоятельно решить задачу соответствующим методом. Если это удалось, то проверить

правильность решения, сравнив его с решением, приводимым в тексте. Если самостоятельно решить задачу не удалось несмотря на то, что метод решения представляется ясным, проработать детально решение по тексту. Желательно при этом отдать себе отчет в том, что именно помешало самостоятельно решить задачу, хотя и казался ясным общий путь решения, указанный в методах, предложенных в подразделе 1.3.1. После этого можно переходить к следующему примеру или типу заданий и так далее до конца подраздела 1.3.

Подраздел 1.4 содержит «Контрольные вопросы». Если ответ на некоторые из них вызывает затруднения, необходимо вернуться в соответствующие места ранее проработанного материала.

Подраздел 1.5 содержит «Задачи для самостоятельного решения». При полной проработке всего предыдущего материала эти задачи не должны вызывать затруднения. Для контроля правильности решения приведены ответы.

По окончании проработки материала каждого подраздела рекомендуется для дальнейшей тренировки решить несколько задач из различных сборников задач.

При составлении пособия авторы стремились использовать наиболее характерные и типовые задачи.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаш, В. А. Задачи по физике и методы их решения / В. А. Балаш. – М.: Просвещение, 1983.
2. Васильева, О. Н. Молекулярная физика и термодинамика. Сборник задач: учеб. пособие / О. Н. Васильева, А. М. Салецкий. – М.: Физический факультет МГУ, 2018. – 400 с.
3. Гольдфарб, Н. И. Сборник вопросов и задач по физике / Н. И. Гольдфарб. – М.: Высш. шк., 1973.
4. Зубов, В. Г. Задачи по физике / В. Г. Зубов, В. П. Шальнов. – М.: Наука, 1985.
5. Иродов, И. Е. Сборник задач по общей физике / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. – М.: Наука, 1975.
6. Кассандрова, О. Н. Методика решения задач по молекулярной физике / О. Н. Кассандрова. – М.: МГУ, 1982.
7. Кикоин, И. К. Молекулярная физика / И. К. Кикоин, А. К. Кикоин. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1963.
8. Кимбар, Б. А. Сборник самостоятельных и контрольных работ по физике / Б. А. Кимбар, А. М. Качинский, И. С. Заикина. – Минск: Народная асвета, 1975.
9. Козел, С. М. Сборник задач по физике / С. М. Козел, Э. И. Рашба, С. А. Славатинский. – М.: Наука, 1978.
10. Кочан, Б. Ю. Сто задач по физике / Б. Ю. Кочан. – М.: Наука, 1986.

11. Низамов, И. М. Задачи по физике с техническим содержанием / И. М. Низамов. – М.: Просвещение, 1980.
12. Новодворская, Е. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М.: Высш. шк., 1981.
13. Ноздрев, В. Ф. Курс термодинамики / В. Ф. Ноздрев. – М.: Просвещение, 1967.
14. Огнетова, Ж. Н. Сборник задач по физике для подготовительных курсов / Ж. Н. Огнетова, В. Л. Кононенко, В. Г. Бельх. – Ч. 1: Механика. Молекулярная физика и термодинамика. – Краматорск: ДГМА, 1997.
15. Пинский, А. А. Задачи по физике / А. А. Пинский. – М.: Наука, 1977.
16. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1982. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика.
17. Сазонов, Ю. И. Сборник задач по физике / Ю. И. Сазонов. – М.: Высш. шк, 1989.
18. Сивухин, Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – Т. 2: Молекулярная физика и термодинамика.
19. Слободецкий, И. Ш. Задачи по физике / И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. – М.: Наука, 1980.
20. Физика. Сборник задач: учеб.-метод. пособие: в 3 ч. / под общ. ред. Д. В. Кленицкого. – Минск: БГТУ, 2021. – Ч. 1: Механика. Молекулярная физика и термодинамика, 193 с.
21. Холидей, Д. Вопросы и задачи по физике / Д. Холидей, Р. Резник – М.: Просвещение, 1969.
22. Цедрик, М. С. Сборник задач по курсу общей физики / М. С. Цедрик. – М.: Просвещение, 1989.
23. Шальскольская, М. П. Сборник избранных задач по физике / М. П. Шальскольская, И. А. Эльцин. – М.: Наука, 1969.
24. Шебалин, О. Д. Молекулярная физика / О. Д. Шебалин. – М.: Высш. шк., 1978.

1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

1.1. Теоретический материал

Строение материальных тел, молекул и атомов. Размеры атомов и молекул. Силы, действующие в атомах, между атомами и молекулами. Эффективный размер атомов и молекул при столкновении. Поперечное сечение. Зависимость поперечного сечения от относительной скорости сталкивающихся атомов. Давление газа на стенку. Основное уравнение кинетической теории идеальных газов. Средняя кинетическая энергия. Температура. Внутренние степени свободы атомов и молекул. Закон равнораспределения по степеням свободы. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана. Броуновское движение. Флуктуации.

1.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Каков механизм возникновения сил Ван-дер-Ваальса?
2. Укажите метод определения размеров молекул.
3. Каким образом, зная закон изменения сил взаимодействия между молекулами, можно определить приближенно эффективный радиус молекул?
4. Увеличивается или уменьшается поперечное сечение сталкивающихся молекул при увеличении температуры?
5. Как изменяется величина давления газа на стенку, если при ее вычислении принять во внимание поперечные размеры молекул?
6. Как изменяется величина давления газа на стенку, если при ее вычислении принять во внимание силы притяжения между молекулами?
7. Какие экспериментальные данные необходимо иметь, чтобы с помощью основного уравнения кинетической теории вычислить среднюю квадратичную скорость молекул в газе?
8. Укажите критерий «замерзания» степеней свободы. Какие степени свободы возбуждены у молекул азота и кислорода при нормальных условиях? Какая величина энергии приходится на колебательную степень свободы?
9. Оказывают ли какое-либо влияние на величину давления газа внутренние степени свободы молекул и атомов?
10. Сформулируйте задачу о распределении молекул по скоростям.
11. Распределение Максвелла допускает сколько угодно большие скорости. Как это согласовать с конечностью полной кинетической энергии молекул газа?
12. Объясните, какими особенностями распределения Максвелла обуславливается, что средняя величина абсолютной скорости меньше, чем наивероятнейшая, но больше, чем корень квадратный из среднеквадратичной скорости.
13. Для каких полей (потенциальных или непотенциальных) применимо распределение Больцмана?
14. Имеются ли отличия в механизмах возникновения подъемной силы аэростата и дирижабля? Какое отношение к этому вопросу имеет барометрическая формула?
15. Из каких общих соображений можно заключить, что чем больше флуктуация, тем она менее вероятна?

16. Какие взаимодействия возможны между молекулами? Как зависят эти взаимодействия от расстояний между молекулами?

17. Почему нельзя говорить о температуре одной молекулы?

18. Какими опытами подтверждается распределение молекул по скоростям?

19. При каких условиях флуктуации наблюдаются наиболее часто?

20. Назовите известные вам опыты позволяющие обнаружить существование сил межмолекулярного взаимодействия?

1.3. Основные типы задач и методы их решения

1.3.1. Классификация

1. Задачи на определение поперечного сечения при столкновении молекул, средней скорости.

Решение. Использование связи между длиной свободного пробега, частотой столкновений и средней скоростью.

2. Определение температуры и давления газа по известным молекулярным характеристикам с учетом внутренних степеней свободы и обратные задачи.

Решение. Использование основного уравнения кинетической теории идеальных газов и закона равнораспределения энергии по степеням свободы.

3. Определение характеристик броуновского движения немолькулярных объектов.

Решение. Использование закономерности броуновского движения и закона равнораспределения энергии по степеням свободы.

4. Определение характеристик молекулярного движения по распределению Максвелла.

Решение. Использование распределения Максвелла.

5. Определение характеристик молекулярного движения по распределению Больцмана при наличии потенциальных силовых полей.

Решение. Использование распределения Больцмана.

1.3.2. Примеры

1. Считая газокинетический диаметр молекулы углекислого газа равным $d = 3,2 \cdot 10^{-10}$ м, определить среднюю длину пробега его молекул при температуре 50 °С и давлении 113,3 Па.

Решение. Учитывая, что $n_0 = P / kT$, получаем

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 322}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 133,3} = 0,74 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

2. Какую максимальную концентрацию молекул углекислого газа, газокинетический диаметр которых равен $d = 3,2 \cdot 10^{-10}$ м, можно образовать в сферическом сосуде диаметра $D = 1$ м, чтобы средний пробег превосходил величину диаметра?

Решение. Из формулы $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}$ имеем $n_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle \lambda \rangle}$;

$$\langle \lambda \rangle = D.$$

Тогда

$$n \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D},$$

$$n \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1} = 2,3 \cdot 10^{18} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

3. Каково давление в смеси газов емкостью $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, если в ней находится 10^{15} молекул кислорода и 10^{-10} кг азота, а температура смеси 50°C ? Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Решение. По закону Дальтона: $p = [n_0(\text{O}_2) + n_0(\text{N}_2)] kT$, $n_0 = N / V$, $T = 322 \text{ К}$;
отсюда

$$n_0(\text{O}_2) = \frac{10^{15}}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ (м}^{-3}\text{)},$$

$$n_0(\text{N}_2) = \frac{10^{-10}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

Зная концентрации газов, найдем давление:

$$p = \left(\frac{10^{15}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{10^{-10} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{28 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 322 = 0,72 \cdot 10^{-2} \text{ (Па)}.$$

4. Давление газа равно 10^4 Па, а средняя квадратичная скорость равна 500 м/с. Найти плотность ρ этого газа.

Решение. Основное уравнение кинетической теории может быть представлено следующим образом:

$$p = \frac{1}{3} m n_0 \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_0 \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}; m \cdot n_0 = \rho. \text{ Тогда } p = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle.$$

$$\text{Следовательно, } \rho = \frac{3p}{\langle v^2 \rangle}, \quad \rho = \frac{3 \cdot 10^4}{(500)^2} = 0,12 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

5. Чему равна энергия вращательного движения двухатомного газа, находящегося под давлением $p = 10^5$ Па в сосуде объемом 10^{-3} м³? Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.

Решение. Из основного уравнения кинетической теории газов для плотности кинетической энергии молекул имеем:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}, \quad E = n_0 \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3p}{2}.$$

Эта плотность энергии получается за счет трех поступательных степеней свободы каждой из молекул. Вращательных степеней свободы две. Следовательно, плотность вращательной энергии равна:

$$E_{\text{вр}} = \frac{2E}{3} = \frac{2 \cdot 3p}{3 \cdot 2} = p.$$

Энергия вращательного движения в 10^{-3} м³ равна

$$E_{\text{вр}} = p \cdot 10^{-3}; \quad E_{\text{вр}} = 10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2 \text{ (Дж)}.$$

6. На упругой нити с модулем кручения $D = 10^{-15}$ Н·м подвешено зеркальце. Вследствие беспорядочных ударов молекул оно совершает колебания. Определить средний квадрат амплитуды этих колебаний. Температура воздуха – 20 °С.

Решение. Уравнение движения нити: $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D\varphi,$

где I – момент инерции зеркальца относительно оси кручения.

Запишем закон сохранения энергии: $\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} D \varphi^2 = \text{const}.$

Согласно теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}D \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$.

$$\text{Отсюда при } T = 293 \text{ К } \langle \varphi^2 \rangle = \frac{kT}{D}; \quad \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{10^{-15}} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

7. Выразить поток молекул N , падающих на стенку сосуда через плотность молекул n_0 и их среднюю скорость $\langle v \rangle$. Функцию распределения $f(v)$ по скорости считать изотропной.

Решение. Условие нормировки функции распределения имеет вид:

$$\int f(v) dv d\Omega = 1,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

По определению средней скорости имеем:

$$\langle v \rangle = \int v f(v) dv d\Omega = 4\pi \int v f(v) dv.$$

С другой стороны, отсчитывая углы θ от нормали к стенке, получаем:

$$\begin{aligned} N &= n_0 \int v \cos \theta f(v) dv d\Omega = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4\pi} \int \cos \theta d\Omega = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4\pi} \int \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{n_0 \langle v \rangle}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle. \end{aligned}$$

8. Какая часть молекул кислорода при $t = 0$ °С имеет скорости, которые находятся в интервале от $v_1 = 100$ м/с до $v_2 = 110$ м/с?

Решение. Закон распределения молекул по скоростям в приведенном виде:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 du,$$

где u – относительная скорость.

В данном случае $u = \frac{v}{v_b}$,

где v_b – наиболее вероятная скорость.

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, T = 273 \text{ K}, v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,3 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} = 376 \text{ (м/с)}, u = \frac{100}{376} = 0,266,$$

$$\Delta u = \frac{10}{376}, e^{-u^2} = e^{-0,071} = 0,93, \frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{3,14}} \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot \frac{10}{376} = 0,004.$$

9. На какой высоте количество кислорода в атмосфере уменьшится в e раз по сравнению с количеством кислорода у поверхности Земли при нормальных условиях?

Решение. Из условия задачи известно, что число молекул на искомой высоте равно: $n = \frac{n_0}{e}$, это значит, что $-\frac{mgh}{RT} = -1$,
так как $n = n_0 e^{\frac{-mgh}{RT}}$, откуда $h = \frac{RT}{mg} = \frac{8,31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 8 \cdot 10^3 \text{ (м)}.$

1.4. Контрольные вопросы

1. Объясните схему какого-либо опыта, с помощью которого можно экспериментально проверить справедливость распределения Максвелла.
2. Объясните схему какого-либо опыта, с помощью которого можно экспериментально проверить справедливость распределения Больцмана.
3. Каким образом изменяется форма кривой, изображающей распределение Максвелла, с изменением температуры?
4. Если полное число частиц в некотором объеме в поле силы тяжести фиксировано (непроницаемый сосуд), то как изменяется распределение частиц по высоте с изменением температуры, как изменяется положение центра тяжести частиц?
5. Изменяется ли и как подъемная сила аэростата при одновременном одинаковом изменении температуры газа в оболочке аэростата и окружающей среды?
6. Зависит ли газокинетический диаметр молекул в модели твердых сфер от температуры?
7. Столкновения между молекулами газа изменяют ширину спектральных линий, излучаемых атомами. При исследовании спектров уширения желательно уменьшить. Предложите способы, каким образом этого можно в принципе достигнуть.
8. Среднее перемещение броуновской частицы не зависит от массы. Как это согласовать с тем фактом, что средняя скорость броуновской частицы от массы зависит?

1.5. Задачи для самостоятельной работы

1. В сосуде находится двухатомный газ под давлением P_0 и при температуре T . Каково давление газа, если под действием некоторых факторов произошла диссоциация части молекул газа на атомы? Степень диссоциации, т. е. доля диссоциированных молекул равна α .

Ответ: $P = P_0(1 + \alpha)$.

2. Какое количество молекул содержится в 10 г водяного пара?

Ответ: $N = 3,3 \cdot 10^{23}$.

3. Чему равно количество кислорода m , находящегося в баллоне, и его давление, если кинетическая энергия поступательного движения его молекул равна $2 \cdot 10^3$ Дж, а средняя квадратичная скорость молекул равна 10^3 м/с? Объем баллона $V = 0,01$ м³.

Ответ: $m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг, $P = 1,33 \cdot 10^5$ Па.

4. Чему равна энергия теплового движения 0,5 кг двухатомного газа, находящегося под давлением $P = 10^5$ Па и имеющего плотность $\rho = 5$ кг/м³?

Ответ: $E = 2,5 \cdot 10^4$ Дж.

5. Во сколько раз плотность распределения молекул n_2 вблизи наиболее вероятной скорости больше их плотности n_1 вблизи среднеквадратичной скорости?

Ответ: $n_2 / n_1 = 1,1$.

6. Считая газокинетический диаметр молекулы углекислого газа $3,2 \cdot 10^{-10}$ м, найти среднюю длину свободного пробега при давлении 266,6 Па и температуре 100 °С.

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 4,2 \cdot 10^{-4}$ м.

7. Считая, что давление воздуха у поверхности Земли равно 10^5 Па, и считая температуру воздуха 0 °С и не изменяющейся с высотой, найти удельный вес воздуха у поверхности Земли и на высоте 4 км.

Ответ: $\rho_0 = 1,28$ кг/м³, $\rho_h = 0,78$ кг/м³.

8. Определить какая часть молекул водорода при температуре 27 °С обладает значениями скоростей, лежащими в интервале от 1900 м/с до 1905 м/с.

Ответ: $\Delta n / n = 2,46 \cdot 10^{-3}$.

9. Температура газа изменяется с высотой h по закону $T = T_0(1 - \beta h)$, где β – постоянная величина. Найти закон изменения с высотой давления P и плотности ρ газа. При $h = 0$ давление газа $P = P_0$. Молярная масса газа M .

Ответ: $P = P_0(1 - \beta h)^{\frac{Mg}{\beta RT_0}}$, $\rho = \frac{MP_0}{RT_0}(1 - \beta h)^{\frac{Mg}{\beta RT_0} - 1}$, $h < 1 / \beta$.

10. Какая часть молекул газа имеет кинетическую энергию поступательного движения, отличающуюся от средней кинетической энергии поступательного движения не более чем на 1 %?

Ответ: $\frac{\Delta E_k}{E_k} = 0,93 \%$.

2. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

2.1. Теоретический материал

Термодинамические параметры P , V , T . Модель идеального газа. Уравнение состояния идеального газа, область его применимости. Закон Клапейрона – Менделеева. Закон Бойля – Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Шкала абсолютных температур. Парциальные давления, закон Дальтона для смеси газов. Коэффициент объемного теплового расширения, изотермическая сжимаемость, термический коэффициент давления для газов.

2.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Какой термодинамический смысл имеют параметры: P , V , T ?
2. Что такое состояние термодинамического равновесия газов?
3. Что выражает уравнение состояния?
4. При каких условиях и допущениях газ можно рассматривать как идеальный? Приведите примеры реального газа, по своим свойствам близкого к идеальному газу.
5. Запишите уравнение состояния для произвольной массы газа.
6. В чем смысл закона Дальтона? При каких условиях он выполняется?
7. Какова связь между давлением и концентрацией молекул?
8. Как называется изменение состояния любой термодинамической системы, в том числе и идеального газа, при постоянной температуре, постоянном давлении и постоянном объеме? Как эти изменения состояния для идеального газа можно графически представить на PV -, VT - и PT -диаграммах?

2.3. Основные типы задач и методы их решения

2.3.1. Классификация

1. Имеется идеальный газ. По заданным параметрам требуется определить тот или иной неизвестный параметр.

Решение. Используется уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева).

2. Определение неизвестных параметров в смеси не реагирующих между собой идеальных газов.

Решение. Используются:

- уравнение состояния идеальных газов;
- основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов;
- закон Дальтона.

3. Определение термодинамических коэффициентов для идеального газа по заданным параметрам.

Решение. Использование взаимосвязи между изменениями параметров.

2.3.2. Примеры

1. Газ при давлении 980 кПа и температуре 20 °С имеет объем 164 м³. Каков объем той же массы газа при нормальных условиях?

Решение. Под нормальными условиями понимается $P = 10^5$ Па и $T = 273$ К. По условию задачи количество молей газа $\nu = m/M$ остается неизменным. Записывая уравнения Клапейрона – Менделеева для обо-

их состояний газа $P_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0$, $P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1$ и исключая $\frac{m}{M} R$, имеем

$$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1} = \frac{T_0}{T_1}, \text{ откуда } V_0 = \frac{P_1 V_1 T_0}{P_0 T_1}, \quad V_0 = \frac{980 \cdot 10^3 \cdot 164 \cdot 273}{10^5 \cdot 293} \approx 150 \text{ (м}^3\text{)}.$$

2. Баллон емкостью V , наполненный газом при давлении P и температуре T , взвешивается. Его вес оказывается равным F . Затем из баллона откачивают газ, пока давление не упадет до P_1 при той же температуре T . Вес баллона в этом случае равен F_1 . Определить из этих данных плотность газа при нормальных условиях: P_0 и T_0 .

Решение. Из уравнения состояния находим плотность газа при давлении P_0 и температуре T_0 .

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP_0}{RT_0}. \quad (2.1)$$

Пусть вес стенок баллона равен F_0 . Тогда его масса равна F_0 / g , а масса газа в первом и во втором случаях $\frac{F - F_0}{g}$ и $\frac{F_1 - F_0}{g}$ соответственно, следовательно,

$$PV = \frac{F - F_0}{Mg} RT, \quad P_1 V = \frac{F_1 - F_0}{Mg} RT. \quad (2.2)$$

$$\text{Откуда } (P - P_1)V = \frac{F - F_1}{Mg} RT. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) находим

$$\frac{M}{R} = \frac{F - F_1}{P - P_1} \frac{T}{Vg} \quad (2.4)$$

и, подставляя (2.4) в (2.1) для ρ_0 , получим $\rho_0 = \frac{F - F_1}{P - P_1} \frac{P_0 T}{g V T_0}$.

3. Сколько молекул ртути содержится в 1 см^3 воздуха в помещении, зараженном ртутью, при температуре 20°C , если давление паров ртути при этой температуре равно $0,645 \text{ Па}$?

Решение. Из условия задачи вытекает, что давление и температура воздуха близки к нормальным, т. е. воздух можем рассматривать как смесь идеальных газов, для которых справедлив закон Дальтона. Пусть в объеме V содержится N молекул ртути, имеющих суммарную массу m . Тогда $N = \frac{m}{M} N_A = \frac{P_{PT} V}{RT} N_A = \frac{P_{PT} V}{kT}$ и, следовательно, число молекул ртути в единице объема равно:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{P_{PT}}{kT}, \quad n = \frac{0,645}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} = 1,78 \cdot 10^{20} (\text{м}^{-3}).$$

4. Определить давление и молекулярный вес смеси газов, состоящей из 10 г кислорода и 10 г азота, которые занимают объем 20 л при температуре 150°C .

Решение. По закону Дальтона $P = \sum_i P_i = \frac{RT}{V} \sum_i \frac{m_i}{M_i}$. Придав правой части вид, совпадающий с уравнением состояния идеального газа, $P = \frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} \frac{RT}{V}$, где $m_{\text{см}} = \sum_i m_i$, находим:

$$M_{\text{см}} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i \frac{m_i}{M_i}}; \quad M_{\text{см}} = M_1 M_2 \frac{m_1 + m_2}{M_2 m_1 + M_1 m_2}.$$

$$M_{\text{см}} = 32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \frac{(10^{-2} + 10^{-2})}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} + 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}} = 29 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right).$$

5. Выразить в общем виде изотермический модуль объемного сжатия через коэффициент теплового расширения γ и термический коэффициент давления $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$. Считая среду идеальным газом, выразить объемный изотермический модуль через параметры процесса.

Решение. Под изотермической сжимаемостью (величина, обратная изотермическому модулю расширения K_T) понимают соотношение:

$$\chi_T = \frac{1}{K_T} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (2.5)$$

Если $T = T(P, V)$, то полный дифференциал температуры запишется в виде:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV. \quad (2.6)$$

Учитывая (2.5) и (2.6), получим:

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_V} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V} \quad (2.7)$$

или

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V} = \frac{\gamma}{\beta P}, \quad (2.8)$$

где $\gamma = \frac{1}{V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}$ – коэффициент объемного теплового расширения;

$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ – термодинамический коэффициент давления.

Полученное соотношение справедливо для любого вещества. Конкретный вид (2.8) зависит от уравнения состояния данного вещества.

Для изотермической сжимаемости идеального газа, используя уравнение состояния, получим:

$$\chi_T = \frac{1}{P} \quad (2.9)$$

или для изотермического модуля объемного сжатия

$$K_T = \frac{1}{\chi_T} = P. \quad (2.10)$$

2.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры связывает уравнение Клапейрона – Менделеева?
2. Как графически можно представить связь между термодинамическими параметрами для идеального газа, если попеременно один из параметров остается постоянным?
3. Можно ли использовать закон Дальтона при большой плотности газовой смеси?
4. Можно ли использовать закон Дальтона для смеси кислорода и водорода?
5. При постоянной температуре концентрация молекул газа уменьшается в 2 раза. Какие параметры при этом изменились?
6. Как меняется концентрация газа для трех процессов: изотермического, изохорического, изобарического?

7. Как записываются полные дифференциалы любого термодинамического параметра?

8. Как найти связь между термодинамическими коэффициентами для изобарического процесса?

2.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем, который может перемещаться без трения. Каким будет равновесное положение поршня, когда в обе части сосуда помещены одинаковые массы кислорода и водорода, если общая длина сосуда составляет 85 см?

Ответ: длина отсека, занятого кислородом, – 5 см.

2. Тонкостенный стеклянный баллон при постоянной температуре был взвешен трижды:

- откачанный;
 - заполненный воздухом при атмосферном давлении;
 - заполненный неизвестными газами при давлении $1,52 \cdot 10^5$ Па.
- Значения весов оказались соответственно равны $F_1 = 200$ г, $F_2 = 204$ г, $F_3 = 210$ г.

Определить молекулярный вес известного газа. Молекулярный вес воздуха $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $M = 48,3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

3. Имеется сосуд, разделенный неподвижной перегородкой на две равные части. В одном отсеке находится смесь азота и водорода. Вторым отсек откачан до хорошего вакуума. В перегородке имеется мембрана, проницаемая для молекул водорода, но не азота. В исходном состоянии мембрана закрыта заслонкой. После того как заслонку убрали, давление в первом отсеке упало до 0,7 от первоначального. Температуру считать постоянной. Найти отношение массы азота к массе водорода.

Ответ: $m_{\text{аз}} / m_{\text{вод}} = 9,3$.

4. Пользуясь уравнением состояния для идеального газа и допуская, что для некоторого слоя воздуха температура линейно изменяется с высотой, так что $\frac{dT}{dh} = -\alpha$, найти изменение давления в пределах этого слоя. Как внутри этого слоя изменяются с высотой коэффициент объ-

емного расширения γ , изотермическая сжимаемость χ_T и термический коэффициент давления?

$$\text{Ответ: } P = P_0 \left(1 - \frac{ah}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{aR}}.$$

3. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИДЕАЛЬНОМУ ГАЗУ

3.1. Теоретический материал

Первое начало термодинамики – закон сохранения энергии в применении к тепловым процессам. Термодинамическое равновесие. Квazистатический процесс. Обратимые и необратимые процессы. Внутренняя энергия идеального газа. Теплоемкость идеального газа. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Уравнение Майера. Адиабатный процесс. Политропические процессы.

3.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Какой газ называют идеальным?
2. Какими параметрами определяется термодинамическое состояние идеального газа? Каким законом связаны эти параметры?
3. Какое состояние называется термодинамическим равновесием системы?
4. Какой процесс называется квазистатическим? Почему только квазистатический процесс может быть изображен графически?
5. Какие процессы называются обратимыми, необратимыми? Обратимыми или необратимыми являются процессы, происходящие в природе? При каких условиях необратимые процессы можно приближенно считать обратимыми?
6. В чем состоит связь квазистатичности и обратимости?
7. Дайте определение внутренней энергии идеального газа. Из каких энергий она складывается? Функцией каких параметров состояния является внутренняя энергия идеального газа?
8. Что означает, что изменение количества теплоты не является полным дифференциалом?
9. Как определяется элементарная работа газа в термодинамике? От каких параметров она зависит? Каково аналитическое выражение

этой функциональной зависимости для различных термодинамических процессов? Как понимать, что работа газа не является полным дифференциалом?

10. Как графически в координатах PV изобразить различные процессы изменения состояний газа: изохорический, изобарический, изотермический и адиабатический? Как графически изображается работа в этих процессах? Как графически изобразить эти процессы в других переменных, например, в PT , VT , UT (где U – внутренняя энергия газа)?

11. Дайте определение теплоемкости газа, удельной теплоемкости, молярной теплоемкости.

12. Покажите, что теплоемкость идеального газа зависит от процесса изменения его состояния.

13. Какие процессы называются политропическими?

14. В каких пределах может изменяться теплоемкость идеального газа для политропических процессов? Напишите общее выражение для политропы с показателем « n ».

15. Какое соотношение существует между C_p и C_v ? Каков физический смысл этих теплоемкостей?

16. Что такое «число степеней свободы» газа? От чего зависит это число? Чему оно равно для одноатомного газа, для двухатомного, для многоатомного?

17. Как выражаются молярные теплоемкости C_p и C_v для идеального газа с точки зрения классической физики? Границы применимости этих формул.

18. Сформулируйте и запишите первое начало термодинамики. Как выглядит этот закон для: изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов?

19. Выражением какого общего закона является первый закон термодинамики?

3.3. Основные типы задач и методы их решения

3.3.1. Классификация

1. Определение теплоемкостей идеального газа в процессах $P = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

Обратная задача. Определение некоторых характеристик газа по заданному соотношению теплоемкостей C_p и C_v для данного газа.

Для решения используются:

- формулы для определения молярной теплоемкости C_p и C_v через число степеней свободы;

- определения удельной теплоемкости газа;
- связь между молярной и удельной теплоемкостями;
- уравнение Майера;
- определение количества теплоты.

2. Определение теплоемкости идеального газа по заданному уравнению процесса перехода.

Обратная задача. Определение характера процесса по заданному значению теплоемкости.

В решении используются:

- уравнение состояния идеального газа;
- уравнение данного процесса;
- первое начало термодинамики;
- определение теплоемкости газа.

3. Определение изменения внутренней энергии в заданном процессе.

Решение. Используются:

- определение C_v идеального газа;
- зависимость внутренней энергии идеального газа от температуры

$$U = f(T);$$

- уравнение Клапейрона – Менделеева.

4. Определение работы расширения (сжатия) газа по заданному процессу перехода.

Решение. Используются:

- понятие элементарной работы расширения газа;
- уравнение процесса перехода газа из первого состояния во второе;

- уравнение состояния идеального газа.

5. Определение количества тепла, полученного газом в заданном процессе.

Решение. Используются:

- уравнение процессов перехода;
- все положения и закономерности, используемые для решения типов 4 и 5.

6. Задачи, объединяющие все методы, указанные в вышеприведенных типах задач.

3.3.2. Примеры

1. Дана смесь газов, состоящих из неона, масса которого $m_1 = 4$ кг, и водорода, масса которого $m_2 = 1$ кг. Определить удельные теплоемкости смеси газов в процессах $P = \text{const}$, $V = \text{const}$.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов в процессах $P = \text{const}$, $V = \text{const}$ определяются формулами:

$$C_{\text{уд}} = \frac{C_{\text{мом}}}{M}, \quad C_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad C_P = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M},$$

где i – число степеней свободы;

M – масса моля газа.

Удельная теплоемкость смеси газов складывается из удельных теплоемкостей в соответствующем процессе всех газов, входящих в эту смесь. Найдем удельную теплоемкость смеси C_V . По определению, количество теплоты δQ , сообщенное смеси, равно:

$$\delta Q = C_V m dT. \quad (3.1)$$

С другой стороны,

$$\delta Q = (C_{V1}m_1 + C_{V2}m_2) dT, \quad (3.2)$$

где C_{V1} , C_{V2} , m_1 , m_2 – удельные теплоемкости и массы неона и водорода соответственно.

Сравнив формулы (3.1) и (3.2), получим

$$C_V(m_1 + m_2) = C_{V1}m_1 + C_{V2}m_2,$$

отсюда

$$C_V = \frac{C_{V1}m_1 + C_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$$

или

$$C_V = C_{V1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + C_{V2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Обозначим $\frac{m_1}{m_1 + m_2} = k_1$ и $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = k_2$, получим

$$C_V = k_1 C_{V1} + k_2 C_{V2},$$

находим $C_V = \frac{i}{i+2}$, $C_P = \frac{i}{2}(C_P - C_V)$. Найдем M , C_P и C_V :

$$M = \frac{8,3 \cdot 10^3}{260} = 32 \text{ (кг/кмоль)},$$

$$C_P = \frac{i+2}{2}(C_P - C_V), \quad C_V = \frac{i}{2}(C_P - C_V).$$

$$C_P = 7/2 \cdot 260 = 910 \text{ (Дж/кг·К)},$$

$$C_V = 5/2 \cdot 260 = 650 \text{ (Дж/кг·К)}.$$

3. Изменение состояния идеального газа происходит по политропе $PV^n = \text{const}$. Задана удельная теплоемкость C_V . Найти выражение для удельной теплоемкости в политропическом процессе через показатель политропы n и показатель адиабаты γ .

Решение. Для политропического процесса

$$PV_n = \text{const}. \quad (3.7)$$

Связь показателя политропы с теплоемкостью C определяется формулой

$$n = (C - C_P) / (C - C_V), \quad (3.8)$$

показатель адиабаты

$$\gamma = C_P / C_V. \quad (3.9)$$

Из формул (3.8) и (3.9) можно определить удельную теплоемкость:

$$C = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

4. Процесс перехода моля идеального газа из состояния A с параметрами P_1 , V_1 в состоянии B с параметрами P_2 , V_2 представлен графически в переменных PV прямой линией AB . Молярная теплоемкость C_V в данных условиях не зависит от температуры. Необходимо:

а) найти аналитическое выражение процесса изменения состояния газа;

б) вывести общую формулу для определения молярной теплоемкости газа в любом процессе;

в) определить молярную теплоемкость в заданном процессе.

Решение.

а) аналитическое выражение для процесса, выраженного прямой AB (рис. 3.1), запишется так:

$$P = P_0 + aV, \quad (3.10)$$

где P_0 и a определяется из условия задачи:

$$P_0 = \frac{P_1V_2 - P_2V_1}{V_2 - V_1}, \quad (3.11)$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} \quad (3.12)$$

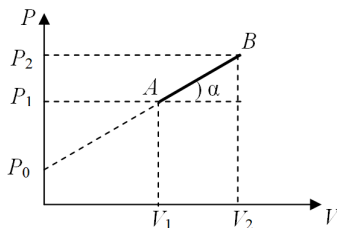


Рис. 3.1

Процесс не является политропическим;

б) выведем общую формулу для определения молярной теплоемкости идеального газа.

Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A = C_v dT + PdV \quad (3.13)$$

и определение теплоемкости

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (3.14)$$

приводят к выражению

$$C = C_v + P \frac{dV}{dT}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) определяет молярную теплоемкость идеального газа в любом процессе;

в) определим молярную теплоемкость в условиях нашей задачи. Для этого воспользуемся формулой (3.15), уравнением процесса (3.10)

и уравнением Клапейрона – Менделеева. Подставим (3.10) в $PV = RT$, получим

$$(P_0 + aV) \cdot V = RT, \quad (3.16)$$

откуда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{P_0 + 2aV} \quad (3.17)$$

Подставив (3.17) в выражение (3.15), получим:

$$C = \frac{C_V + (P_0 + aV)R}{P_0 + 2aV} = C_V + \frac{PR}{2P - P_0}.$$

5. Один моль гелия изобарически обратимо расширяется от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 10$ л при давлении $P = 2,026 \cdot 10^5$ Па, $C_V = 12,3$ Дж/моль·К. Определить изменение внутренней энергии газа в этом процессе.

Решение. Для идеального газа:

$$dU = C_V dT.$$

Чтобы найти dT , воспользуемся уравнением Клапейрона – Менделеева и уравнением процесса ($P = \text{const}$).

$$dT = \frac{PdV}{R}, \quad \Delta U = C_V \Delta T = \frac{P \Delta V}{R} C_V.$$

$$\Delta U = \frac{2,026 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 12,3}{8,31} \approx 25 \text{ (Дж)}.$$

6. Один грамм кислорода нагревается от 10°C до 60°C различными способами:

- а) при $P = \text{const}$;
- б) при $V = \text{const}$;
- в) при $\delta Q = 0$.

Проверить для указанных процессов положение о том, что изменение внутренней энергии идеального газа не зависит от процесса перехода, а зависит от начальной и конечной температуры. Определить изменение внутренней энергии газа.

Решение.

а) по первому началу термодинамики $\Delta U = Q - A$.

Количество теплоты $Q = \frac{m}{M} C_p \Delta T$ при $P = \text{const}$, $A = P \Delta V$.

Из уравнения состояния $PV = \frac{m}{M} RT$, $P \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$. Из уравнения

Майера $C_p = C_v + R$. Подставив в первое уравнение значение количества теплоты и работы, получим:

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1); \quad (3.18)$$

б) если нагревание газа ведется при $V = \text{const}$, $A = 0$, $\Delta U = Q$, где $Q = \frac{m}{M} C_v \Delta T$, тогда

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1); \quad (3.19)$$

в) если нагревание производится адиабатически при $Q = 0$, $dU = -\delta A = \frac{m}{M} C_v dT$, $\Delta U = -A$,

тогда

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1). \quad (3.20)$$

Выражения (3.18), (3.19), (3.20) идентичны. Это подтверждает, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от процесса перехода.

$$\Delta U = \frac{10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot (333 - 283) \approx 33 \text{ (Дж)}.$$

7. В четырехтактном двигателе дизеля воздух, занимаемый объем 10 л, подвергается 12-кратному сжатию. Начальное давление – 10^5 Па, начальная температура – 10°C . Процесс сжатия адиабатический. Определить конечное давление, конечную температуру и работу сжатия.

Решение. Из уравнения адиабаты $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ и уравнения Клайперона – Менделеева найдем связь между параметрами P , V и T в данном процессе.

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma.$$

Учитывая, что $\gamma = 1,4$, получим:

$$P_2 = 10^5 \left(\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 12}{10 \cdot 10^{-3}} \right)^{1,4} \approx 32,5 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

Также: $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$, $T_2 = 283 \left(\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 12}{10 \cdot 10^{-3}} \right)^{0,4} \approx 765 \text{ (К)}.$

Работа при адиабатическом процессе равна:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1^{\gamma-1}}{V^\gamma} dV = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

$$A = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{0,4} (1 - (12)^{0,4}) = -4,8 \cdot 10^3 \text{ (Дж)}.$$

8. Некоторое количество воздуха нужно сжать от давления $P_1 = 10^5$ Па до давления $P_2 = 10^6$ Па, $\gamma = 1,4$. Определить, как выгоднее вести сжатие – адиабатически или изотермически, т. е. при каком сжатии будет затрачена меньшая работа.

Решение. Работа в адиабатическом процессе

$$A_{\text{ад}} = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right], \text{ а } P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma, \text{ значит } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \text{ тогда}$$

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

Работа в изотермическом процессе $PV = \text{const}$.

$$A_{\text{из}} = \int_{P_1}^{P_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{const}}{V} dV = \text{const} \cdot \lg \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

$$\text{Отношение этих работ: } \frac{A_{\text{ад}}}{A_{\text{из}}} = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{(\gamma-1) \cdot \lg \frac{P_1}{P_2}}, \quad \frac{A_{\text{ад}}}{A_{\text{из}}} = \frac{1 - (10)^{\frac{0,4}{1,4}}}{0,4 \cdot \ln 10} \approx 1,08,$$

т. е. $A_{\text{ад}} > A_{\text{из}}$. Как видно, в данном случае сжатие следует вести изотермически, хотя разница между $A_{\text{ад}}$ и $A_{\text{из}}$ незначительна.

9. В сосуде объемом 10 л находится кислород под давлением 10^5 Па. Стенки сосуда могут выдержать внутреннее давление до 10^6 Па. Определить, какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу в этом сосуде.

Решение. Поскольку процесс перехода газа из первого состояния во второе происходит при $V = \text{const}$, то вся сообщенная теплота идет на увеличение внутренней энергии газа.

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T. \quad (3.21)$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева найдем связь ΔT и ΔP .

$$\Delta T = \frac{M}{m} \frac{V}{R} \Delta P. \quad (3.22)$$

Подставив (3.21) в (3.22), получим

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \frac{M}{m} \frac{V}{R} \Delta P, \quad \Delta U = C_V \frac{V}{R} \Delta P,$$

зная, что $C_V = \frac{5}{2} R$, найдем $\Delta U = \frac{5}{2} V \Delta P$.

$$\Delta U = 5/2 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^5 = 2,28 \cdot 10^4 \text{ (Дж)}.$$

10. Некоторая масса азота при давлении 10^5 Па имела объем 5 л, а при давлении $3 \cdot 10^5$ Па – объем 2 л. Переход из первого состояния во второе происходит в два этапа: сначала по изохоре, затем по изобаре. Определить количество теплоты, израсходованное при переходе из первого состояния во второе. Изобразить графически этот переход.

Решение. Нарисуем график перехода (рис. 3.2).

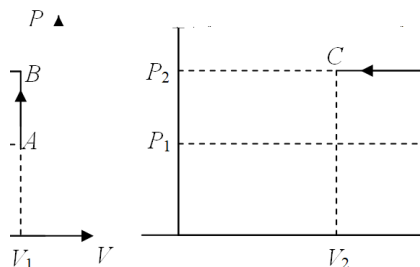


Рис. 3.2

На части процесса AB ($V = \text{const}$) газ нагревается. Количество тепла в этом процессе определяется по формуле

$$Q_1 = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1).$$

На части процесса BC ($P = \text{const}$) газ сжимается, его температура падает.

Количество тепла, отдаваемое газом в этом процессе, определяется по формуле

$$Q_2 = -\frac{m}{M} C_p (T_2 - T_3).$$

Связь между температурами T_1 , T_2 и T_3 с соответствующими параметрами газа P и V найдем из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$T_1 = \frac{M}{m} \frac{P_1 V_1}{R}, \quad T_2 = \frac{M}{m} \frac{P_2 V_1}{R}, \quad T_3 = \frac{M}{m} \frac{P_2 V_2}{R}.$$

Полное количество теплоты, израсходованное при переходе из A в B , определяется как $Q = Q_1 + Q_2$.

$$Q = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1) - C_p (T_2 - T_3);$$

$$Q = \frac{m}{M} \left[\frac{i}{2} R \frac{M}{m} \left(\frac{P_2 V_1}{R} - \frac{P_1 V_1}{R} \right) - \frac{i+2}{2} R \frac{M}{m} \left(\frac{P_2 V_1}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right) \right];$$

$$Q = \frac{5}{2} V_1 (P_2 - P_1) - \frac{7}{2} P_2 (V_1 - V_2);$$

$$Q = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 - \frac{7}{2} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -6,56 \cdot 10^2 \text{ (Дж)}.$$

11. При некотором политропическом процессе давление и объем определенной массы кислорода меняются от P_1 , V_1 до $P_2 = 1/4P_1$ и $V_2 = 2V_1$. Температура в начале процесса T_1 .

Определить:

- показатель политропы;
- количество теплоты, отдаваемое кислородом в окружающую среду;

- изменение внутренней энергии газа.

Решение. Определим показатель политропы, исходя из условия задачи, $P_1V_1^n = P_2V_2^n$. В нашем случае $P_1V_1^n = \frac{1}{4}P_1(2V_1)^n$, откуда получим $2^n = 4$, $n = 2$.

Уравнение политропы: $PV^2 = \text{const}$.

Для того чтобы определить количество теплоты и изменение внутренней энергии, необходимо определить массу и удельную теплоемкость газа.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева $P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$ найдем массу, откуда $m = \frac{MP_1V_1}{RT_1}$.

Определим удельную теплоемкость газа. Так как процесс $PV^2 = \text{const}$ политропический, то $C = C_V \frac{(n-\gamma)}{(n-1)}$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ и $n = 2$.

Тогда $C = C_V - \frac{R}{m}$. Определим температуру в конце процесса из уравнения Клапейрона – Менделеева.

$$T_2 = \frac{M}{m} \frac{P_2V_2}{R} = \frac{M}{m} \frac{P_1V_1}{2R} = \frac{1}{2}T_1.$$

Найдем изменения внутренней энергии в данном процессе:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{P_1V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \frac{P_1V_1}{T_1} \left(\frac{T_1 - 2T_1}{2} \right) = -\frac{5}{4} P_1V_1.$$

Знак (–) говорит о том, что внутренняя энергия уменьшается. Определим количество теплоты, которое отдает кислород в окружающую среду.

$$Q = \frac{m}{M} C \Delta T = \frac{m}{M} (C_v - R) \Delta T = -\frac{3}{4} P_1 V_1.$$

12. В цилиндре, закрытом с обоих концов и наполненном воздухом, находится поршень, разделяющий пространство в цилиндре на две равные половины. Давление воздуха по обе стороны поршня равно 10^5 Па. Поршень отклоняется от положения равновесия на незначительные расстояния и начинает колебаться, причем процесс можно считать адиабатным. Масса поршня равна 1,5 кг, расстояние от стенки до поршня равно 20 см, площадь поршня – 100 см^2 . Трение ничтожно мало. Определить период колебания поршня.

Решение. При первоначальном смещении поршня из положения равновесия на малую величину нарушается его равновесие, так как появляется отклонение давления от равновесного значения в каждой части цилиндра на величину ΔP_i . Сумма этих отклонений и определяет ту квазиупругую силу, под действием которой происходят в дальнейшем колебания поршня. Эта сила равна:

$$F = (P_1 - P_2) S, \quad (3.23)$$

где P_1 и P_2 – давления в соответствующих частях цилиндра после смещения поршня на X ;

S – площадь поршня.

Запишем второй закон Ньютона:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (3.24)$$

где m – масса поршня.

Изменение объема газа для каждой части поршня будет равно:

$$\Delta V = Sx, \quad (3.25)$$

где x берется с соответствующим знаком.

Начальный объем каждой части:

$$V_0 = Sl. \quad (3.26)$$

Для определения ΔP_i и полного перепада давления $P_1 - P_2$ используем уравнение адиабаты. Продифференцировав уравнение адиабаты

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (3.27)$$

получим

$$dP = -\gamma P \frac{dV}{V}. \quad (3.28)$$

Переходя к конечным приращениям, применяя (3.28) последовательно к обеим частям газа и учитывая (3.25) и (3.26), получим:

$$\Delta P_1 = P_1 - P_0 = -\gamma P_0 \frac{x}{l}; \quad (3.29)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - P_0 = -\gamma P_0 \frac{\Delta V_2}{V_0} = \gamma P_0 \frac{x}{l}. \quad (3.30)$$

Из формул (3.29) и (3.30) следует:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \Delta P_1; \\ P_2 &= P_0 + \Delta P_2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставив (3.31) в уравнение (3.23), получим:

$$F = (P_1 - P_2)S = (\Delta P_1 - \Delta P_2)S = 2\gamma P_0 S \frac{x}{e}.$$

Дифференциальное уравнение колебаний поршня запишется:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2\gamma P_0 S \frac{x}{e}.$$

Откуда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2\gamma P_0 S}};$$

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1,5 \cdot 0,2}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}} = 0,05 \text{ (с)}.$$

3.4. Контрольные вопросы

1. На какую физическую величину отличается молярная теплоемкость при постоянном давлении от молярной теплоемкости при постоянном объеме?
2. Как связаны молярная и удельная теплоемкости между собой?
3. Изменится ли отношение $C_p / C_v = \gamma$ данного газа, если часть его молекул диссоциирует на атомы?
4. В каких случаях для определения теплоемкости C_p и C_v можно пользоваться представлениями классической теории теплоемкости?
5. Можно ли в общем случае сказать, что теплоемкости C_p и C_v не зависят от температуры, и если они зависят от температуры, то чем объяснить эту зависимость и когда она проявляется?
6. Каковы границы применения формул для определения C_p и C_v в классической теории теплоемкости?
7. Укажите общий порядок расчета теплоемкости любого политропического процесса идеального газа по заданному уравнению состояния газа.
8. При каком условии монотонная кривая, лежащая между адиабатой и изотермой и проходящая через точку их пересечения на диаграмме PV , будет политропой?
9. В каких пределах лежат значения теплоемкости идеальных газов?
10. Какие процессы изменения состояния газа характеризуются отрицательной величиной теплоемкости?
11. Можно ли рассчитать работу расширения (сжатия) идеального газа в адиабатическом процессе, если задано число степеней свободы, начальная и конечная температуры? Какой вид имеет работа, выраженная через эти величины?
12. Можно ли и как графически сравнить работу расширения газа от V_1 до V_2 , если расширение происходило один раз изотермически, второй – адиабатически и третий – изобарически?
13. Как показать, что для одноатомных газов произведение PV равно $2/3$ внутренней энергии, для двухатомных – $2/5$ внутренней энергии? Какие соотношения нужно использовать для этого?
14. Чему равен показатель политропы для одноатомного и двухатомного газа в адиабатическом, изохорическом, изотермическом и изобарическом процессах?

15. Начертить график зависимости теплоемкости от показателя политропы для политропических процессов.

16. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $P = bV^n$, $n < 1$, b – постоянная величина?

3.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Определить удельные теплоемкости C_p и C_v для смеси газов, содержащих 75 % азота и 25 % кислорода.

Ответ: $C_p \approx 1254$ Дж/кг·К, $C_v \approx 842$ Дж/кг·К.

2. 25 % молекул кислорода диссоциировали на атомы. Определить удельные теплоемкости C_p и C_v .

Ответ: $C_v \approx 669$ Дж/кг·К, $C_p \approx 1035$ Дж/кг·К.

3. Определить молекулярный вес некоторого газа, если его удельные теплоемкости равны $C_p \approx 531$ Дж/кг·К, $C_v \approx 318$ Дж/кг·К.

Ответ: $M = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4. Как изменится отношение $\gamma = C_p / C_v$ азота, если под действием некоторого фермента определенная доля молекул диссоциирует на атомы? Отношение числа диссоциированных молекул к общему числу равно α .

Ответ:

- в случае недиссоциированных молекул $C_p / C_v = 7/5$;

- в случае диссоциированных молекул $\frac{C_p}{C_v} = \frac{7 + 3\alpha}{5 + \alpha}$.

5. Изменение состояния идеального двухатомного газа происходит по закону $V = aP^{-\frac{1}{2}}$, где $a = \text{const}$.

- какова удельная теплоемкость газа, если молекулярный вес равен M ;

- будет нагреваться или охлаждаться газ при расширении?

Ответ: $C = C_v - \frac{R}{M}$; газ нагревается.

6. Молярная теплоемкость азота при некотором процессе $c = 23,7$ Дж/моль·К. Как зависит давление газа от температуры при этом процессе?

Ответ: $P \sim T^{2/3}$.

7. 12 л азота расширяются при постоянном давлении 10^5 Па до объема 22 л. Найти изменение внутренней энергии.

Ответ: $\Delta U = 2,5 \cdot 10^3$ Дж.

8. 3 л воздуха под давлением 10^5 Па изотермически сжимают до объема 0,5 л. Определить количество теплоты, выделившееся при этом сжатии.

Ответ: $Q = 5,4 \cdot 10^2$ Дж.

9. Один моль газа при $P = \text{const}$ сжимают, при этом его температура изменяется от 20°C до 5°C . Определить, какую работу надо совершить при этом сжатии. Давление равно 10^5 Па.

Ответ: $A = -124,5$ Дж.

10. В цилиндре под поршнем находится воздух. Начальная высота столба воздуха равна $h_0 = 15$ см, наружное давление $P_0 = 10^5$ Па, площадь поршня $S = 10 \text{ см}^2$. Весом поршня можно пренебречь. Какую работу нужно произвести, чтобы поднять поршень на высоту $h_1 = 10$ см? $T = \text{const}$.

Ответ: $A = P_0 S \left[h_1 - h_0 \ln \frac{h_0 + h_1}{h_0} \right] = 2,5 \text{ (Дж)}.$

11. Один моль кислорода, находящийся при температуре 27°C , при изотермическом расширении поглотил 100 Дж. Определить, во сколько раз увеличится объем газа.

Ответ: в 2 раза.

12. Задан политропический процесс, уравнение состояния которого $PV^n = \text{const}$. Молекулярный вес газа M . Отношение $C_P / C_V = \gamma$.

- показать, что удельная теплоемкость газа $c = \frac{R(n-\gamma)}{M(\gamma-1)(n-1)};$

- при каких значениях показателя политропы газ, нагреваясь, совершает положительную внешнюю работу?;

- при каких значениях показателя политропы газ, нагреваясь, отдает теплоту во внешнюю среду?

13. Один моль идеального одноатомного газа находится в изолированном сосуде с подвижной крышкой, занимая объем V_1 при давлении P_1 и температуре 27°C . Газ медленно нагревают, затратив на это энергию, равную 30 кДж. В результате газ расширяется при $P = \text{const}$, нагреваясь до температуры T_2 и занимая конечный объем V_2 .

Определить:

- работу, проделанную газом при расширении;

- изменение внутренней энергии.

Ответ: $A = 1,2 \cdot 10^4 \text{ Дж}$, $\Delta U = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Дж}$.

14. Смесь равных (по весу) количеств водорода и гелия при 0°C помещена в цилиндрический сосуд объемом 1 м^3 , закрытый сверху движущимся без трения невесомым поршнем. Атмосферное давление равно $0,97 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Какое количество теплоты требуется для нагревания смеси до 200°C ?

Ответ: $Q = \frac{6PV_1}{RT_1}(T_2 - T_1) \approx 16 \text{ Дж}$.

4. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

4.1. Теоретический материал

Обратимые и необратимые процессы. Квазистатические процессы, их физическая интерпретация и реализация. Различные формулировки второго начала термодинамики. Тепловые машины. Цикл Карно. Идеальная тепловая машина, холодильная машина, их эффективность. Теорема Карно. Приведенные теплоты. Энтропия. Статистический смысл энтропии. Возрастание энтропии при стремлении системы к равновесию. Вычисление энтропии идеального газа.

4.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Что такое квазистатический процесс? Является ли квазистатический процесс обратимым?
2. Какие формулировки второго начала термодинамики вы знаете?
3. Из каких процессов состоит цикл Карно?
4. Какие существуют способы повышения коэффициента полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно?
5. Каков физический смысл площади, ограниченной кривой цикла, на диаграммах состояния в различных переменных?
6. Что такое приведенное количество теплоты? Какому условию удовлетворяют приведенные количества теплоты для цикла Карно? Какому условию они удовлетворяют для произвольного кругового процесса?
7. Как и в каких переменных можно записать дифференциал функции энтропии? Как записать второе начало с помощью функции энтропии?

8. Как изменяется энтропия для обратимых и необратимых процессов? Чему равно значение $\int \frac{\delta Q}{T}$ для обратимого и необратимого кругового процесса? Температура каких тел входит в этих случаях в знаменатель подынтегрального выражения?

9. Изменяется ли энтропия при адиабатных процессах?

10. В каком направлении изменяется энтропия системы при приближении этой системы к состоянию термодинамического равновесия для изолированной и неизолированной системы?

11. Изменяется ли энтропия идеального газа при его адиабатическом расширении в пустоту?

12. Каким путем можно вычислить изменение энтропии при переходе из одного состояния в другое?

13. Что такое термодинамическая вероятность? Как ее подсчитать для огромного числа молекул?

14. Как связана энтропия с термодинамической вероятностью? Как это можно доказать?

4.3. Основные типы задач и методы их решения

4.3.1. Классификация

1. Нахождение характеристик цикла, заданного на PV -, TV - или PT -диаграммах.

Метод решения – энергетические расчеты на основе:

- уравнения состояния для рабочего тела;
- уравнения процессов для участков цикла;
- первого начала термодинамики; работы, изменения внутренней энергии и теплоты, получаемых для участка цикла;
- определения эффективности машины (к. п. д., холодильный коэффициент).

2. Расчет изменений энтропии при переходе из одного состояния в другое.

Метод решения основан на использовании независимости изменения энтропии от пути перехода. Для решения используются:

- уравнения состояния вещества;
- параметры исходного и конечного состояний.

3. Процессы смешивания газов и контактного выравнивания температуры. Это необратимые процессы, которые должны сопровождаться

увеличением энтропии. Подсчитывается изменение энтропии заменой рассматриваемого необратимого процесса обратимым, переводящим систему из начального положения в конечное.

Для решения используются:

- уравнения процессов, которыми можно заменить необратимые процессы так, чтобы система перешла из начального состояния в конечное;
- параметры исходного и конечного состояний.

4.3.2. Примеры

1. Термодинамический цикл осуществляется над одним молем идеального газа. Последовательность состояний задана на PV -диаграмме. $V_2 = 2V_1$. Температура в состояниях 2 и 4 соответственно равна T_2 и T_4 . Определить к. п. д. цикла, работу цикла.

Решение. Используя общее выражение элементарной работы $\delta A = PdV$, найдем работу на каждом участке цикла. Заданный цикл состоит из двух изобар ($1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$) и двух изохор ($2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1$) (рис. 4.1).

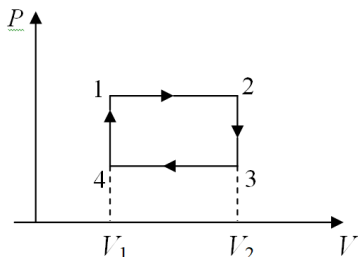


Рис. 4.1

$A_{2,3} = A_{4,1} = 0$ – изохорические процессы. Давления на изобарах не заданы, но их легко определить, используя уравнения состояния для идеального газа. Так как $P_1 = P_2 = P^I$, $P_3 = P_4 = P^{II}$, имеем $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$ или $T_2 = 2T_1$ и аналогично $T_3 = 2T_4$, а из диаграммы ясно, что $T_2 > T_4$. Тогда

$$A_{12} = \int_1^2 P^I dV = P^I(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = \frac{RT_2}{2} > 0;$$

$$A_{34} = \int_3^4 P^{\parallel} dV = P^{\parallel} (V_4 - V_3) = R(T_4 - T_3) = -RT_4 < 0.$$

Найдем полную работу за цикл:

$$A = \oint PdV = \int_1^2 PdV + \int_2^3 PdV + \int_3^4 PdV + \\ + \int_4^1 PdV = (P^{\perp} - P^{\parallel})(V_2 - V_1) = \frac{R}{2}(T_2 - 2T_4) > 0.$$

Работа положительна, так как $P^{\perp} - P^{\parallel} > 0$ и $V_2 - V_1 > 0$. Найдем теплоту, которую получает или отдает рабочее тело на каждом этапе цикла. Воспользуемся первым началом термодинамики: $\delta Q = dU + \delta A$.

Так как рабочим телом является идеальный газ, то его молярную теплоемкость следует считать известной.

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_V dT + PdV; \\ Q_{12} &= \int_1^2 C_P dT = C_P (T_2 - T_1) > 0; \\ Q_{23} &= \int_2^3 C_V dT = C_V (T_3 - T_2) < 0; \\ Q_{34} &= \int_3^4 C_P dT = C_P (T_4 - T_3) > 0; \\ Q_{41} &= \int_4^1 C_V dT = C_V (T_4 - T_1) > 0. \end{aligned}$$

Из подсчета количества теплоты ясно, что для данного цикла общее количество теплоты, получаемое от нагревателей $Q_1 = Q_{12} + Q_{41} > 0$. Количество теплоты, переданное холодильником, равно $Q_2 = Q_{12} + Q_{41} < 0$. К. п. д. цикла равно отношению полной работы к теплоте, полученной рабочим телом на всех этапах цикла.

$$\eta = \frac{A}{Q}; \quad \eta = \frac{R(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{C_P(T_4 - T_1) + C_V(T_1 - T_4)} = \frac{(\gamma - 1)(T_2 - 2T_4)}{(\gamma + 1)T_2 - 2T_4},$$

где $\eta = \frac{C_P}{C_V}$.

Цикл Карно, который можно провести между максимальной и минимальной изотермами, т. е. T_2 и T_4 , характеризуется к. п. д.

$$\eta_k = \frac{T_2 - T_4}{T_2}.$$

Сравнивая η_k и η данного цикла видно, что η меньше η_k , так как любая реальная машина работает необратимым образом и ее к. п. д. должен быть меньше.

2. Тепловая машина Карно, имеющая к. п. д. 40 %, начинает использоваться при тех же условиях, но как холодильная машина. Найти величину холодильного коэффициента и количество теплоты, которое эта машина может перенести за один цикл от холодильника к нагревателю, если к ней за каждый цикл подводится механическая работа, равная 200 Дж.

Решение. В качестве рабочего тела используется идеальный газ.

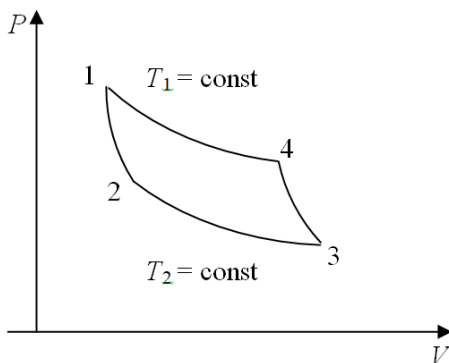


Рис. 4.2

Согласно PV -диаграмме цикла Карно (рис. 4.2) $Q_{12} = 0$ и

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = -\frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1) > 0.$$

1→2 – адиабатный процесс; 2→3 – изотермический процесс, поэтому $\Delta U_{23} = 0$ и $Q_{23} = A_{23} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} > 0$; 3→4 – адиабатное сжатие,

$Q_{34} = 0$ и $A_{34} = -\Delta U_{34} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) > 0$; $4 \rightarrow 1$ – изотермическое сжатие. Тепло, забираемое холодильником:

$$Q_{41} = A_{41} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_1}{V_4} < 0.$$

Таким образом, если тепловая машина Карно за счет теплоты, передаваемой от нагревателя к холодильнику, совершает работу, то в холодильной машине теплота от холодильника поступает в нагреватель за счет внешней работы. Используя уравнения Пуассона

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \text{ и } T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \text{ получим } \frac{V_1}{V_4} = \frac{V_2}{V_3}.$$

$$\text{Полная работа: } A = \oint P dV = \sum A_{ik} = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) \ln \frac{V_3}{V_2} < 0.$$

$$\text{Теплота, получаемая рабочим телом: } Q_{1x} = Q_{23} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} > 0;$$

$$\text{отданная: } Q_{2x} = Q_{41} = -\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0.$$

$$\text{К. п. д. цикла Карно } \eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Наша же машина работает в обратном направлении и η_x равно отношению отнятой у холодильника теплоты Q_{1x} к совершенной для этого работе. Эту величину называют холодильным коэффициентом.

$$\eta_x = \frac{Q_{1x}}{A} = \frac{R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}}{R (T_2 - T_1) \ln \frac{V_3}{V_2}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} < 0.$$

Обычно употребляется $|\eta_x| = T_2 / T_1 - T_2$. С другой стороны, при осуществлении в тепловой машине цикла Карно $\eta_k = A / Q$. Для холодильной машины за счет совершенной работы над рабочим телом забирается столько теплоты от холодильника, сколько передается ему при прямом цикле Q_2 .

$$\text{Отсюда } |Q_{1x}| = |Q_2| = Q_1 - A, \quad |Q_{1x}| = A \frac{1 - \eta_k}{\eta_k}, \quad |\eta_k| = \left| \frac{Q_{1x}}{A} \right| = \frac{1 - \eta_k}{\eta_k}.$$

Подстановка числовых значений дает: $Q_{1x} = 300 \text{ Дж}$, $|\eta_k| = 1,5$.

3. Кислород, масса которого 0,2 кг, нагревают от температуры 300 К до 400 К. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давление газа одинаковы.

Решение. В случае обратимого процесса изменение энтропии может быть найдено по формуле: $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$.

$$\text{Для обратимого процесса } \delta Q_p = \frac{m}{M} C_p dT \quad \text{и} \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{m}{M} C_p \frac{dT}{T},$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad C_p = \frac{7}{2} R,$$

где i – число степеней свободы.

$$\Delta S = \frac{0,2}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,3 \cdot \ln \frac{400}{300} = 51 \text{ (Дж/кг)}.$$

4. Вычислить разницу теплот и изменения энтропии при следующих обратимых процессах: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ (рис. 4.3).

Решение. Для перехода $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$:

$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{m}{M} (C_v \Delta T_{12} + C_p \Delta T_{23}).$$

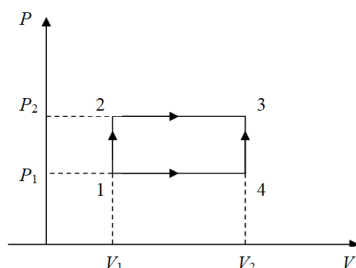


Рис. 4.3

Используя уравнение состояния, имеем:

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \frac{T_1(P_2 - P_1)}{P_1};$$

$$\Delta T_{23} = T_2 - T_3 = \frac{T_1 P_2 (V_2 - V_1)}{P_1 V_1}.$$

Для перехода $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$:

$$Q_{143} = Q_{14} + Q_{43} = \frac{m}{M}(C_p \Delta T_{14} + C_v \Delta T_{43});$$

$$\Delta T_{14} = T_4 - T_1 = \frac{T_1(V_2 - V_1)}{V_1};$$

$$\Delta T_{43} = T_3 - T_4 = \frac{T_1 V_2 (P_2 - P_1)}{P_1 V_1}.$$

Найдем разницу между теплотами для обоих процессов:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{123} - Q_{143} = \frac{m}{M} [C_v (\Delta T_{12} \Delta T_{23} \Delta T_{14} \Delta T_{43}) + R (\Delta T_{23} \Delta T_{14})] = \\ &= \frac{m}{M} \frac{RT_1}{P_1 V_1} (P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1). \end{aligned}$$

Изменение энтропии

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{M} \left(C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} \right),$$

$$S = S(P_1 V), \quad \Delta S = \frac{m}{M} \left[C_v \ln \frac{P_2}{P_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right].$$

5. Два баллона емкостью $V_1 = 2$ л и $V_2 = 3$ л соединены трубкой с краном и оба заполнены азотом. Давление в сосудах соответственно $P_1 = 10^5$ Па, $P_2 = 5 \cdot 10^5$ Па. Найти изменение энтропии системы в результате перемешивания газов при открытом кране. Вся система изолирована в тепловом отношении. Начальная температура в баллонах одинакова и равна 300 К.

Решение. Так как система теплоизолирована, внутренняя энергия системы остается постоянной. Смешивание происходит адиабатически, но не обратимым образом, поэтому энтропия системы должна возрастать. Так как молекулы газа в баллонах неразличимы, кран мож-

но заменить поршнем, который будет перемещаться обратимым способом при $T = \text{const}$, пока не выровняется давление.

Первое начало термодинамики запишем в виде: $dU = TdS - PdV = 0$,

тогда
$$dS = \frac{PdV}{T} = \frac{m}{M} R \frac{dV}{V}.$$

В силу аддитивности энтропии общее изменение представится суммой изменений для каждого баллона

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_1^I}{V_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} \ln \frac{V_2^I}{V_2} = \frac{P_1 V_1}{T} \ln \frac{P_1}{P} + \frac{P_2 V_2}{T} \ln \frac{P_2}{P},$$

где V_1^I и V_2^I – объемы после выравнивания давлений.

Записав очевидные соотношения $P_1 V_1 = P V_1^I$, $P_2 V_2 = P V_2^I$, $V_1 + V_2 = V_1^I + V_2^I$, имеем:

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Подстановка числовых значений дает: $\Delta S = 0,01$ Дж/К.

6. Вычислить разность энтропии между конечным и начальным состоянием, проверить утверждение, что процесс расширения идеального газа в пустоту от объема V_1 до объема V_2 необратим, т. е. $\Delta S_{12} > 0$. Система окружена адиабатической оболочкой.

Решение. Система теплоизолирована и при расширении газа в пустоту не совершается работа против внешних сил. Поэтому $\Delta U = 0$. Процесс расширения является необратимым процессом. В качестве обратимого процесса перехода из начального в конечное в данном случае целесообразно выбрать изотермический процесс. Изменение энтропии в этом случае следует записать в виде

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV = C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV.$$

Для идеального газа $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V}$ и

$$\Delta S = S(V_2 T) - S(V_1 T) = \int_1^2 \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0,$$

так как $V_2 > V_1$.

4.4. Контрольные вопросы

1. Как по заданной диаграмме можно определить, является ли машина тепловой или холодильной?
2. Каков физический смысл площади, ограниченной кривой цикла на PV -диаграмме?
3. Какими величинами может быть определен к. п. д. тепловой машины?
4. Как определить холодильный коэффициент для холодильной машины?
5. Зависит ли теплота, отбираемая у нагревателя, от массы рабочего тела?
6. Зависит ли теплота, отбираемая у нагревателя, от теплоемкости рабочего тела?
7. Зависит ли работа, совершаемая рабочим телом и тепловой машиной за один цикл, от массы и теплоемкости рабочего тела?
8. Что изменится, если в идеальной тепловой машине вместо одноатомного газа, используемого как рабочее тело, употребить такое же количество двухатомного газа?
9. Справедливо ли утверждение, что газ, сжатый в баллоне, обладает запасом потенциальной энергии аналогично сжатой пружине?
10. Какие формы записи вы знаете для изменения энтропии?
11. Как подсчитать изменение энтропии для обратимого и необратимого процесса?
12. Почему энтропия замкнутой системы при необратимом процессе возрастает и почему изменение энтропии в этом случае следует вычислять, используя обратимые процессы?
13. Как можно трактовать изменение энтропии при смешивании газов со статистической точки зрения?
14. Чему равно изменение энтропии для адиабатного процесса?

4.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Рабочим телом является двухатомный идеальный газ (рис. 4.4).

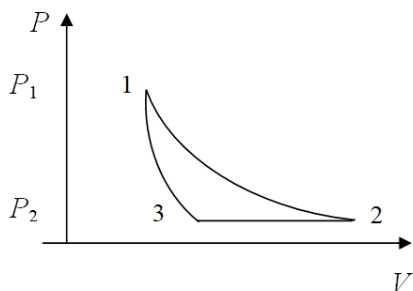


Рис. 4.4

1→2 – изотермический процесс, 3→1 – адиабатный процесс. Заданы T_1 и T_3 . Определить к. п. д. цикла.

Ответ: $\eta = 1 - \frac{7}{2} \frac{1 - \frac{T_3}{T_1}}{\ln \frac{P_1}{P_2}}$.

2. Найти к. п. д. как функцию максимальной и минимальной температуры в данном цикле (рис. 4.5).

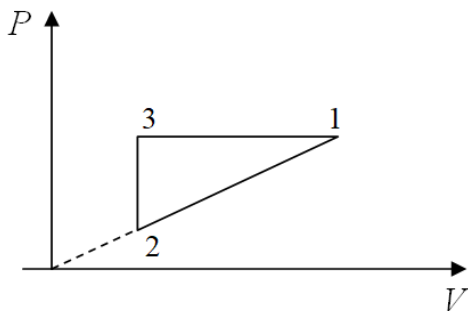


Рис. 4.5

Ответ: $\eta = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}}{(\sqrt{T_1 T_2} - T_2) + \gamma(T_1 - \sqrt{T_1 T_2})}$.

3. Перевести цикл из PT -диаграммы (рис. 4.6) в PV - и VT -диаграммы. Заданы P_1 и P_2 , T_1 и T_2 . Вычислить к. п. д. цикла.

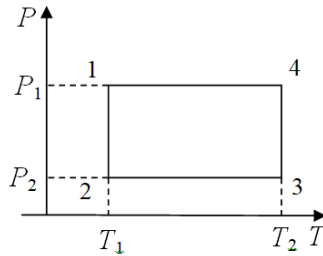


Рис. 4.6

Ответ: $|\eta| = \frac{T_1}{T_2 - T_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{P_1}{P_2}$.

4. Один кмоль кислорода совершает цикл Карно в интервале температур от 27°C до 327°C . Отношение максимального за цикл давления $P_{\max}$ к минимальному давлению $P_{\min}$ равно 20.

Вычислить:

- к. п. д. цикла;
- количество теплоты, полученной от нагревателя;
- количество теплоты, отданной холодильнику.

Ответ: $\eta = 50\%$, $Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{P_1}{P_2} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Дж}$,

$Q_2 = (1 - \eta) Q_1 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

5. Подсчитать изменение энтропии для каждого участка цикла Карно; убедиться, что полное изменение энтропии равно нулю.

6. 2 кг кислорода при давлении 100 кПа занимают объем $1,5 \text{ м}^3$. В результате расширения объем газа увеличился в 2,5 раза, а давление уменьшилось в 3 раза. Найти приращение энтропии.

Ответ: $\Delta S = 234 \text{ Дж/К}$.

7. Идеальная холодильная машина работает по обратимому циклу Карно в интервале температур от -11°C до 15°C . Работа машины за цикл $A = 200 \text{ кДж}$. Вычислить:

- холодильный коэффициент;
- количество тепла Q_2 , отводимого от охлаждаемого тела за цикл;
- количество тепла Q_1 , отдаваемого теплоприемнику за цикл.

Ответ: $\eta_x = 10$, $Q_2 = -\eta_x A = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж}$, $Q_1 = -(1 + \eta_x) A = 2,2 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

8. 1 кмоль идеального газа совершает политропический процесс, причем его температура изменяется от T_1 до T_2 . Показатель политропы равен n . Найти приращение энтропии газа.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \frac{n - \gamma}{(n - 1)(\gamma - 1)} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

9. В одном сосуде, объем которого $V_1 = 1,6$ л, находится $m_1 = 14$ мг азота. В другом сосуде, объем которого $V_2 = 3,4$ л, находится $m_2 = 16$ мг кислорода. Температуры газов равны. Сосуды соединяют, и газы перемешиваются. Найти приращение энтропии при этом процессе.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \frac{m_1}{M_1} R \ln \frac{V_2 + V_1}{V_1} + \frac{m_2}{M_2} R \ln \frac{V_2 + V_1}{V_2} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/К}.$$

10. Найти изменение энтропии 30 г льда при превращении его в пар, если начальная температура льда -40°C , а температура пара -100°C . Теплоемкость воды и льда считать постоянными, а все процессы – происходящими при атмосферном давлении. Удельная теплоемкость льда $-2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$.

$$\text{Ответ: } \Delta S \approx 265 \text{ Дж/К}.$$

5. ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

5.1. Теоретический материал

Среднее число столкновений молекул в единицу времени, средняя длина свободного пробега. Общее уравнение переноса. Диффузия в газах. Стационарная и нестационарная диффузия. Коэффициенты взаимно- и самодиффузии. Теплопроводность газов. Коэффициент теплопроводности. Вязкость газов (внутреннее трение). Коэффициенты динамической и кинематической вязкости. Зависимость коэффициентов переноса от давления и температуры.

5.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Как понимать термин «столкновение» молекул? От каких параметров зависит среднее число столкновений молекул в единице объема газа за 1 с ($\langle z \rangle$)? Как аналитически выражается эта зависимость?

2. Какая из скоростей максвелловского распределения входит в формулу для $\langle z \rangle$?

3. Что называют средней длиной свободного пробега молекул? Чему она равна? От каких параметров состояния газа она зависит и какова эта зависимость?

4. Какие процессы в газах объединяются понятием «явление переноса»? Что общего во всех этих процессах? Являются ли эти процессы обратимыми?

5. Как записывается общее уравнение переноса? Какие условия налагаются на газ при выводе этого уравнения?

6. В чем сущность явления диффузии? Запишите уравнение диффузии. В чем разница между явлением самодиффузии и взаимной диффузии?

7. Каков физический смысл коэффициента диффузии? Какими формулами он определяется?

8. В чем сущность явления внутреннего трения? Запишите уравнение, определяющее силу внутреннего трения.

9. Каков физический смысл коэффициента внутреннего трения? Какими формулами он определяется? Какая связь между коэффициентом динамической и кинематической вязкости?

10. В чем сущность явления теплопроводности? Запишите уравнение теплопроводности.

11. Каков физический смысл коэффициента теплопроводности. Какими формулами он определяется?

12. От каких параметров состояния газа зависят коэффициенты диффузии D , внутреннего трения η , теплопроводности χ ? Какова каждая из этих зависимостей?

13. Какова теоретическая связь между коэффициентами переноса D , η и χ ? Полностью ли она подтверждается экспериментально?

14. Какие процессы переноса называются стационарными, нестационарными? При каких условиях нестационарные процессы можно считать стационарными?

5.3. Основные типы задач и методы их решения

5.3.1. Классификация

1. Определение неизвестных характеристик процессов переноса с помощью уравнения переноса для данного конкретного процесса.

2. Определение средней длины свободного пробега, среднего числа столкновений, газокINETического диаметра из явлений переноса.

3. Определение изменения величины коэффициентов переноса и газокинетических характеристик молекул в зависимости от изменения параметров состояния газа (P, V, T).

4. Определение характеристик процессов переноса на основании связи между коэффициентами переноса.

5. Комбинированные задачи.

Для решения всех пяти типов, используются следующие основные закономерности и соотношения:

- соответствующее уравнение переноса;
- формулы для коэффициентов переноса данного явления и газокинетических характеристик явления столкновения молекул;
- связь между коэффициентами переноса;
- основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.

5.3.2. Примеры

1. Пространство между двумя очень длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) заполнено однородным идеальным газом, коэффициент теплопроводности которого равен χ . Внешний цилиндр поддерживается при температуре T_2 , внутренний – при температуре T_1 ($T_1 > T_2$). Считая, что конвекция газа отсутствует и что длина свободного пробега молекул газа меньше расстояния между цилиндрами, найти:

- закон распределения температур в пространстве между цилиндрами;

- градиент температуры $\left(\frac{dT}{dr}\right)$ в пространстве между цилиндрами;

- поток тепла q , приходящийся на единицу длины цилиндров.

Решение. Так как температуры T_1 и T_2 поддерживаются постоянными, то в пространстве между цилиндрами устанавливается постоянное распределение температур $T(r)$. Поток тепла не будет зависеть от времени, следовательно, процесс будет носить стационарный характер. Выделим мысленно цилиндр радиуса r , коаксиальный с данными, все точки которого имеют одинаковую температуру $T = T(r)$ (рис. 5.1). Поток тепла, проходящий через него, равен:

$$q = \frac{dQ}{dt} = \chi \frac{\partial T}{\partial r} S = \chi \frac{dT}{dr} 2\pi r l, \quad (5.1)$$

где $S = 2\pi rl$ – площадь поверхности цилиндра радиуса r .

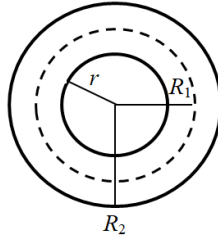


Рис. 5.1

Необходимым условием существования теплового равновесия и стационарности процесса является независимость потока тепла q от радиуса r цилиндра.

$$q = \text{const.} \quad (5.2)$$

Проинтегрируем уравнение (5.1), учитывая (5.2):

$$\frac{2\pi\chi l}{q} \int_{T_1}^T dT = \int_{R_1}^r \frac{dr}{r},$$

откуда

$$\frac{2\pi\chi l}{q} (T - T_1) = \ln \frac{r}{R_1}. \quad (5.3)$$

Начальные условия имеют вид:

при $r = R_1$ $T = T_1$ }
 при $r = R_2$ $T = T_2$ }, тогда из уравнения (5.3) получим:

$$q = \frac{2\pi\chi l (T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}. \quad (5.4)$$

Поток тепла на единицу длины цилиндров

$$\frac{q}{l} = \frac{2\pi\chi (T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}. \quad (5.5)$$

Закон распределения температур между цилиндрами найдем, подставив (5.4) и (5.5) в (5.3):

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (5.6)$$

Определим градиент температуры в пространстве между цилиндрами из формулы (5.1), учитывая (5.4).

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

2. Катер на подводных крыльях, общая площадь поверхностей которых $S = 50 \text{ м}^2$, движется с постоянной скоростью 50 км/ч . Считая, что сила вязкого трения крыльев о воду составляет около 1% полной силы сопротивления, действующей на катер, и принимая полезную мощность двигателя $N = 100 \text{ кВт}$, оценить толщину слоя воды d , увлекаемого при движении катера. Коэффициент вязкости воды $\eta = 0,01 \text{ пуаз}$.

Решение. Сила вязкого трения

$$|F_{\text{тр}}| = 0,01 \cdot F_{\text{тяги}} = 0,01 \frac{N}{v}, \text{ так как } N = F_{\text{тяги}} \cdot v, \quad (5.7)$$

с другой стороны, сила связана с вязкостью соотношением

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx} S. \quad (5.8)$$

Значение градиента скорости $\frac{dv}{dx}$ нужно взять в ближайшем к крылу слое. Однако его можно заменить средним значением $\langle \frac{dv}{dx} \rangle$, приближенно считая закон распределения скоростей увлекаемых слоев воды линейным

$$\langle \frac{dv}{dx} \rangle \approx \frac{v - 0}{d} = \frac{v}{d}, \quad (5.9)$$

где v – скорость прилегающих к крылу слоев воды, совпадающая со скоростью катера.

Подставив в (5.7), (5.8) и (5.9), получим:

$$0,01 \frac{N}{v} = \eta \frac{v}{d} S,$$

отсюда

$$d = \frac{\eta S v^2}{0,01 N}, d = 0,125 \text{ м.}$$

3. Коэффициент теплопроводности χ азота при $T = 273 \text{ К}$ равен $13 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/мК}$. Определить газокинетический диаметр эффективного сечения молекул при этих условиях.

Решение. Коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho C_V; \quad (5.10)$$

где ρ – плотность газа;

C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (5.11)$$

где v – средняя арифметическая скорость.

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \quad (5.12)$$

где $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега;

n – число молекул в единице объема;

d – газокинетический диаметр.

Найдем d^2 . Для этого в (5.10) подставим (5.11) и (5.12). Из уравнения состояния известно, что $\rho = \frac{MP}{RT}$, а из основного уравнения МКТ

$$n = \frac{P}{KT}, C_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M} = \frac{5R}{2M}, \text{ так как для двухатомного газа } i = 5$$

$$d^2 = \frac{\rho C_V \langle v \rangle}{3 \sqrt{2} \pi \chi n} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi^2 M}} \frac{K}{\chi}.$$

Заменив $K = \frac{R}{N_A}$, $d^2 = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi^2 M}} \frac{R}{N_A \chi}$,

$$d^2 = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{8,3 \cdot 273}{9,8 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{8,3}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 13 \cdot 10^{-3}} = 14 \cdot 10^{-20} (\text{м}^2),$$

откуда $d \approx 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

4. Коэффициент внутреннего трения азота при $t = 0^\circ \text{C}$ равен $\eta = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ кг/мс}$. Определить значение средней длины свободного пробега молекул азота при нормальном давлении.

Решение. Средняя длина свободного пробега связана с коэффициентом внутреннего трения соотношением:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho, \quad (5.13)$$

где $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость;

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ – средняя длина свободного пробега.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$\rho = \frac{MP}{RT}.$$

Подставив все значения в (5.13), получим:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\langle v \rangle \rho} = \frac{3\eta}{\rho} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}},$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3 \cdot 1,68 \cdot 10^{-5}}{105} \sqrt{\frac{3,4 \cdot 8,3 \cdot 73}{8 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 7,5 \cdot 10^{-8} (\text{м}).$$

5. Коэффициент теплопроводности воздуха при температуре 0°C и нормальном давлении равен $\chi = 21 \cdot 10^{-3} (\text{Дж/К} \cdot \text{с} \cdot \text{м})$. Определить величину коэффициента χ при температуре 40°C и при том же давлении.

Решение. Коэффициент теплопроводности определяется формулой:

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho C_V. \quad (5.14)$$

Выясним зависимость каждого из сомножителей, входящих в формулу (5.14).

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = A\sqrt{T},$$

где A не зависит от температуры.

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где $n = \frac{\rho}{m}$.

В (5.14) входит произведение $\langle \lambda \rangle \rho$;

$$\langle \lambda \rangle \rho = \frac{m}{\sqrt{2}\pi d^2}.$$

Зависимостью d от температуры можно пренебречь и, следовательно, $\langle \lambda \rangle \rho$ не зависит от температуры. C_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме в классической физике не зависит от температуры.

Следовательно, $\chi_1 = A\sqrt{T_1}$, $\chi_2 = A\sqrt{T_2}$. Найдем отношение $\frac{\chi_1}{\chi_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$,

откуда $\chi_2 = \chi_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. $\chi_2 = 21 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{313}{273}} = 23,5 \cdot 10^{-3}$ (Дж/К · с · м).

6. Расстояние между стенками дьюаровского сосуда $L = 5$ мм, диаметр эффективного сечения молекул воздуха, заключенного между стенками, $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м, температура 20°C . Определить примерное давление, ниже которого между стенками сосуда Дьюара будут условия высокого вакуума. Как будет вести себя коэффициент теплопроводности в области высокого и низкого вакуума? Как зависит средняя длина свободного пробега от давления в указанных областях?

Решение. Коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho C_V,$$

где C_V и $\langle v \rangle$ не зависят от давления.

Из уравнения состояния $\rho = \frac{MP}{RT}$, т. е. $\rho \sim P$.

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 P}}, \text{ т. е. } \langle \lambda \rangle \sim 1/P.$$

Видно, что $\chi = \text{const}$ в области низкого вакуума. Однако в области низких давлений практически отсутствуют столкновения молекул и перенос энергии происходит за счет соударения молекул только со стенками сосуда, т. е. в области среднего вакуума $\langle \lambda \rangle \sim L$. Следовательно, обычное понятие теплопроводности в разреженном газе теряет смысл.

Количество тепла, переносимого газом, в этом случае пропорционально числу ударов молекул о стенки сосуда. Коэффициент теплопроводности при переходе к низким давлениям $\chi \sim P$.

В условиях нашей задачи, положив $\langle \lambda \rangle = L$ и зная, что $n = \frac{P}{kT}$,

найдем
$$P = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 L}};$$

$$P = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ (Па)}.$$

7. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях равен $D = 1,31 \cdot 10^{-2}$ м/с. Определить величину коэффициента внутреннего трения водорода при этих условиях.

Решение. Из сравнения выражений коэффициента диффузии $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ и коэффициента внутреннего трения $\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho$ следует, что $\eta = D\rho$, $\rho = mn = \frac{M}{N_A} n$, где ρ и n соответственно плотность газа и число молекул в единице объема.

$$\eta = \frac{DM}{N_A} n, \quad n = \frac{P}{kT}, \quad \eta = \frac{DMP_0}{N_A kT_0} = \frac{DMP_0}{RT_0},$$

$$\eta = \frac{1,31 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{8,31 \cdot 273} = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ (кг/м} \cdot \text{с)}.$$

8. Через площадку $S = 100 \text{ см}^2$ за время $\tau = 10 \text{ с}$ вследствие диффузии проходит некоторое количество азота. Градиент плотности в

направлении, перпендикулярном площадке S , равен $\frac{dp}{dx} = 1,26 \text{ кг/м}^4$.

Процесс идет при температуре 27°C , средняя длина свободного пробега молекул азота равна $\langle \lambda \rangle = 10^{-7} \text{ м}$, эффективный диаметр его молекул $d = 3,75 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Определить величину коэффициента внутреннего трения при этих условиях и количество продиффундировавшего азота за указанное время через площадку S .

Решение. Из условия задачи можно непосредственно найти коэффициент диффузии и, зная связь между коэффициентом внутреннего трения и коэффициентом диффузии, определить η .

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, \quad \eta = D\rho, \quad \rho = mn = \frac{M}{N_A} n,$$

$$\eta = \rho D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{M}{N_0} n = \frac{2}{3\pi} \sqrt{\frac{RTM}{\pi}} \frac{1}{N_A d^2};$$

$$\eta = \frac{2}{3 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 300 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{3,14}} \frac{1}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot (3,75)^2 \cdot 10^{-20}} =$$

$$= 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ (Н/м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Количество продиффундировавшего вещества определим из уравнения:

$$\Delta m = -D \left(\frac{dp}{dx} \right) S \tau;$$

$$\Delta m = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{dp}{dx} S \tau;$$

$$\Delta m = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,3 \cdot 300}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \cdot 1,26 \cdot 10^{-2} \cdot 10 = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ (кг)}.$$

9. Дан идеальный двухатомный газ, который адиабатически сжимают. Найти зависимость средней длины свободного пробега молекул и среднего числа столкновений за единицу времени от давления в процессе этого сжатия.

Решение. Средняя длина свободного пробега и число столкновений равны: $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$, $z = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}$.

Установим зависимость от давления каждой величины, входящей в эти выражения. $n = \frac{P}{kT}$, так как уравнение адиабатического процесса

имеет вид $P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{const}$, то $T = P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \text{const}$ и $n \sim \frac{P}{T} \sim P^{\frac{1}{\gamma}}$,

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{n} \sim P^{-\frac{1}{\gamma}}, \text{ следовательно } z \sim \frac{1}{\langle \lambda \rangle} \sim P^{\frac{1}{\gamma}}.$$

10. Открытый цилиндрический сосуд с теплоизолирующими стенками частично заполнен водой, которая понемногу испаряется. Установившаяся температура воды на 4°C ниже температуры окружающего воздуха, равной $T = 300\text{ K}$. Оценить разность концентраций пара над поверхностью воды и вне сосуда (на уровне выхода из него), считая, что перемешивание пара вверх определяется диффузией. Средний свободный пробег молекул водяного пара и воздуха считать одинаковым.

Решение. При испарении поток тепла, уносимый молекулами испаряющейся воды путем диффузии, равен:

$$Q_1 = D \frac{\Delta n}{L} m r \Delta S,$$

где D – коэффициент диффузии водяного пара в воздухе;

S – площадь поверхности воды;

L – расстояние от поверхности воды до границы сосуда;

Δn – разность концентрации водяного пара над поверхностью воды и вне сосуда;

$m = 1,8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$ – масса молекул воды;

$r = 2,4 \cdot 10^6\text{ Дж/кг}$ – удельная теплота парообразования.

По условию задачи процесс является установившимся (стандартным), следовательно, поток тепла Q_1 должен быть полностью уравновешен, т. е. скомпенсирован потоком тепла Q_2 за счет теплопроводности воздуха.

$$Q_1 = Q_2, \quad Q_2 = \chi \frac{\Delta T}{L} S,$$

где χ – коэффициент теплопроводности воздуха;

ΔT – разность температур вне сосуда и у поверхности воды.

Определим Δn : $\chi \frac{\Delta T}{L} S = D \frac{\Delta n}{L} m r S$; $\Delta n = \frac{\chi \Delta T}{D m r}$;

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v_1 \rangle \langle \lambda_1 \rangle \rho_1 C_{V1},$$

где $\langle \lambda_1 \rangle$, $\langle v_1 \rangle$, ρ_1 , C_{V1} – относятся к молекулам воздуха,
 $\rho_1 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$.

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle,$$

где $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина пробега молекул воды;
 $\langle v \rangle$ – средняя скорость молекул воды.

$$\langle \lambda_1 \rangle \approx \langle \lambda \rangle, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Найдем $\Delta n = \frac{\langle v_1 \rangle \rho_1 C_{V1} \Delta T}{\langle v \rangle m k} = \frac{\sqrt{M}}{M_1} \frac{\rho_1 C_{V1} \Delta T}{m k}, \quad C_{V1} = \frac{i}{2} \frac{R}{M_1} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_1}.$

$$\Delta n = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{M}{M_1^3}} \frac{R \rho_1 \Delta T}{m k};$$

$$\Delta n = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{18}{29^3}} \frac{8,31 \cdot 1,29 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{18 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 5 \cdot 10^{22} (\text{м}^{-3}).$$

5.4. Контрольные вопросы

1. Что является причиной несоответствия между очень большими скоростями теплового движения молекул и медленным протеканием процессов установления равновесия системы, к которым в конечном счете и сводятся процессы переноса?

2. Какими параметрами характеризуются процессы столкновения газовых молекул? Каков порядок этих величин?

3. При выводе формулы для определения средней длины свободного пробега нужно ли учитывать столкновения молекул со стенками сосуда?

4. Какова зависимость длины свободного пробега молекул от давления? При любых ли давлениях одинакова эта зависимость? Зависит ли $\langle \lambda \rangle$ от температуры?

5. Что такое вакуум с точки зрения длины свободного пробега? Почему понятие «вакуум» является относительным?

6. Из анализа формул, определяющих коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности, следует зависимость η и χ от давления газа. В каких пределах эта зависимость оправдывается? Как это объяснить?

7. Как показать, что коэффициент диффузии зависит от температуры? Какова это зависимость?

8. В каких единицах измеряются коэффициенты переноса в системе СИ?

9. Найдите связь между коэффициентами переноса.

10. Каков физический смысл градиента скорости, градиента температуры и градиента плотности?

11. Будут ли происходить явления переноса в вакууме? Опишите физическую картину и зависимость коэффициентов переноса от давления в области вакуума.

12. Для чего в термосах и сосудах Дьюара делают двойные стенки?

5.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Самолет летит со скоростью 360 км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, равен 4 см, найти касательную силу, действующую на каждый метр поверхности крыла. Диаметр молекул – $3 \cdot 10^{-10}$ м. Температура воздуха – 0 °С.

Ответ: $F = 0,045$ Н.

2. Вода в пруду находится при 0 °С, температура воздуха – 10 °С. Какой слой льда образуется за сутки, если плотность льда $0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, температура его поверхности совпадает с температурой воздуха?

Ответ: $h = 0,11$ м.

3. Два сосуда А и В соединены короткой трубкой сечения S и длины L . В одном сосуде находится азот, в другом – кислород. Диаметры их примерно одинаковы и равны d . Определить, сколько азота продиффундирует в сосуд с кислородом за 1 с.

Ответ:
$$\Delta m = \frac{2}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{RTM}{\pi}} \frac{S \Delta t}{LN_A}.$$

4. Пространство между двумя большими параллельными пластинами заполнено средой, коэффициент теплопроводности которой изменяется с температурой по закону $\chi = A/T$, где A – постоянная для данной среды величина. Температуры пластин T_1 и T_2 поддерживаются постоянными ($T_1 > T_2$). Расстояние между пластинами – L . Найти плотность потока тепла и температуру в среде как функцию x , где x – расстояние, отсчитанное от пластины, температура которой T_1 .

Ответ: $q = \frac{A}{L} \ln \frac{T_1}{T_2}$, $T(x) = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{x}{L}}$.

5. Определить среднее число столкновений за 1 с молекул азота при нормальных условиях, если коэффициент вязкости азота равен $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/м·с.

Ответ: $\langle z \rangle = 5 \cdot 10^9$ с $^{-1}$.

6. Коэффициент диффузии кислорода при 0 °С равен $0,19 \cdot 10^{-4}$ м 2 /с. Определить среднюю длину свободного пробега молекул газа.

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 1,35 \cdot 10^{-7}$ м.

7. Определить длину свободного пробега молекул водорода при температуре 27 °С и нормальном давлении, если коэффициент вязкости водорода при 0 °С равен $8,5 \cdot 10^{-6}$ кг/м·с.

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 1,6 \cdot 10^{-7}$ м.

8. Как изменится вязкость двухатомного газа, состояние которого далеко от вакуума, при уменьшении объема в два раза, если процесс перехода был:

- а) изотермическим;
- б) изобарическим;
- в) адиабатическим?

Ответ: а) не изменится; б) уменьшится в 1,41 раза; в) увеличится в $\approx 1,1$ раза.

9. Коэффициент внутреннего трения водорода в определенных условиях равен $8,6 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м 2 . Определить коэффициент теплопроводности.

Ответ: $\chi = 0,09$ Вт/м·К.

10. Кислород и углекислый газ находятся при одинаковых температурах и давлениях. Поперечные сечения молекул одинаковы. Найти отношения:

- коэффициентов диффузии;
- коэффициентов внутреннего трения;

• коэффициентов теплопроводности.

Ответ: $D_2 / D_1 = 0,8$, $\eta_2 / \eta_1 = 1,2$, $\chi_2 / \chi_1 = 0,9$.

11. В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель шириной 10^{-5} м и длиной 5 см. Толщина дна сосуда – 0,5 мм. Найти максимальную скорость гелия и полный расход жидкости (массу жидкости, протекающей через щель за 1 с), если высота столба гелия над дном сосуда – 20 см. Плотность и вязкость гелия равны: $\rho = 150 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$.

Ответ: $v_{\max} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$, $\Delta m / \Delta t = 1,15 \cdot 10^{-7} \text{ кг/с}$.

12. Определить, на какой угол повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии 1 см вращается второй такой же диск с угловой скоростью $\omega = 50 \text{ рад/с}$. Радиусы дисков – 10 см, коэффициент кручения нити равен $10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$. Коэффициент внутреннего трения воздуха, окружающего диск, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$. Градиент скорости между дисками считать линейным.

Ответ: $\varphi = 81^\circ$.

13. Цилиндр радиусом 10 см и длиной 30 см расположен коаксиально внутри цилиндра с радиусом 10,5 см. Малый внутренний цилиндр неподвижен, большой вращается с частотой 15 с^{-1} . Динамическая вязкость газа, в который погружены цилиндры, $\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$. Какая сила действует на единицу поверхности внутреннего цилиндра? Какой вращающий момент будет действовать на этот цилиндр?

Ответ: $F = 16,8 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$; $M = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

14. Во сколько раз изменится число столкновений, испытываемое одной молекулой в единицу времени, и длина свободного пробега молекул одноатомного газа, если в процессе, при котором теплоемкость газа равна $\frac{i}{2} C_P$, объем газа увеличили вдвое?

Ответ: $\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \frac{1}{8}$, $\frac{\langle \lambda_2 \rangle}{\langle \lambda_1 \rangle} = 2$.

15. Пространство между двумя большими параллельными пластинами заполнено гелием. Расстояние между пластинами – 50 мм. Одна пластина поддерживается при температуре 20°C , другая – при температуре 40°C . Вычислить плотность потока тепла. Давление в газе 10^5 Па .

Ответ: $q = \frac{ik}{3\pi d^2 L} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} (T_2 - T_1) = 20 \text{ Вт/м}^2$.

6. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

6.1. Теоретический материал

Расхождение экспериментальных данных с моделью идеального газа. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса. Изотермы Ван-дер-Ваальса, сравнение с экспериментальными кривыми. Природа сил взаимодействия между молекулами реального газа. Фазы вещества. Устойчивые и неустойчивые состояния. Фазовые переходы. Фазовые диаграммы. Критическое состояние. Критические параметры. Внутренняя энергия газа. Явление Джоуля – Томсона. Коэффициент Джоуля – Томсона для идеального и реального газа. Температура инверсии. Приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса.

6.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. В чем отличие реального газа от идеального? При каких условиях в поведении газов наступает расхождение от закона Клапейрона – Менделеева?

2. Как объяснить расхождение экспериментальных данных с уравнением состояния идеального газа при больших давлениях и совпадении для случая малых давлений?

3. Как записывается уравнение Ван-дер-Ваальса:

- для одного моля газа;
- для произвольной массы газа?

4. Каков физический смысл поправок в уравнении Ван-дер-Ваальса? Как они вычисляются?

5. Как будут располагаться изотермы Ван-дер-Ваальса на графике PV для различных температур:

- для температуры ниже критической;
- для критической температуры;
- для температуры выше критической?

6. Сравните изотермы Ван-дер-Ваальса с экспериментальными кривыми для одного и того же газа. Нарисуйте те и другие в координатах PV , объясните разницу.

7. Что называют фазой системы, фазовым равновесием, фазовым переходом? Нарисуйте фазовую диаграмму воды.

8. Какой особенностью обладает фазовая кривая?

9. Какой эффект Джоуля – Томсона называют положительным, какой – отрицательным? Изобразите графически температуры инверсии и укажите положительную и отрицательную область явления Джоуля – Томсона.

10. Приведите примеры газов, для которых при нормальных условиях эффект Джоуля – Томсона имеет различный знак.

11. Как осуществляется сжижение газа с использованием эффекта Джоуля – Томсона?

12. Что такое дросселирование газа?

6.3. Основные типы задач и методы их решения

6.3.1. Классификация

1. Нахождение неизвестных параметров состояния газа по заданным параметрам и определение характеристических коэффициентов уравнения Ван-дер-Ваальса.

Для решения используются:

- уравнение Ван-дер-Ваальса;
- связь параметров критического состояния реального газа с поправками уравнения Ван-дер-Ваальса;
- определение термических коэффициентов газа.

2. Определение внутренней энергии, теплоемкости газа по заданным параметрам его состояния.

Для решения используются:

- определение теплоемкости;
- определение внутренней энергии и его полного дифференциала;
- уравнение Ван-дер-Ваальса.

3. Определение работы расширения газа, количества теплоты, выделенной газом при расширении и изменение температуры газа при его расширении в пустоту.

Для решения используются:

- определение работы газа;
- первое начало термодинамики;
- уравнение Ван-дер-Ваальса;
- определение внутренней энергии реального газа.

4. Комбинированные задачи.

Для решения используются способы и закономерности, приведенные во всех вышеперечисленных типах задач.

6.3.2. Примеры

1. Вычислите из уравнения Ван-дер-Ваальса давление углекислого газа массой $m = 1,1$ кг, заключенного в баллоне емкостью $V = 20$ л при температуре 13°C . Сравнить результат с давлением идеального газа при тех же условиях. Газовые постоянные для CO_2 $a = 0,36 \text{ м}^2 \text{ Па/моль}^2$ и $b = 0,043 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Решение. Уравнение Ван-дер-Ваальса записывается так:

$$\left(P + \frac{m^2 a}{M^2 V^2} \right) \left(V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT,$$

тогда

$$P = \frac{m}{M} \frac{RT}{V - \frac{m}{M} b} - \frac{m^2 a}{M^2 V^2},$$

$$P = \frac{1,1}{44 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31 \cdot 290}{20 \cdot 10^{-3} - \frac{1,1 \cdot 0,043 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}}} - \frac{1,1 \cdot 0,36}{44^2 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} \approx 2,6 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

Давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева равно:

$$P = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}. \quad P = \frac{1,1}{44 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31 \cdot 290}{20 \cdot 10^{-3}} \approx 2,99 \cdot 10^6 \text{ (Па)};$$

$$P_{\text{ид.г}} > P_{\text{р.г}}, \quad \Delta P / P \approx 16 \%, \quad \Delta P = P_{\text{ид.г}} - P_{\text{р.г}} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2. Найти изобарический коэффициент объемного расширения газа Ван-дер-Ваальса при заданных V , T и поправках a и b .

Решение. По определению коэффициент теплового расширения при $P = \text{const}$ имеет вид:

$$\beta_{\text{р.г}} = \left(\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \text{ для идеального газа он равен: } \beta_{\text{ид.г}} = \frac{1}{T}.$$

Для реального газа из уравнения Ван-дер-Ваальса

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{V - b}{T - \frac{2a(V-b)}{RV^3}}, \quad \beta_{\text{р.г}} = \frac{V - b}{TV - \frac{2a(V-b)}{RV^2}}.$$

Ясно, что при условиях $V \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow 0$ (т. е. когда реальный газ переходит в идеальный):

$$\beta_{p,r} \rightarrow \beta_{ид.г} = \frac{1}{T}.$$

3. Имеется один моль реального газа, его постоянные a и b заданы. Теплоемкость C_V задана и не зависит от температуры. Определить изменение внутренней энергии газа, если при изменении температуры от T_1 до T_2 объем его изменится от V_1 до V_2 . Найти общее выражение для определения теплоемкости реального газа в любом процессе.

Решение. Внутренняя энергия реального газа зависит от температуры и объема. Полный ее дифференциал равен:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV,$$

так как $\frac{\partial U}{\partial T} = C_V$, получим

$$dU = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = C_V dT + \left(\frac{a}{V^2} \right) dV.$$

Зависимость внутренней энергии от объема обусловлена взаимодействием молекул $U_{доб} = \int P' dV$, где $P' = a/V^2$ – добавочное молекулярное давление:

$$U_{доб} = \int P' dV = \int \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V} + \text{const}.$$

Константа определяется из условия, что при бесконечном разрежении газа ($V \rightarrow \infty$) потенциальная энергия взаимодействия равна 0.

$U_{доб} = -a/V$, тогда полная энергия:

$$U = C_V T - \frac{a}{V} + \text{const};$$

$$\Delta U = \int dU = C_V \int_1^2 dT + a \int_1^2 \frac{dV}{V^2};$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1) - a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Найдем теперь выражение для молярной теплоемкости реального газа.

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

По первому началу термодинамики $\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV$. Подставив значение dU , найдем:

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT}, \text{ так как } \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_v,$$

$$C = C_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT}.$$

4. Получить уравнение адиабаты для газа Ван-дер-Ваальса, если заданы P , V , a , b и C_v .

Решение. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса запишется так: $dU + \delta A = 0$. Из него, учитывая уравнение Ван-дер-Ваальса $\left(P + \frac{a}{V^2} \right)(V - b) = RT$, получим

$$-C_v dT = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV = 0 \text{ или } C_v dT + \left(\frac{RT}{V_1} \right) dV_1 = 0, \quad (6.1)$$

где $V_1 = V - b$.

Проинтегрируем выражение (6.1)

$$\int \frac{dT}{T} = - \int \left(\frac{R}{C_v} \right) \left(\frac{dV_1}{V_1} \right) \text{ или } \ln T = - \left(\frac{R}{C_v} \right) \ln V_1 + \text{const},$$

откуда $TV_1^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}.$

Подставив значение V_1 и учитывая, что $T = \frac{\left(P + \frac{a}{V^2}\right)V_1}{R}$, получим окончательное уравнение адиабаты реального газа в виде:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^{\frac{C_V + R}{C_V}} = \text{const}.$$

5. Азот в количестве ν молей изотермически сжимают от объема V_1 до объема, в n раз меньшего. Определить работу сжатия реального газа и количество выделившегося тепла.

Решение. Работа расширения любого газа определяется равенством

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV. \quad (6.2)$$

Значение давления определим из уравнения Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu a^2}{V^2}. \quad (6.3)$$

Подставив (6.3) в (6.2), получим $A = \nu RT \ln \left(\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} \right) + \nu a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$,

так как $V_2 = \frac{V_1}{n}$, то

$$A = \nu RT \ln \left(\frac{V_1 - \nu b}{n_1 V_1 - \nu b n} \right) + \frac{\nu^2 a}{V_1} (n - 1).$$

Количество тепла, выделившегося при изотермическом сжатии газа, определяется первым началом термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии при изотермическом процессе

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right), \text{ так как } C_V (T_2 - T_1) = 0.$$

Найдем Q :

$$Q = \nu RT \ln \frac{V_1 - \nu b}{n(V_1 - \nu b)}.$$

6. Азот массой $m = 7$ кг расширяется в пустоту от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 50$ л. Даны критические параметры азота: $V_k = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$, $T_k = 420$ К. Определить понижение температуры азота, считая, что за время расширения теплообмена с внешней средой не происходит.

Решение. Поскольку расширение газа в пустоту происходит без теплообмена с окружающей средой, внутренняя энергия газа до и после расширения должна оставаться постоянной.

$$U_1(T_1, V_1) = U_2(T_2, V_2).$$

Зная значение внутренней энергии, получим

$$\frac{m}{M} C_v T_1 - \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{a}{V_1} = \frac{m}{M} C_v T_2 - \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{a}{V_2},$$

откуда находим изменение температуры:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{ma}{C_v M} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right). \quad (6.4)$$

В выражении (6.4) разность $\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0$, следовательно $\Delta T < 0$.

Это означает, что при расширении газа в пустоту газ охлаждается. Охлаждение газа происходит благодаря тому, что газ совершает работу против сил притяжения между молекулами. Определим теперь значение поправки a , используя связь критических параметров с постоянными Ван-дер-Ваальса.

$$V_k = 3b; \quad (6.5)$$

$$T_k = \frac{8a}{27bR}. \quad (6.6)$$

Из уравнения (6.5)

$$b = V_k / 3. \quad (6.7)$$

Подставив (6.7) в (6.6), получим

$$a = \frac{9RT_{\kappa}V_{\kappa}}{8}. \quad (6.8)$$

Учитывая (6.8) и помня, что $C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R$, определим ΔT .

$$\Delta T = \frac{m}{M} \frac{9RT_{\kappa}V_{\kappa}}{8 \cdot 5R} 2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right);$$

$$\Delta T = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 8,31 \cdot 420 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 5 \cdot 8,31} \left(\frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} \right) \approx 0,3 \text{ (K)}.$$

7. Для демонстрации критического состояния вещества изготавливают запаянную стеклянную ампулу, содержащую такое количество жидкости, для которого объем ампулы является критическим. В процессе нагревания ампулы жидкость пройдет через последовательность состояний, включая и критическое. Вычислить, какое количество эфира должно быть в ампуле объемом $V = 28,5 \text{ см}^3$, чтобы наблюдать критическое состояние: $T_{\kappa} = 467 \text{ K}$, $P_{\kappa} = 3,59 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $M = 74 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Решение. Из уравнения Ван-дер-Ваальса и выражений, связывающих критические параметры с постоянными a и b , следует

$$V_{\kappa} = \frac{m}{M} 3b,$$

где m – масса эфира, которая при T_{κ} должна занять весь объем ампулы,

$$\text{т. е. } V_{\kappa} = V, \text{ тогда } V_{\kappa} = V = \frac{m}{M} 3b, \text{ откуда } m = \frac{MV}{3b}.$$

Из формулы $T_{\kappa} = \frac{8a}{27bR}$, $P_{\kappa} = \frac{a}{27b^2}$ определим b :

$$b = \frac{T_{\kappa}R}{8P_{\kappa}}. \text{ Зная } b, \text{ определим } m:$$

$$m = \frac{MV}{3b} = \frac{8MP_{\kappa}V}{3T_{\kappa}R};$$

$$m = \frac{8 \cdot 74 \cdot 10^{-3} \cdot 3,59 \cdot 10^6 \cdot 2,58 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 467 \cdot 8,31} 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ (кг)}.$$

8. Два моля кислорода адиабатически расширились в пустоту от объема V_1 до объема V_2 . Заданы критические параметры T_k и V_k . Определить, какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы после расширения газ вернулся к начальной температуре, оставаясь в объеме V_2 .

Решение. При адиабатическом расширении газа в пустоту $Q = 0$, $A = 0$, $\Delta U = 0$. Учитывая выражение для внутренней энергии реального газа

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \nu C_V (T_2 - T_1) - \nu^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right),$$

найдем ΔT .

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\nu a}{C_V} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0,$$

т. е. температура упала. Чтобы вернуть газ к прежней (начальной) температуре, необходимо подвести к нему количество теплоты: $Q = \nu C_V \Delta T$, так как процесс сообщения тепла происходит при $V = V_2 = \text{const}$.

Найдем Q :

$$Q = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Чтобы получить окончательное значение количества теплоты, найдем поправку a . Эта поправка выражается через критические параметры:

$$a = \frac{9RT_k V_k}{8}$$

и окончательно

$$Q = \frac{9}{8} \nu^2 R V_k T_k \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

9. Два теплоизолированных баллона соединены краном. В одном баллоне, объем которого V_1 , находится киломоль газа. Второй баллон, объем которого V_2 , откачан до высокого вакуума. Кран открывают, и газ адиабатически расширяется.

Найти:

- а) приращение внутренней энергии газа;
- б) работу, совершаемую газом против внутреннего давления;
- в) приращение температуры газа.

Известны константа реального газа a и молярная теплоемкость C_V .

Решение.

а) адиабатическое расширение газа при $P_1 \gg P_2$, можно рассмотреть как расширение в пустоту, при этом $Q = 0$, $A = 0$, следовательно, по первому началу термодинамики $\Delta U = 0$;

б) работа газа против внутреннего давления:

$$A = \int_{V_1}^{V_1+V_2} v^2 \frac{a^2}{V^2} dV = v^2 \frac{aV_2}{V_1(V_1+V_2)};$$

в) приращение температуры газа при $U_1 = U_2$ равно:

$$\Delta T = -\frac{A}{C_V} = -\frac{aV_2}{V_1 C_V (V_1 + V_2)}.$$

6.4. Контрольные вопросы

1. Какие допущения, положенные в основу теории идеального газа, несправедливы в случае реальных газов?

2. Известно, что уравнение Ван-дер-Ваальса является одним из приближенных уравнений, описывающих поведение реальных газов. Чем объяснить, что не существует универсального уравнения состояния реальных газов?

3. Может ли уравнение Клапейрона – Менделеева предсказать явление конденсации газа? Каким уравнением предсказывается это явление?

4. Если в закрытом сосуде находится некоторое количество жидкости, что будет происходить с плотностью ее насыщенного пара с повышением температуры сосуда?

5. Какая температура называется критической? Какое вещество обладает самой низкой критической температурой?

6. Можно ли воздух в комнате в обычных условиях рассматривать как идеальный газ?

7. Что такое критическое состояние? Нарисуйте зависимость плотности газа и его насыщенного пара от температуры, отметьте на ней критическое состояние.

8. Что называется фазой системы? Приведите примеры одно-, двух-, трехфазного равновесного состояния.

9. Что надо знать для ответа на вопрос: можно ли газы, например аммиак и хлор, перевести в жидкое состояние при комнатной температуре и каким способом?

10. Как можно хранить сжиженные газы?

11. Приведите примеры газов, которые никаким способом нельзя привести в жидкое состояние при комнатной температуре и объясните почему.

12. Возможен ли непрерывный переход из газообразного состояния в жидкое, минуя стадию двухфазного состояния? Как его осуществить? Возможен ли аналогичный переход из твердого в жидкое (или газообразное) состояние?

13. Каким явлением сопровождается исчезновение двухфазного состояния жидкости – газ в критической точке? Как оно объясняется и каким образом можно его наблюдать?

14. Какой физический смысл имеют коэффициенты a и b ? В каких единицах они измеряются в системе СИ? Как их можно определить?

15. Что называют пересыщенным паром? При каких условиях он может существовать? Как это отражено на изотермах Ван-дер-Ваальса?

16. Какие участки кривой Ван-дер-Ваальса соответствуют неустойчивым и метастабильным состояниям? Объясните смысл и возможность осуществления этих состояний?

17. Что такое перегретая жидкость? Укажите ее область на изотерме Ван-дер-Ваальса?

18. В чем состоит эффект Джоуля – Томсона? Является ли этот процесс обратимым? Что называют положительным, отрицательным эффектом Джоуля – Томсона?

19. Что такое дросселирование газа? Почему процесс дросселирования в идеальном газе не сопровождается изменением температуры, а в реальном – сопровождается?

20. Какую температуру называют температурой инверсии?

21. Каково соотношение между температурой инверсии и критической температурой данного газа?

6.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Критическая температура углекислого газа равна 31°C , критическое давление – $73 \cdot 10^5$ Па. Определить критический объем.

Ответ: $V_k = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$.

2. Считая, что вода подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, и принимая постоянную воды a равной $0,547 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$, найти внутреннее давление воды P^l .

Ответ: $P^l = 1,72 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

3. 50 г азота занимает объем $V = 18$ л и находится под давлением $P = 4 \cdot 10^5$ Па. Найти температуру газа, зная, что для азота $T_k = 126$ К и $P_k = 33,5 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $T \approx 440$ К.

4. Вычислить критическую плотность воды, если постоянная Ван-дер-Ваальса для воды $a = 0,547 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ и $b = 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$.

Ответ: $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$.

5. Найти выражение для внутренней энергии ν молей реального газа, теплоемкость которого C_V не зависит от температуры.

Ответ: $U = \nu \left(C_V T - \frac{\nu a}{V} \right)$.

6. Найти изменение внутренней энергии одного моля реального газа в процессах:

- изобарическом;
- изохорическом;
- изотермическом.

Ответ: $\Delta U = -a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$.

7. Азот, масса которого m , изотермически расширяют от V_1 до V_2 . Начальное давление P . Поправки a и b заданы. Определить, какую работу совершил газ при этом расширении.

Ответ: $A = \left(P + \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V_1^2} \right) \left(V_1 - \frac{m}{M} b \right) \ln \left(\frac{V_2 - \frac{m}{M} b}{V_1 - \frac{m}{M} b} \right) + a \frac{m^2}{M^2} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$.

8. Какое количество теплоты надо подвести к одному молю реального газа, чтобы при его расширении в пустоту от объема V_1 до объе-

ма V_2 его давление осталось постоянным и равным P ? Постоянные a , b и C_V заданы.

Ответ: $Q = \frac{C_V}{R} \left[\left(P + \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - b) - \left(P + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) \right] + a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$

9. Один киломоль кислорода изотермически расширяется от объема $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до объема $V_2 = 5 \text{ м}^3$. Процесс происходит при температуре 27°С .

Вычислить:

- количество поглощенной теплоты;
- приращение внутренней энергии газа;
- работу, совершенную газом.

Ответ: $Q = 4,12 \cdot 10^6 \text{ Дж}$, $\Delta U = 0,12 \cdot 10^6 \text{ Дж}$, $A = 4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

10. Найти температуру, при которой азот и водород в опыте Джоуля – Томсона могут охлаждаться, если известны постоянные a и b Ван-дер-Ваальса для этих газов.

$$a_1 = 0,139 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2, \quad b_1 = 0,039 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль},$$

$$a_2 = 0,023 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2, \quad b_2 = 0,026 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Ответ: $T_1 = 873 \text{ К}$, $T_2 = 330 \text{ К}$.

11. 0,5 кмоль трехатомного газа адиабатически расширяется в пустоту от $V_1 = 0,5 \text{ м}^3$ до $V_2 = 3 \text{ м}^3$. Температура при этом понижается на $12,2^\circ\text{С}$. Найти из этих данных постоянную a , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $a = 0,365 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$.

7. ЖИДКОСТИ

7.1. Теоретический материал

Свойства и строение жидкости. Теория Френкеля. Время релаксации. Поверхностное натяжение. Коэффициент поверхностного натяжения. Свободная энергия. Давление Лапласа. Явление смачивания и несмачивания. Капиллярные явления. Квантовые жидкости и их свойства. Явления сверхтекучести.

7.2. Вопросы по теоретическому материалу

1. Назовите свойства жидкости. Чем отличаются жидкости от газов и твердых тел?
2. Что такое время релаксации? Как связано время релаксации с энергией активации?
3. От каких параметров зависит текучесть жидкости? Зависит ли текучесть от вязкости жидкости? Что происходит с вязкостью жидкости при повышении температуры?
4. Как действуют силы поверхностного натяжения? Приведите примеры, подтверждающие наличие сил поверхностного натяжения.
5. Каков физический смысл коэффициента поверхностного натяжения? От каких величин он зависит? Какие методы существуют для определения коэффициента поверхностного натяжения?
6. Какая энергия называется свободной энергией? Как она вычисляется?
7. Назовите причины появления добавочного давления в жидкости. Как вычислить добавочное давление для шаровой поверхности, цилиндрической поверхности?
8. Что такое полное смачивание, полное несмачивание? Какие значения принимает краевой угол при смачивании, несмачивании? Как объяснить на основе МКТ это явление?
9. Какие явления называются капиллярными? Как рассчитать высоту поднятия (опускания) жидкости в капилляре?
10. Изменится ли уровень жидкости в капилляре, если его наклонить?
11. Какую форму и почему принимает жидкость, которая находится в состоянии невесомости?
12. Какие жидкости относятся к квантовым жидкостям? Почему они так называются?
13. Что такое λ -переход жидкого гелия? При какой температуре он наблюдается? Как ведет себя теплоемкость жидкого гелия?
14. Что такое сверхтекучесть? Какие опыты подтверждают существование этого явления?

7.3. Основные типы задач и методы их решения

7.3.1. Классификация

1. Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости.
Обратная задача. Определение силы поверхностного натяжения, свободной энергии, работы сил поверхностного натяжения.

Для решения используются:

- формулы, определяющие значение коэффициента поверхностного натяжения;

- формулы определения работы;

- формулы, определяющие площадь свободной поверхности.

2. Определение высоты поднятия жидкости в капиллярах.

Решение. Используется или выводится формула для расчёта поднятия жидкости в капиллярах.

3. Определение добавочного давления в жидкости.

Решение. Используется формула Лапласа.

7.3.2. Примеры

1. Из капельницы накапали равные массы холодной воды при 8 °С, затем горячей воды при 80 °С. Как и во сколько раз изменится коэффициент поверхностного натяжения, если в первом случае образовалось 40 капель, а во втором – 48? Плотность воды считать оба раза одинаковой.

Решение. Отрыв капли в каждом случае происходит тогда, когда вес капли станет больше силы поверхностного натяжения. Возьмем крайний случай, когда вес капли равен силе поверхностного натяжения. В первом случае: $P_1 = n_1 m_1 g = F_{1н} = \sigma_1 2\pi r$, где m_1 – масса одной капли;

σ_1 – коэффициент поверхностного натяжения воды при 8 °С;

r – радиус капельницы.

В момент отрыва $P_1 = F_{1н}$, $n_1 m_1 g = \sigma_1 2\pi r$. Величина $2\pi r$ представляет длину линии, ограничивающую поверхность капли.

Во втором случае: $P_2 = n_2 m_2 g$, $F_{2н} = \sigma_2 2\pi r$, $P = F$; $n_2 m_2 g = \sigma_2 2\pi r$. Массу капли найдем по формуле: $m_1 = \rho V_1$, $m_2 = \rho V_2$. Так как температура воды меняется, то $V_1 = V_0 (1 + \alpha t_1)$, $V_2 = V_0 (1 + \alpha t_2)$,

где V_0 – объем одной капли при 0 °С;

α – коэффициент объемного расширения воды;

t – соответствующая температура.

Запишем два уравнения:

$$n_1 m_1 g = \sigma_1 2\pi r; \quad (7.1)$$

$$n_2 m_2 g = \sigma_2 2\pi r. \quad (7.2)$$

Разделим (7.2) на (7.1), получим: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{n_2 m_2}{m_1 n_1} = \frac{n_2 V_0 (1 + \alpha t_2) \rho}{n_1 V_0 (1 + \alpha t_1) \rho}$.

Окончательно имеем: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{n_2 (1 + \alpha t_2)}{n_1 (1 + \alpha t_1)}$.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{46(1 + 0,15 \cdot 10^{-3} \cdot 80)}{40(1 + 0,15 \cdot 10^{-3} \cdot 8)} \approx 1,2.$$

2. Два мыльных шара радиусом $R_1 = 2$ см и $R_2 = 3$ см сливаются в один. Определить энергию, которая выделяется в этом процессе, если коэффициент поверхностного натяжения равен $\sigma = 0,045$ Н/м.

Решение. Поскольку поверхность двух шаров больше поверхности шара, который образуется в процессе слияния их в один, часть энергии поверхностной пленки освобождается. Известно, что при изотермическом уменьшении поверхности жидкости на один квадратный метр будет выделяться энергия, численно равная коэффициенту поверхностного натяжения жидкости. Следовательно, для нахождения свободной энергии необходимо определить, на сколько поверхность двух шаров до слияния больше поверхности образованного шара.

Площадь поверхности двух шаров до слияния:

$$S = S_1 + S_2 = 4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 = 4\pi(R_1^2 + R_2^2).$$

Для определения площади поверхности вновь образованного после слияния шара необходимо найти его радиус. Его можно определить из равенства объемов шаров до и после слияния:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}(R_1^3 + R_2^3), \text{ где } V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3}.$$

Тогда площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{(R_1^3 + R_2^3)^2}$.

Уменьшение площади поверхности жидкости:

$$\Delta S = S - S' = 4\pi(R_1^2 + R_2^2) - 4\pi\sqrt[3]{(R_1^3 + R_2^3)^2}.$$

Поскольку мыльный шар имеет две поверхности, то полное уменьшение поверхности жидкости будет равно $2\Delta S$.

Энергия, которая выделилась при слиянии шаров, будет равна:

$$E = 2\sigma\Delta S = 8\pi\sigma \left[(R_1^2 + R_2^2) - \sqrt[3]{(R_1^3 + R_2^3)^2} \right].$$

$$E = 8 \cdot 3,14 \cdot 0,045 \cdot \left[13 \cdot 10^{-4} - 10^4 \cdot \sqrt[3]{35^2} \right] \approx 261 \cdot 10^{-6} \text{ (Дж)}.$$

3. Вычислить разность уровней воды в капиллярах диаметром 0,5 мм и 1 мм, которые погружены в сосуд с водой. Какова была бы разность уровней, если бы капилляры погрузили в сосуд с ртутью? $\sigma_{\text{в}} = 0,07 \text{ Н/м}$, $\sigma_{\text{рт}} = 0,5 \text{ Н/м}$.

Решение. Высота поднятия жидкости в капилляре находится по формуле:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;

R – радиус капилляра.

$$\text{Для воды: } h_1 = \frac{2\sigma_{\text{в}}}{\rho g R_1}, \quad h_2 = \frac{2\sigma_{\text{в}}}{\rho g R_2}.$$

Разность уровней будет равна

$$\Delta h_1 = h_1 - h_2 = \frac{2\sigma_{\text{в}}}{\rho g} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\sigma_{\text{в}}}{\rho g} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right),$$

где d_1 и d_2 – диаметры капилляров:

$$\Delta h_1 = \frac{4 \cdot 0,07}{10^3 \cdot 10} \left(\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}} \right) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

Если поместить капилляры в сосуд со ртутью, то вследствие явления несмачивания, жидкость опустится в капиллярах. Разность уровней будет равна Δh_2 .

$$\Delta h_2 = \frac{4\sigma_{\text{рт}}}{\rho_{\text{рт}} g} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right);$$

$$\Delta h_2 = \frac{4 \cdot 0,5}{13600 \cdot 10} \left(\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}} \right) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

Это значит, что при опускании капилляров в сосуд со ртутью разность уровней в капиллярах уменьшается.

4. Две вертикальные плоскопараллельные стеклянные пластины находятся на расстоянии $d = 0,2$ мм друг от друга, погружены в жидкость. Определить плотность жидкости, если жидкость поднялась между пластинами на высоту 3,24 см. Поверхностное натяжение жидкости $\sigma = 27 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Смачивание считать полным.

Решение. Высота поднятия жидкости между стеклянными пластинками определяется по формуле

$$h = \frac{\sigma}{\rho g R},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, $R = d / 2$;
 d – расстояние между пластинами.

Откуда найдем плотность жидкости:

$$\rho = \frac{\sigma}{hgR} = \frac{2\sigma}{hgd};$$

$$\rho = \frac{27 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{3,24 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 0,85 \cdot 10^3 \text{ (кг/м}^3\text{)} = 850 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

5. В открытом капилляре находится вода. Какова должна быть масса воды, чтобы при вертикальном положении капилляра в образовавшемся столбике нижний мениск был вогнутым, плоским, выпуклым? Внутренний диаметр капилляра 1 мм. Смачивание считать полным.

Решение. При вогнутом мениске добавочное давление Лапласа $\Delta P = 2\sigma / R$ компенсируется гидростатическим давлением столба жидкости, которое равно $P_{\text{жл}} = \rho gh$,
 тогда

$$2\sigma/R = \rho gh. \quad (7.3)$$

Высоту столба жидкости найдем, зная, что масса жидкости $m = \rho V$, где $V = \pi R^2 h$ – цилиндрический столб воды.

Следовательно, $m = \rho \pi R^2 h$ и

$$h = \frac{m}{\rho \pi R^2}. \quad (7.4)$$

Подставив (7.4) в (7.3), получим

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g \frac{m}{\rho \pi R^2},$$

откуда

$$m = \frac{2\sigma\pi R}{g} = \frac{\sigma\pi d}{g},$$

так как $R = d/2$, то

$$m = \frac{0,07 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3}}{10} \approx 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ (кг)}.$$

Если масса воды $m_b < 0,23 \cdot 10^{-4}$ кг, мениск будет вогнутым, если $m_b = 0,23 \cdot 10^{-4}$ кг, мениск будет плоским, если $m_b > 0,23 \cdot 10^{-4}$ кг, мениск будет выпуклым.

6. Определить добавочное давление и плотность воздуха внутри мыльного пузыря диаметром 1 см при температуре 20 °С и атмосферном давлении 10^5 Па. Поверхностное натяжение раствора 0,045 Н/м.

Решение. Добавочное давление для сферической поверхности вычисляется по формуле Лапласа:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

так как $R_1 = R_2 = R = d/2$, где d – диаметр мыльного пузыря $\Delta P = 4\sigma/d$. Поскольку у мыльного пузыря имеются две сферические поверхности, полное добавочное давление будет в два раза больше.

$$P_{\text{доб}} = 2\Delta P = 8\sigma/d;$$

$$P_{\text{доб}} = (8 \cdot 0,045) : 10^{-2} = 32 \text{ (Па)}.$$

Плотность воздуха найдем из уравнения Клапейрона – Менделеева. Воздух находится под давлением: $(P_{\text{ат}} + P_{\text{доб}})$.

$$(P_{\text{ат}} + P_{\text{доб}})V = \frac{m}{M}RT, \quad m/V = \rho,$$

тогда

$$(P_{\text{ат}} + P_{\text{доб}}) = \frac{\rho}{M}RT \quad \text{и} \quad \rho = \frac{M(P_{\text{доб}} + P_{\text{ат}})}{RT};$$

$$\rho = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot (32 + 10^5)}{8,31 \cdot 293} = 1,2 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

7.4. Контрольные вопросы

1. Объясните на основе МКТ существование сил поверхностного натяжения.
2. Существуют ли силы поверхностного натяжения на границе между твердым веществом и газообразным, газообразным и жидким? От чего зависят эти силы?
3. Как определить угол смачивания (несмачивания) на границе трех сред? От чего он зависит?
4. Как вычислить давление Лапласа для сферической, цилиндрической поверхности?
5. Будут ли наблюдаться капиллярные явления, если радиус капилляра:
 - меньше радиуса кривизны поверхности;
 - больше радиуса кривизны поверхности;
 - равен радиусу кривизны поверхности.
6. Приведите примеры проявления капиллярных явлений в природе, быту.
7. Что такое капиллярные волны? Как их можно получить?
8. Что такое сверхтекучесть? Как объясняет это явление квантовая физика?
9. В чем заключается термомеханический эффект? Приведите примеры его проявления.
10. В чем заключается эксперимент, проведенный П. Л. Капицей и подтверждающий существование явления сверхтекучести?

7.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Нижний край тонкой прямоугольной пластины приведен в соприкосновение с поверхностью жидкости. Чтобы оторвать пластину от жидкости, нужно приложить силу $F = 8,8 \cdot 10^{-3}$ Н. Длина нижнего края пластины – 6 см. Чему равно поверхностное натяжение жидкости?

Ответ: $\sigma = 0,073$ Н/м.

2. Определить работу, необходимую для превращения воды массой 1 г в туман, т. е. для распыления ее в капельки диаметром 0,2 мкм.

Ответ: $A = \frac{6\sigma m}{\rho d} = 2,2$ Дж.

3. Какое количество теплоты получает капля ртути, образовавшаяся при слиянии 64 капель радиусом 2 мм каждая?

Ответ: $Q = 192\pi r^2 \sigma = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Дж.

4. В сосуд с водой при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ опущен капилляр диаметром $0,1\text{ мм}$. При нагревании воды до $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ уровень воды в капилляре снизился на $3,2\text{ см}$. Определить поверхностное натяжение воды при $70\text{ }^{\circ}\text{C}$. Расширением стекла пренебречь.

Ответ: $\sigma = 0,064\text{ Н/м}$.

5. Насколько понизится вода в капилляре радиусом $0,1\text{ мм}$ при повышении ее температуры на $80\text{ }^{\circ}\text{C}$, если с повышением температуры на $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ коэффициент поверхностного натяжения уменьшится на $1,5 \cdot 10^{-4}\text{ Н/м}$.

Ответ: $\Delta h = 2,45 \cdot 10^{-2}\text{ м}$.

6. Внутренний диаметр барометрической трубки равен $0,75\text{ см}$. Какую поправку следует внести, изменяя атмосферное давление по высоте столба ртути?

Ответ: $\Delta h = 2 \cdot 10^{-3}\text{ м}$.

7. Под каким давлением находится пузырек воздуха радиусом $6 \cdot 10^{-4}\text{ мм}$ непосредственно под поверхностью воды при нормальном атмосферном давлении, если температура воды составляет $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($\sigma = 0,073\text{ Н/м}$)?

Ответ: $1,256 \cdot 10^{-5}\text{ Н/м}^2$.

8. Пропуская сквозь пипетку с диаметром шейки $1,2\text{ мм}$ подсолнечное масло, получают из объема $V = 3\text{ см}^3$ 228 капель. Определить коэффициент поверхностного натяжения масла, если его плотность 910 кг/м^3 .

Ответ: $\sigma = 0,0312\text{ Н/м}$.

9. Определить массу спирта, поднятого между двумя стеклянными плоскопараллельными пластинами шириной 10 см , которые опущены в сосуд со спиртом.

Ответ: $m = 0,45 \cdot 10^{-3}\text{ кг}$.

10. Капля ртути массой $m = 1,36\text{ г}$ введена между параллельными стеклянными пластинами. Какую силу нужно приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины $d = 0,1\text{ мм}$? Несмачивание считать полным.

Ответ: $F = \frac{\sigma m}{\rho d} \left(\sqrt{\frac{\pi \rho d}{m}} + \frac{2}{d} \right) = 10\text{ Н}$.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	5
1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ	6
1.1. Теоретический материал	6
1.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	7
1.3. Основные типы задач и методы их решения	8
1.3.1. Классификация	8
1.3.2. Примеры.....	8
1.4. Контрольные вопросы	12
1.5. Задачи для самостоятельной работы	13
2. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ	14
2.1. Теоретический материал	14
2.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	14
2.3. Основные типы задач и методы их решения	15
2.3.1. Классификация	15
2.3.2. Примеры.....	15
2.4. Контрольные вопросы	18
2.5. Задачи для самостоятельной работы	19
3. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИДЕАЛЬНОМУ ГАЗУ	20
3.1. Теоретический материал	20
3.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	20
3.3. Основные типы задач и методы их решения	21
3.3.1. Классификация	21
3.3.2. Примеры.....	23
3.4. Контрольные вопросы	35
3.5. Задачи для самостоятельной работы	36
4. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	38
4.1. Теоретический материал	38
4.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	38
4.3. Основные типы задач и методы их решения	39
4.3.1. Классификация	39
4.3.2. Примеры.....	40
4.4. Контрольные вопросы	47
4.5. Задачи для самостоятельной работы	47
5. ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ	50
5.1. Теоретический материал	50
5.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	50
5.3. Основные типы задач и методы их решения	51
5.3.1. Классификация	51
5.3.2. Примеры.....	52
5.4. Контрольные вопросы	61
5.5. Задачи для самостоятельной работы	62
6. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ	65
6.1. Теоретический материал	65
6.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	65
6.3. Основные типы задач и методы их решения	66

6.3.1. Классификация	66
6.3.2. Примеры.....	67
6.4. Контрольные вопросы	74
6.5. Задачи для самостоятельной работы	76
7. ЖИДКОСТИ.....	77
7.1. Теоретический материал	77
7.2. Вопросы по теоретическому материалу.....	78
7.3. Основные типы задач и методы их решения	78
7.3.1. Классификация	78
7.3.2. Примеры.....	79
7.4. Контрольные вопросы	84
7.5. Задачи для самостоятельной работы	84

Учебное издание

Масич Виталий Васильевич
Цвыр Андрей Васильевич
Чубукова Татьяна Михайловна

ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

Редактор *С. Н. Кириленко*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *Н. П. Лаходанова*

Подписано в печать 21.10.2024. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,86.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.