

30K-4

9212

48

НКЗ СССР

БЕЛАРУСКІ СЕЛЬСКАГАСПАДАРЧЫ ІНСТЫТУТ  
БЕЛОРУССКИЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
THE PEOPLE'S COMMISSARIAT FOR AGRICULTURE OF USSR  
THE WHITE RUSSIAN AGRICULTURAL INSTITUTE

# ТРУДЫ БЕЛАРУСКАГА СЕЛЬСКАГАСПАДАРЧАГА ІНСТЫТУТА

91 572

ТОМ III (25)

9146  
72146  
50

ДА СТОГАДОВАГА ЮБІЛЕЮ ІНСТЫТУТА



ТРУДЫ БЕЛОРУССКОГО  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО  
ИНСТИТУТА

ТОМ III (25)

ANNALS  
OF THE WHITE RUSSIAN  
AGRICULTURAL INSTITUTE

VOLUME III (25)

ВЫДАВЕЦТВА БЕЛАРУСКАГА С. Г. ІНСТЫТУТА.

ГОРКИ—ВССР

1 9 3 6

Редакционная коллегия: И. С. Марек, проф. Т. Н. Годнев, проф. Ю. З. Уман,  
проф. И. И. Красиков, проф. В. В. Попов,  
и. о. проф. И. С. Лупинович, и. о. проф. Р. Г. Страж,  
Д. Р. Новиков, проф. Н. В. Найденев.

Ответственный редактор И. С. Марек. Технический редактор М. Б. Мейтин  
Корректор Е. С. Рабен.

Сдано в набор 15 апреля 1936 г.  
Формат бумаги 74×105 мм.  
Горки, Райлит № 152.

Подписано к печати 2 июня 1936 г.  
6 печатн. лист. Тираж 1100 экз.  
Зак. № 115

Типография Белорусского с.-х. института

## Оглавление — Contents

	<i>Стр.</i>		<i>Page</i>
Доц. И. В. Зубрицкий. Высотное обоснование при крупномасштабных съемках . . . . .	1	I. V. Zubritsky. The Altitudinal Foundation in Large-Scale Surveys . . . . .	14
Д. А. Кулешов. Об измерении углов прецизионным теодолитом Вильда способом круговых приемов . . . . .	17	D. A. Kooleshov. On the Measurement of Angles with the Precision Theodolite of Wilde by the Method of Circular Sketches . . . . .	24
Е. Г. Ларченко. О вычислении координат Гаусса-Крюгера по местным координатам при составлении сборных планов и карт . . . . .	25	E. G. Lartschenko. Ueber die Berechnung der Koordinaten von Hauss-Krüger nach den örtlichen Koordinaten bei der Abfassung von zusammengesetzten Plänen und Karten . . . . .	31
М. Безверхі. Астатичныя члены стракі Тэйлора . . . . .	33	M. K. Beswerchy. Die restlichen Glieder der Taylor'schen Reihe . . . . .	35
З. Шапиро. Частные случаи интегрирования рациональных и иррациональных дробей . . . . .	37	S. Schapiro. Einzelne Fälle des Integrierens berechenbarer (rationaler) und unberechenbarer (irrationeller) Brüche . . . . .	45
И. Л. Макаро. Некоторые данные к химической характеристике различных силосов ям и башни . . . . .	47	I. L. Makaro. Einige Angaben zur chemischen Charakteristik verschiedener Silo-Gruben und Türme . . . . .	61
Проф. Н. В. Найденов. Применение графического метода к определению объема скирд и стогов . . . . .	63	N. Najdenov. The Application of Graphic Method to the Determining of the Volume of Hay-Stacks . . . . .	77
Р. Т. Вильдфлуш и И. Т. Иванов. Увеличение объема жидкостей при растворении твердых органических веществ . . . . .	79	R. T. Wildflusch und I. T. Iwanow. Die Zunahme des Rauminhaltes (Volumens) der Auflösung fester organischer Stoffe . . . . .	88



доц. И. В. ЗУБРИЦКИЙ

## ВЫСОТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИ КРУПНО-МАСШТАБНЫХ С'ЕМКАХ

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Социалистическая реконструкция сельского хозяйства и промышленности требует точного изучения участков земли, как с точки зрения их взаимного расположения, формы, площади отдельных угодий, так и с точки зрения изучения рельефа этих участков. Изучение территорий с вышеуказанных точек зрения производится путем постановки топографо-геодезических с'емок. И чем крупнее масштаб этих с'емок, тем более детальным будет изучение территории и тем на большее число запросов в хозяйственной жизни оно ответит. Бурный рост социалистического строительства в СССР вызывает необходимость ускорения темпов в проведении топографо-геодезических с'емок вообще и крупно-масштабных в особенности. Вот почему по проекту топографо-геодезических работ на вторую пятилетку социалистического строительства предусматривается с'емка 77% всей территории СССР, причем значительная часть этого количества падает на с'емку в крупном масштабе. Этот объем работ требует ясности в применении того или иного геодезического действия, разработанности методов производства этих действий. Одним из неразработанных полностью вопросов постановки с'емок является вопрос о создании высотной опоры для планшетов мензульно-топографических и теодолитно-тахеометрических с'емок крупных масштабов. А между тем, если этот вопрос не имеет большого значения при мелко-масштабных с'емках, то совершенно иное значение он имеет при крупно-масштабных.

Действительно, при мелко-масштабных с'емках, при величине сечения рельефа в 10—20 метров точность получения отметок точек в  $\pm 1$  метр может считаться достаточной для с'емки рельефа; отсюда вытекает сравнительная простота обеспечения с'емок мелких масштабов опорными по высоте пунктами путем прокладки редких ходов геометрической нивелировки и широким применением геодезического нивелирования, дающего в этом случае достаточную точность определения отметок точек. При с'емках в масштабе 1:10000 при основном сечении рельефа в 2,5 метра вышеуказанная точность определения отметок точек является, конечно, недостаточной, не обеспечивающей доброкачественной постановки топографо-геодезических крупно-масштабных с'емок.

Методами обеспечения опорных по высоте пунктов являются методы геометрического и геодезического нивелирования, причем первый метод требует большей затраты труда, чем второй, но зато он дает в несколько раз более точные результаты. На этом основании нами в этой работе исследуется вопрос о точности геодезического нивелирования в сравнении с точностью геометрического.

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ.

#### § 1. Постановка исследований.

Исследование вопроса о точности геодезического нивелирования было произведено на части тригонометрической сети, построенной под нашим руководством в одном из районов БССР на площади в 107 тысяч гектаров. Эта часть триангуляции состоит из 3-х пунктов II класса, 26-ти пунктов III кл. и 214 пунктов V класса. Исходными данными в высотном отношении послужили отметки двух реперов нивелировки I разряда. Для передачи отметок от этих двух реперов на пункты тригонометрической сети были проложены хода нивелировки 4-го разряда. Хода пролагались на расстоянии друг от друга, примерно, в 10—12 километров; направление их выбиралось, главным образом, по проселочным дорогам, идущим в нужных направлениях. Через каждые два километра хода устанавливались деленияшка, дуги второго разряда. Наружные центры установленных деленияшек тригонометрических пунктов равных классов нивелировались между собой также нивелированием; центры тригонометрических знаков, вода, последние выставляли от нивелирных ходов, не более, как на 1 километр. Хода нивелировки прокладывались, как обычно, при этом, принимая во внимание, что уклонено, по возможности, образцы на ходах нивелировки прокладывали по границам урочищ, а также по замкнутым полигонам по плану профессора Павлова, а следовательно, условия двух последних пунктов, имеющих двойные реперы нивелировки I разряда. Без всякого исключения были переданы отметки центров 13 пунктов тригонометрической III кл. и 57 пунктов V класса, которые и послужили исходного опорного для тригонометрической данной геодезического нивелирования и нивелирных отметок остальных пунктов тригонометрической сети.

Геодезическое нивелирование 57-ком сети V класса было произведено введением в 3-х опротивленных верных рамах вертикальных кругов в пунктах с одним приемом, а в тригонометрической сети III кл. — в пунктах с двойным приемом (H. Wild's No 159) и в пунктах с двойным приемом, а также же с двойным (W. Linnert's No 61) и с 3-х приемом вертикальных кругов при трех способах приемах. Высоты пунктов определялись тригонометрически в двух вариантах и контролировались, кроме того, измерением разностей высотных инструментов также отрезками в стандартном, так что эти разности определялись с одной и той же точностью измерениями, а также с помощью инструментов не превышающих радиусов диаметра 100 мм.

зическое нивелирование сторон тригонометрич. сети произведено по методу взаимных, конечно, не одновременных наблюдений.

Вычисление превышений производилось по известной формуле:

$$h = d \left( \frac{Z_2 - Z_1}{2} \right)'' \cdot \text{Sn} 1'' + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \dots (1),$$

где  $d$ —расстояние между пунктами тригонометрич. сети;  
 $Z_1, Z_2$ —зенитные расстояния на первом и втором пунктах;  
 $i_1, i_2$ —высоты инструментов на пунктах наблюдений;  
 $V_1, V_2$ —высоты тригонометрич. знаков на тех-же пунктах.

Для определения допустимости невязок в превышениях по каждому треугольнику тригонометрич. сети была использована формула, выведенная на основании следующих рассуждений.

Если „ $m$ “—средняя квадр. ошибка превышения по одной стороне треугольника, то, согласно теории ошибок, ошибка „ $M$ “ в сумме превышений по сторонам треугольника будет определена по формуле:

$$M = \pm m \sqrt{3} \dots (2),$$

считая стороны треугольников сети, примерно, одинаковыми.

На основании формулы (1), имеем следующее значение величины ошибки превышения по одной стороне:

$$m = \sqrt{\frac{d}{2}} m_z'' \cdot \text{Sn} 1'' \dots (3), \text{ где } m_z'' \text{ — ошибка в определении}$$

зенитного расстояния. В этой формуле влиянием ошибочности высот знаков и инструментов пренебрежено, равно как и ошибочностью коэффициента земного преломления, поскольку при  $d$  до 7 км ошибка определения превышений будет зависеть, главным образом, от ошибки измерения зенитного расстояния. Подставляя в формулу (2) выражение „ $m$ “ из формулы (3) и выражая  $M$  в метрах, а  $d$  в километрах, получим:

$$M = \pm 0,0059 m_z'' \cdot d \dots (4)$$

В нашем опыте в триангуляции III класса измерение зенитных расстояний произведено, главным образом, универсалом, имеющим точность верньеров вертикального круга в  $30''$ , причем измерения произведены 3-мя приемами. На основании этих данных установим среднюю квадратическую ошибку определения зенитного расстояния в триангуляции III класса:

ошибка отсчета по одному верньеру:  $\frac{30''}{2} = 15''$ ;

ошибка среднего из отсчетов по двум верньерам  $\frac{15''}{\sqrt{2}}$ ;

ошибка отсчета при двух кругах:  $\frac{15''}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$ ;

ошибка отсчета при измерении зенитного расстояния тремя приемами:  $\frac{15''}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \pm 4,3''$

По аналогии с этим, для ошибки отсчета в измеренном зенитном расстоянии в триангуляции V класса, при применении теодолитов с точностью верньеров вертикального круга в одну минуту и при определении зенитных расстояний одним приемом, получим величину,

$$\text{равную: } \frac{60''}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \pm 15''$$

Принимая полученные ошибки отсчетов за средние значения ошибок в зенитном расстоянии и считая допустимые ошибки не превосходящими двойных средних, получим для триангуляции III класса, с округлением в сторону увеличения, — 10'', а для триангуляции V класса — 30''.

Подставляя эти значения в формулу (4), получим формулы, по которым возможно предвычислить допустимость невязки в превышениях по треугольникам тригонометрических сетей III и V класса.

$$M = \pm 0,059d \dots (5)$$

$$M = \pm 0,18d \dots (6)$$

Формулы (5) и (6) и были приняты для суждения о допустимости невязки в суммах превышений по треугольникам сети.

Полученные в результате геодезического нивелирования превышения, после проверки их по вышеуказанным формулам, были уравнены по способу профессора Попова по отдельным системам треугольников тригонометрич. сети, с соблюдением твердых пунктов, каковыми являлись определенные в высотном отношении геометрическим нивелированием 13 пунктов сети III кл. и 32 пункта V кл. Найденные таким образом отметки 240 пунктов тригонометрической сети и послужили для обоснования на них с'емки рельефа мензульно-топографическим и теодолитно-тахеометрическим методами, с высотой сечения рельефа в 2 метра при масштабе горизонтальной с'емки 1:10000.

Для суждения о точности полученных вышеуказанным образом отметок пунктов были проложены дополнительные хода геометрической нивелировки, что дало возможность сравнения данных геометрического и геодезического нивелирований и установления границы распространения геодезического нивелирования в качестве метода для высотного обеспечения крупно-масштабных с'емок.

Для обеспечения с'емок в части территории района, покрытой лесными массивами, был проложен полигонометрический ход длиной в 11 км, с определением отметок пунктов его геодезическим нивелированием, произведенным теодолитом с односторонними верньерами вертикального круга. Впоследствии отметки пунктов этого хода были получены также двойною геометрическою нивелировкой, что дало возможность установления точности геодезического нивелирования при длине сторон, примерно, до одного километра.

## § 2. Обработка результатов полевых исследований геодезического нивелирования пунктов полигонометрического хода.

Данные геометрического нивелирования пунктов полигонометрического хода, а также геодезического, представим в таблице 1.

Табл. 1.

№№ пунктов хода	Превышения гео- метр. нивелир.		Число штативов	Превышения гео- дез. нивелир.		Расстояние между пункта- ми в км.	Отметки пунктов		Разность отме- ток в см.	Примечание
	Прямое	Обратное		Прямое	Обратное		Геометр. нивелир.	Геодез. нивелир.		
Ф	-5,635	-5,644	13	-5,63	-5,57	1,35	150,94			
1	+0,112	+0,120	9	+0,04	+0,07	0,91	145,30	145,34	-4	
2	+5,942	+5,952	9	+6,06	+5,99	0,83	145,42	145,40	+2	
3	-1,705	-1,705	7	-1,72	-1,65	0,69	151,37	151,42	-5	
4	-1,930	-1,926	14	-1,86	-1,90	1,48	149,67	149,74	-7	
5	-2,483	-2,479	10	-2,45	-2,41	1,04	147,74	147,86	-12	
6	+2,255	+2,266	13	+2,22	+2,29	1,34	145,26	145,43	-17	
7	-2,486	-2,498	11	-2,50	-2,50	1,03	147,52	147,68	-16	
8	+0,550	+0,548	10	+0,60	+0,65	0,97	145,03	145,18	-15	
9	+0,362	+0,362	14	+0,52	+0,41	1,47	145,58	145,80	-22	
10							145,94	146,26	-32	

Оценка точности геометрического нивелирования, произведенная по известным формулам теории ошибок для разностей двойных измерений, дала следующие результаты:

систематическая километрическая ошибка -1,4 мм.  
случайная (ср. квадр. общая) „ „  $\pm 5,2$  „

Характерным в данном случае является то обстоятельство, что километрическая случайная ошибка геометрического нивелирования, полученная по ходу в 11 км, сравнительно близка к ошибке того же рода нивелировки, но полученной на основании ходов длиной в 214 километров, последняя получилась равной  $\pm 4,5$  мм.

Точность геодезического нивелирования установлена, во первых, по формуле для разностей прямых и обратных превышений, во вторых, по уклонам превышений геодезического нивелирования от превышений, полученных геометрическим нивелированием. Результаты оценки точности геодезического нивелирования при средней длине линии визирования в 1 км, на какой отстояли друг от друга пункты полигометрического хода, сведены в таблицу № 2.

Табл. 2.

Род ошибок	По разности прямых и об- ратных превы- шений	По уклонам превышений (геометр.— геодез.)
Систем т. километр. ош.	- 1.1 см.	- 3,2 см.
Случайная (общая) „	$\pm 4.2$ „	$\pm 4,2$ „

В отношении причины систематической ошибки геодезического нивелирования, оказавшейся в нашем опыте, можно высказать следующие соображения.

В случае оценки точности по разностям прямых и обратных превышений, полученная систематическая ошибка в 1,1 см может быть отнесена за счет неверности предположения о равенстве коэффициентов рефракции для прямых и обратных превышений, которое допускается при применении формулы (1). В самом деле, ошибка при таком предположении будет носить систематический характер, если значения коэффициентов рефракции во время работы на данном отрезке времени изменялись в одну сторону. В случае оценки точности геодез. нивелирования по уклонам превышений от значений их, полученных геометрич. нивелированием, на величину системат. ошибки производит влияние уже не только вышеуказанная неодинаковость коэффициентов рефракции, но и инструментальные ошибки применяемых при этом инструментов и не учтенные в данном опыте.

Последним обстоятельством объясняется расхождение в полученной двумя методами величине систематических ошибок в превышениях геодезического нивелирования.

Сопоставление отметок пунктов хода, полученных по результатам геометрического и геодезического нивелирования, приведенное в таблице № 1, прекрасно иллюстрирует увеличение ошибок в отметках пунктов полигонометрического хода, вычисленных по неуровненным превышениям, с увеличением расстояния до этих пунктов от начального; наибольшего значения достигает ошибка отметки на последнем пункте хода и равна, при отстоянии пункта от начального на 11,11 км, величине — 0,32 метра.

Из вышеуказанного сопоставления выводим заключение о том, что ошибки отметок пунктов, полученных геодезическим нивелированием, носят явно систематический характер. Чтобы избежать влияния ошибок этого рода на отметки пунктов полигонометрического хода, очевидно, необходимо прокладывать хода так, чтобы они опирались своими концами на пункты, отметки коих получены в порядке геометрической нивелировки. В этом случае, распределивши невязку на каждое превышение пропорционально квадратам длин сторон хода, получим, на основании исправленных таким образом превышений, отметки пунктов хода, весьма близкие к их действительным значениям. Так, если для данных нашего опыта предположить известными из геометрической нивелировки отметки только крайних пунктов „Ф“ и № 10, а остальные вычислить по увязанным вышеуказанным образом превышениям геодезического нивелирования, то наибольшее уклонение отметок, вычисленных таким образом, от их действительных значений достигнет только в одном случае величины 0,68 м. Под действительными значениями отметок пунктов нами понимаются в данном случае величины их, полученные из результатов геометрического нивелирования.

\* \*

На основании произведенного опыта по определению отметок пунктов из результатов геодезического нивелирования можно с достаточной убедительностью сделать следующие заключения:

1. Для уничтожения влияния систематической ошибки геодези

ческого нивелирования на отметки пунктов полигонометрического хода, последний необходимо прокладывать между пунктами с известными из геометрического нивелирования отметками.

2. Длины полигонометрических ходов, опирающихся на два твердые в высотном отношении пункта, могут быть не больше 10 километров, если иметь ввиду достижение точности определения отметок пунктов не ниже 0,10 метра, и могут достигать длины 20 км, если считать точность определения отметок пунктов в  $\pm 0,25$  м достаточною для обоснования в высотном отношении данного вида съемочных работ; при этом ошибку в  $\pm 0,25$  м будут иметь отметки пунктов, расположенных в середине хода в 20 км; это видно из того, что отметку пункта в середине хода можно рассматривать, как полученную по формуле для арифметической середины по двум значениям, переданным с обоих твердых пунктов, а так как каждое такое значение будет получено, согласно нашего опыта, с ошибкою в  $\pm 0,32$  м, то среднее значение отметки будет иметь точность в  $\sqrt{2}$  раз большую, т. е.  $0,32:\sqrt{2} = \pm 0,23$  м.

3. Длины всяких полигонометрических ходов не должны быть больше 5 км, если ошибка отметок пунктов этих ходов в 0,16 м является приемлемой для обоснования в высотном отношении данного вида съемочных работ.

### § 3 Обработка результатов полевых исследований геодезического нивелирования пунктов тригонометрической сети III кл.

Геодезическое нивелирование пунктов тригонометрической сети III кл, как указывалось в § 1, было произведено прецизионным теодолитом Wild'a в 9 треугольниках и универсалом Wichmann'a в 18 треугольниках. Представим результаты полевых измерений в табл. 3.

Табл. 3.

№№ треугольников	Wichmann						H. Wild		
	Невязки в превышениях по треугольникам см	Вес невязок	№№ треугольников	Невязки в превышениях по треугольн. см	Вес невязок	№№ треугольников	Невязки в превышен. по треуго. см	Вес невязок	
1	- 43	0,52	10	- 11	0,93	1	+ 4	0,65	
2	+ 30	0,68	11	- 26	0,57	2	+ 5	0,65	
3	- 24	0,53	12	- 35	0,53	3	+ 36	0,92	
4	- 13	0,50	13	0	0,42	4	+ 36	1,15	
5	+ 19	0,52	14	- 3	0,42	5	+ 15	0,87	
6	+ 49	0,62	15	+ 8	0,68	6	- 38	0,53	
7	- 17	0,74	16	+ 6	0,41	7	- 21	0,92	
8	- 22	0,60	17	+ 10	0,54	8	- 12	0,89	
9	- 27	0,92	18	+ 3	0,34	9	- 21	0,89	

Вес суммы превышений геодезического нивелирования в каждом треугольнике определялся по известной из теории ошибок формуле:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} \dots (7)$$

в которой  $P_1, P_2, P_3$ —суть веса отдельных превышений в треугольниках, принятые обратно пропорциональными квадратам длин соответствующих сторон. Известно, что такое вычисление весов отдельных превышений геодезического нивелирования страдает неточностью, так как при этом не учитывается непостоянство коэффициента земной рефракции; нами допущено упрощенное вычисление весов по той причине, что стороны в среднем были 7 км.

В целях удобства вычислений за единицу веса принят вес превышения для стороны в 10 км

Вычисленные для оценки точности ошибки единицы веса были приведены впоследствии к средней длине сторон тригонометрической сети, оказавшейся равной 7 километрам. Таким образом, получились следующие значения систематических и случайных ошибок геодезического нивелирования пунктов тригонометрической сети, имеющей среднюю длину стороны в 7 км, при определении этих ошибок по невязкам превышений в отдельных треугольниках:

систематическая ошибка одного превышения: { Wild —0,4 см.  
Wichmann —5,3 „

средняя квадрат. ошибка превышения (общая): { Wild  $\pm 15,8$  „  
Wichmann  $\pm 12,5$  „

В виду того, что ошибки превышений по треугольникам могут компенсироваться, определим их также сравнением превышений геодезического нивелирования с соответствующими превышениями, полученными геометрической нивелировкой, причем последние будем считать за истинные значения превышений. При этом, поскольку ошибки превышений, полученных прецизионным теодолитом Wild'a, незначительно разнятся от ошибок превышений, полученных универсалом Wichmann'a, и поскольку превышений последним инструментом было определено вдвое больше, чем первым, в дальнейшем исследовании не будем разграничивать превышений по роду инструментов, коими они были получены. Этим самым, мы считаем наблюдения вертикальных направлений одним приемом Wild'a равноточными с наблюдениями тремя приемами Wichmann'a.

Результаты оценки геодезического нивелирования в триангуляции III кл., произведенные путем сравнения с превышениями, полученными геометрическим нивелированием, получились следующие:

систематическая ошибка превышения — 4,0 см,

средняя квадратическая ошибка (общая)  $\pm 22,0$  „

Предположим, что на территории в 107 тысяч гектаров, на которой производились описываемые опыты, была-бы определена из геометрического нивелирования отметка одного только пункта тригонометрической сети III кл., а отметки всех остальных пунктов необ-

ходимо было бы найти из данных геодезического нивелирования; причем вышеуказанный пункт расположен на самом краю территории, подлежащей съемке. Спрашивается, с какой точностью будут получены в этом случае отметки остальных пунктов тригонометрической сети из одного только геодезического нивелирования?

С целью ответа на поставленный вопрос было произведено уравновешивание превышений геодезического нивелирования по методу условных наблюдений, соблюдая лишь условия суммы превышений в треугольниках, не обращая внимания на наличие твердых в высотном отношении пунктов, т. е. пунктов с известными из геометрического нивелирования отметками. На основании полученных из такого уравновешивания превышений были вычислены отметки всех пунктов тригонометрической сети III кл., исходя от отметки одного пункта, расположенного на краю сети, так что отметки некоторых пунктов были получены передачей через 6 треугольников в сети III кл., или через 28 км по ходовой линии.

С другой стороны, отметки этих же пунктов получены по данным геометрического нивелирования.

В результате сравнения отметок пунктов, полученных вышеуказанными двумя методами, выяснилось сильное влияние систематических ошибок, достигающих в среднем величины 0,17 м на каждую отметку. Наибольшее значение истинной ошибки отметок пунктов тригонометрической сети III кл., полученных из одного только геодезического нивелирования на всей территории в 107 тысяч га, оказалось равным 0,34 метра.

Для уничтожения влияния систематической ошибки геодезического нивелирования в сетях III кл., очевидно, необходимо наличие, по крайней мере, двух пунктов тригонометрической сети имеющих отметки, определенные из данных геометрического нивелирования, и находящихся на противоположных сторонах сети.

Для выяснения вопроса о том, какова будет ошибка отметок пунктов сети из геодезического нивелирования при наличии двух твердых пунктов, было произведено уравновешивание превышений геодезического нивелирования вторично, с соблюдением на этот раз также условия двух твердых пунктов. Далее, на основании уравновешенных превышений были вычислены отметки, наибольшее отклонение коих от истинных значений оказалось равным 0,12 м. Под истинными значениями отметок нами подразумеваются отметки, полученные по данным геометрического нивелирования. Данные сравнения превышений и отметок из геодезического нивелирования с соответствующими данными из геометрического нивелирования в работе не приводятся ввиду громоздкости материала.

#### **§ 4. Обработка результатов полевых исследований геодезического нивелирования пунктов тригонометрической сети V класса.**

Точно так же, как в отношении триангуляции III кл., исследуем сначала точность полевых наблюдений при геодезическом нивелировании пунктов тригонометрической сети V класса. Это возможно произвести по величинам невязок превышений в треугольниках а также путем сравнения превышений, полученных геодезическим нивелированием, с соответствующими превышениями из технического нивелирования.

На площади в 107 тысяч га были определены превышения по методу взаимных одновременных зенитных расстояний в 162 треугольниках тригонометрической сети V класса, имеющих среднюю длину сторон в 2,3 км.

Измерение зенитных расстояний произведено теодолитами с одномоментными верньерами вертикальных кругов одним полным приемом. Сумма невязок превышений по всем 162 треугольникам оказалась равной — 1,00 метра, откуда систематическая ошибка суммы превышений одного треугольника составит 0,06 м. Сумма квадратов невязок превышений по 162 треугольникам получилась равной 14,913 м, следовательно, среднее квадратическое значение ошибки в сумме превышений по каждому треугольнику оказалось  $\pm 0,30$  м, если принять веса сумм превышений одинаковыми. По формуле (2) параграфа 1-го определится величина  $m$  — средняя квадратическая ошибка превышения геодезического нивелирования для средней стороны треугольника сети в 2,3 км:

$$m = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm 0,30}{\sqrt{3}} = \pm 0,18 \text{ м.}$$

Результаты оценки путем сравнения превышений с данными геометрического нивелирования следующие:

систематическая ошибка на каждое превышение — 0,033 м.

средняя квадрат. ошибка превышения (общая)  $\pm 0,28$  м.

Как видно отсюда, систематическая и случайная ошибка в превышении получилась больше, чем при определении по невязкам превышений в треугольниках. Последнее обстоятельство объясняется возможным компенсированием ошибок отдельных превышений в суммах их по треугольникам.

Для дальнейшего исследования вопроса о точности геодезического нивелирования пунктов тригонометрической сети V кл. предположим, что имеется один только твердый в высотном отношении пункт, при этом находящийся на краю триангулируемой территории. В этом предположении вычислим отметки всех пунктов тригонометрической сети на основании превышений, полученных только геодезическим нивелированием. Это вычисление отметок возможно произвести двояко: 1. получением отметок передачею исключительно по сторонам сети V кл.; 2. вычислением отметок пунктов III кл. передачею по сторонам последней и дальнейшим получением отметок пунктов сети V кл. передачею по сторонам ее, исходя из отметок пунктов III кл., как условно твердых.

Вясним, какой из данных методов при условиях нашего опыта окажется точнее. Воспользуемся для этого полученными выше данными ошибок отдельных превышений геодезического нивелирования в тригонометрических сетях III и V кл.

Так как ср. кв. ошибка превышения в сети V кл., со среднюю стороною в 2,3 км, оказалась  $\pm 0,28$  м, и поскольку наименьшее количество сторон сети при этой средней длине, по которым можно передать отметки на все пункты на данной территории, будет 12, то ожидаемая ошибка отметки пункта, наиболее удаленного от твердого, будет  $\pm 0,28 \sqrt{12} = \pm 0,97$  м.

При средней длине сторон сети III кл в 7 км, наименьшее количество сторон, по которым можно передать отметки на все пункты III кл, на данной территории будет 4. Средняя кв. ошибка превышения оказалась в данном опыте  $\pm 0,22$  м, почему ожидаемая отметка наиболее удаленного пункта III класса будет  $\pm 0,22 \sqrt{4} = \pm 0,44$  м. Если, далее, на основании отметок пунктов III класса, определить отметки пунктов сети V кл. по сторонам последней, то при 4-х передачах превышений от пунктов III класса получим ошибку отметки пункта сети V класса равной:

$$\sqrt{(0,44)^2 + (0,28 \cdot \sqrt{4})^2} = \pm 0,73 \text{ м.}$$

Таким образом для данного случая выгоднее определить сначала отметки пунктов тригонометрической сети III кл по превышениям по сторонам ее из геодезического нивелирования и, на основании полученных отметок и превышений по сторонам сети V кл., получить отметки пунктов последней.

На основании последнего заключения превышения геодезического нивелирования в сети V кл. были уравновешены по способу наим. квадратов с соблюдением не только условий сумм их по отдельным фигурам, но и условий твердых пунктов; за последние принимались пункты тригонометрической сети III кл. с отметками, полученными по данным одного геодезического нивелирования, как об этом уже говорилось в § 3 м.

Очевидно, такая постановка уравновешивания и вычисления отметок пунктов V кл. дает возможность сравнения полученных отметок с отметками тех-же пунктов из геометрического нивелирования и изучить ошибки геодезического нивелирования, если при помощи его определяются отметки тригонометрических пунктов и III кл. и V класса на территории, примерно, в 100 тысяч га.

Результаты вычисления отметок пунктов в тригонометрической сети V кл и сравнения их с отметками геомегр. нивелир. по возможности в работе не представлены.

Систематическая ошибка отметки пункта V класса оказалась: — 0,06 м.

Средняя квадр. ошибка (общая) отметки пункта V класса оказалась  $\pm 0,26$  м.

Наибольшая величина ошибки отметок пунктов тригонометрической сети V класса оказалась в данном опыте равной 0,48 м. Это значит, что при получении отметок в высотном отношении пунктов на территории в 100 т. га из данных одного только геодезического нивелирования, возможно получить отметки их с точностью до полуметра, достаточной для многих случаев постановки сплошных топографических съемок, в том числе, при резко выраженном рельефе, и для масштаба 1:10000. Между прочим, пункт, для которого получилась отметка с ошибкою в 0,48 м, отстоял от исходного на 35,3 км.

## § 5. Заключение.

1 По результатам нашего опыта точность геодезического нивелирования может быть представлена следующей таблицей:

Табл. 4.

Вид работы	Длина стороны в км.	Ошибка превышения по невязкам в треугольн.		Ошибка превышения по сравн. с геометр. нивел	
		Системат. в см.	Ср. квадрат в см. (общая)	Системат. в см.	Ср. квадрат в см. (общая)
Полигонометрия . . .	1	— 1,1	$\pm$ 4,2	— 3,2	$\pm$ 4,2
Триангуляция III кл. . .	7	— 5,3	$\pm$ 12,5	— 4,0	$\pm$ 22,0
Триангуляция V кл. . .	2,3	— 0,6	$\pm$ 18,0	— 3,3	$\pm$ 28,0

Характерными в этой таблице являются три момента: первый — знак систематической ошибки для всех случаев один и тот же; второй — случайная ошибка (ср. квадрат) по результатам сравнения с геометрическим нивелированием для триангуляций оказывается раза в полтора больше, чем по невязкам превышений в треугольниках; третий — систематическая ошибка превышения получилась, примерно, одинаковой (3,2-3,3-4,0), несмотря на то, что длины сторон были весьма различны, и применяемые инструменты не одинаковы; это заключение относится к случаю оценки точности по сравнению с геометрическим нивелированием.

2. Полученный в результате данного опыта материал может послужить для установления формул допустимых невязок в превышениях, полученных геодезическим нивелированием в полигонометрии и триангуляционных сетях III и V класса. Будем считать величину случайной ошибки, входящей в формулу допустимых невязок, равной двойной средней квадратической ошибке.

3. В полигональных ходах, опирающихся на два твердые в высотном отношении пункта, при определении прямых и обратных превышений путем геодезического нивелирования, выполняемого теодолитом с одномоментными верньерами вертикального круга, при среднем расстоянии между пунктами хода в 1 км, допустимая невязка в сумме превышений по ходу может быть определена по формуле:

$$M = 8,4 \sqrt{L} + 3,2 L \quad . \quad . \quad (8),$$

где  $L$  — длина полигонометрического хода в километрах,  $M$  — допустимая невязка в см, а коэффициенты 8,4 и 3,2 получены из таблицы № 2.

4. При геодезическом нивелировании пунктов триангуляционной сети III класса, выполняемом тремя приемами универсала с 30° верньерами вертикального круга по методу взаимных зенитных расстояний, при средней длине сторон сети в 7 км, допустимая невязка в сумме превышений между пунктами с известными отметками может быть предвычислена по формуле:

$$M = 44 \sqrt{n} + 4n \quad . \quad . \quad (\text{см.}) \quad (9),$$

где „ $n$ “ — число сторон сети III класса, разделяющих пункты с известными отметками, а коэффициенты 44 и 4 получены согласно данным таблицы № 4 на стр. 12. Обозначив расстояние между твердыми пунктами по сторонам сети III класса через  $L$ , представим предыдущую формулу в ином виде:

$$M = 16,6 \sqrt{L} + 0,6 L \quad (\text{в см}) \quad . \quad . \quad (10), \quad \text{так как} \quad n = \frac{L}{7}$$

5. При геодезическом нивелировании пунктов тригонометрической сети V класса, выполняемом теодолитами с одномоментными вертикальными кругами, одним полным приемом, при средней длине стороны сети в 2,3 км, допустимость невязки в сумме превышений между пунктами с известными отметками, согласно данных таблицы № 4, предвычислится по формулам:

$$M = 56\sqrt{p} + 3,3p \dots (11);$$

$$M = 38,9\sqrt{L} + 1,4L \dots (12), \text{ где } p = \frac{L}{2,3}$$

В предыдущих формулах „M“ выражено в см, а L в км.

6. Данные нашего опыта дают возможность получить ошибки измерения зенитного расстояния применяемыми инструментами и для разных расстояний между пунктами. Напишем формулу для ошибки превышения из геодезического нивелирования:

$$m_h = \frac{d}{\sqrt{2}} \sqrt{m_z^2 \operatorname{Sn}^2 1'' + \frac{d^2 (\Delta_k)^2}{4R^2}} \dots (13)^*$$

Из этой формулы выразим величину  $m_z$ :

$$m_z = \sqrt{\frac{2m_h^2}{d^2 \operatorname{Sn}^2 1''} - \frac{d^2 (\Delta_k)^2}{4R^2 \operatorname{Sn}^2 1''}} \dots (14)$$

Примем  $\Delta_k = \pm 0,03$ ; R — радиус земного шара — выберем из геодезических таблиц для географической широты в  $53^\circ$ ; величины  $m_h$  помещены в таблице 4, в графе „средняя кв. ошибка превышения по сравнению с геометрическим нивелированием“; тогда будем иметь такие ошибки измерения зенитного расстояния (таблица 5):

Табл. 5.

Инструмент	Точность вертик. круга	Число приемов	Длина ли- нии визи- рован.	Ошибки зенитного расстояния
Универсал Wichmann'a . . .	30"	3	7 км.	$\pm 11''$
Теодолит . . . . .	1'	1	2,3 „	$\pm 27''$
„ . . . . .	1'	1	1 „	$\pm 12''$

\*) Проф. Красовский Ф. Н. „Руководство по Высшей Геодезии“, часть 1-я, стр. 461.

## THE ALTITUDINAL FOUNDATION IN LARGE-SCALE SURVEYS

## (Summary)

In the present essay we set forth the results of an experiment on the preciseness of geodetic levellings in polygonometrical ways and trigonometrical network of the III and V classes.

These experiments were executed on the area of 107,000 hectares, having been subjected to survey the scale to be 1:10000. The measurement of the zenith distance was performed in the trigonometrical network of the V class and in polygonometry with theodolites with one-minute preciseness verniers of the vertical circle, and in triangulations of the III class, partly with a precision theodolite of H. Wilde N°59 at one time, and partly with a universal of Wichmann № 67165 in three sketches.

The estimate of the preciseness of the geodetic levellings took place by means of a comparison of its results with the data of geometrical levelling. The values of obtained faults have been expressed in the following table.

Kind of experiment	Length of sides in km.	Faults of excess discordances in triangles		Faults of excess, compared with geometrical levelling	
		systematic in cm.	average-quadratic, in cm.	systematic, in cm.	average-quadratic, in cm.
Polygonometry . . . . .	1	-1,1	$\pm 4,2$	-3,2	$\pm 4,2$
Triangulation of the III class .	7	-5,3	$\pm 12,5$	-4,0	$\pm 22,0$
Triangulation of the V class .	2,3	-0,6	$\pm 18,0$	-3,3	$\pm 28,0$

In consequence of this experiment there has been ascertained the preciseness with which zenith distances were calculated with applied instruments and at a different length of visor-lines. The faults obtained while measuring the zenith distance are represented in the following table:

Instruments	Preciseness of number of vertical circle sketches	Number of sketches	Length of the visor-line in km.	Faults of the zenith distance
Wichmann's universal . . . . .	30"	3	7	$\pm 11''$
Theodolite . . . . .	1'	1	2,3	$\pm 27''$
" . . . . .	1'	1	1	$\pm 12''$

On the basis of obtained faults of geodetic levelling, there have been established several formulas of the admissibility of discordances in excess sums, received by geodetic levelling along the sides of the polygonomet-

rical way and in trigonometrical network of the III and V classes. These formulas are as follows:

For the polygonometry at a distance of 1 km between the points:

$$M = 8,4\sqrt{L} + 3,2 L \dots \dots \dots (8),$$

where „L“ is the length of the way; and „M“ is the admissible fault in cm.

For a trigonometrical network of the III class at a vizor-line of 7 km:

$$M = 44,0\sqrt{n} + 4,0 n \dots \dots \dots (9),$$

where „n“ is the number of the net-sides on the wayline.

We may conceive the last formula in such a form:

$$M = 16,6\sqrt{L} + 0,6 L \dots \dots \dots (10),$$

where „L“ is the net-length along the way-line, expressed in km.

For the trigonometrical network of the V class at n average vizor-line of 2,3 km:

$$M = 56\sqrt{n} + 3,3 n \dots \dots \dots (11), \text{ or}$$

$$M = 38,9\sqrt{n} + 1,4 \dots \dots \dots (12),$$

where „n“ and „L“ have the same values as in the preceding formulas; while M is expressed in centimetres.

Д. А. КУЛЕШОВ

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ УГЛОВ ПРЕЦИЗИОННЫМ ТЕОДОЛИТОМ ВИЛЬДА СПОСОБОМ КРУГОВЫХ ПРИЕМОМ

В руководстве инж. Смирнова К. Н. к употреблению прецизионного теодолита Вильда<sup>1)</sup> рекомендуется применять, при работе этим теодолитом, способ измерения отдельных углов и лишь в особо благоприятных условиях—способ круговых приемов.

Согласно инструкции Госплана СССР по съемке городов<sup>2)</sup> прецизионный теодолит Вильда может быть применен для измерения углов в триангуляции II класса во всех городах и в триангуляции I класса в городах с территорией от 50 до 100 кв. км. При этом во второклассной триангуляции допускается метод круговых приемов, тогда как в триангуляции I класса требуется применение способа Шрейбера. Известно, что метод измерения отдельных углов, и в частности, метод Шрейбера, имеет ряд преимуществ перед методом круговых приемов. Эти преимущества особенно существенны для общегосударственной первоклассной триангуляции в виду весьма больших расстояний до визируемых пунктов и связанной с этим трудности одновременных наблюдений с данной станции всех необходимых направлений.

В городской триангуляции длины сторон редко достигают десяти километров, так что одновременная видимость всех необходимых сигналов достигается, обычно, без особых затруднений.

Мы полагаем поэтому, что вопрос о допустимости или недопустимости способа круговых приемов в городской триангуляции I класса нуждается в специальном исследовании, тем более, что замена его способом измерения отдельных углов влечет, по нашему мнению, значительное понижение производительности труда.

Для выяснения этого вопроса мною произведено измерение углов круговыми приемами на 8 пунктах Оршанской основной тригоно-

<sup>1)</sup> Инж. К. Н. Смирнов. Прецизионный теодолит Н. Wild'a для триангуляции I и II класса. Москва 1929 г.

<sup>2)</sup> Госплан СССР. Основная техническая инструкция по съемке городов. 1933 г.



метрической сети со сторонами треугольников от 3-х до 6-ти километров.

Для сравнения измерены также отдельные углы на 4-х пунктах, составляющих обособленную сеть со сторонами от 8 до 21 км. Измерение, как способом круговых приемов, так и способом отдельных углов произведено 12 приемами. Наблюдения производились в августе и в сентябре месяцах 1935 года. Условия для наблюдений были не вполне благоприятны: сигналы, построенные малоопытными работниками, оказались неустойчивыми; двойные пирамиды имели площадку для наблюдателя не более 2,5 кв. метров; столики для инструмента слишком низкие (около 1 метра), что значительно осложняло наблюдения и утомляло наблюдателя; визирные приспособления были сделаны не в виде цилиндров, а в виде не совсем правильных конусов. Последнее обстоятельство ухудшало видимость и увеличивало ошибку визирования. Сильные ветры еще больше усугубляли недостатки строительных работ. Наблюдения приходилось производить с 18 до 20 часов, когда ветер более или менее стихал. В условиях города это время является наиболее благоприятным и по состоянию атмосферы. Прохождение визирного луча вблизи сооружений делает изображение наблюдаемого предмета неясным и расплывчатым даже в период времени между 16 и 18-ю часами.

Время с 18 до 20 часов оказалось вполне достаточным для выполнения наблюдений методом круговых приемов на пункте.

На наблюдение 12 приемами пункта, имеющего 5 направлений, затрачивалось 1 час 50 минут. Полученные при этом результаты, характеризующие точность измерения углов способом круговых приемов, приводятся ниже в таблицах 1, 2 и 3.

В таблице 1 (см. на стр. 19) пункты расположены в порядке их устойчивости, начиная с худшего. Не трудно видеть, что данные этой таблицы полностью подтверждают сделанное выше замечание о влиянии на точность наблюдений низкого качества построенных знаков.

Значительное отклонение средней квадратической ошибки 6-го угла на II станции от ошибок средней крупности объясняется тем, что визирный луч проходил в непосредственной близости от двух больших металлических светофоров, что подтверждается также несколько увеличенной ошибкой 11-го угла, в который входит обратное направление, входящее в 6-й угол.

Небольшие средн. квадр. ошибки углов 9, 10, 13, 14, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 33, 34 и 36 объясняются тем, что в эти углы входят начальные направления. Начальное направление на каждой станции выбиралось на пункт, наиболее ясно видимый, причем наведение на него производилось дважды—в начале и в конце каждого полуприема.

Для получения средней квадратич. ошибки именно угла, а не направления, мы вычислили в каждом приеме угол, как разность соответствующих непосредственно измеренных направлений, после чего находили ошибку вероятнейшего значения угла по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{p(p-1)}}$$

Табл. 1.

Средние квадратические ошибки углов, выведенные по колебаниям приемов

№№ пунктов	№№ углов	Средние квадратические ошибки углов ( $\mu$ )	Средн. квадратич. ошибка угла на пункте (m)
I сигнал	1	$\pm 0,56$	$\pm 0,58$
	2	$\pm 0,54$	
	3	$\pm 0,69$	
	4	$\pm 0,57$	
	5	$\pm 0,53$	
II сигнал	6	$\pm 0,73$	$\pm 0,56$
	7	$\pm 0,59$	
	8	$\pm 0,57$	
	9	$\pm 0,25$	
III сигнал	10	$\pm 0,33$	$\pm 0,50$
	11	$\pm 0,58$	
	12	$\pm 0,56$	
	13	$\pm 0,48$	
IV дв. пирам.	14	$\pm 0,24$	$\pm 0,53$
	15	$\pm 0,57$	
	16	$\pm 0,62$	
	17	$\pm 0,65$	
	18	$\pm 0,46$	
V дв. пирам.	19	$\pm 0,39$	$\pm 0,42$
	20	$\pm 0,48$	
	21	$\pm 0,45$	
	22	$\pm 0,35$	
VI дв. перам.	23	$\pm 0,38$	$\pm 0,40$
	24	$\pm 0,56$	
	25	$\pm 0,35$	
	26	$\pm 0,24$	
VII сигнал	27	$\pm 0,32$	$\pm 0,34$
	28	$\pm 0,40$	
	29	$\pm 0,28$	
VIII Пост. предм.	30	$\pm 0,29$	$\pm 0,42$
	31	$\pm 0,45$	
	32	$\pm 0,54$	
	33	$\pm 0,45$	
	34	$\pm 0,51$	
	35	$\pm 0,34$	
	36	$\pm 0,25$	

где  $\delta$  — отклонение отдельных значений угла от арифметической середины, а  $p$  — число приемов. Средн. кв. ошибка угла по результатам измерения всех углов на каждой станции получена по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{[\mu^2]}{p}},$$

где  $[\mu^2]$  — сумма квадратов ср. кв. ошибок, а  $p$  — число углов на станции. Используя, наконец, данные всех восьми станций, находим ср. кв. ошибку угла в таком виде:

$$M = \sqrt{\frac{[m^2]}{8}} = \pm 0,48$$

Невязки треугольников

Табл. 2.

№№ тр-ков	v	№№ тр-гов	v
1	+0,25	9	+0,76
2	+0,47	10	+0,54
3	+1,43	11	-1,65
4	+1,34	12	+1,84
5	-1,01	13	+1,69
6	-1,93	14	+0,54
7	+0,20	15	+0,39
8	-1,59	16	+1,68

Применяя формулу Ферреро, находим сред. кв. ошибку одного измеренного угла:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{3n}} = \pm 0,72.$$

Невязки полюсных уравнений сети получились также незначительные. Ниже приводятся эти невязки, выраженные в единицах седьмого знака логарифма, а также наибольшие поправки направлений, приходящиеся за счет этих невязок, вычисленные по известной формуле:

$$(i)_{\max} = \frac{-v}{[a^2]} \cdot a_{\max},$$

где  $a$  — коэффициенты соответствующего уравнения.

$v_1 = -62$	максим.	поправка на направление	$\pm 0,31$
$v_2 = +42$	"	"	$\pm 0,18$
$v_3 = -62$	"	"	$\pm 0,22$
$v_4 = +102$	"	"	$\pm 0,46$
$v_5 = -148$	"	"	$\pm 0,85$

Поправки направлений, полученные в результате строгого уравновешивания сети по способу наименьших квадратов

№№ направлений	Поправки (i)	№№ направлений	Поправки (i)
1	+ 0,69	19	- 0,78
2	- 0,40	20	- 0,14
3	+ 0,42	21	+ 0,16
4	- 0,11	22	- 0,46
5	- 0,15	23	- 0,43
6	- 0,42	24	+ 0,40
7	- 0,02	25	+ 0,33
8	+ 0,79	26	+ 0,56
9	- 0,78	27	+ 0,14
10	+ 0,22	28	- 1,13
11	- 0,25	29	+ 0,43
12	+ 0,32	30	+ 0,85
13	+ 0,20	31	- 0,89
14	+ 0,13	32	+ 0,05
15	- 0,53	33	- 0,42
16	- 0,11	34	- 0,02
17	- 0,05	35	+ 0,82
18	+ 0,97	36	- 0,36

Отсюда сред. кв. ошибка направления получается:

$$m_n = \sqrt{\frac{[i]^2}{r}} = \pm 0,76$$

Приблизительное значение ср. кв. ошибки угла будет:

$$m = m_n \sqrt{2} = \pm 1,07$$

Из приведенных данных следует, что измерить углы способом круговых приемов с точностью до  $\pm 1''$ , как этого требует инструкция по городским съемкам для городов II разряда, вполне возможно.

Для выяснения, главным образом, количества времени, необходимого для наблюдений на пункте при измерении отдельных углов, произведены наблюдения этим способом на 4-х пунктах общегосударственной сети для включения в нее одного из пунктов городской триангуляции. Знаки, с которых производились наблюдения устойчивы. Наблюдения выполнялись также в предвечернее время с 18 до 20 часов. Метеорологические условия ничем не отличались от условий наблюдений на основной сети способом круговых приемов. В результате оказалось, что для измерений углов 30 минут, имеющем 5 направлений, затрачивалось в среднем 4 часа на пункте.

Полученные при этом результаты, характеризующие точность измерения углов этим способом, приводятся ниже в таблицах 4 и 5.

Табл. 4.

Ср. кв. ошибки углов, выведенные по колебаниям приемов

№№ пунктов	№№ углов	Ср. кв. ошибки углов ( $\mu$ )	Ср. кв. ошибка угла на пункте ( $m$ )
I сигнал	1	$\pm 0,58$	$\pm 0,53$
	2	$\pm 0,49$	
II сигнал	3	$\pm 0,54$	$\pm 0,51$
	4	$\pm 0,47$	
III сигнал	5	$\pm 0,51$	$\pm 0,43$
	6	$\pm 0,32$	
IV пост. предмет	7	$\pm 0,45$	$\pm 0,38$
	8	$\pm 0,32$	
	9	$\pm 0,36$	

Ср. кв. ошибка угла вычислялась также, как и при измерении способом круговых приемов по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{p(p-1)}}$$

Сред. кв. ошибка угла по результатам измерения всех углов на каждой станции получена по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{[\mu^2]}{n}}$$

И, наконец, средн. кв. ошибка угла по данным всех 4-х станций найдена по формуле:

$$M = \sqrt{\frac{[m^2]}{4}} = \pm 0,47$$

Табл. 5.

Невязки треугольников при измерении отдельных углов

№№ треугольников	v
1	+ 0,17
2	+ 1,00
3	+ 1,70
4	- 2,11

Ср. кв. ошибка угла по формуле Ферреро получается:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{3n}} = \pm 0,84$$

По результатам уравнивания среди кв. ошибка угла получилась:

$$m = \sqrt{\frac{[(i)^2]}{r}} = \pm 1,19,$$

но она не может быть непосредственно сравнена с ошибкой, выведенной в таблице 3, так как в данной сети уравнивание производилось при наличии значительного количества твердых данных. Если сравнить данные таблиц 1 и 2 с соответствующими данными таблиц 4 и 5, то можно заметить, что способ измерения углов круговыми приемами не уступает по точности способу измерения отдельных углов, тогда как скорость работы при первом способе в  $2\frac{1}{2}$  раза больше, чем при втором.

Интересно отметить, что представитель Геодезического надзора по Белоруссии в акте контроля основных геодезических работ по городу Орше записал: „Хотя углы основной сети измерены с достаточной точностью способом круговых приемов, их все же необходимо было измерять способом Шрейбера“. Эта боязнь отступления от установившихся „обоснованных“ норм и положений еще раз подтверждает исключительное значение слов тов. Сталина: „Говорят, что данные науки, данные технических справочников и инструкций противоречат требованиям Стахановцев о новых, более высоких, технических нормах. Но о какой науке идет здесь речь? Данные науки всегда проверялись практикой, опытом“.

Из вышесказанного вытекает:

1. Углы в триангуляции I-го класса в городах II-го разряда можно измерять прецизионным теодолитом Вильда. При 12-ти приемах не трудно добиться, чтобы средн. кв. ошибка угла была не больше  $\pm 1''$ , а при высококачественной постройке тригонометрических знаков и значительно меньше.

2. Способ круговых приемов дает производительность труда в  $2\frac{1}{2}$  раза больше, чем способ измерения отдельных углов.

3. Самое благоприятное время—с 18 до 20 часов—вполне достаточно для наблюдения способом круговых приемов пункта, имеющего 5—6 направлений. Следовательно, все наблюдение, включая переезды и проч., займет в этом случае один рабочий день, тогда как по существующим нормам Белгоспроекта на это требуется от 2 до 4-х дней.

4. Способ измерения углов круговыми приемами дает возможность, не понижая точности результатов, повысить существующую норму выработки при измерении углов городской триангуляции на 100% и уменьшить количество рабочих и подвод, необходимых при наблюдениях, в два раза.



## ON THE MEASUREMENT OF ANGLES WITH THE PRECISION THEODOLITE OF WILDE BY THE METHOD OF CIRCULAR SKETCHES

The principal technical instruction on town surveys published by the Union State Planning Committee in 1933, requires to measure the angles in the triangulation of the 1 class in towns of the II category having an area from 50 to 100 square kilometers, with an average quadratic error not exceeding  $\pm 1''$ .

It has been recommended to apply for the mensuration a precision theodolite of Wilde while the angles are to be measured with this instrument by the method of Schreiber.

The author of this article has made experiments at eight stations of Orsha's basic trigonometrical network with sides having from 3 to 6 km, with the purpose of ascertaining the possibility of measuring the angles with an average quadratic error not exceeding  $\pm 1''$  by the method of circular sketches.

For the comparison, separate angles have also been measured at 4 stations forming an isolated network with sides from 8 to 12 km. The measurements were executed with 12 sketches by means of circular sketches as well as by the method of separate angles.

The data characterising the preciseness of the angle measurements are stated below.

In case of measurement by the method of circular sketches:

The average quadratic error of the angle with respect to fluctuations of sketches:  $M = \pm 0'',48$ .

The average quadratic error of the angle as regards the discrepancies in the triangles:  $m = \pm 0'',72$ .

The average square error of the angle as regards to the results of a strict equilibration by the method of the least squares:  $m \pm 1'',07$ .

In case of measurement of separate angles:

The average square error with respect to fluctuations of sketches:  $M = \pm 0'',47$ .

The average square error as regards the discrepancies in the triangles:  $m = \pm 0'',84$ .

The average square error of the angle as regards to the results of a strict equilibration by the method of the least squares:  $m = \pm 1'',19$ .

Deductions:

1) The angles in the triangulation of the 1 class can be measured with a precision theodolite of Wilde in towns of the II category. It is not difficult to attain in case of 12 sketches that the average square error of the angle would be more than  $\pm 1''$ , and considerably less with a high-quality construction of the trigonometrical signs.

2) The method of circular sketches involves a labour productivity 2-3 times more, than that of the measurement of separate angles.

3) The most opportune time from 18 to 20 o'clock is quite sufficient for the observation of the station having 5-6 directions by the method of circular sketches

Е. Г. ЛАРЧЕНКО

## О ВЫЧИСЛЕНИИ КООРДИНАТ ГАУССА-КРЮГЕРА ПО МЕСТНЫМ КООРДИНАТАМ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ СБОРНЫХ ПЛАНОВ И КАРТ

Каждый год на территории Советского Союза различными ведомствами покрываются громадные пространства крупно-масштабными съёмками. Эти съёмки весьма часто обосновываются на теодолитных ходах, которые ориентируются по магнитному или истинному меридиану данной точки и имеют разные начала координат. Особое значение и размах теодолитные ходы и съёмки, основанные на них, имеют в системе Наркомзема. На основании этих съёмок по районам составляются сборные планы. Эта работа в различных районах проводится по разному, и там, где съёмка производилась не на основе триангуляции, сборные планы представляют схемы, которые нельзя использовать для общегосударственных картографических целей.

Одним из существенных мероприятий в деле рационализации топографо-геодезических и картографических работ является внедрение в производство прямоугольных координат Гаусса-Крюгера.

В настоящей работе предлагаются практические приемы перевычисления местных координат в координаты Гаусса-Крюгера и для упрощения и ускорения этой работы предлагается ориентирование полигонов ведомственных съёмок производить по осевому меридиану данной шестиградусной зоны. Этим будет внесена общность в работе при составлении сборных планов и облегчен путь использования материалов ведомственных съёмок для картографических надобностей.

В работе разбираются вопросы:

1. Вычисление координат Гаусса-Крюгера по местным координатам для полигонов, ориентированных по осевому меридиану шестиградусной зоны.

2. Вычисление координат Гаусса-Крюгера по местным координатам для полигонов, приближенно ориентированных по осевому меридиану шестиградусной зоны или ориентированных по магнитному меридиану.

3. Вычисление местных координат точек в одной системе для полигонов, ориентированных по разным меридианам и имеющих разные начала координат.

### § 1.

При составлении сборных планов и карт большую работу приходится проделывать по перечислению местных координат в одну систему. Эту работу при использовании материалов ведомственных съёмок для картографических целей, можно свести к минимуму, если ориентирование планов производить по осевому меридиану данной шестиградусной зоны. Для этого в каждом полигоне необходимо определять истинный азимут хотя бы одной линии и вводить в него поправку за сближение меридианов, т. е. переходить от азимута к дирекционному углу.

Сближение меридианов можно вычислять по формуле:

$$\gamma = \lambda \operatorname{sn} \varphi$$

так как поправка за кривизну изображения геодезической линии в проекции Гаусса-Крюгера, в сравнении с точностью теодолитных ходов, совершенно не ощутима. В этой формуле  $\lambda$ —разность долгот осевого меридиана зоны и меридиана данной точки. Для получения дирекционного угла  $\gamma$  должно быть алгебраически прибавлено к определенному истинному азимуту. Широта  $\varphi$  и разность долгот  $\lambda$  должны быть взяты с карты наиболее крупного масштаба.

Точность определения дирекционного угла зависит от точности определения истинного азимута и величины  $\gamma$ . Найдем абсолютную ошибку в угле  $\gamma$  в зависимости от ошибок в разности долгот и широты. Имеем:

$$\Delta \gamma = \lambda \cos \varphi \Delta \varphi + \operatorname{sn} \varphi \Delta \lambda \dots \dots \dots (1)$$

Здесь  $\Delta \varphi$ —ошибка в широте—выражена в отвлеченной мере, а ошибка в разности долгот  $\Delta \lambda$ —в угловой мере.

Из формулы (1) видно, что ошибка в широте мало влияет на точность определения угла сближения меридианов и наоборот—ошибка в разности долгот почти целиком отражается на величине  $\gamma$ .

Так, например, при

$$\varphi = 54^\circ, \quad \lambda = 3', \quad \Delta \varphi = \Delta \lambda = 1',$$

ошибка в угле сближения меридианов будет:

$$\Delta \gamma = 0',03 + 0',81 = 0',84.$$

Поэтому весьма тщательно следует определять разность долгот  $\lambda$  и с ошибкой в несколько минут можно определять широту, но так как широта нужна для вычисления истинного азимута, то ее надо определять с такой же точностью, как и долготу.

Разность долгот и широту в данной точке можно определить с

точностью в полминуты—минуту, например, по трехверстной карте или даже по карте масштаба 1:500000.

Истинный азимут линии надо определять также не грубее одной минуты, чего можно вполне достигнуть, производя наблюдения двумя-тремя приемами по зенитным расстояниям солнца или применяя один из приближенных способов определения истинного азимута по звездам, например, способ инженера Зубрицкого. При обработке истинного азимута, определенного по зенитным расстояниям солнца вблизи первого вертикала, в связи с такой точностью, нет надобности определять часовой и параллактический углы и всю обработку с контролем можно закончить в полчаса времени.

Если ориентирование плана произведено по линии, параллельной осевому меридиану зоны, то координаты Гаусса-Крюгера можно вычислить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + x + \frac{y^2}{2R^2} x \\ Y &= Y_0 + y + \frac{x^2}{2R^2} y \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Здесь  $X$  и  $Y$ —координаты Гаусса-Крюгера,  $X_0$  и  $Y_0$ —координаты Гаусса-Крюгера точки, для которой местные координаты  $x$  и  $y$  равняются нулю,  $R$ —средний радиус кривизны. Понятно, что перед вычислением координат Гаусса-Крюгера начало местных координат нужно перенести в точку, для которой имеются координаты  $X_0$  и  $Y_0$ . Формулы (2)—приближенные. В них не учитывается поправка за кривизну изображения линий на плоскости. Эти поправки даже на краях шестиградусных зон будут малы и для местных координат  $x$  и  $y$ , не превышающих 20 км, будут около 0,05 м и будут увеличиваться пропорционально увеличению координат.

Поправки  $\frac{y^2}{2R^2} x$  и  $\frac{x^2}{2R^2} y$  в формулах (2) лучше всего находить по номограмме или на логарифмической линейке. Эти поправки можно найти по таблице 1-й. В таблице 1-й поправки вычислены для среднего радиуса при широте, равной  $54^\circ$ . Если местные координаты не будут превышать 20 км и поправки к координатам находить с точностью до 0,1 м, то таблица 1-я будет действовать в пределах широт от  $35^\circ$  до  $70^\circ$  во всех местах шестиградусной зоны. Для нахождения поправки с точностью до 0,1 м координаты  $Y$ ,  $x$  и  $y$  нужно знать до 0,1 км.

На логарифмической линейке поправки весьма быстро можно находить, употребляя следующий прием. На шкале квадратов линейки нанести пометку, соответствующую постоянной величине  $1:2R^2$ . С этой пометкой соединять начало или конец шкалы движка, на шкале оснований движка против величины  $Y$  устанавливать визир, после чего против визира устанавливать конец или начало движка и на шкале квадратов линейки против  $x$  и  $y$ , взятых на шкале квадратов движка, читать результаты. Найденные результаты приближенно контролировать по таблице 1.

Для широты  $\varphi = 54^\circ$

$$1:2R^2 = 0,1227 \cdot 10^{-7}$$

Табл. 1.

X, Y км	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05
30	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11
40	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
50	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,25	0,28	0,31
60	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,27	0,31	0,35	0,40	0,44
70	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60
80	0,08	0,16	0,24	0,31	0,39	0,47	0,56	0,63	0,71	0,79
90	0,10	0,20	0,30	0,38	0,50	0,60	0,70	0,80	0,89	0,99
100	0,12	0,25	0,37	0,49	0,61	0,74	0,86	0,98	1,10	1,23
110	0,15	0,30	0,45	0,59	0,74	0,89	1,04	1,19	1,34	1,49
120	0,18	0,35	0,53	0,71	0,88	1,06	1,24	1,41	1,59	1,77
130	0,21	0,41	0,62	0,83	1,04	1,24	1,45	1,66	1,86	2,07
140	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,67	1,92	2,16	2,41
150	0,28	0,55	0,83	1,10	1,38	1,66	1,93	2,21	2,48	2,76
160	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,20	2,51	2,83	3,14
170	0,35	0,71	1,07	1,42	1,77	2,13	2,48	2,84	3,19	3,55
180	0,40	0,80	1,19	1,59	1,99	2,39	2,78	3,18	3,58	3,98
190	0,44	0,89	1,33	1,77	2,21	2,66	3,10	3,54	3,99	4,43
200	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	2,98	3,41	3,93	4,41	4,91

**Пример.**

Путем привязки к тригонометрической сети найдено:

$$X_0 = 6\ 168\ 719,6; \quad Y_0 = -188\ 398,3$$

Вычисление координат по формуле (2) приведено в таблице 2. Цифры второй строчки таблицы показывают порядок заполнения таблицы. Последняя строка в таблице 2 приведена для контроля, именно: разность местных координат по абсциссам и ординатам должна равняться разности вычисленных координат Гаусса-Крюгера, сложенной с разностью поправок. Эта разность поправок приближенно может быть найдена по формулам:

$$\frac{Y^2}{2R^2} \Delta x; \quad \frac{Y^2}{2R^2} \Delta y \dots \dots (3)$$

Разность поправок, найденных по формулам (3), будет иметь две верных цифры, если в ординатах  $Y$  для двух точек первые две три цифры будут одинаковы.

Табл. 2.

№№ верш.	x	$\frac{y^2}{2R^2} x$	X	y	$\frac{y^2}{2R^2} y$	y	$V_0 + y$
	1	4	6	7	5	2	3
35	+13148,3	+5,6	6181873,5	-186296,1	+0,9	+2101,3	-186297,0
40	+10148,2	+4,4	6178872,2	-188498,5	+0,0	- 100,2	-188498,5
	+ 3000,1	+1,2	+3001,3	+ 2202,4	+0,9	+2201,5	+ 2201,5

## § 2.

Особых затруднений не будет внесено при перечислении местных координат в координаты Гаусса-Крюгера, если истинные азимуты линий полигонов и углы сближения меридианов будут определены с ошибкой в несколько минут. Можно, например, направление истинного меридиана с точностью в несколько минут определить на глаз по способу проф. Павлова. В этих случаях при сведении материалов в одну систему придется к координатам точек придать поправки за поворот осей, которые можно весьма быстро получить по специально составленной номограмме.

Перед вычислением поправок начало координат следует перенести в точку, которая привязана к тригонометрической сети.

При повороте осей употребляются формулы:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sn} \theta \\ y' &= y \cos \theta - x \operatorname{sn} \theta \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Здесь  $x'$  и  $y'$ —местные координаты,  $\theta$ —разница дирекционных углов—данного и определенного при привязке.

$$X = X_0 + x + \mu + \frac{y}{2R^2} x$$

$$Y = Y_0 + y + \nu + \frac{y^2}{2R^2} y$$

Пример:

Путем привязки к тригонометрической сети получено:

$$X_0 = 6\ 160\ 530,1; \quad Y_0 = 6\ 487\ 880,0; \quad \alpha = -0^\circ 13',0$$

Здесь дана преобразованная ордината Действительная ордината  
 $Y_0 = -12120,0$ .

Табл. 3.

№№ верш.	x	$\mu$	$\frac{y^2}{2R^2} x$	X	y	$\frac{y^2}{2R^2} y$	$\nu$	y	$Y_0 + y$
	1	3	6	8	9	7	4	2	5
31	+4003,1	+1,1	+0,0	6164534,3	-12405,0	+0,0	+15,1	-300,1	-12420,1
36	+2500,0	+1,1	0,0	6163031,2	-12390,4	0,0	+9,5	-280,0	-12400,0
	+1503,1	+0,0	0,0	+1503,1	-14,5	0,0	+5,6	-20,1	-20,1

Последняя строка таблицы 3 приведена для контроля. Этой строкой контролируются только арифметические действия при вычислении координат, поправки же должны быть проверены нахождением их другими средствами.

В тех случаях, когда полигон ориентирован по магнитному или истинному меридиану данной точки, поправки  $\mu$  и  $\nu$  могут быть значительными, так как угол  $\theta$  в этих случаях может доходить до  $10^\circ$ , а в некоторых местах и более. В этих случаях целесообразнее находить на арифмометре координаты  $x'$  и  $y'$ , пользуясь пяти- или шестизначными таблицами тригонометрических функций. Во многих случаях величины  $x 2\text{sn}^2 \frac{\theta}{2}$  и  $y 2\text{sn}^2 \frac{\theta}{2}$  будут малы и потому для нахождения их следует построить номограмму, а величины  $y \text{sn} \theta$  и  $x \cos \theta$  находить на арифмометре или по таблицам.

### § 3

В тех местах, где нет триангуляции, для целей составления сборных планов, местные координаты точек для полигонов, ориентированных по разным меридианам и имеющих разные начала координат, необходимо перевычислить в одну систему. Имея в виду дальнейшее использование сборных планов для составления карт, надлежит, возможно точнее, определить истинный азимут хотя бы одной линии, вычислить дирекционный угол и найти угол поворота осей. Далее, пользуясь формулами (4) или формулами (6), вычислить местные координаты в одной системе. Эти координаты и будут служить основой при составлении сборного плана.

Можно, конечно, местные координаты свести в одну систему, взяв за исходные азимуты линий какого-нибудь одного полигона, например, полигона, расположенного в центре района. Тогда углы  $\theta$

будут вычисляться как разница азимутов смежных линий данных полигонов и полигона, принятого за исходный.

Если координаты нужны только для картографических целей, то, в зависимости от масштаба сборного плана или карты, они могут вычисляться с меньшей точностью, почему и вычисление их можно упростить, применяя номограмму или логарифмическую линейку. Если величины  $\mu$  и  $\nu$ , найденные по формулам (5), будут меньше точности масштаба, то поправок в координаты за поворот осей можно и не вводить.

Понятно, что для создания опоры при составлении сборных планов и карт нет надобности перевычислять все местные координаты.

E. G. LARTSCHENKO

### UEBER DIE BERECHNUNG DER KOORDINATEN VON HAUSS-KRÜGER NACH DEN ÖRTLICHEN KOORDINATEN BEI DER ABFASSUNG VON ZUSAMMENGESETZTEN PLÄNEN UND KARTEN

Um die Benutzung der Aufnahmematerialien verschiedener Aemter bei der Herstellung von Karten zu erleichtern, wird vorgeschlagen, die Orientierung der Polygone nach den Axenmeridian der gegebenen sechsgradigen Zone vorzunehmen. Um dieses zu erreichen, werden die zusammengesetzten Pläne in der Hauss-Krügerschen Proektion hergestellt, in dem man die Umrechnung der örtlichen Koordinaten in die Hauss-Krügerschen Koordinaten ähnlich den vorliegenden Formeln ausführt:

$$X = X_0 + x + \frac{y^2}{2R^2} x$$

$$Y = Y_0 + y + \frac{x^2}{2R^2} y$$

In dem Falle, wenn der Direktionswinkel der gegebenen Linie, welcher bei der Bindung erhalten wurde, eine andere Bedeutung hat als der Direktionswinkel der gegebenen Linie, nach welchem die Orientierung des Planes vor sich ging und die örtlichen Koordinaten berechnet wurden, so müssen bei den letzteren unbedingt folgende Korrekturen angewandt werden:

$$\mu = -x 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta}{2} + y \operatorname{sn} \theta$$

$$\nu = -y 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta}{2} - x \operatorname{sn} \theta$$

In Anbetracht der Winzigkeit des Winkels  $\theta$  müssen die entsprechenden Korrekturen einem speciell entworfenen Nomogramm entnommen werden.

М. БЕЗВЕРХІ

## АСТАТАЧНЫЯ ЧЛЭНЫ СТРАКІ ТЭЙЛОРА

Ніжэй даецца новы варыянт вывада формул для астатчных членаў стракі Тэйлора.

Вядома, што калі функцыя  $f(x)$  і ўсе яе выводныя ад першай і да „ $n$ “-ай ўключна канечны і непарарывны пры зменах  $x$  ад  $x=x_0$  да  $x=x_0+h$ , то функцыю  $f(x)$  можна прадставіць наступным радам:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \\ + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) \dots \dots (1),$$

або інакш:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \dots \dots (2).$$

Суму членаў пачынаючы з  $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$ , абазначым праз  $R$  і вызначым яе па формуле Лагранжа:

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot F'(x + \theta h),$$

дзе  $\theta < 1$ .

Напішам далей формулу (2) у выглядзе:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R,$$

тут:

$$R = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) - \dots \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

Ва ўс'х членах апошняга выраза зробім замену  $x$  на  $x_0$ , атрымаем

$$R = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{h}{1} f'(x_0) - \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \quad (4)$$

Паложым далей, што

$$x_0 + h = a \quad \text{і} \quad h = a - x_0,$$

тады

$$R = f(a) - f(x_0) - \frac{(a-x_0)}{1} f'(x_0) - \frac{(a-x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{(a-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \quad (5)$$

Увядзем цяпер дапаможную функцыю

$$F(x) = f(a) - f(x) - \frac{(a-x)}{1} f'(x) - \frac{(a-x)^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \quad (6)$$

Відаць, што пры  $x = x_0$  і  $x = a$ , адпаведна атрымаем:

$$\left. \begin{aligned} F(x_0) &= R \\ F(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Вызначым  $F'(x)$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x) - \left[ \frac{a-x}{1} f''(x) - f'(x) \right] - \left[ \frac{(a-x)^2}{2!} f'''(x) - f''(x) \frac{(a-x)}{1} \right] - \\ &\quad - \left[ \frac{(a-x)^3}{3!} f^{(4)}(x) - \frac{(a-x)^2}{2!} f^{(3)}(x) \right] - \dots \dots \dots \\ &\quad - \left[ \frac{(a-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(a-x)^{n-3}}{(n-3)!} f^{(n-2)}(x) \right] - \left[ \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(a-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) \right]. \end{aligned}$$

Пасля спрашчэння атрымаем

$$F'(x) = - \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \dots \dots \dots (8)$$

Да функцыі  $F(x)$  прыменім тэарэму (3) Лагранжа, будем мець:

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x+\Theta h) \dots \dots (9)$$

Заменім тут  $x$  на  $x_0$ , атрымаем:

$$F(x_0+h) - F(x_0) = hF'(x_0+\Theta h),$$

але  $x_0+h = a$ , значыцца:

$$F(a) - F(x_0) = hF'(x_0+\Theta h)$$

і згодна роўнасці (7) можна напісаць:

$$F(a) - R = hF'(x_0+\Theta h),$$

або

$$R = -hF'(x_0 + \Theta h) \dots \dots \dots (10)$$

Визначим  $F'(x_0 + \Theta h)$ . Для гэтага у формуле (8) заменім  $x$  на  $x_0 + \Theta h$ , атрымаем:

$$F'(x_0 + \Theta h) = -\frac{(a - x_0 - \Theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h)$$

але  $h = a - x_0$ , значыцца:

$$F'(x_0 + \Theta h) = -\frac{(h - \Theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h), \text{ або}$$

$$F'(x_0 + \Theta h) = -\frac{h^{n-1}(1 - \Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h) \dots \dots (11)$$

Улічыўшы (11), формула (10) дае:

$$R = +\frac{h^n(1 - \Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h)$$

Гэта і ёсць вядомае выражэнне астатчнага члена стэракі Тэйлора ў форме Кашы, калі стэрака мае выгляд

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R$$

Зраб ўшы замену  $(1 - \Theta)^{n-1}$  на  $\frac{1}{n}$ , атрымаем выражэнне для  $R$  у форме Лагранжа:

$$R = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h)$$

Гэты варыянт вывада астатчных членаў стэракі Тэйлора, як нам здаецца з'яўляецца найбольш простым.

М. К. BESWERCHY

### DIE RESTLICHEN GLIEDER DER TAYLOR'SCHEN REIHE.

In vorliegendem Aufsatz wird eine neue Ausführung der Formel für die restlichen Glieder der Taylorschen Reihe mit Anwendung der Formel von Langrange vorgenommen.

З. ШАПИРО

### ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В настоящей статье рассматриваются некоторые частные случаи интегрирования рациональных и иррациональных дробей, вида:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{m_1} + M_2 X^{m_2} + \dots + M_i X^{m_i} + \dots + M_k X^{m_k}}{N_1 X^{n_1} + N_2 X^{n_2}}$$

где числитель—многочлен или одночлен, а знаменатель—двучлен, содержащие степени только независимой переменной  $X$ , показатели которых—целые или дробные числа.

Известно, что общий прием интегрирования рациональных дробей основан на возможности разложения их на сумму элементарных дробей, интегрирование которых можно было бы выполнить.

Дроби иррациональные вида (1) приводятся к рациональным дробям подстановкой:

$$X = Z^n,$$

где  $n$  есть общий наименьший знаменатель дробных показателей  $X$ .

Для разложения рациональной дроби на элементарные, пользуются методом неопределенных коэффициентов. Этот метод хотя не является затруднительным, все же он чрезвычайно громоздкий.

В нижеследующем имеется в виду изложить весьма простой прием интегрирования рациональных и иррациональных дробей вида (1), применимый в некоторых частных случаях.

Пусть имеем правильную дробь:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{m_1} + M_2 X^{m_2} + \dots + M_i X^{m_i} + \dots + M_k X^{m_k}}{N_1 X^{n_1} + N_2 X^{n_2}} \quad (1)$$

числитель и знаменатель которой расположены по возрастающим степеням независимой переменной  $X$ , при чем

$$m_k < n_2$$

Делением числителя и знаменателя на  $X^{n_1}$  дробь (1) приведет к виду:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{-(n_1-m_1)} + M_2 X^{-(n_1-m_2)} + \dots + M_i X^{m_i-n_1} + \dots + M_k X^{m_k-n_1}}{N_1 + N_2 X^{n_2-n_1}} \quad (2);$$

для сокращения письма введем обозначения:

$$p_1 - m_1 = P_1, p_1 - m_2 = P_2, \dots, m_i - p_i = P_i, \dots, m_k - p_k = P_k, p_2 - p_1 = q$$

и представим дробь (2) в виде:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{-P_1} + M_2 X^{-P_2} + \dots + M_i X^{P_i} + \dots + M_k X^{P_k}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (3)$$

Весьма очевидно, что деление числителя на знаменатель дроби (3) бесконечно, но может быть доведено до некоторого остатка R, тогда полное частное будет иметь вид:

$$\frac{A}{X^{P_1}} + \frac{B}{X^{P_1 - q}} + \frac{C}{X^{P_1 - 2q}} + \dots + \frac{R}{N_1 + N_2 X^q} \quad (4);$$

как видно, все слагаемые выражения (4) за исключением последнего интегрируются непосредственно.

Интегрирование дроби

$$\frac{R}{N_1 + N_2 X^q}$$

можно будет выполнить только в следующих трех случаях:

1-й случай:

$$R = aX^{q-1} \quad (5)$$

в этом случае:

$$\int \frac{aX^{q-1} dX}{N_1 \pm N_2 X^q} = \frac{a}{qN_2} \ln(N_1 \pm N_2 X^q) + C$$

2 й случай:

$$R = aX^{\frac{q}{2}-1} \quad (6)$$

в этом случае:

$$\int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} dX}{N_2 + N_2 X^q} = \frac{2a}{q\sqrt{N_1 N_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{N_2}{N_1} X^q} + C$$

или же:

$$\int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} dX}{N_1 - N_2 X^q} = \frac{a}{q\sqrt{N_1 N_2}} \ln \frac{\sqrt{N_2} X^q + \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1} X^q - \sqrt{N_2}} + C$$

3 й случай:

$$R = aX^{\frac{q}{2}-1} \pm bX^{q-1} \quad (7)$$

в этом случае:

$$\begin{aligned} \int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} \pm bX^{q-1}}{N_1 + N_2 X^q} dX &= \int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} dX}{N_1 + N_2 X^q} \pm \int \frac{bX^{q-1} dX}{N_1 + N_2 X^q} = \\ &= \frac{2a}{q\sqrt{N_1 N_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{N_2}{N_1} X^q} \pm \frac{b}{qN_2} \ln(N_1 + N_2 X^q) + C \end{aligned}$$

или же:

$$\begin{aligned} \int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} \pm bX^{q-1}}{N_1 - N_2 X^q} dX &= \int \frac{aX^{\frac{q}{2}-1} dX}{N_1 - N_2 X^q} \pm \int \frac{bX^{q-1} dX}{N_1 - N_2 X^q} = \\ &= \frac{a}{q\sqrt{N_1 N_2}} \ln \frac{\sqrt{N_2} X^q + \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2} X^q - \sqrt{N_1}} \mp \frac{b}{qN_2} \ln(N_1 - N_2 X^q) + C \end{aligned}$$

Возможность применения вышеизложенного способа интегрирования дробей вида (1) выясняется не только по получении остатка R вида: (5), (6) или (7), но предварительно по признакам, вывод которых излагается ниже.

Пусть надо найти  $\int \frac{F(X)}{f(X)} dX$ , где

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 X^{m_1} + M_2 X^{m_2} + \dots + M_i X^{m_i} + \dots + M_k X^{m_k}}{N_1 X^{n_1} + N_2 X^{n_2}}$$

Представим эту дробь в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 X^{-p_1} + M_2 X^{-p_2} + \dots + M_i X^{-p_i} + \dots + M_k X^{-p_k}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (8)^1$$

Произведя деление числителя на знаменатель, получим в частном:

$$A X^{-p_1} + B X^{-p_1+q} + C X^{-p_1+2q} + \dots + \frac{a X^{-p_1+sq}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (9)$$

1-й случай будет иметь место, если

$$-p_1 + sq = q - 1;$$

отсюда находим:

$$p_1 = (s-1)q + 1 = \alpha q + 1$$

Подстановка значения  $p_1$  в частное (9) преобразует его в следующий вид:

$$A X^{-\alpha q - 1} + B X^{-(\alpha-1)q-1} + C X^{-(\alpha-2)q-1} \dots + \frac{a X^{q-1}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (10)$$

Приведя выражение (10) к общему знаменателю, очевидно, получим снова дробь (8) в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 X^{-\alpha q - 1} + \dots + M_i X^{-\beta q - 1} + \dots + M_k X^{-\gamma q - 1}}{N_1 + N_2 X^q}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  целые числа;

отсюда очевидно:

$$p_i = -\beta q - 1,$$

или:

$$p_i + 1 = -\beta q;$$

откуда следует вывод:

$$\frac{p_i + 1}{q} = \frac{m_i - p_i + 1}{p_2 - p_1} = \text{целому числу или нулю}$$

<sup>1)</sup> См. (1), (2) и (3)

2-й случай будет иметь место, если

$$-P_1 + sq = \frac{q}{2} - 1$$

отсюда находим:

$$P_1 = (2s - 1) \frac{q}{2} - 1 = \alpha \frac{q}{2} - 1$$

Подстановка значения  $P_1$  в частное (9) преобразует его в следующий вид:

$$A X^{-\alpha \frac{q}{2} - 1} + B X^{-(\alpha-2) \frac{q}{2} - 1} + C X^{-(\alpha-4) \frac{q}{2} - 1} + \dots + \frac{a X^{\frac{q}{2} - 1}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (11)$$

Приведя выражение (11) к общему знаменателю, очевидно, получим снова дробь (8) в виде:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{-\alpha \frac{q}{2} - 1} + \dots + M_i X^{-\beta \frac{q}{2} - 1} + \dots + M_k X^{-\gamma \frac{q}{2} - 1}}{N_1 + N_2 X^q}$$

Отсюда очевидно:

$$P_i = -\beta \frac{q}{2} - 1$$

или:

$$P_i + 1 = -\beta \frac{q}{2};$$

откуда следует вывод:

$$\frac{2(P_i + 1)}{q} = \frac{2(m_i - p_i + 1)}{m_2 - p_1} = \text{целому числу или нулю.}$$

3-й случай, как видно из (7), будет иметь место, если

$$\frac{2(m_i - p_i + 1)}{q} = \text{целому числу или нулю, и } m_k = p_2 - 1$$

## II

Ниже приводятся примеры интегрирования по вышеизложенному приему.

Случай 1-й:  $\frac{m_i - p_i + 1}{p_2 - p_1} = \text{целому числу или нулю.}$

Пример 1-й:

$$\text{Найти } \int \frac{X^{\frac{1}{6}} + 1}{X^{\frac{7}{6}} + X^{\frac{5}{4}}} dX$$

Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $X^{\frac{7}{6}}$ , получим:

$$\frac{X^{\frac{1}{6}} + 1}{X^{\frac{7}{6}} + X^{\frac{5}{4}}} = \frac{X^{-1} - X^{-\frac{7}{6}}}{1 + X^{\frac{1}{12}}}$$

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{X^{-\frac{7}{6}} + X^{-1}}{1 + X^{\frac{1}{12}}} = X^{-\frac{7}{6}} - X^{-\frac{13}{12}} + 2X^{-1} - \frac{2X^{-\frac{11}{12}}}{1 + X^{\frac{1}{12}}}$$

отсюда:

$$\begin{aligned} \int \frac{X^{\frac{1}{6}} + 1}{X^{\frac{7}{6}} + X^{\frac{5}{4}}} dX &= \int X^{-\frac{7}{6}} dx - \int X^{-\frac{13}{12}} dX + 2 \int \frac{dX}{X} - 2 \int \frac{X^{-\frac{11}{12}} dX}{1 + X^{\frac{1}{12}}} = \\ &= -\frac{6}{X^{\frac{1}{6}}} + \frac{12}{X^{\frac{1}{12}}} + 2 \ln X - 24 \ln(1 + X^{\frac{1}{12}}) + C \end{aligned}$$

Этот же интеграл найдем по общему приему.

Полагаем:

$$X = Z^{12}$$

тогда:

$$dX = 12Z^{11} dZ, \quad X^{\frac{1}{6}} = Z^2, \quad X^{\frac{7}{6}} = Z^{14}, \quad X^{\frac{5}{4}} = Z^{15}$$

следовательно:

$$\int \frac{X^{\frac{1}{6}} + 1}{X^{\frac{7}{6}} + X^{\frac{5}{4}}} dX = 12 \int \frac{Z^2 + 1}{Z^3 + Z^4} dZ$$

полагаем:

$$\frac{Z^2 + 1}{Z^3(1 + Z)} = \frac{A}{Z^3} + \frac{B}{Z^2} + \frac{C}{Z} + \frac{D}{1 + Z} \quad (1)$$

Освободив равенство от дробей, имеем:

$$\begin{aligned} Z^2 + 1 &= A(1 + Z) + BZ(1 + Z) + CZ^2(1 + Z) + DZ^3 = \\ &= (C + D)Z^3 + (B + C)Z^2 + (A + B)Z + A \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $Z$ , получим четыре совместных уравнения:

$$A = 1, \quad A + B = 0, \quad B + C = 1, \quad C + D = 0$$

Решив эти уравнения, найдем:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = -2$$

Подстановка этих значений в (1) дает:

$$\frac{Z^2 + 1}{Z^3 (1 + Z)} = \frac{1}{Z^3} - \frac{1}{Z^2} + \frac{2}{Z} - \frac{2}{1 + Z}$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{X^{\frac{1}{6}} + 1}{X^{\frac{1}{6}} + X^{\frac{5}{4}}} dX &= 12 \int \frac{Z^2 + 1}{Z^3 + Z^4} dX = \\ &= 12 \int \frac{dZ}{X^3} - 12 \int \frac{dZ}{Z^2} + 24 \int \frac{dZ}{Z} - 24 \int \frac{dZ}{1 + Z} = \\ &= -\frac{6}{Z^2} + \frac{12}{Z} + 24 \ln Z - 24 \ln(1 + Z) + C = \\ &= -\frac{6}{X^{\frac{1}{6}}} + \frac{12}{X^{\frac{1}{12}}} + 2 \ln X - 24 \ln(1 + X^{\frac{1}{12}}) + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти  $\int \frac{4dX}{X^3 + 4X}$

Разделив числитель и знаменатель подинтегральной функции на  $X$ , получим:

$$\frac{4}{X^3 + 4X} = \frac{4X^{-1}}{4 + X^2}$$

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{4X^{-1}}{4 + X^2} = X^{-1} - \frac{X}{4 + X^2}$$

следовательно:

$$\int \frac{4dX}{X^3 + 4X} = \int \frac{dX}{X} - \int \frac{XdX}{4 + X^2} = \ln X - \frac{1}{2} \ln(4 + X^2) + C$$

Случай 2-й.

$$\frac{2(m_1 - n_1 + 1)}{n_2 - n_1} = \text{целому числу или нулю}$$

Пример 1 й. Найти  $\int \frac{3X^{\frac{1}{6}} + X^{\frac{5}{6}}}{X^{\frac{5}{3}} - 2X^2} dX$

Разделив числитель и знаменатель подинтегральной функции на  $X^{\frac{5}{3}}$ , получим:

$$\frac{3X^{\frac{1}{6}} + X^{\frac{5}{6}}}{X^{\frac{5}{3}} - 2X^2} = \frac{3X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{5}{6}}}{1 - 2X^{\frac{1}{3}}}$$

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{3X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{5}{6}}}{1 - 2X^{\frac{1}{3}}} = 3X^{-\frac{3}{2}} + 6X^{-\frac{7}{6}} + \frac{13X^{-\frac{5}{6}}}{1 - 2X^{\frac{1}{3}}}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \int \frac{3X^{\frac{1}{6}} + X^{\frac{5}{6}}}{X^{\frac{5}{3}} - 2X^{\frac{2}{3}}} dX &= 3 \int X^{-\frac{3}{2}} dX + 6 \int X^{-\frac{7}{6}} dX + 13 \int \frac{X^{-\frac{5}{6}} dX}{1 - 2X^{\frac{1}{3}}} = \\ &= -\frac{6}{X^{\frac{1}{2}}} - \frac{36}{X^{\frac{1}{6}}} - \frac{39}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} X^{\frac{1}{6}} + 1}{\sqrt{2} X^{\frac{1}{6}} - 1} + C \end{aligned}$$

Пример 2-й. Найти  $\int \frac{2X^4 + 1}{X^4 + X^6} dX$

Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $X^4$ , получим:

$$\frac{1 + 2X^4}{X^4 + X^6} = \frac{X^{-4} + 2}{1 + X^2}$$

Разделив числитель на знаменатель, найдем:

$$\frac{X^{-4} + 2}{1 + X^2} = X^{-4} - X^{-2} + \frac{3}{1 + X^2}$$

отсюда:

$$\begin{aligned} \int \frac{2X^4 + 1}{X^4 + X^6} dX &= \int \frac{dX}{X^4} - \int \frac{dX}{X^2} + 3 \int \frac{dX}{1 + X^2} = \\ &= -\frac{1}{3X^3} + \frac{1}{X} + 3 \operatorname{arctg} X + C \end{aligned}$$

Случай 3-й.  $\frac{(2m_1 - n_1 + 1)}{n_2 - n_1} = \text{целому числу или нулю и } m_k = n_2 - 1.$

Пример 1. Найти  $\int \frac{2X^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{7}{4}} - 3X^{\frac{5}{2}}}{4X^2 + X^{\frac{7}{2}}} dX$

Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $X^2$ , получим:

$$\frac{2X^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{7}{4}} - 3X^{\frac{5}{2}}}{4X^2 + X^{\frac{7}{2}}} = \frac{2X^{-\frac{7}{4}} + X^{-\frac{1}{4}} - 3X^{\frac{1}{2}}}{4 + X^{\frac{3}{2}}}$$

Разделим числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{2X^{\frac{7}{4}} + X^{\frac{1}{4}} - 3X^{\frac{1}{2}}}{4 + X^2} = \frac{1}{2} X^{-\frac{7}{4}} + \frac{\frac{1}{2} X^{\frac{1}{4}} - 3X^{\frac{1}{2}}}{4 + X^2}$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{2X^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{7}{4}} - 3X^{\frac{5}{2}}}{4X^2 + X^{\frac{7}{2}}} dX &= \frac{1}{2} \int X^{-\frac{7}{4}} dX + \frac{1}{2} \int \frac{X^{-\frac{1}{4}} dX}{4 + X^{\frac{3}{2}}} - 3 \int \frac{X^{\frac{1}{2}} dX}{4 + X^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{2}{3} X^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{X^{\frac{3}{4}}}{2} - 2 \ln (4 + X^{\frac{3}{2}}) + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти  $\int \frac{X^5 + X^4 - 8}{X^3 - 4X} dX$

Делением числителя на знаменатель, обратим подынтегральную функцию в смешанное количество. Так:

$$\frac{X^5 + X^4 - 8}{X^3 - 4X} = X^2 + X + 4 + 4 \frac{2 - 4X - X^2}{4X - X^3}$$

Разделим числитель и знаменатель последнего слагаемого на  $X$ , получим:

$$\frac{2 - 4X - X^2}{4X - X^3} = \frac{2X^{-1} - 4 - X}{4 - X^2}$$

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{2X^{-1} - 4 - X}{4 - X^2} = \frac{1}{2} X^{-1} - \frac{4 + \frac{1}{2}X}{4 - X^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{X^5 + X^4 - 8}{X^3 - 4X} dX &= \int X^2 dX + \int X dX + 4 \int dX + 2 \int \frac{dX}{X} - 16 \int \frac{dX}{4 - X^2} - 2 \int \frac{XdX}{4 - X^2} = \\ &= \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + 4X + 2 \ln X + 4 \ln \frac{X-2}{X+2} + \ln (X^2 - 4) + C = \\ &= \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + 4X + \ln \frac{X^2 (X-2)^5}{(X+2)^3} + C. \end{aligned}$$

# EINZELNE FÄLLE DES INTEGRIERENS BERECHENBARER (RATIONELLER) UND UNBERECHENBARER (IRRATIONELLER) BRÜCHE

## Zusammenfassung

Wir wollen in mehreren Einzelfällen ein höchst einfaches Verfahren des Integrierens von berechenbaren und unberechenbaren Brüchen folgender Art anwenden:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{m_1} + M_2 X^{m_2} + \dots + M_i X^{m_i} + \dots + M_k X^{m_k}}{N_1 X^{n_1} + N_2 X^{n_2}},$$

wo der Zähler eine viel—oder eingliedrige, der Nenner aber eine zweigliedrige Grösse ist, welche Reihen von der völlig unabhängigen Veränderlichen  $X$  enthalten, dessen Indexe der Potenz ganze oder Bruchzahlen sind

Angenommen wir hatten einen richtigen Bruch:

$$\frac{F(X)}{f(X)} = \frac{M_1 X^{m_1} + M_2 X^{m_2} + \dots + M_i X^{m_i} + \dots + M_k X^{m_k}}{N_1 X^{n_1} + N_2 X^{n_2}} \quad (1),$$

dessen Zähler und Nenner nach den ansteigenden Reihen der unabhängigen Veränderlichen  $X$  angeordnet sind, wobei  $m_k < n_2$  ist.

Vermittels Teilen des Zählers und Nenners durch  $X^{n_1}$  (1) erhält der Bruch folgendes Ansehen:

$$\frac{F_1(X)}{f_1(X)} = \frac{M_1 X^{-(n_1-m_1)} + M_2 X^{-(n_1-m_2)} + \dots + M_i X^{m_i - n_1} + \dots + M_k X^{m_k - n_1}}{N_1 + N_2 X^{n_2 - n_1}} \quad (2).$$

Um weniger schreiben zu müssen, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$n_1 - m_1 = P_1; \quad n_1 - m_2 = P_2; \quad \dots \quad m_i - n_1 = P_i \quad \dots \quad m_k - n_1 = P_k; \quad n_2 - n_1 = q$$

und stellen den Bruch (2) folgender Weise dar:

$$\frac{F_1(X)}{f_1(X)} = \frac{M_1 X^{-P_1} + M_2 X^{-P_2} + \dots + M_i X^{P_i} + \dots + M_k X^{P_k}}{N_1 + N_2 X^q} \quad (3)$$

Es ist augenscheinlich, dass die Teilen des Zählers durch den Nenner des Bruches unendlich ist, dennoch bis zu einem gewissen zum Rest „R“ durchgeführt werden kann, dann wird der ganze Quotient folgendes Aussehen erhalten:

$$\frac{A}{X^{P_1}} + \frac{B}{X^{P_1 - q}} + \frac{C}{X^{P_1 - 2q}} + \dots + \frac{R}{N_1 + N_2 X^q} \quad (4)$$

Wie ersichtlich, lassen sich alle Bestandteile des Ausdrucks (4), mit Ausnahme des letzten, direkt integrieren.

Das Integrieren des Bruches  $\frac{R}{N_1 + N_2 X^q}$  kann nur in folgenden drei Fällen vorgenommen werden:

I Fall:  $R = a X^{q-1}$  (5)  
 In diesem Falle ist:

$$\int \frac{a X^{q-1} dX}{N_1 \pm N_2 X^q} = \frac{a}{q \sqrt[q]{N_2}} \ln (N_1 \pm N_2 X^q) + C$$

II Fall:  $R = a X^{\frac{q}{2}-1}$  (6)  
 In diesem Falle ist:

$$\int \frac{a X^{\frac{q}{2}-1} dX}{N_1 + N_2 X^q} = \frac{2a}{q \sqrt[q]{N_1 N_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{N_2 X^q}{N_1}} + C$$

oder:

$$\int \frac{a X^{\frac{q}{2}} dX}{N_1 - N_2 X^q} = \frac{a}{q \sqrt[q]{N_1 N_2}} \ln \frac{\sqrt{N_2 X^q} + \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2 X^q} - \sqrt{N_1}} + C$$

III Fall:  $R = a X^{\frac{q}{2}-1} \pm b X^{q-1}$  (7)  
 In diesem Falle ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{a X^{\frac{q}{2}-1} \pm b X^{q-1}}{N_1 + N_2 X^q} dX &= \int \frac{a X^{\frac{q}{2}-1}}{N_1 + N_2 X^q} dX \pm \int \frac{b X^{q-1}}{N_1 + N_2 X^q} dX = \\ &= \frac{2a}{q \sqrt[q]{N_1 N_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{N_2 X^q}{N_1}} \pm \frac{b}{q N_2} \ln (N_1 + N_2 X^q) + C \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \int \frac{a X^{\frac{q}{2}-1} \pm b X^{q-1}}{N_1 - N_2 X^q} dX &= \int \frac{a X^{\frac{q}{2}-1}}{N_1 - N_2 X^q} dX \pm \int \frac{b X^{q-1}}{N_1 - N_2 X^q} dX = \\ &= \frac{a}{q \sqrt[q]{N_1 N_2}} \ln \frac{\sqrt{N_2 X^q} + \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2 X^q} - \sqrt{N_1}} \pm \frac{b}{q N_2} \ln (N_1 - N_2 X^q) + C \end{aligned}$$

Die Möglichkeit einer Anwendung des oben angeführten Verfahrens beim Integrieren von Brüchen der unter I angegebenen Art wird nicht nur ersichtlich nach Erhalt des Restes  $-R^q$  der drei Stufen (5), (6) und (7), sondern vorläufig nach folgenden Merkmalen, deren Folgeschlüsse in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzt worden sind.

Der I Fall findet seine Anwendung, wenn  $\frac{m_i - n_1 + 1}{n_2 - n_1}$  gleich ist einer ganzen Zahl oder Null.

Der II Fall wäre dann zu brauchen, wenn  $\frac{2(m_i - n + 1)}{n_2 - n_1}$  gleich ist einer ganzen Zahl oder Null.

Der III Fall wäre in dem Falle anzuwenden, wenn  $\frac{2(m_i - n + 1)}{n_2 - n_1}$  gleich ist einer ganzen Zahl oder Null und  $m_k = n_2 - 1$  ist.

И. Л. МАКАРО

## НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ К ХИМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАЗЛИЧНЫХ СИЛОСОВ ЯМ И БАШЕН

(Из работ кафедры органической и биологической химии Белорусского сельскохозяйственного института).

Известно, что силосование кормов производится как в силосных башнях, так и в ямах, причем обе формы силосования нашли себе широкое применение в животноводческой практике всего мира и в особенности в практике нашего социалистического животноводства.

В настоящее время вопросы силосования довольно широко освещены в специальной литературе, как по линии агротехники силосных культур, так, равным образом, и самой техники силосования.

На этих вопросах мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что контроль заложенных силосов в производственной обстановке, в особенности силосов башен, далеко не достаточен и мы, зачастую, используя данный вид корма, совершенно не знаем об его доброкачественности и питательности. Ясно, что с точки зрения рациональной постановки кормления животных, такое положение дела является недопустимым.

Данная работа имела свою целью изучить питательный состав различных силосов, заложенных как в ямах, так и в башне, причем, в случае однородности материала, выявить конкретные различия в качестве этих силосов. Нужно сказать, что в литературе чаще всего дается химическая характеристика силосов, заложенных в ямах, и сравнительно очень редко силосов, заложенных хозяйственным путем в башне, а между тем наблюдение за последним является немало-важной задачей в общей системе заготовки кормов.

Несколько замечаний относительно закладки наших силосов.

Силосование было произведено осенью 1933 г. Горецкой молочной опытной станцией (ямы) и бывш. Совхозом № 56, ныне учебным хозяйством Горецкого сельско-хозяйственного Института (башня). Засилосованы были следующие культуры:

- 1) в башне— вико-овес и подсолнух;
- 2) в отдельных цементных ямах— вико-овес, кукуруза, смесь клевера-тимофеевки, осока;
- 3) в глиняной яме, облицованной плетнем— березовые веточки.

Во всех случаях закладки силосование произведено по холодному способу.

Вико-овсяная смесь была убрана 11 августа и подвезена к силосным установкам. По ботаническому составу данная кормовая смесь состояла из 50% овса, 32,5% вики и 5% разнотравия. К моменту уборки нижние части овсяных стеблей были желтые, зерна

находились в стадии перехода молочной зрелости в восковую. Вика отцвела, сохранив ярко-зеленую окраску. Зерна в нижних стручках доходила до величины дробы. Разнотравие складывалось из разных сорняков и к тому времени уже отцветавших.

Кукуруза убиралась в стадии конца молочной спелости и перехода в восковую. Мисса содержала некоторые виды сорняков: лебеду, сурепу, поповник, васильки и пр.

Смесь клевера-тимофеевки убиралась в стадии полного цветения.

По своему ботаническому составу она состояла из 40,5% клевера, 54,8% тимофеевки и 3,7% разнотравия.

Осока — первая уборка была начата 4 июля с луга из блюдцев, причем в нее входили и другие растения, как например, аир, некоторые виды злаков и пр.

Подсолнух в момент уборки был весь в цвету, изредка встречались бутоны. Нижние листья имели завядший вид.

Березовые веточки в основном были заготовлены за счет березовых зарослей. Состав массы был следующий: листьев 41%, стеблей 50%. Для силосования веточки брались толщиной до 1 сантиметра.

Вышеуказанные культуры, как уже отмечалось выше, засилосованы были в цементных ямах и в специальной силосной башне. При закладке силосов материал подвергался измельчению, брались для определения влажности специальные пробы. Масса хорошо утрамбовывалась и в тех случаях, когда процент влажности был ниже определенной нормы, увлажнялась водой. В целях учета сухого вещества на разных глубинах силосных ям и башни помещались пробные мешки, из массы которых брались специальные пробы для аналитических целей. Работа по силосованию продолжалась в течение 4-х дней (в ямах), продолжительность же силосования башни была значительно большей. Вообще же необходимо подчеркнуть, что силосование башни не стояло на должной высоте в отношении выполнения всех тех практически важных приемов, которые должны были быть использованы при данной работе. Достаточно указать на то обстоятельство, что в самом процессе закладки силоса допускались в силу различных причин значительные перерывы (2—3 дня), отчего работа принимала затяжной характер. Ясно, что такое положение дела не могло не отразиться на качестве силосованного корма; это достаточно наглядно подтверждается нашими экспериментальными данными, которые будут приведены ниже.

Наша работа по исследованию силосов в известной степени является продолжением и углублением работы Горещкой молочной станции, которая вела наблюдение за степенью поедаемости тех же силосов рогатым скотом (за исключением силосов башни).

Основные выводы этих наблюдений представлены в работе А. В. Капустиной<sup>1)</sup>.

Известно, что качество силоса до некоторой степени определяется соотношением летучих и нелетучих кислот, тем или другим содержанием в силосе в первую голову молочной кислоты. Поэтому мы, желая ближе подойти к знакомству с этим вопросом, вели определение свободных молочной, уксусной, масляной кислот, а также РН в водных вытяжках из всех силосов.

<sup>1)</sup> А. В. Капустина. Оценка силосов БССР. Белгосиздат. 1935 г.

Пробы для определения кислот, а равным образом и для других анализов брались из тех мешков, которые были заложены на определенных глубинах ям и башни в соответствии с теми слоями силоса, которые подвергались скармливанию.

Данные определения кислот сведены в таблице № 1.

Табл. 1.

№ п. п.	№ № проб мешк.	Название силосов.	Формы кислот				РН в водной вытяжке из силоса.
			Общая кислотность	Молочная в %	Уксусная в %	Масляная в %	
<b>Я М Ы.</b>							
1	1	Вико-овес . . . . .	1,07	0,76	0,25	0,64	4,58
2	2	" " . . . . .	1,36	0,67	0,27	0,42	3,96
3	1	Клев.-тимофеевка . . . . .	2,56	0,67	0,58	0,31	3,52
4	2	" " . . . . .	2,41	1,56	0,51	0,34	3,61
5	3	" " . . . . .	1,79	0,77	0,72	0,30	3,76
6	4	" " . . . . .	1,71	0,68	0,73	0,30	3,74
7	7	Осока . . . . .	1,47	0,96	0,51	—	3,60
8	3	Кукуруза . . . . .	2,79	2,26	0,53	—	—
9	—	Подсолнух . . . . .	1,71	1,18	0,57	—	3,72
10	1	Веточный . . . . .	1,11	0,85	0,26	—	3,43
<b>Б А Ш Н Я.</b>							
1	9	Вико-овес . . . . .	0,93	—	0,50	0,43	4,22
2	12	" " . . . . .	0,76	0,07	0,58	0,11	4,32
3	13	" " . . . . .	0,86	0,12	0,36	0,38	4,36
4	19	" " . . . . .	0,74	0,63	0,11	—	4,35
5	2	Подсолнух . . . . .	2,15	1,27	0,88	—	3,62
6	4	" " . . . . .	2,41	1,64	0,77	—	3,40
7	6	" " . . . . .	2,07	0,34	0,73	—	3,64

Не вдаваясь в подробный анализ приведенных данных, мы отметим лишь, что в отношении содержания кислот по одним и тем же силосам (вико-овес) ямы и башни наблюдается довольно резкое различие. Мы видим, что в вико-овсяном силосе башни в значительной степени имеет место образование уксусной и масляной кислот при одновременном подавлении молочно-кислого брожения. Это обстоятельство дает право считать, что, с точки зрения накопления кислот, вико-овсяный силос является неудовлетворительным. Такая недоброкачественность корма должна, по видимому, прежде всего объясняться небрежностью в работе, которая нередко может быть подмечена при силосовании башен.

Эта небрежность могла выражаться в недостаточной уплотненности силосуемой массы, в подвозе заведомо недоброкачественной зеленой массы, в затягивании самого процесса силосования на недопустимо продолжительный срок и т. д. Таким образом, такой ценный кормовой продукт, как силос, нередко, в результате неправильной организации работы по силосованию, превращается в корм

Недостаточно хорошего качества. Однако, интересно отметить, что силос из подеолнуха, засилосованный в той же башне, является по сравнению с вико-овсяным значительно лучшим. Мы здесь имеем совершенно иное соотношение между летучими и нелетучими кислотами, мы имеем здесь значительное развитие молочно-кислого брожения. Существенным моментом, предопределившим до известной степени качество данного силоса, является химический состав подеолнуха, с одной стороны и, возможно, соблюдение тех условий в работе, о которых говорилось выше, с другой.

В отношении тех же кислот по силосам ям мы имеем значительно лучшую картину. Впрочем, и здесь необходимо подчеркнуть, что некоторые пробы силоса довольно низки по своему качеству, так, например, вико-овсяная смесь (мешок 2), отчасти клевер-тимофеевка (мешок 3 и 4). Благоприятное соотношение между летучими и нелетучими кислотами может быть отмечено для веточного силоса и осокового, а также клевер-тимофеевки (мешок 1). Попутно с этим можно отметить, что пробы для одного и того же силоса более низких слоев содержат в основном большее количество молочной кислоты, что может быть поставлено в связь с состоянием аэрации (клевер-тимофеевка—яма).

То обстоятельство, что веточный силос, а равным образом и осоковый дают благоприятные показатели в отношении содержания

нашими наблюдениями по содержанию кислот в осоковом силосе с ивром, заложенным в глиняных необлицованных ямах в бывш. совхозе № 56 при Горьком с х. институте. Яма была безавеса. Будучи вскрыты весной 1933 г., они в таком состоянии продолжали оставаться все время, вследствие чего силосная масса выщелачивалась проходящими дождями, верхние слои сильно прогыхали и т. д. Пробы силоса для определения кислот взяты были из двух ям, и по возможности, из нижних слоев силосной массы. Вот данные:

Табл. 2.

№ № ям	Наименование силоса	Общая кислотность в %	Молочная кислота в %	Уксусная кислота в %	Масляная кислота в %
1	Осоковый с ивром	0,80	—	0,17	0,63
2	" "	0,09	—	0,01	0,08

Приведенные данные позволяют заподозрить еще и то, что сама закладка силосов не стояла на должной высоте, что, видимо, был допущен целый ряд ошибок в работе, повлекших к получению такого недоброкачественного корма. Отсюда становится понятным, почему основная масса силоса не была использована как корм, почему животные весьма неохотно поедали данный корм. Нет никаких сомнений в том, что при правильном силосовании и соответствующем уходе за силосом, последний мог бы быть использован полностью так, как такой же силос других ям.

Вообще же к хранению силосной массы при ее скармливании необходимо относиться с большой осторожностью, не допуская ни при каких условиях выбрасывания из ям или башни большого количества силосной массы, чем это требуется для одноразовой дачи животным.

В противном случае неизбежна потеря питательных веществ и вкусовых достоинств силоса

Приведем полученные нами данные об изменении кислот при хранении силоса на воздухе.

Табл. 3.

№ № п-п	Наименование силоса	Время хран.	Общая кислотн. % <sup>0</sup> /с	Молочн. кислота в % <sup>0</sup> /о	Уксусн. кислота в % <sup>0</sup> /о	Маслян. кислота в % <sup>0</sup> /о	РН в водн. вытяжке
1	Вико-овес . . . (из башни)	0	1,42	0,87	0,40	0,15	4,78
		1 д.	0,73	0,43	0,26	0,036	4,82
2	" . . . . .	2 д.	0,54	0,27	0,27	—	5,04
		3 д.	0,54	0,27	0,25	—	5,08
		5 д.	0,44	0,25	0,19	—	5,16
		7 д.	0,27	0,10	0,17	—	5,12

Эти данные свидетельствуют о том, что при рыхлом и открытом лежании силоса на воздухе, как это имело место у нас, значения РН возрастают, содержание же кислот значительно падает, в особенности в первые моменты лежания, а это обстоятельство ведет к снижению вкусовых достоинств силоса, не говоря уже о том, что при этом идет одновременно и потеря питательных веществ. Количественный учет этой потери представлял бы большой теоретический и практический интерес.

В этом направлении нами намечаются соответствующие исследования:

Обратимся теперь к знакомству с химическим составом тех растительных объектов, которые были использованы для силосования, а также и самих силосов (см. табл. 4 на стр. 52 и 53).

Знакомясь с приведенными аналитическими данными, мы должны подчеркнуть некоторую пестроту между ними для одного и того же растительного объекта. Эта пестрота, повидимому, зависит от неоднородности проб, взятых для анализа как из массы до силосования, так и самого силоса. Думать же о том, что расхождение аналитических данных для одного и того же материала есть результат допущения каких-либо случайностей в аналитической работе, не приходится, ибо каждый результат является средним из двух близких друг к другу определений.

Процентное содержание веществ в чересче

Название силосов	Общ. азот		Белк. азот		Сух. вещ.		Гигрос. вода		Орг. веществ.		Сыр. в
	До сило- сован.	Силос	До сило- сован.	Силос	До сило- сован.	Силос	До сило- сован.	Силос	До сило- сован.	Силос	До сило- сован.
Я М А,											
Вико-овес, меш. 1	1,48	1,41	1,45	0,92	92,72	89,22	7,29	10,79	86,23	87,52	13,77
„ „ „ 2	1,76	1,74	1,21	1,00	92,99	89,24	7,06	10,76	86,36	90,60	13,64
Клевер-тим., меш. 1	1,95	1,75	1,35	1,34	87,43	83,72	12,56	16,28	93,30	92,02	6,70
„ „ „ 2	2,01	1,79	1,62	1,30	87,57	84,74	12,43	15,26	93,44	92,82	6,56
„ „ „ 3	2,03	,84	1,73	1,36	89,33	90,63	10,68	9,38	93,30	92,19	6,70
„ „ „ 4	2,03	1,89	1,73	1,14	87,33	85,28	10,68	14,73	93,30	90,96	6,70
Осока „ 7	1,68	1,57	1,41	0,89	87,92	86,00	12,08	14,0	93,77	91,48	6,24
Кукуруза из Ива- нова . . . . .	1,67	1,46	1,42	0,79	88,95	83,70	11,03	16,31	87,64	84,80	16,36
Вет. корм (берез. ветки) . . меш. 1	1,82	2,01	1,78	1,85	89,52	89,66	10,80	10,34	96,26	94,59	3,74
Вет. корм (берез. ветки) . . меш. 2	1,82	1,81	1,78	1,74	89,21	89,10	10,80	10,90	96,26	94,31	3,74
Б А Ш Н Я.											
Вико-овес, меш. 9	1,94	1,73	1,59	1,14	88,67	86,72	11,48	13,28	88,23	87,47	11,77
„ „ „ 11	2,01	1,63	1,78	1,11	88,52	90,80	11,49	9,20	84,93	79,71	15,07
„ „ „ 12	2,01	1,80	1,78	0,98	88,52	89,85	11,40	10,16	84,93	81,36	15,07
„ „ „ 13	2,04	1,59	2,34	0,93	89,39	89,51	10,67	10,49	85,63	79,08	14,37
„ „ „ 19	1,76	2,05	1,34	1,43	90,05	91,99	9,95	8,01	91,15	87,47	8,85
„ „ „ 16	2,85	2,56	2,55	1,83	89,65	87,85	10,30	12,15	84,29	79,71	15,68
Кукуруза, меш. 3	1,72	1,75	1,32	1,10	87,21	84,71	12,79	10,30	90,01	88,13	19,99
Подсолнечник 3	1,53	1,27	1,45	0,98	88,49	85,76	11,52	14,65	87,62	90,04	12,38

на абсолютно-сухую навеску												РН силосов водной вытяжки	
Сир. жир		Крахмал		Клетчатка		Сыр. протеин		Безазотист. экстр. веществ.		Фосф. кисл.			
До силосован.	Силос	До силосован.	Силос	До силосован.	Силос	До силосован.	Силос	До силосован.	Силос	До силосован.	Силос		
2,4	83	4,68	11,56	9,96	31,50	33,3	9,25	8,81	35,04	35,90	0,51	0,63	4,58
9,4	05	4,34	12,88	9,25	35,48	37,52	11,00	10,88	31,48	32,61	0,51	0,63	3,96
7,9	83	3,51	11,29	10,25	31,80	31,78	12,18	11,00	40,40	38,69	0,63	0,72	3,52
7,1	05	3,20	12,31	—	31,80	32,10	12,56	11,19	38,43	32,51	0,64	0,70	3,66
7,8	40	4,42	13,73	—	31,60	37,00	12,69	11,50	36,53	32,12	0,55	0,63	3,76
9,0	40	4,59	13,73	—	31,60	31,93	12,69	11,81	36,53	36,64	0,55	0,60	3,74
2,5	63	4,77	13,98	—	26,00	33,57	10,50	9,81	48,23	44,66	0,48	0,51	3,6
5,2	01	4,03	—	—	34,40	35,33	10,43	9,19	32,34	32,10	0,46	0,53	3,62
5,4	18	7,15	22,84	—	22,90	25,79	11,38	12,56	45,45	39,37	0,66	0,55	3,48
5,0	18	7,18	22,84	—	22,90	25,48	11,38	11,31	45,45	41,20	—	—	3,56
12,5	76	4,04	14,97	—	32,09	33,88	12,13	10,81	32,90	32,74	—	—	4,22
20,3	94	3,29	14,85	—	38,72	41,50	12,56	10,19	23,36	18,89	0,63	0,64	3,90
18,3	94	2,47	14,85	—	38,72	—	12,56	11,25	23,36	—	0,63	0,64	4,32
20,8	71	2,12	19,99	—	34,18	44,70	12,75	9,94	24,70	17,44	0,67	0,73	4,36
12,5	49	2,71	9,86	—	35,06	38,07	11,00	12,81	35,56	26,36	0,67	0,63	4,35
20,3	139	—	10,30	—	31,10	36,85	17,81	16,00	19,63	15,62	0,66	0,89	—
11,8	161	6,44	7,59	—	30,70	33,63	10,75	10,94	38,82	—	—	—	—
9,9	02	1,68	13,43	—	30,90	33,97	9,56	7,93	38,63	41,30	0,62	0,53	3,65

Вообще же нужно сказать, что вопрос взятия проб силоса для анализа является вопросом первостепенной важности. Он касается не только обычных зоотехнических анализов, но и других аналитических работ. Существующие приемы взятия проб силоса страдают недостатками, в силу чего и получаются, по нашему мнению, недостаточно согласованные аналитические данные.

Остановившись на наиболее важных питательных веществах, например, белке, мы видим, что в отношении содержания последнего некоторые образцы смеси вико-овса (башня), а затем вет. корма, как до силосования, так и после него являются наиболее богатыми. За ними следует смесь клевера и тимофеевки и др.

Менее богаты белковыми веществами осока и кукуруза.

Примерно в такой же последовательности распределяются и другие группы органических соединений. Впрочем, если взять сырой протеин, то во всех случаях смесь клевера-тимофеевки более им богата, чем веточный корм. Заметно бросается в глаза значительное превышение содержания сырого жира в вет. корме по сравнению с другими объектами, причем содержание его в самом силосе из березовых веточек остается таким же, как и в массе до силосования. Во всех же остальных случаях содержание сырого жира в силосе мы имеем значительно повышенное, по сравнению с той же массой до силосования. Это увеличение идет за счет ряда органических продуктов, образующихся в процессе консервирования растительной массы—спиртов, кислот и пр., экстралируемых эфиром вместе с жиром. В отношении содержания минеральных продуктов вет. корм занимает самое последнее место, наиболее же богатым является вико-овсяная смесь, в основном по всем пробам.

Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях, за исключением жира клетчатки, сырой золы,  $P_2O_5$ , содержание остальных групп соединений по всем пробам силоса находится в несколько меньшем количестве, нежели в соответствующих пробах до силосования. Это уменьшение обусловлено теми потерями питательных веществ, которые имеют место в той или иной степени в зависимости от различных условий силосования. Однако, путем силосования удается потери физиологически важных продуктов свести до минимума, конечно, при условии соблюдения всех выработанных практикой технических приемов закладки того или иного силоса. Нужно иметь в виду, что характер потери при силосовании несколько иной, нежели при приготовлении сухого сена. Констатируя ту или иную убыль, например, белка при силосовании корма, мы должны при этом учитывать то обстоятельство, что данная убыль не является для нас полностью безвозвратной, ибо белок в процессе силосования частично гидролизуясь, переходит в аминокислоты, которые с успехом используются животными. В таком же духе можно было бы говорить и относительно других органических соединений.

Но все же некоторая доля физиологически важных продуктов в процессе силосования остается для нас окончательно потерянной.

Очень важно уметь вести количественный учет этих продуктов.

Однако, этот вопрос, касающийся, главным образом, белковых продуктов, не так уж прост, как это может показаться на первых порах, и упирается в основном в отсутствие достаточно надежной методики исследования. В виду того, что данный вопрос является

специальным, выходящим за пределы настоящей нашей работы, мы останавливаться на нем не будем.

Следует лишь еще раз отметить, что та разница в % содержания белка и других продуктов, которая наблюдается в массе до силосования и в самом силосе, должна нами рассматриваться в основном не как потеря, а как результат изменения той или иной группы органических соединений, перехода ее в менее сложные продукты, обычно не учитываемые при таких простых анализах, как зоотехнические. Однако, несмотря на это, количественный учет физиологически важных продуктов как в массе до силосования, так и в самом силосе не лишен большой практической и теоретической важности, ибо этот учет дает возможность до известной степени судить и об интенсивности изменения органических соединений, вплоть до образования  $\text{NH}_3$ ,  $\text{CO}_2$  и др.

Исходя из этих соображений, нами, как уже отмечалось выше, были заложены в различных слоях силосной массы специальные мешки, при помощи которых был произведен учет потерь сухого вещества, органических веществ и др.

Эти данные представлены в табл. 5 (см. табл. 5 на стр. 56 и 57).

Приведенные данные потерь в большинстве своем приближаются к данным, встречающимся в специальной литературе (можно указать хотя бы на сводную работу по силосованию, выпущенную Институтом кормов Всесоюзной Академии с. х. наук им. Ленина<sup>1)</sup>). Однако, поскольку у нас мешки закладывались и в ямы и в башню, то интересно сравнить данные потери в том и в другом случае. Оказывается, что если это сравнение произвести между однородными силосами вико-овсяной смеси, то потери по всем группам соединений в случае силосования в башне превышают потери тех же соединений при силосовании в ямах на довольно значительную величину. Мы имеем лишь для белкового азота один случай, когда данные потери несколько близко стоят друг к другу. Чем может быть объяснено такое превышение потерь органических соединений при силосовании в башне? Ясно, что дело здесь не в башне, как таковой, а в том, что масса, очевидно, при загрузке своей не была достаточно уплотненной.

Правда, данный вывод был бы более обоснованным, если бы мы располагали не единичным случаем, если бы мы могли такое же сравнение провести и между другими видами силосов. Но все-же, поскольку это различие касается всех почти групп соединений, то имеется некоторое основание рассуждать так, а не иначе.

В нашем случае, точно также, как и в случае других авторов, наблюдается вместо потерь соединений некоторое их приращение (не абсолютное); это может быть отмечено для жира, золы и клетчатки и почти для всех силосов, за исключением веточного и кукурузного (жир).

Это увеличение указанных продуктов в силосе достаточно понятно, и мы уже имели случай на этом вопросе несколько останавливаться.

Как видно из приведенной выше таблицы (таб. 4), один и тот же растительный объект анализировался несколько раз соответственно числу заложенных пробных мешков.

Это делалось с той целью, чтобы получить некоторое представление о качестве силоса и о характере потерь различных соединений в зависимости от той или иной глубины залегания мешка, от

<sup>1)</sup> Итоги опытных работ по силосованию. Сельхозгиз 1931 г.

Название силоса	Сухое вещество			Органич. вещество			Сырая зола			Сырой ж		
	Вес зал. массы в кг сух.	Вес мас. при выемке воз. сух.	% потери	Заложено	Вынито	% потери	Заложено	Вынито	% потери	Заложено	Вынито	
Я М Ы.												
Вико-овес, меш. 1	5,79	4,96	14,16	4,99	4,34	13,22	0,79	0,62	21,51	0,16	0,23	
" " " 2	5,75	4,85	15,82	4,96	4,39	11,49	0,78	0,46	41,02	0,12	0,21	
Клев.+тим. " 1	3,58	2,96	16,38	3,34	2,72	18,56	0,24	0,24	—	0,06	0,10	
" " " 2	3,06	2,64	13,72	2,86	2,45	14,33	0,20	0,19	5,00	0,07	0,08	
" " " 3	3,31	2,93	11,48	3,09	2,70	9,38	0,22	0,23	4,55	0,11	0,12	
" " " 4	3,14	2,73	12,93	2,93	2,48	15,45	0,21	0,24	14,29	0,11	0,13	
Кукуруза из совхоза Иваново	2,87	2,06	28,22	2,51	1,75	30,27	0,35	0,31	11,42	0,09	0,08	
Вег. корм, меш. 1	7,04	6,77	3,83	6,78	6,40	5,60	0,26	0,37	42,31	0,51	0,48	
" " 2	7,04	6,77	3,83	6,78	6,35	6,32	0,26	0,38	46,15	0,51	0,49	
Б А Ш Н Я												
Вика, меш. 15 . .	4,18	2,91	28,47	3,52	2,38	32,39	0,66	0,61	7,58	0,10	0,15	
Подсолнечник, мешок (№ 2) . . .	8,07	4,34	46,22	7,07	3,91	41,71	1,00	0,43	57,00	0,07	0,07	

Крахмал			Клетчатка			Сырой протеин			Безэстр. вещ.			Общий азот			Белковый азот		
Вынуто	% потери		Заложено	Вынуто	% потери	Заложено	Вынуто	% потери	Заложено	Вынуто	% потери	Заложено	Вынуто	% потери	Заложено	Вынуто	% потери
0,49	25,37		1,82	1,65	9,34	0,54	0,44	18,51	2,47	2,02	18,21	0,08	0,07	12,50	0,08	0,04	50,00
0,45	37,50		2,04	1,74	9,80	0,63	0,53	15,87	2,17	1,84	15,20	0,10	0,08	20,00	0,07	0,04	42,85
0,30	25,00		1,14	0,94	17,54	0,44	0,33	25,00	0,70	1,35	20,58	0,069	0,052	24,64	0,048	0,040	16,66
—	—		0,97	0,85	12,37	0,38	0,30	21,06	1,44	1,22	15,27	0,06	0,04	33,33	0,04	0,03	25,00
—	—		1,045	1,084	3,73	0,42	0,34	19,05	1,51	1,15	23,84	0,067	0,054	19,40	0,057	0,04	29,82
—	—		0,99	0,87	12,23	0,40	0,32	20,00	1,43	1,16	18,88	0,06	0,05	16,66	0,05	0,03	40,00
—	—		0,99	0,73	26,26	0,30	0,19	36,66	1,14	1,75	34,21	0,04	0,03	25,00	0,04	0,01	75,00
—	—		1,61	1,75	8,70	0,80	0,85	6,25	3,86	3,32	13,98	0,12	0,12	8,33	0,12	0,12	—
—	—		1,61	1,72	6,83	0,80	0,77	3,75	3,86	3,39	12,17	0,12	0,13	—	0,12	0,12	—
—	—		1,30	1,10	15,38	0,74	0,48	35,13	1,38	0,75	45,65	0,11	0,08	27,27	0,11	0,05	54,55
—	—		2,49	1,47	40,96	0,77	0,34	55,84	3,73	0,02	46,21	0,12	0,06	50,00	0,12	0,04	66,67

близости его к стенке башни (в случае силосования в последней) и т. д.

Знакомясь в этом направлении с данными потерь по заложенным мешкам (таблица 5), мы не наблюдаем какой либо строгой закономерности, если не считать белкового азота (клевер-тимофеевка, засилосованная в яме), где потеря последнего достигает наибольшей величины в верхних горизонтах силосной массы. (Попутно заметим, что меньшие значения мешочных номеров соответствуют большим глубинам силосных ям и башни). Однако, если обратиться к таблице 6, характеризующей собой потери тех же веществ, но найденных не при помощи заложенных мешков, а по количеству  $P_2O_5$ , как в материале до силосования, так и после него, то здесь повышенная потеря веществ в верхних горизонтах несколько более заметна, в особенности для белкового азота.

В этом отношении мы имеем повторение картины, наметившейся в таблице 5.

Приведем эти данные.

$\% \text{ до } 100 \text{ потери по } P_2O_5$

Табл. 6

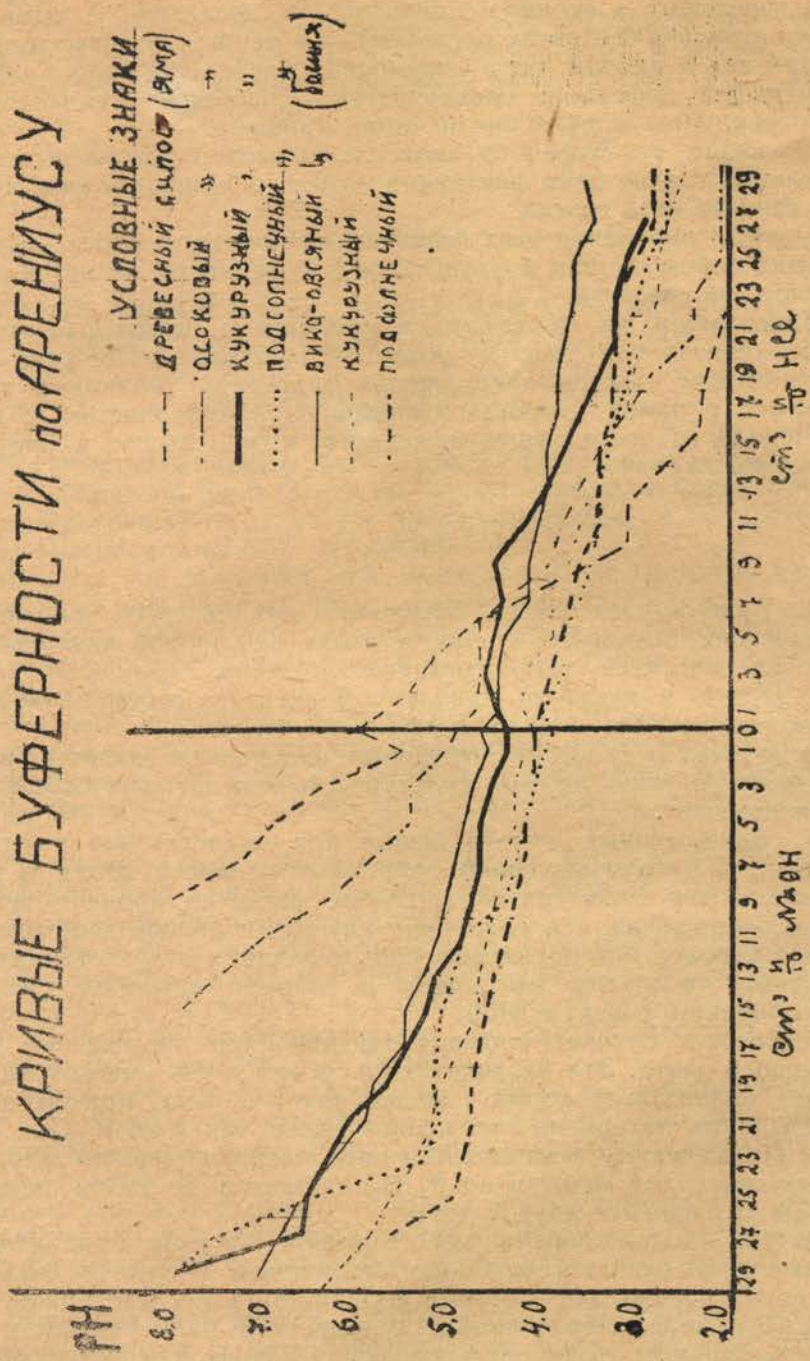
НАЗВАНИЕ СИЛОСОВ.	Общий азот.	Белковый азот.	Сухое вещ.	Органич. вещ.	Сырая зола	Сырой жир	Клетчатка.	Сырой протеин.	Безазотист. экстр. вещест.
<b>Я М Ы</b>									
Вико-овес, меш. 1 . .	22,95	48,60	22,09	17,81	—	—	14,40	22,85	22,67
" " " 2 . .	19,82	32,89	22,29	16,07	—	—	14,38	20,87	18,96
Клевер-тим. " 1 . .	21,52	12,99	16,15	13,64	—	—	12,50	20,92	15,69
" " " 2 . .	18,64	26,55	11,45	9,12	—	—	7,65	18,50	9,67
" " " 3 . .	20,68	31,31	11,39	13,70	—	—	—	20,85	25,01
" " " 4 . .	16,00	40,63	12,99	12,17	—	—	8,98	16,18	15,79
О с о к а " 7 . .	12,78	41,06	8,93	9,16	—	—	—	13,03	17,35
Кукуруза . . . . .	23,96	51,82	18,42	16,01	—	—	10,85	23,54	20,94
<b>Б А Ш Н Я</b>									
Вико-овес, меш. 11 . .	20,10	38,67	—	7,63	—	—	—	20,15	25,65
" " " 12 . .	11,76	45,86	—	5,71	—	—	—	11,83	—
" " " 13 . .	29,02	63,81	8,80	15,92	—	—	—	28,28	45,00
" " " 16 . .	33,33	46,80	27,31	29,85	3,97	4,97	12,09	33,36	43,32
Кукуруза " 3 . .	9,79	26,17	13,97	13,27	—	—	2,97	9,88	—

Следует отметить, что приведенные данные потери по  $P_2O_5$  довольно близки по своему значению к данным таблицы 5, что позволяет для учета потерь химических веществ при силосовании практически пользоваться этим приемом, как приемом менее мешкотным. Как и в первом случае, мы имеем для золы, клетчатки, жира отсутствие потерь по всем видам силосов.

Заканчивая краткую химическую характеристику наших силосов, мы сделаем еще несколько замечаний относительно их буферных свойств. К оценке этой стороны мы подошли путем применения электротитрования сока из силоса и метода определения буферности по Арениусу<sup>1)</sup>. В виду того, что оба метода дают в основном ана-

<sup>1)</sup> Н. Ремизов. Физико-химические исследования почвы.

логичную картину, мы приведем лишь характеристику буферности по Арениусу, представленную в виде кривых.



Приведенные кривые показывают, что исследуемые силоса, за исключением древесного и осоковых, как в кислом, так и в щелочном плече обладают, примерно, одинаковой буферностью. Что же касается древесного и осокового силосов, то последние в этом отношении отличаются от всех остальных, в особенности древесный силос, причем как в кислом, так и в щелочном плече. Эти силоса обладают наименьшей буферной способностью. Сказанное достаточно ясно иллюстрируется приведенными выше кривыми.

Очевидно эти буферные свойства силосов обусловлены в каждом отдельном случае теми факторами, которые являются характерными для данного вида силоса.

Однако, выявление этих факторов для каждого силоса, обуславливающих собою ту или другую степень буферности, является довольно сложной задачей.

Здесь лишь, на основании имеющихся в нашем распоряжении экспериментальных данных, можно установить некоторую зависимость между содержанием кислот (уксусной), белковых веществ в силосе, с одной стороны, и повышенной буферностью, с другой.

Исходя из всего вышеизложенного, можно наметить ряд следующих положений.

### Выводы

1. Вико овсяная смесь, засилосованная в ямах, в отношении содержания белкового и общего азота, фосфорной кислоты—уступает той же смеси, засилосованной в башнях.

2. Осока и кукуруза довольно близки по своему содержанию азотистых веществ и даже фосфорной кислоты.

3 Веточный силос в отношении содержания питательных веществ не уступает другим культурам, а в некоторых случаях даже их превышает.

4. Вико-овсяные силоса башни при недостаточно тщательной закладке в отношении своей доброкачественности стоят на низком уровне, о чем свидетельствует слабое развитие процесса молочно-кислого брожения, а в некоторых случаях и полное его отсутствие.

5. Наиболее благоприятное соотношение между летучими и нелетучими кислотами мы имеем в силосах: веточном, осоковом, подсолнечном и кукурузном.

6. Во всех случаях наблюдаются наиболее повышенные потери белкового азота. Эта картина легко может быть подмечена, как в случае силосования корма в башне, так и в ямах, причем, как при определении потерь по заложенной массе, так и по  $P_2 O_5$ .

7. Примененные нами способы определения потерь по заложенной и вынутой сухой массе и по  $P_2 O_5$  оказались по своим показаниям довольно близкими друг к другу.

8. При силосовании в ямах наряду с другими продуктами веточный корм оказался наиболее устойчивым в смысле сохранения тех групп соединений, которые подвергались исследованию.

9. При силосовании вообще уплотнение массы является одним из серьезнейших факторов в отношении сохранения доброкачественности и питательности корма; на это обстоятельство сугубо должно быть обращено внимание при силосовании в башнях.

10. Правильный уход за сохранением вскрытого силоса должен являться одним из существенных моментов в практике кормления животных.

11. Наименьшей буферной способностью обладают веточный и осоковый силоса, в особенности древесный силос в кислом плече. Остальные же в отношении буферности стоят близко друг к другу.

---

I. L. MAKARO

## EINIGE ANGABEN ZUR CHEMISCHEN CHARAKTERISTIK VERSCHIEDENER SILO GRUBEN UNDTÜRME

### Schlussfolgerungen

1. Wickhafer-Mischungen, die in Gruben eingemacht worden sind, stehen in Bezug auf ihren Gehalt an Eiweiss—und an Gesamtstickstoff, sowie an Phosphorsäure hinter den gleichartigen, aber in Türmen eingemachten Mischungen zurück.

2. Riedgras und Mais sind nach ihrem Gehalt an Stickstoff haltigen Verbindungen und sogar an Phosphorsäure ziemlich ähnlich.

3. Laubsilos stehen in Bezug auf ihren Gehalt an Nährstoffen nicht hinter anderen Kulturpflanzen zurück, in einigen Fällen übertreffen sie dieselben sogar.

4. Wickhafer-Mischungen in Türmen stehen in Bezug auf Güte auf ziemlich niedriger Stufe, wenn die Einlagerung nicht sorgfältig genug vor sich gegangen ist, wofür die schwache Entwicklung des Vorganges der Milchsäuregärung zeugt, welche in einigen Fällen sogar völlig ausbleibt.

5. Die allergünstigsten Wechselbeziehungen zwischen den flüchtigen und nichtflüchtigen Säuren finden sich vornehmlich in den Silos von Laub, Riedgras, Sonnenblumen und Mais.

6. In allen Fällen lässt sich eine Zunahme im Verlust an Eiweissstickstoff feststellen. Dieses Verhältniss äussert sich sowohl beim Einsäuern des Futters in Türmen, als auch in Gruben und zwar sowohl in Bezug auf die Verluste an der Gesamtmasse, die zur Verarbeitung gelangt, als auch in Bezug auf den  $P_2O_5$  Gehalt.

7. Die von uns zur Ergründung der Verluste angewandten Verfahren an der zur Einsäuerung verwandten und der dem Silo entnommenen Trockensubstanz und an der  $P_2O_5$  erwiesen sich in ihren Angaben ziemlich nahe zu einander.

8. Beim Einsäuern in Gruben erwies sich im Vergleich mit anderen Stoffen das Laubfutter am standhaftesten in Bezug auf Bewahrung derjenigen Gruppen vom Verbindungen, welche einer Untersuchung unterzogen wurden.

9. Beim Einmachen im Silo ist überhaupt das Festlagern einer der wichtigsten Faktoren in Betreff der Erzielung eines guten und nahrhaften Futtermittels; auf diesen Umstand muss besonders streng geachtet werden beim Einsäuern in Türmen.

10. Die richtige Behandlung zur Erhaltung des geöffneten Silos in gutem Stande ist eines der wichtigsten Momente in der Praxis der Fütterung des Viehs.

11. Das Laub- und Riedgrassilo besitzt die geringste Bufferfähigkeit, insbesondere das Laubholzsilo in saurer Gährung. Die anderen sind in Bezug auf ihre Bufferfähigkeit einander ziemlich gleich.

ПРОФ. Н. В. НАЙДЕНОВ

## ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОБЪЕМА СКИРД И СТОГОВ

В связи с необходимостью планового расходования кормов в совхозах и колхозах часто возникает потребность в определении имеющегося запаса кормов и в особенности наличия грубых кормов—сена и соломы, которые являются в большинстве случаев основным кормовым фондом в стойловый период. Установить имеющийся запас грубых кормов путем взвешивания их, вследствие громоздкости этой операции, очень трудно, да, кроме того, большинство колхозов и совхозов не располагают возовыми весами, на которых можно было бы взвесить возы с сеном, а поэтому при определении запаса грубых кормов применяют обычно способ измерения скирд и стогов и на основании объема их и веса кубометра сена или соломы вычисляют количество грубых кормов.

Существует несколько способов определения объема скирд при помощи их измерения. Так как объем скирды равняется произведению площади поперечного сечения ее на длину, то поэтому при всех способах измеряется длина скирды и определяется площадь поперечного сечения ее или площадь торцевой части скирды. Измерение длины скирды—дело простое и не представляет никаких трудностей, что же касается площади поперечного сечения скирды, то ее определить несколько сложнее и ведется это определение различными способами. Новейшим из них является способ, данный Hosteman'ом. Этот способ был получен в результате обработки большого материала по измерению скирд, проведенному на опытной станции в Калифорнии. Были измерены 563 скирды. Метод изучения заключался в том, что на координатную бумагу тщательно наносились абрисы торцевых площадей скирд и нанесенные таким образом площади измерялись потом планиметром. В результате исследований и математической обработки полученного материала Hosteman дал правило для определения площади поперечного сечения скирды, которое выражается следующей формулой:

$$(0,56r - 0,55b) \cdot b$$

В этом выражении буква  $r$  означает перекидку через скирду. Эта перекидка измеряется при помощи ленты, которая перебрасывается через скирду от основания ее с одной стороны и до основания

скирды на другой стороне,  $b$  означает ширину торцевой площади скирды, измеренную в широком месте этой площади.

Так как скирда имеет не всегда совершенно одинаковые размеры в разных частях ее поперечного сечения, то поэтому перекидку следует измерять в нескольких местах скирды для того, чтобы получить из этих измерений среднюю величину. То же следует сказать и относительно измерения длины и ширины скирды. Для получения средних размеров ширина измеряется на обоих торцах скирды, а длина—с двух сторон скирды.

Если через  $L$  мы обозначим среднюю длину скирды, то для объема скирды получится следующая формула:

$$(0,56p - 0,55b) \cdot b \cdot L = \text{об'ему скирды}$$

Числа 0,56 и 0,55 являются постоянными коэффициентами.

Для пояснения вычисления объема по этой формуле возьмем в качестве примера следующий случай: по измерениям скирды оказалось: длина равна 15 метрам, ширина 6,2 метра и перекидка через скирду 17,4 метра, тогда объем скирды получится:

$$(0,56 \cdot 17,4 - 0,55 \cdot 6,2) \cdot 6,2 \cdot 15 = 590 \text{ куб. м.}$$

Те промеры скирды, которые требуется произвести по излагаемому способу, очень просты и для каждой скирды можно выполнить их в 10 минут, при этом, кроме измерительной ленты, не требуется никаких других приспособлений. С этой точки зрения указанным способом очень легко пользоваться. Что же касается вычислений, то они хотя и не сложны, но требуют порядочно времени, если приходится определять объем многих скирд.

Эти вычисления можно облегчить двумя способами: или составить соответствующие таблицы, или же можно построить график, при помощи которого можно находить нужный результат.

Используем второй прием и составим номограмму для вычисления площади поперечного сечения скирды по формуле:

$$(0,56p - 0,55b) \cdot b$$

Сначала составим номограмму для функции  $(0,56p - 0,55b) = t$ , что можно переписать так:  $0,56p = t + 0,55b$ . Для такого уравнения можно построить номограмму из трех параллельных шкал.

Из курса номографии известно, что уравнения трех параллельных шкал могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= k \cdot f_1(\alpha_1) + q \\ y_2 &= r \cdot f_2(\alpha_2) + s \\ y_3 &= \frac{kr}{k+r} \cdot f_3(\alpha_3) + \frac{ks + rq}{r+k}, \end{aligned}$$

где  $f_1(\alpha_1)$ ,  $f_2(\alpha_2)$  и  $f_3(\alpha_3)$  суть те функции, значения которых мы желаем нанести на параллельных шкалах номограммы. В нашем случае условимся на шкале  $y_1$  откладывать значения  $t$ , на шкале  $y_2$ —значения функции  $0,55b$  и на шкале  $y_3$ —значения функции  $0,56p$ , тогда будем иметь следующие уравнения шкал:

$$y_1 = kt + q \dots \dots \dots (1)$$

$$y_2 = r \cdot 0,55b + s \dots \dots \dots (2)$$

$$y_3 = \frac{kr}{k+r} \cdot 0,56p + \frac{ks + rq}{k+r} \dots \dots \dots (3)$$

Выберем для уравнения шкалы  $y_1$  модуль  $k$  и ориентировочный коэффициент  $q$  на следующих условиях: чтобы в нулевой точке шкалы  $y_1$  для  $t$  было значение, равное 3, а там, где на шкале  $y_1$  будет отложено 20 сантиметров, там пусть будет значение для  $t$ , равное 7. Из этих условий определяем значения для  $k$  и  $q$  из следующих двух уравнений:

$$0 = k \cdot 3 + q$$

$$20 = k \cdot 7 + q$$

откуда  $k = 5$  и  $q = -15$

Следовательно, в окончательном виде уравнение шкалы  $y_1$  будет представлено следующим образом:

$$y_1 = 5t - 15$$

Для шкалы  $y_2$  поставим условия, чтобы в нулевой точке шкалы  $y_2$  для переменной величины  $b$  было значение тоже нуль, а там, где на шкале  $y_2$  будет отложено 15,28 см<sup>1)</sup>, там пусть будет для величины  $b$  значение, равное 10, тогда из этих условий получаем:

$$0 = r \cdot 0,55 \cdot 0 + s$$

$$15,28 = r \cdot 0,55 \cdot 10 + s$$

откуда  $r = 2,778$  и  $s = 0$  и, следовательно, уравнение для шкалы  $y_2$  будет иметь вид:

$$y_2 = 2,778 \cdot 0,55 \cdot b = 1,528b$$

После того, как найдены значения для  $k, q, r, s$ , легко определить в окончательном виде и уравнение для шкалы  $y_3$ ; подставляя эти значения в уравнение (3), получим:

$$y_3 = \frac{5 \cdot 2,778}{5 + 2,778} \cdot 0,56p + \frac{5 \cdot 0 + 2,778(-15)}{5 + 2,778}$$

откуда  $y_3 = p - 5,3572$

Таким образом имеем для трех шкал уравнения:

$$y_1 = 5t - 15 \dots \dots \dots (4)$$

$$y_2 = 1,528b \dots \dots \dots (5)$$

$$y_3 = p - 5,357 \dots \dots \dots (6)$$

Возьмем теперь горизонтальную линию  $VL$  (смотрите номограмму № 1) величиной в 10 единиц (напр., сант.). По концам ее восстановим

1) Условие взято с расчетом, чтобы для шкалы  $y_3$  получилось более простое уравнение.

два перпендикуляра ВС и LM. Перпендикуляр ВС примем за шкалу  $y_1$ , тогда перпендикуляр LM будет шкалой  $y_2$ . На этих перпендикулярах и нанесем значения  $t$  и  $b$  согласно уравнений этих шкал.

Что касается шкалы  $y_3$ , то для нее прежде всего необходимо найти на линии BL точку, из которой будет восстановлен перпендикуляр для шкалы  $y_3$ . Если расстояние искомой точки от точки В обозначить через  $m$ , то искомая точка (как это известно из курса номографии) будет найдена по следующей формуле:

$$m = \frac{10}{1 + \frac{r}{k}} = \frac{10}{1 + \frac{2,778}{5}} = 6,43 \text{ см}$$

Отмеривши от В 6,43 единицы (см), получим точку Н, в которой восстанавливаем перпендикуляр и на нем наносим шкалу  $y_3$ . В нижеследующей таблице № 1 даны вычисленные значения для шкал  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  при разных значениях  $t$ ,  $b$  и  $p$  (табл. 1).

Табл. 1.

$t$	$y_1$ см	$b$ шири- на	$y_2$ см	$p$ пере- кидка	$y_3$ см	$p$ пере- кидка	$y_3$ см
1	-10	1	1,53	1	-4,36	13	7,64
2	-5	2	3,05	2	-3,36	14	8,64
3	0	3	4,58	3	-2,36	15	9,64
4	5	4	6,11	4	-1,36	16	10,64
5	10	5	7,64	5	-0,36	17	11,64
6	15	6	9,17	6	0,64	18	12,64
7	20	7	10,69	7	1,64	19	13,64
8	25	8	12,22	8	2,64	20	14,64
				9	3,64	21	15,64
				10	4,64	22	16,64
				11	5,64	23	17,64
				12	6,64	24	18,64

На номограмме № 1 по этим данным отмечены точки на шкалах  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Так, например, на расстоянии 5 единиц (см) от точки В по линии ВС будет на шкале  $y_1$  точка, соответствующая значению  $t = 4$ .

Точно также на линии НК на расстоянии (-4,36) следовательно, вниз от точки Н будет отметка, которая даст для  $p$  значение, равное 1.

По номограмме № 1 легко решается уравнение:  $(0,56p - 0,55b) = t$  при тех или иных значениях  $p$  и  $b$ . Так, например, для получения  $t$  при перекидке  $p = 17,4$  и ширине 6,2 накладываем линейку на точку, обозначенную цифрой 17,4 на шкале  $y_3$  и 6,2 на шкале  $y_2$  и тогда на шкале  $y_1$  получим значение для  $t = 6,32$ ; 6,33.

Непосредственное вычисление по формуле дает:

$$(0,56 \cdot 17,4 - 0,55 \cdot 6,2) = 6,334.$$

Как видно, определение по номограмме и вычисление по формуле дает практически одну и ту же величину.

Если известна величина  $(0,56p - 0,55b)$ , которую можно определить по только что построенной номограмме, то для уравнения  $(0,56p - 0,55b) \cdot b$  тоже можно построить номограмму из трех параллельных шкал. Эту номограмму можно построить отдельно, но можно воспользоваться теми же перпендикулярами BC и LM, которые использованы для шкал  $u_1$  и  $u_2$ . только надо условиться, что если деления для шкал  $u_1$  и  $u_2$  мы откладывали на линиях BC и LM слева, то для второй номограммы мы будем откладывать деления на тех же линиях BC и LM справа, и, кроме того, для удобства расположения номограммы начальные точки (нулевые) для новых шкал перенесем вниз и будем считать для шкалы  $Z_1$  в точке A и для шкалы  $Z_2$  в точке N.

Обозначим:

$$(0,56p - 0,55b) \cdot b = R$$

тогда можно написать:

$$\lg(0,56p - 0,55b) + \lg b = \lg R$$

Применяя для вывода уравнений шкал  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  тот же прием, что и раньше, имеем:

$$Z_1 = k \lg(0,56p - 0,55 \cdot b) + q$$

$$Z_2 = r \cdot \lg b + s$$

$$Z_3 = \frac{kr}{k+r} \lg R + \frac{ks + rq}{k+s}$$

Совершенно аналогично, как рассуждали и раньше, для нахождения уравнения для шкалы  $Z_1$  поставим условия: 1) чтобы в точке A шкалы  $Z_1$  значение для  $(0,56p - 0,55b)$  было равно 1 и 2) чтобы на расстоянии 30 единиц (см) от точки A значение для  $(0,56p - 0,55b)$  было равно 10, тогда имеем:

$$0 = k \cdot \lg 1 + q$$

$$30 = k \cdot \lg 10 + q$$

откуда  $k = 30$  и  $q = 0$ , следовательно, уравнение для шкалы  $Z_1$  будет

$$Z_1 = 30 \lg(0,56p - 0,55b) \dots \dots \dots (7)$$

Для шкалы  $Z_2$  возьмем уравнение, удовлетворяющее тем же условиям, что и для шкалы  $Z_1$ , следовательно, имеем:

$$Z_2 = 30 \lg b \dots \dots \dots (8)$$

и значит  $r = 30$  и  $s = 0$

тогда для шкалы  $Z_3$  получим:

$$Z_3 = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} \lg R = 15 \lg R \dots \dots \dots (9)$$

Остается еще найти на линии AN точку, где следует восстановить перпендикуляр для шкалы  $Z_3$ . Если эту точку обозначим через D, то  $AD = \frac{10}{1 + \frac{30}{30}} = 5$  см. На основании уравнений для шкал

$Z_1, Z_2, Z_3$  в нижеследующей таблице № 2 даны вычисленные отметки для этих шкал при разных значениях для  $(0,56p - 0,55b)$ ,  $b$  и  $R$ . Для примера найдем, на каком расстоянии от точки А надо отметить на шкале  $Z_1$  точку, в которой будет для  $(0,56p - 0,55b)$  значение, равное 4,7; для этого в уравнение (7) вместо  $(0,56p - 0,55b)$  вставим 4,7 и получим:

$$Z_1 = 30 \lg 4,7 = 20,16 \text{ см}$$

следовательно, на расстоянии 20,1 сантиметра от точки А будет отметка для значения  $(0,56p - 0,55b) = 4,7$

Табл. 2.

Отметки для шкал  $Z_1$  и  $Z_3$

$0,56p - 0,55b$	$Z_1$ см	$0,56p - 0,55b$	$Z_1$ см	$0,56p - 0,55b$	$Z_1$ см	R	$Z_3$ см	R	$Z_3$
1	0	4,1	18,38	7,1	25,54	1	0	31	22,37
1,1	1,24	4,2	18,70	7,2	25,72	2	4,51	32	22,56
1,2	2,37	4,3	19,00	7,3	25,90	3	7,16	33	22,77
1,3	3,42	4,4	19,30	7,4	26,08	4	9,03	34	22,97
1,4	4,38	4,5	19,60	7,5	26,25	5	10,48	35	23,16
1,5	5,28	4,6	19,88	7,6	26,42	6	11,67	36	23,34
1,6	6,12	4,7	20,16	7,7	26,59	7	12,67	37	23,52
1,7	6,91	4,8	20,44	7,8	26,76	8	13,55	38	23,70
1,8	7,66	4,9	20,71	7,9	26,93	9	14,31	39	23,87
1,9	8,36	5,0	20,97	8,0	27,09	10	15,00	40	24,03
2,0	9,03	5,1	21,23	8,1	27,25	11	15,61	41	24,19
2,1	9,67	5,2	21,48	8,2	27,41	12	16,19	42	24,35
2,2	10,27	5,3	21,73	8,3	27,57	13	16,71	43	24,50
2,3	10,85	5,4	21,97	8,4	27,73	14	17,19	44	24,65
2,4	11,41	5,5	22,21	8,5	27,88	15	17,64	45	24,80
2,5	11,94	5,6	22,45	8,6	28,04	16	18,08	46	24,94
2,6	12,45	5,7	22,68	8,7	28,19	17	18,45	47	25,08
2,7	12,94	5,8	22,90	8,8	28,33	18	18,82	48	25,22
2,8	13,41	5,9	23,12	8,9	28,48	19	19,19	49	25,35
2,9	13,87	6,0	23,34	9,0	28,63	20	19,51	50	25,48
3,0	14,31	6,1	23,56	9,1	28,77	21	19,83	51	25,61
3,1	14,74	6,2	23,77	9,2	28,91	22	20,13	52	25,74
3,2	15,15	6,3	23,98	9,3	29,05	23	20,43	53	25,86
3,3	15,56	6,4	24,19	9,4	29,19	24	20,70	54	25,98
3,4	15,94	6,5	24,39	9,5	29,33	25	20,97	55	26,10
3,5	16,32	6,6	24,59	9,6	29,47	26	21,21	56	26,22
3,6	16,69	6,7	24,78	9,7	29,60	27	21,47	57	26,34
3,7	17,05	6,8	24,98	9,8	29,74	28	21,71	58	26,45
3,8	17,39	6,9	25,17	9,9	29,87	29	21,93	59	26,56
3,9	17,73	7,0	25,35	10,0	30,00	30	22,16	60	26,67
4,0	18,06								

Так как для шкалы  $Z_2$  уравнение сходно с уравнением для шкалы  $Z_1$ , то поэтому отметки для шкалы  $Z_2$  будут такие же, как и для шкалы  $Z_1$ . Данные в таблице № 2 для шкал  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  нанесены на эти шкалы, и мы имеем теперь на том же чертеже полную номограмму для определения площади поперечного сечения через скирду.

Для примера определим по вычерченной номограмме площадь поперечного сечения для скирды, перекидка через которую равна  $p = 17,4$  метра и ширина  $b = 6,2$ .

Это определение ведется в два приема. Сначала пользуемся шкалами, обозначенными буквами  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . На шкале  $u_3$  отыскиваем точку, соответствующую перекидке 17,4 метра, а на шкале  $u_2$  находим точку, соответствующую ширине скирды, равной 6,2 метра. Через эти две точки проводим линию ST. Эта линия, как видно из чертежа, пересекает шкалу  $u_1$  в точке, находящейся между отметками 6,3—6,4, при этом ближе к отметке 6,3.

Далее пользуемся шкалами обозначенными на той же номограмме № 1 буквами  $Z_1$ ,  $Z_2$ , и  $Z_3$ . На шкале  $Z_1$  находим точку, соответствующую по своему значению той, которая получилась на шкале  $u_1$ , т. е. точку, находящуюся между отметками 6,3 и 6,4, при чем ближе к 6,3, а на шкале  $Z_2$  находим точку, соответствующую ширине скирды, т. е. обозначенную цифрой 6,2. Через эти две точки на шкалах  $Z_1$  и  $Z_2$  проводим линию VU, которая и покажет своим пересечением со шкалой  $Z_3$  площадь поперечного сечения через нашу скирду, равную в рассматриваемом случае, как видно из номограммы, 39,4—39,5 квадратных метра.

Если для сопоставления вычислить эту площадь по формуле, для которой составлена номограмма, получим:

$$(0,56 \cdot 17,4 - 0,55 \cdot 6,2) \cdot 6,2 = 39,3 \text{ кв. метра.}$$

Как видно, расхождение ничтожное, и площадь, вычисленная по формуле и определенная по номограмме, получается практически одна и та же. Остается полученную площадь умножить на длину скирды и тогда будем иметь объем скирды в кубических метрах.

Например, если длина скирды равна 15 метрам, тогда объем ее будет равен:

$$39,4 \cdot 15 = 591 \text{ куб метр.}$$

В формуле Hosteman'a  $(0,56p - 0,55b) \cdot b \cdot L$  постоянные коэффициенты 0,56 и 0,55 очень близки друг к другу, а поэтому напрашивается мысль: вместо 0,56 и 0,55 взять средний коэффициент 0,555 как для перекидки, так и для ширины скирды, тогда получится формула:

$$0,555(p - b) \cdot b \cdot L = \text{об'ему скирды.}$$

Вычисление объема скирды по этой формуле поведет к несколько преуменьшенным результатам. В общем виде эта разница выразится следующим образом:

$$(0,56p - 0,55b) \cdot b \cdot L - 0,555(p - b) \cdot b \cdot L = 0,005(p + b) \cdot b \cdot L$$

Если, например, взять скирду, у которой перекидка равна 18 метрам, ширина 6 метрам и длина 15 метрам, то мы получим объем скирды:

- 1) по формуле Hosteman'a:  $(0,56 \cdot 18 - 0,55 \cdot 6) \cdot 6 \cdot 15 = 610,2$ ;
- 2) по измененной формуле:  $0,555(18 - 6) \cdot 6 \cdot 15 = 599,4$  куб. м.



Как видно, получилась разница:  $610,2 - 599,4 = 10,8$  куб. м, что составляет по отношению к 610,2 в процентах 1,77%.

Хотя измененная формула и дает немного преуменьшенные результаты, зато для нее можно построить очень простую номограмму, при помощи которой можно получать сразу конечные результаты, т. е. не только площадь поперечного сечения скирды, но и объем скирды в кубических метрах.

Номограмма эта (см. № 1<sup>а</sup>) имеет три шкалы: ( $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ ), по которым решается уравнение  $0,555(p-b) \cdot b = Q =$  площади поперечного сечения скирды, и три шкалы  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , по которым решается окончательно  $Q \cdot L = R =$  объему скирды.

Тем же самым методом, который изложен по отношению построения номограммы № 1, найдены следующие уравнения для шкал:

$$y_1 = 37 \lg a^1) - 18$$

$$y_2 = 37 \lg b - 11$$

$$y_3 = 18,5 \lg Q - 9,77$$

и для шкал  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ :

$$Z_1 = 32 \lg Q - 32$$

$$Z_2 = 32 \lg L - 16$$

$$Z_3 = 16 \lg R - 24$$

По этим уравнениям и построены шкалы номограммы № 1<sup>а</sup>.

Следующий пример разъяснит, как по номограмме № 1<sup>а</sup> находить объем скирды. По измерениям скирды получены были следующие промеры: перекидка 17,4 метра, ширина 6,2 метра и длина 15,6 метра.

Сначала пользуемся шкалами  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ , и находим при помощи их площадь поперечного сечения скирды, для этого на шкале  $y_1$  отыскиваем „а“, т. е. разность между перекидкой и шириной, т. е.  $17,4 - 6,2 = 11,2$ , а на шкале  $y_2$  находим точку, обозначающую ширину скирды, т. е. 6,2. Точку 11,2 шкалы  $y_1$  соединяем с точкой 6,2 шкалы  $y_2$  и тогда на пересечении линии MN со шкалой  $y_3$  находим отметку 38,5, обозначающую площадь поперечного сечения скирды в кв. метрах.

Далее пользуемся шкалами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ . На шкале  $Z_1$  находим точку, помеченную цифрой 38,5, а на шкале  $Z_2$  точку, обозначенную цифрой 15,6 (длина скирды). Соединяем эти две точки линией ST или просто натянутой ниткой и получаем на пересечении линии ST со шкалой  $Z_3$  объем скирды, выраженный в кубических метрах.

Можно поступить еще и таким образом: по номограмме № 1 определить площадь поперечного сечения скирды, а дальше, пользуясь только шкалами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  номограммы № 1<sup>а</sup>, определить объем скирды.

В практике сеного хозяйства сено складывается не только в скирды, т. е. удлиненные кучи, но нередко сено укладывают также в стоги, т. е. кучи, соответствующие по форме половине эллипсоида вращения. Из аналитической геометрии известно, что объем эллипсоида вращения  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ , следовательно, приравнивая стог сена к половине эллипсоида, следует считать его объем равным  $\frac{2}{3}\pi ab^2$ , или  $\frac{2}{3}\pi ab^2$ ;  $\pi ab$  есть площадь эллипса, у которого полуоси а и b,

1) Примечание: „а“ обозначает  $(p-b)$

В стоге это соответствует удвоенной площади, которая получится в вертикальном сечении через стог, но эту площадь, аналогичную площади сечения через скирду, можно определить по формуле:

$$(0,56p - 0,55B).$$

где  $p$ —перекидка через вершину стога, а  $B$ —ширина стога, следовательно:

$$\pi ab = 2(0,56p - 0,55B) \cdot B$$

Так как ширина стога соответствует двум малым полуосям эллипса, то  $B = 2b$  и  $b = \frac{B}{2}$ , а весь об'ем стога получится по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi ab \cdot b &= \frac{2}{3} 2 [0,56p - 0,55 \cdot B] \cdot B \cdot \frac{B}{2} = \\ &= \frac{2}{3} (0,56p - 0,55B) \cdot B \cdot B \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что ширина стога есть диаметр его круглого основания, легко получить эту ширину путем деления обхвата (окружности) стога на 3,14. Если обхват внизу, в самой широкой его части, обозначим через  $P$ , тогда имеем  $B = \frac{P}{3,14}$  и следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (0,56p - 0,55B) B \cdot B &= \frac{2}{3} (0,56p - 0,55 \frac{P}{3,14}) \frac{P}{3,14} \cdot \frac{P}{3,14} = \\ &= (0,03787p - 0,01185P) P^2 \dots \dots (11) \end{aligned}$$

По этой формуле и можно определить об'ем стога. В этой (11) формуле  $p$  означает перекидку через вершину стога, а  $P$ —обхват вокруг стога.

Пользуясь теми же приемами, при помощи которых составлена номограмма для определения площади поперечного сечения через скирду, мною составлена номограмма и для уравнения (11), по которой можно легко определить об'ем стога, зная его обхват  $P$  и перекидку  $p$ . Для выражения  $(0,03787p - 0,01185P) = Q$  имеем следующие уравнения шкал  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= 25Q \\ y_2 &= P \\ y_3 &= 0,7304p \\ k &= 25, r = 84,39 \end{aligned}$$

$$l = 10 \text{ см}; m = \frac{10}{1 + (84,39 : 25)} = \frac{10}{4,375} = 2,29 \text{ сант.}$$

На нижеследующей таблице № 3 даны отметки для шкал  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  номограммы № 2.

Отметки для шкал  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  номограммы № 2

Q	$y_1$	P	$y_2$	P	$y_3$	P	$y_2$	I	$y_3$
0,1	2,5	2	2	1	0,73	14	14	13	9,50
0,2	5	3	3	2	1,46	15	15	14	10,22
0,3	7,5	4	4	3	2,19	16	16	15	10,96
0,4	10	5	5	4	2,92	17	17	16	11,69
0,5	12,5	6	6	5	3,65	18	18	17	12,42
0,6	15	7	7	6	4,38	19	19	18	13,15
0,7	17,5	8	8	7	5,11	20	20	19	13,88
0,8	20	9	9	8	5,84	21	21	20	14,60
0,9	22,5	10	10	9	6,57				
		11	11	10	7,30				
		12	12	11	8,03				
		13	13	12	8,76				

По номограмме № 2 (шкалы  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ ) можно, следовательно, находить значения для выражения  $(0,03787P - 0,01185P) = Q$ .

Дальше можно составить полную номограмму для выражения:

$$Q \cdot P^2 = R \dots \dots \dots (12)$$

имеем:

$$\lg Q + 2 \lg P = \lg R$$

Уравнения шкал для решения (12) будут:

$$Z_1 = 22 \lg Q + 20$$

$$Z_2 = 17 \cdot 2 \lg P - 22 = 34 \cdot \lg P - 22$$

$$Z_3 = \frac{22 \cdot 17}{39} \lg R + \frac{22(-22) + 17 \cdot 20}{39} = 9,59 \lg R - 3,6924.$$

$$k = 22, \quad q = 20, \quad r = 17, \quad s = -22$$

На нижеследующей таблице № 4 даны вычисленные отметки для шкал  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ .

Табл. 4.

Q	Z <sub>1</sub> CM	Q	Z <sub>1</sub> CM	P	Z <sub>2</sub>	P	Z <sub>2</sub> CM	R	Z <sub>3</sub>
0,02	-17,38	0,56	14,46	4	- 1,53	14,2	17,18	10	5,9
0,05	- 8,6	0,57	14,63	4,2	- 0,81	14,4	17,38	20	8,78
0,1	- 2	0,58	14,79	4,4	- 0,12	14,6	17,59	30	10,47
0,11	- 1,09	0,59	14,96	4,6	0,53	14,8	17,79	40	11,67
0,12	- 0,26	0,60	15,12	4,8	1,16	15	17,99	50	12,60
0,13	0,51	0,61	15,28	5	1,76	15,2	18,18	60	13,36
0,14	1,21	0,62	15,43	5,2	2,34	15,4	18,37	70	14
0,15	1,87	0,63	15,58	5,4	2,90	15,6	18,57	80	14,56
0,16	2,49	0,64	15,73	5,6	3,44	15,8	18,75	90	15,05
0,17	3,07	0,65	15,88	5,8	3,96	16	18,94	100	15,49
0,18	3,61	0,66	16,03	6	4,46	16,2	19,12	110	15,89
0,19	4,13	0,67	16,17	6,2	4,94	16,4	19,30	120	16,25
0,20	4,63	0,68	16,31	6,4	5,41	16,6	19,48	130	16,58
0,21	5,09	0,69	16,45	6,6	5,86	16,8	19,66	140	16,89
0,22	5,53	0,70	16,59	6,8	6,30	17	19,83	150	17,18
0,23	5,96	0,71	16,73	7	6,73	17,2	20	160	17,45
0,24	6,36	0,72	16,86	7,2	7,15	17,4	20,18	170	17,70
0,25	6,75	0,73	16,93	7,4	7,55	17,6	20,35	180	17,93
0,26	7,13	0,73	16,93	7,6	7,95	17,8	20,51	190	18,16
0,27	7,49	0,74	17,12	7,8	8,33	18	20,68	200	18,38
0,28	7,84	0,75	17,25	8	8,70	18,2	20,84	210	18,58
0,29	8,17	0,76	17,38	8,2	9,07	18,4	21	220	18,77
0,30	8,50	0,77	17,50	8,4	9,42	18,6	21,16	230	18,95
0,31	8,81	0,78	17,62	8,6	9,77	18,8	21,32	240	19,14
0,32	9,11	0,79	17,75	8,8	10,11	19	21,48	250	19,31
0,33	9,41	0,80	17,87	9,0	10,44	19,2	21,63	260	19,47
0,34	9,69			9,2	10,77	19,4	21,78	270	19,63
0,35	9,97			9,4	11,09	19,6	21,94	280	19,77
0,36	10,24			9,6	11,40	19,8	22,08	290	19,92
0,37	10,50			9,8	11,70	20	22,23	300	20,06
0,38	10,75			10	12				
0,39	11,0			10,2	12,29				
0,40	11,25			10,4	12,58				
0,41	11,48			10,6	12,86				
0,42	11,71			10,8	13,14				
0,43	11,34			11	13,41				
0,44	12,15			11,2	13,67				
0,45	12,37			11,4	13,93				
0,46	12,58			11,6	14,19				
0,47	12,79			11,8	14,44				
0,48	12,99			12	14,69				
0,49	13,18			12,2	14,94				
0,50	13,38			12,4	15,18				
0,51	13,57			12,6	15,41				
0,52	13,75			12,8	15,64				
0,53	13,93			13	15,87				
0,54	14,11			13,2	16,10				
0,55	14,29			13,4	16,32				
				13,6	16,54				
				13,8	16,75				
				14	16,97				

По отметкам таблицы 4 нанесены деления на шкалах номограммы № 2.

Для разъяснения, как определить объем стога по этой номограмме № 2, возьмем такой пример: по обмерам оказалось, что обхват стога равен 16 метрам и перекидка через стог была тоже 16 метров, тогда определение объема стога по номограмме № 2 ведется следующим образом.

Сначала пользуемся шкалами, обозначенными буквами  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . На шкале  $u_3$  отыскиваем точку, обозначенную цифрой 16 (перекидка через стог), а на шкале  $u_2$  находим точку, тоже обозначенную цифрой 16 (потому что обхват стога в нашем случае тоже 16 метр.). Накладываем на эти две точки линейку и, проведя линию SQ, найдем на шкале  $u_1$  точку, которой будет соответствовать значение 0,416—0,417.

Далее пользуемся шкалами, обозначенными буквами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ . На шкале  $Z_1$  находим точку, которая соответствует значению 0,416—0,417, найденному по шкале  $u_1$ , а на шкале  $Z_2$  отыскиваем точку, обозначенную цифрой 16 (обхват стога), проведем через эти две точки линию V. W, которая и покажет своим пересечением со шкалой  $Z_3$  объем стога, равный в данном случае 105—106 куб. метрам.

Если для сопоставления вычислим этот объем по формуле (11), мы получим:

$$(0,03787 \cdot 16 - 0,01185 \cdot 16) \cdot 16 = 106,5 \text{ куб. метров.}$$

Как видно, получился почти такой же самый объем. Расхождение ничтожное, и практически объем стога, определенный по номограмме и по формуле (11) один и тот же.

Когда известен объем скирды или стога, можно определить и вес сена. Для этого надо знать, сколько килограммов весит один кубометр сена.

Исследования, которые проводились по этому вопросу, показали, что вес одного кубометра сена, уложенного в скирду, в разных случаях оказался, как и следовало ожидать, не одинаковым. Он зависит от ряда факторов:

1) от размеров скирды и в особенности от высоты скирды: чем выше скирда, тем плотнее слеживается сено, и вес одного кубометра будет больше;

2) от возраста скирды, т. е. от времени, в течение которого скирда лежит после ее укладки;

3) от способов укладки сена в скирду и главным образом от степени утаптывания сена при укладке его;

4) от атмосферных влияний и от сухости сена: чем суше сено, тем оно легче;

5) от ботанического состава трав, входящих в состав сена;

6) от степени оседания скирды и ряда других факторов.

Опыты показали, что уменьшение объема скирды с течением времени идет, главным образом, за счет оседания ее и уменьшения в высоту. Изменение размеров в ширину и длину бывают менее значительны. Наиболее интенсивное сокращение объема скирды идет в первые 30 дней после скирдования, дальше сокращение замедляется, но продолжает идти довольно долго, даже месяцев до восьми.

В одном из опытов по наблюдению за сокращением объема скирд были измерены два раза 10 скирд сена, причем второе измерение было произведено после первого в среднем через 150 дней, и ока-

залось, что объем скирд за эти 150 дней сократился в среднем на 29%. В отдельности же сокращение объема скирд было не одинаковым: некоторые скирды уменьшились в объеме на 17—19%, а были и такие, объем которых сократился на 35—45%.

По недавним измерениям, проведенным Н. В. Найденовым и П. Н. Протасевичем, четыре скирды сена дали следующие изменения в объеме за период с 9 августа по 3 ноября, т. е. за 87 дней (табл.5)

Табл. 5.

Изменение объема скирд сена в зависимости от возраста скирды

	9 августа 35 г.		3 ноября 35 г.	
	куб. метр.	%	куб. метр.	%
Скирда № 1 . . .	203,7	100	168,4	82,7
" № 2 . . .	229,1	100	186,8	81,5
" № 3 . . .	242,7	100	225,3	93,0
" № 4 . . .	229,0	100	199	87,0

Как видно из таблицы, за 87 дневный период лежания сена в скирдах объем их сократился от 7 до 18,5%.

В связи с тем, что сено в скирдах сседается не одинаково, в зависимости от многочисленных факторов, и вес одного кубометра сена в разных случаях принимается не одинаковым.

В заграничной практике (американской) чаще всего принимают, что вес кубометра сена, пролежавшего около месяца после укладки в скирду, весит 63 килограмма; пролежавшее 5—7 месяцев после скирдования—76 килограммов, а если сено лежало в скирде год и более, то вес одного кубометра принимается за 94 килограмма.

По небольшим обследованиям, которые были произведены сотрудниками кафедры кормления Белорусского с.-х. института, Н. В. Найденовым и П. Н. Протасевичем, оказалось, что один кубометр тимофеечного сена, сложенного в сарае и пролежавшего после уборки около 7 месяцев, весил вверху 65,8 килограмма, взятого из середины—73,4 килограмма, а внизу—76,7 килограмма. В среднем же вес одного кубометра сена оказался равным 73 килограммам. В другом сарае вес кубометра сена оказался равным 84,5 килограмм. Сено вико-овсяной смеси, пролежавшее в поле около 7 месяцев, дало вес одного кубометра 85 килограммов в одной скирде и в другой 80 килограммов.

Из приведенных данных видно, что для сена, уложенного около месяца назад принимают вес одного кубометра в 65—70 килограммов, для сена, пролежавшего 5—7 месяцев в 75—85 килограммов, а для того, которое лежало около года, 95—100 килограммов.



## РЕЗЮМЕ

Для определения объема скирд и стогов составлены три номограммы.

По номограмме № 1 определяется площадь поперечного сечения через скирду. Для этого необходимо измерить ширину скирды „b“ и перекидку через скирду „p“. Определение ведется так:

1) На шкале  $u_3$  отыскивается точка, соответствующая по значению перекидке „p“; на шкале  $u_2$  находится точка, соответствующая ширине скирды. Через эти две точки проводится линия, которая на пересечении со шкалой  $u_1$  дает отметку.

2) На шкале  $Z_1$  отыскивается точка, соответствующая по значению той, которая найдена на шкале  $u_1$ ; на шкале  $Z_2$  находится точка, соответствующая ширине скирды. Через эти две точки шкал  $Z_1$  и  $Z_2$  проводится линия, которая на пересечении со шкалой  $Z_3$  укажет площадь поперечного сечения через скирду.

По номограмме № 1<sup>a</sup> определяется объем скирды. Необходимы промеры: ширины скирды „b“, перекидки „p“ и длины L. Определение ведется так:

1) На шкале  $u_1$  отыскиваем точку, соответствующую по значению разности между перекидкой и шириной стога, т. е.  $(p-b)$ ; на шкале  $u_2$  находим точку, обозначающую ширину скирды „b“. Через эти две точки проводится прямая линия, которая на пересечении со шкалой  $u_3$  даст соответствующую отметку.

2) На шкале  $Z_1$  находим точку, соответствующую по значению той, которая была найдена на шкале  $u_3$ ; на шкале  $Z_2$  находим точку, соответствующую длине скирды. Через эти две точки шкал  $Z_1$  и  $Z_2$  проводим прямую линию, которая на пересечении со шкалой  $Z_3$  покажет объем скирды.

По номограмме № 2 определяется объем стогов, т. е. круглых полуэллипсоидообразных куч сена. Необходимы промеры: обхвата стога P, перекидки через стог „p“. Определение ведется так:

1) На шкале  $u_3$  отыскиваем точку, соответствующую по значению перекидке через стога „p“. На шкале  $u_2$  находим точку соответствующую по значению обхвату стога. Через эти две точки проводим линию, которая даст на пересечении со шкалой  $u_1$  соответствующую отметку.

2) На шкале  $Z_1$  отыскиваем точку, соответствующую по значению той, которая получилась на шкале  $u_1$ ; на шкале  $Z_2$  находим точку, соответствующую по значению обхвату стога. Через эти две точки на шкалах  $Z_1$  и  $Z_2$  проводим прямую линию, которая на пересечении со шкалой  $Z_3$  покажет объем стога.

## THE APPLICATION OF GRAPHIC METHOD TO THE DETERMINING OF THE VOLUME OF HAY-STACKS

### Summary

There are made three nomograms for the determining of the volume of hay-stacks.

The area of the cross section is determined by the nomogram № 1. It is necessary to measure the width of a hay-stack „b“ and the distance „p“ from the ground on one side over the stack to the ground on the opposite side. The determining is carried on so:

1) A point, equal to the value of the over „p“, is found on the scale  $y_3$ ; on the scale  $y_2$  a point, equal to the value of the width of a hay-stack, is found. Through these two points a line is drawn which gives a point on the intersection with the scale  $y_1$ .

2) On the scale  $Z_1$  a point, equal to the value of that one which has been found on the scale  $y_1$ , is found; on the scale  $Z_2$  a point, equal to the value of the width of a hay-stack, is found. Through these two points of the scales  $Z_1$  and  $Z_2$  a line is drawn which will indicate on the intersection with the scale  $Z_3$  the area of the cross-section through the hay-stack

The volume of a hay-stack is determined by the nomogram № 1<sup>a</sup>. It is necessary to measure: the width of a hay-stack „b“, the over „p“ and the length L. The determining is carried on so:

1) On the scale  $y_1$  we find a point, equal to the value of difference between the over and the width of the hay-stack, i. e.  $(p-b)$ ; on the scale  $y_2$  we find a point which indicates the width of a hay-stack „b“. Through these two points we draw a line which gives a suitable point on the intersection with the scale  $y_3$ .

2) On the scale  $Z_1$  we find a point with equal value of that one which has been found on the scale  $y_3$ ; on the  $Z_2$  we find a point, equal to the length of a hay-stack. Through these two points of the scales  $Z_1$  and  $Z_2$  we draw a straight line which indicates the volume of a hay stack on the intersection with the scale  $Z_3$ .

The volume of round hay-stacks is determined by the nomogram № 2. It is necessary to measure: the circumference P and the over „p“. The determining is carried on so:

1) On the scale  $y_3$  we find a point, equal to the value of the over „p“. On the scale  $y_2$  we find a point, equal to the value of the circumference of a hay-stack. Through these two points we draw a line which gives a suitable point on the intersection with the scale  $y_1$ .

2) On the scale  $Z_1$  we find a point, equal to the value of that one which has been found on the scale  $y_1$ ; on the scale  $Z_2$  we find a point, equal to the value of the circumference of a hay-stack. Through these two points on the scales  $Z_1$  and  $Z_2$  we draw a straight line which indicates the volume of a hay stack on the intersection with the scale  $Z_3$ .

Р. Т. ВИЛЬДФЛЮШ и И. Т. ИВАНОВ

## УВЕЛИЧЕНИЕ ОБЪЕМА ЖИДКОСТЕЙ ПРИ РАСТВОРЕНИИ ТВЕРДЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

При внесении в жидкость, объем которой  $V_1$ , твердых веществ могут быть три случая:

Первый случай—вещество практически не растворимо в жидкости. Тогда общий объем  $V_2$  будет:

$$V_2 = V_1 + \Delta V,$$

где  $\Delta V$ —объем вносимого вещества, равный  $\frac{P}{d}$  (весу, деленному на удельный вес), или

$$V_2 = V_1 + \frac{P}{d}.$$

Ясно, что при увеличении  $P$  будет увеличиваться  $V$ , а  $V_2$  будет зависеть от веса вносимого вещества, так как  $V_1 = \text{Const.}$  и  $d = \text{Const.}$  Это дает возможность определять удельный вес веществ, ибо

$$d = \frac{P}{\Delta V}.$$

Второй случай—вещество полностью растворяется в жидкости. Здесь увеличение объема при растворении выражается другой зависимостью, как было установлено А. А. Курочкиным<sup>1)</sup>,

$$\Delta V = \mu \frac{P}{d} \text{ (где } \mu = d \cdot \text{tg} \alpha \text{)}$$

и как бы связано с увеличением объема самой жидкости.

Он ввел понятие об угле кривой увеличения объема  $\alpha^\circ$ —это угол, образующийся между касательной к данной кривой в точке начала координат и осью  $X$ .

Им же было установлено, что увеличение объема при начальном объеме жидкости  $V = \text{Const.}$  прямо пропорционально произведению увеличения  $\text{tg}$  угла кривой  $\Delta V$  или  $\Delta V$  равно весу растворяемого вещества, деленному на удельный вес и помноженному на коэффи-

<sup>1)</sup> Журнал Русского Физико-Химического Общества, том LXI, выпуск 7, 1929 год.

коэффициент  $\mu$ , который, в свою очередь, равен удельному весу растворимого твердого вещества, умноженному на  $\operatorname{tg}$  угла кривой увеличения. Следует иметь в виду, что указанная зависимость  $\Delta V$  от  $\operatorname{tg}\alpha$  им была установлена при исследовании преимущественно электролитов.

Третий случай имеет место при частичном растворении вещества в жидкости

При этом растворенная часть вещества подчиняется уравнению<sup>1)</sup>:

$$\Delta V_1 = \mu \cdot \frac{P}{d},$$

а нерастворенная:

$$\Delta V_2 = \frac{P}{d}.$$

Цель настоящей работы—выяснить, подчиняется ли растворенная часть органических соединений уравнению:

$$\Delta V_1 = \mu \cdot \frac{P}{d},$$

учитывая их другой электрохимический характер, с одной стороны, а с другой стороны—установить увеличение объема при смесях твердых органических соединений и характер  $\Delta V$  для одних и тех же соединений в различных растворителях.

#### Методика количественного изучения функций $\Delta V = f(P)$

В нашей работе мы пользовались мерными колбочками, которые были специально приготовлены в стеклодувной мастерской при кафедре физики Белорусского сельскохозяйственного института из калиброванных бюреток, при чем нулевые точки, соответствующие емкости колбочек в 50 куб. см при температуре 17—18°C, были установлены на деление 25,0.

Таким образом, шейки колбочек представляли собой калиброванные концы бюреток с делениями, дающими возможность производить отсчеты с точностью 0,05 куб. см (см. фотографию). Уменьшая объем колбочек с 500 куб. см, с которыми работал А. А. Курочкин, до 50 куб. см мы тем самым стремились достичь большей точности (объем растворителя в десять раз меньше), но с другой стороны мы были ограничены выбором органических соединений, так как объем растворителя был меньшим, вследствие чего вынуждены были остановиться на соединениях, хорошо растворимых.

Для исследования были взяты представители различных классов органических соединений (спирты, фенолы, органические кислоты, сахара и некоторые другие).

При работе мы пользовались химически чистыми веществами (фирма Кольбаум). Навески веществ брались на аналитических весах. Опыты производились при температуре 17—18°C.

Результаты опытов сведены в таблице 1 и кривых (Рис. 1—12).

<sup>1)</sup> Данный случай можно рассматривать, как частный случай второго с малым пределом насыщения.

$V = 50 \text{ см}^3$  $t = 17-18^\circ\text{C}$ 

Табл. 1.

Растворитель—вода

Вещество	Вещество			Вещество	Вещество		
	Навеска в гр.	Увеличен. объема жидкости в $\text{см}^3$	Среднее увеличение на 1 гр. вещества		Навеска в гр.	Увеличение объема жидкости в $\text{см}^3$	Среднее увеличение на 1 гр. вещества
Пирогаллол $\text{C}_6\text{H}_3(\text{OH})^3$	0,5	0,3	0,69	Фруктоза $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$	1	0,6	6,0
	1,0	0,6			2	1,2	
	2,0	1,35			4	2,4	
	4,0	2,75			8	4,8	
Маннит d— $\text{C}_6\text{H}_8(\text{OH})^6$	1	0,6	0,62	Сахароза $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$	1	0,6	0,61
	2	1,2			2	1,2	
	3	1,85			4	2,4	
	4	2,5			8	4,9	
Щавелевая кислота $(\text{COOH})^2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1	0,6	0,65		16	9,8	
	2	1,3					
Малоновая кислота $\text{CH}_2(\text{COOH})^2$	1	0,6	0,61	Лактоза $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11} + \text{H}_2\text{O}$	1	0,6	0,60
	2	1,3			2	1,2	
	4	2,5			4	2,4	
	6	3,7					
Винная кислота d— $(\text{CHOH})_2(\text{COOH})_2$	1	0,5	0,56	Гликоколь $\text{CH}_2\text{NH}_2\text{COOH}$	1	0,55	0,59
	2	1,0			2	1,10	
	4	2,2			4	2,3	
	8	4,45			8	4,75	
	10	5,6					
Лимонная кислота $\text{C}_3\text{H}_4(\text{OH})(\text{COOH})^3$ $+ \text{H}_2\text{O}$	1	0,65	0,63	Ацетамид $\text{CH}_3\text{CONH}_2$	1	0,9	0,92
	2	1,3			2	1,8	
	4	2,6			4	3,7	
	8	3,2			8	7,4	
	16	10,1			16	14,8	
Глюкоза б/в $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$	1	0,6	0,62	Гексаметилен-тетра- амин $(\text{CH}_2)^6\text{N}_4$	1	0,8	0,78
	2	1,2			2	1,6	
	4	2,5			4	3,2	
	8	5,0			8	6,35	
	10	6,2			16	12,66	

Данные таблицы 1 и кривые, построенные на этих данных (по оси X отложены навески веществ в граммах, а по оси Y—увеличение объема при растворении в куб. см), показывают, что угол  $\alpha$  есть строго определенная величина для каждого вещества, причем увеличение

Весьма приближительное значение эта Const. имеет только для веществ, растворенных по составу и величине молекулярного веса, так например, в нашем случае для сахарозы и лактозы с одной стороны, глюкозы и фруктозы — с другой.

При приближении к насыщению увеличение  $\Delta V$  в куб. см на 1 грам вносимого вещества составляет для всех случаев некоторую большую величину, по сравнению с  $\Delta V$ , для малых и средних концентраций вещества в данном растворе. Это явление, очевидно, указывает на то, что закономерность увеличения  $\Delta V$  при приближении к насыщению будет иной.

Вещество	Молекулярный вес	Плотность по Спем. на 1 гр. вещества	$\Delta V$ увеличение	$\alpha$	$\alpha \times M \times d$
Пироталлол . . . . .	126,05	1,463	0,69	35°	6419,0
Маннит d . . . . .	182,11	1,521	0,62	31°	10107,6
Шавелевая кислота . . . . .	126,05	1,653	0,65	31°	6459,1
Малоновая . . . . .	104,03	—	0,61	—	—
Винная . . . . .	150,05	1,760	0,56	28,5°	7526,5
Лимонная . . . . .	210,08	1,542	0,63	32°	10366,1
Глюкоза . . . . .	180,10	1,544	0,62	32°	8898,3
Фруктоза . . . . .	180,10	1,669	0,60	31°	8904,2
Сахароза . . . . .	342,18	1,588	0,61	31°	16844,8
Лактоза . . . . .	342,18	1,525	0,60	31°	17031,6
Галактоза . . . . .	175,05	1,60	0,59	30,5°	3662,4
Апетамид . . . . .	59,05	1,159	0,92	42,5°	2908,6
Гексаметиленгликоля . . . . .	140,13	—	0,78	38,5°	0,7954

Табл. 2.

объема прямо пропорционально весу растворенного вещества (прямая молекулярная функция).

Данные таблицы 2 указывают, что с увеличением удельного веса вещества угол кривой увеличения объема  $\Delta V$  уменьшается. Между величиной молекулярного веса и кривой увеличения объема  $\frac{d}{\Delta V}$  для наших веществ зависимости не наблюдается, в противоположность неорганическим соединениям, для которых Курчюкиным А. А. было найдено, что при равном угле  $\alpha$  — чем меньше удельный вес, тем больше молекулярный вес имеет данное вещество. Отсюда произведение  $\alpha \times M \times d$  для различных органических соединений не является константным (табл. 2).

### Увеличение объема жидкости при растворении смесей твердых веществ.

На основании таблицы 3, где даны увеличения объемов при растворении смеси органических соединений—сахароза+лактоза, глюкоза+сахароза, гексаметилентетраамин+сахароза, можно заключить, что увеличение  $\Delta V$  при растворении смеси равно сумме увеличения объема веществ, входящих в состав данной системы. Данное явление наблюдается также и при растворении электролитов.

Табл. 3.

$V=50 \text{ см}^3$   $\Delta V$ —Смеси твердых веществ. Растворитель—вода  $t^\circ=17-18^\circ\text{C}$

Вещество	Навеска в грам.	$\Delta V$	Дополнительно растворялось друг. вещество	Навеска в грам.	$\Delta V$	Среднее для 1 г вещества
Сахароза . . . . .	16	9,8	Лактоза . . . . .	1	0,6	0,6
				2	1,2	
				3	1,8	
Глюкоза . . . . .	10	6,2	Сахароза . . . . .	1	0,6	0,6
				2	1,2	
				4	2,4	
				8	5,0	
Гексаметилен-тетраамин	16	12,65	Сахароза . . . . .	1	0,6	0,6
				2	1,2	

### Сравнение $\Delta V$ в различных растворителях

С целью выяснить, имеет ли значение на увеличение  $\Delta V$  характер растворителя, некоторые из органических соединений растворялись нами не только в воде, но и в других растворителях—аcetоне, метаноле.

Табл. 4.

$V=50 \text{ см}^3$   $t^\circ=17-18^\circ\text{C}$  Сравнение  $\Delta V$  в различных растворителях

Растворитель	В о д а			Ацетон			Метанол		
	Навеска в г	$\Delta V$ в $\text{см}^3$	Среднее	Навеска в г	$\Delta V$ в $\text{см}^3$	Среднее	Навеска в г	$\Delta V$ в $\text{см}^3$	Среднее
Пирогаллол . . . . .	0,5	0,3	0,69	1	0,6	0,6	—	—	—
	1	0,6							
	2	1,35							
	4	2,75							
Ацетамид . . . . .	1	0,9	0,92	1	0,9	0,9	—	—	—
	2	1,8							
	4	3,7							
	—	—							
Тимол . . . . .	—	—	—	1	1,0	1,0	1	1,0	1,0
	—	—	—	2	2,0				
	—	—	—	3	3,0				
	—	—	—	4	4,0				

Как показывают данные таблицы 4 для пирогаллола и ацетамида, при растворении их в воде и ацетоне и при растворении тимола в ацетоне и метаноле, получены вполне совпадающие результаты.

Эти данные указывают, что при малых и средних концентрациях характер распределения молекул твердых органических веществ между частицами различных растворителей будет одинаков.

В таблице 5 сопоставляются объемы одного грамма различных веществ, получаемые делением веса 1 грамма вещества на удельный вес  $\left(\frac{1}{d}\right)$ , с наблюдаемым увеличением объема при растворении 1 грамма вещества в том или ином растворителе.

Приведенные данные показывают, что увеличение  $\Delta V$ , принимая во внимание погрешность опыта, для наших веществ равно отношению  $\frac{P}{d}$ , а для грамма вещества  $\frac{1}{d}$ .

Очевидно, что для органических соединений, которые в большинстве случаев практически не ионизированы, либо очень слабо подвергаются ионизации, общий объем жидкости при растворении их может быть выражен так:

$$V_2 = V_1 + \Delta V \text{ или } V_2 = V_1 + \frac{P}{d}$$

Табл. 5

Сравнение объема одного грамма вещества с наблюдаемым увеличением  $\Delta V$  жидкости

Вещество	Объем 1 грамма вещества $\frac{1}{d}$	Наблюдаемое $\Delta V$ для 1 г вещества	$\frac{1}{d} - \Delta V$
Пирогаллел в воде . . . . .	0,683	0,69	-0,007
"    в ацетоне . . . . .	0,683	0,60	+0,083
Маннит в воде . . . . .	0,657	0,62	+0,037
Щавелевая кислота в воде . . . . .	0,605	0,65	-0,055
Винная кислота       " . . . . .	0,568	0,56	+0,008
Глюкоза               " . . . . .	0,647	0,62	+0,027
Фруктоза             " . . . . .	0,599	0,60	-0,001
Сахароза             " . . . . .	0,629	0,61	+0,019
Лактоза              " . . . . .	0,655	0,60	+0,055
Гликоколь           " . . . . .	0,625	0,59	+0,035
Ацетамид            " . . . . .	0,862	0,92	-0,058
Он же в ацетоне . . . . .	0,862	0,90	-0,038
Тимол в ацетоне . . . . .	1,03	1,00	+0,030
"    в метаноле . . . . .	1,03	1,00	+0,030

т. е. так же, как в случае для веществ, практически нерастворимых, в отличие от сильных электролитов, где увеличение объема при растворении выражается зависимостью:

$$\Delta V = \mu \cdot \frac{P}{d},$$

а общий объем жидкости будет равен:  $V_2 = V_1 + \mu \cdot \frac{P}{d}$ .

По этому поводу можно высказать следующее соображение: поскольку приращение объема при растворении навески электролита, как правило, всегда менее отношения  $\frac{P}{d}$ , следовательно, происходит явление сжатия растворителя (электрострикция). Степень сжатия зависит от заряда растворенного иона, причем, чем больше заряд иона, тем более он способен к гидротации, тем более частиц растворителя приходит в сжатое состояние, сказывающееся в уменьшении объема раствора. При растворении неэлектролитов это явление не обнаруживается или обнаруживается настолько в слабой степени (органические кислоты), что величины сжатия растворителя лежат в пределах погрешности опыта (таблица 5).

Поскольку нами было установлено практически простое отношение в увеличении объема жидкости, при растворении в ней той или иной навески вещества (P), выражаемое отношением  $\frac{P}{d}$ , и принимая во внимание, что согласно данных Курочкина А. А. характер  $\Delta V$  не зависит от объема растворителя, то следовательно, при растворении граммоля неэлектролита мы должны иметь увеличение объема, равное отношению:

$$\frac{M}{d} \text{ (в куб. см).}$$

Отношение  $\frac{M}{d}$  есть молярный объем, следовательно,  $\Delta V$  для граммоля веществ есть функция их молярного объема.

Так как, по Коппу<sup>1)</sup> молярные объемы, в общем, являются аддитивными, то пользуясь его вычислительными приемами можно вычислить и „атомные объемы“, сумма которых дает молярные объемы<sup>2)</sup>

Установлено, что существует определенный параллелизм, а часто и равенство в ходе таких атомных постоянных, как атомные рефракции и атомные объемы, получаемые при точке кипения из молярных объемов.

Это указывает на существование как бы параллелизма между потребностью молекул в пространстве при точке кипения и поляризуемостью.

Исходя из вышеприведенных данных, мы попытались найти отношения между молярным объемом и величиной молярной рефракции что дало бы нам возможность найти зависимость между  $\Delta V$  и молярной рефракцией.

<sup>1)</sup> Корр. Lieb. Ann. 41, 79 (1842); Lieb. Ann. 96, 153 (1855).

<sup>2)</sup> У атомов, способных к различным связям, влияние рода связи сказывается в отклонении от аддитивности.

В общем виде эта эмпирически найденная нами зависимость может быть выражена следующим уравнением:

$$\Delta V = \frac{R_m \cdot P}{M} \cdot K,$$

где  $R_m$  — молярная рефракция;  
 $P$  — навеска вещества;  
 $M$  — молекулярный вес;  
 $K$  — константа.

$K$  вычисляется на основании отношения молярного объема  $\frac{M}{d}$  к молярной рефракции ( $R_m$ ).

В таблице 6 приведены молекулярный вес, плотность, молярный объем, вычисленная молярная рефракция по данным Эйзенлора для различных спектральных линий, а также вычисленные нами отношения молярного объема к молярной рефракции для различных органических веществ.

Табл. 6

Вещество	M	d	$\frac{M}{d}$	$R_m$ вычисленная			$\frac{M}{d} : R_m$		
				Спектральные линии			Спектральные линии		
				D	H $\beta$	H $\gamma$	D	H $\beta$	H $\gamma$
Маннит . . . . .	182,11	1,521	119,73	39,76	40,13	40,47	3,01	2,958	2,893
Глюкоза . . . . .	180,10	1,544	116,64	37,48	37,84	38,11	3,114	3,086	3,060
Фруктоза . . . . .	180,10	1,669	107,90	37,44	37,78	38,11	2,88	2,847	2,833
Сахароза . . . . .	342,18	1,588	215,47	70,93	71,57	72,19	3,00	3,00	2,984
Лактоза . . . . .	342,18	1,525	224,38	70,93	71,57	72,19	3,163	3,135	3,108
Винная кислота . . . . .	150,05	1,760	85,25	27,29	27,53	27,77	3,126	3,096	3,060
Гликоколь . . . . .	75,05	1,60	46,87	16,51	16,71	16,86	2,839	2,804	2,779
Ацетамид . . . . .	59,05	1,159	59,94	15,38	15,63	15,80	3,311	3,258	3,159
Среднее значение K							3,049	3,024	2,984

Из таблицы видно, что значения  $K$  для различных веществ довольно близки, в среднем для линии D оно равно 3,049, H $\beta$  = 3,024 и H $\gamma$  = 2,984 (в среднем  $K=3$ ).

Уравнение, выражающее зависимость увеличения  $\Delta V$  от молярной рефракции и величины молекулярного веса, имеет, несомненно, приближенное значение и, как показывают данные таблицы 7, очень часто хорошо согласующееся с практическими данными.

Сравнение  $\Delta V$  вычисленного с наблюдаемым для 1 г вещества

Вещество	$\Delta V$ вычисленное по формуле $\frac{R_m \cdot P}{M} \cdot K$	Наблюдаемое $\Delta V$	Примечание
Маннит . . . . .	0,65	0,62	Величины молярной рефракции взяты для данных веществ из таблицы № 6 для спектральной линии D; константа принята равной 3.
Глюкоза . . . . .	0,62	0,62	
Фруктоза . . . . .	0,62	0,60	
Сахароза . . . . .	0,63	0,61	
Лактоза . . . . .	0,63	0,60	
Винная кислота . . . . .	0,54	0,56	
Гликоколь . . . . .	0,66	0,59	
Ацетамид . . . . .	0,80	0,90	

**Выводы.**

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение объема жидкости при растворении твердых органических соединений прямо пропорционально весу вносимого вещества.

2. Увеличение  $\Delta V$  при приближении к насыщению составляет большую величину, по сравнению с  $\Delta V$ , для малых и средних концентраций.

3. Увеличение  $\Delta V$  при растворении смеси твердых органических соединений равно сумме увеличений объемов веществ, входящих в состав данной смеси.

4.  $\Delta V$  для одного и того же вещества в различных растворителях имеет одинаковое численное значение.

5. Увеличение  $\Delta V$  для неэлектролитов и очень слабых электролитов равно весу вещества, деленному на удельный вес, а общий объем подчиняется уравнению:

$$V_2 = V_1 + \frac{P}{d},$$

в отличие от сильных электролитов, где увеличение объема при растворении выражается другой зависимостью.

6. Эмпирически найдена зависимость увеличения объема от величины молярной рефракции и молекулярного веса, выражаемая уравнением:

$$\Delta V = \frac{R_m \cdot P}{\mu} \cdot K$$

DIE ZUNAHME DES RAUMINHALTES (VOLUMENS) BEI DER  
AUFLÖSUNG FESTER ORGANISCHER STOFFE.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Zunahme des Rauminhaltes (Volumens) von Flüssigkeiten ( $\Delta V$ ) bei der Auflösung fester organischer Stoffe (Alkohole, Phenole, organische Säuren Zucker und einige andere) in Wasser, Methanol und Aceton einer Untersuchung unterzogen.

Die dabei erhaltenen experimentalen Beweismittel gestatten es folgende Schlussfolgerungen zu ziehen:

1) Die Zunahme des Rauminhaltes einer Flüssigkeit bei der Lösung fester organischer Verbindungen ist genau proportional dem Gewicht des angewandten Stoffes

2) Die Zunahme von  $\Delta V$  bei herannahender Sättigung stellt eine grössere Einheit dar im Vergleich zum  $\Delta V$  für geringere, und mittlere Konzentrationen.

3) Die Zunahme von  $\Delta V$  bei der Lösung von Mischungen fester organischer Verbindungen ist gleich der Summe der Zunahme der Rauminhalte derjenigen Stoffe, welche in den Bestand der gegebenen Mischung eingetreten sind.

4)  $\Delta V$  für ein und denselben Stoff in verschiedenen Lösungsmitteln hat stets dieselbe zahlenmässige Bedeutung.

5) Die Zunahme von  $\Delta V$  für Nichtelectrolyte und für sehr schwache Electrolytt ist gleich dem Gewicht des Stoffes dividiert durch das spezifische Gewicht, der gesammte Rauminhalt aber unterliegt der Gleichung

$$V_2 = V_1 + \frac{P}{d}$$
 (wo  $V_1$  den anfänglichen Rauminhalt des Lösungsmittels,  $P$ —

das Gewicht des Stoffes in Grammen und  $d$ —die Dichte des zu lösenden Stoffes bedeutet), im Unterschiede von starken Electrolyten, wo die Zunahme des Rauminhaltes bei der Auflösung durch eine andere Abhängigkeit ausgedrückt wird.

6) Empirisch wurde die Abhängigkeit der Zunahme des Rauminhaltes von der Grösse der molaren Refraction und des Moleculargewichtes festgestellt, die ihren Ausdruck in folgender Gleichung findet:

$$\Delta V = \frac{R \cdot M}{d}$$

wo  $R$  die molare Refraction,  $M$  die Molekulargewicht des Stoffes,  $d$ —die Dichte des Lösungsmittels und  $K$ —die Konstante bedeutet.



## ВАЖНЕЙШИЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строчка	Напечатано:	Должно быть:
15	15	$M = 38,9 \sqrt{n + 1,4}$	$M = 38,9 \sqrt{L + 1,4 L}$
28	4 снизу	$\frac{y^2}{2R^2} \Delta x; \frac{y^2}{2R^2} \Delta y \dots (3)$	$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{y^2}{2R^2} \Delta x \\ \delta y &= \frac{y^2}{2R^2} \Delta y \end{aligned} \right\} \dots (3)$
		где $\delta x$ —разность поправок абсцисс, а $\delta y$ —разность поправок ординат	
29	3 снизу	В этом	В том
44		между третьей и четвертой строками пропущено слово—Следовательно:	

