

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,  
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
по образованию в области сельского хозяйства  
в качестве учебно-методического пособия  
для студентов учреждений, обеспечивающих получение  
высшего образования I ступени по специальностям  
1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий,  
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство*

Горки  
БГСХА  
2022

УДК 51(075)  
ББК 22.1я73  
К93

*Одобрено методической комиссией  
мелиоративно-строительного факультета 25.01.2021 (протокол № 5)  
и Научно-методическим советом БГСХА 24.02.2021 (протокол № 6)*

Авторы:

кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;  
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*;  
кандидат физико-математических наук, доцент *А. В. Жерело*

К93      Высшая математика. Элементы векторной алгебры : учебно-методическое пособие / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова. – Горки : БГСХА, 2022. – 84 с.  
ISBN 978-985-882-187-6.

Приведены краткий теоретический материал по теме «Элементы векторной алгебры», тестовые задания, варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования I ступени по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

)

**ISBN 978-985-882-187-6**

© УО «Белорусская государственная  
сельскохозяйственная академия», 2022

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы выработать прочные навыки самостоятельной работы с книгой, сформировать умение рационально организовывать свой умственный труд.

Самостоятельная работа студентов по высшей математике способствует лучшему усвоению теоретического материала и методов решения задач.

Предлагаемое пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Элементы векторной алгебры». Для того чтобы студенты могли оценить уровень своих знаний по данному разделу высшей математики, в данную разработку включены контрольный тест, типовой пример модульного задания, а также тридцать вариантов индивидуального домашнего задания. После выполнения студентом своего варианта индивидуального задания и проверки преподавателем предполагается его защита. При этом студент должен показать знание соответствующих теоретических вопросов раздела и приобретенные навыки при решении задач.

Настоящее пособие является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики для студентов по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

#### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. Н. Высшая математика: в 2 ч. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Ч. 1. – 544 с.
2. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск: Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 302 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 3 ч. / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 608 с.

# 1.

## 1.1.

*Вектором* называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначается символом  $\overline{AB}$  (или  $\vec{a}$ ).

*Модулем (длиной)* вектора  $\overline{AB}$  называется расстояние от начальной точки  $A$  до конечной точки  $B$  вектора и обозначается  $|\overline{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$ .

*Единичным* (или *ортом*) называется вектор  $\vec{e}$ , длина которого равна единице.

*Нулевым* (или *нуль-вектором*) называется вектор  $\vec{0}$ , длина которого равна нулю.

*Коллинеарными* называются векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

*Компланарными* называются три вектора и более, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

*Равными* ( $\vec{a} = \vec{b}$ ) называются два коллинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т. е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор  $\vec{a}$  имеет бесконечно много векторов, равных ему.

*Углом между векторами*  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется наименьший угол  $\angle \varphi = (\vec{a} \hat{;} \vec{b})$ , на который нужно повернуть вектор  $\vec{a}$ , чтобы его направление совпало с направлением вектора  $\vec{b}$ , при условии, что оба вектора отнесены к общему началу (рис. 1).

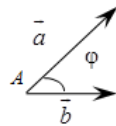


Рис. 1

Угол между векторами измеряется в пределах  $0 \leq (\vec{a} \hat{;} \vec{b}) \leq \pi$ . Если угол между векторами  $(\vec{a} \hat{;} \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$  (или  $90^\circ$ ), то векторы называются *ортогональными*. В случае, когда  $(\vec{a} \hat{;} \vec{b}) = 0$  (или  $0^\circ$ ), говорят, что вектор  $\vec{a}$  сонаправлен с вектором  $\vec{b}$ , если же  $(\vec{a} \hat{;} \vec{b}) = \pi$  (или  $180^\circ$ ), то вектор  $\vec{a}$  имеет противоположное направление к вектору  $\vec{b}$ .

### 1.2.

Пусть вектор  $\overline{AB}$  составляет угол  $\varphi$  с осью  $l$ .

Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется число, равное длине вектора  $\overline{A_1B_1}$  (рис. 2), взятой со знаком плюс, если направление вектора  $\overline{A_1B_1}$  совпадает с направлением оси  $l$ , и со знаком минус в противном случае.

Проекция вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$  на ось  $l$  вычисляется по формуле

$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\varphi).$$

Декартовыми прямоугольными координатами  $x, y, z$  вектора  $\vec{a}$  называются его проекции на соответствующие координатные оси  $Ox, Oy, Oz$ .

Вектор  $\vec{a}$  с координатами  $x, y, z$  записывают в координатной форме  $\vec{a}(x; y; z)$  или в виде разложения по базису  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты координатных осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно (или базисные векторы).

Длина вектора  $\vec{a}$  определяется по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

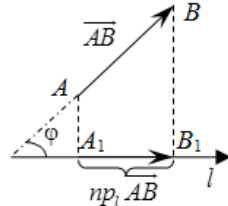


Рис. 2

### 1.3.

Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , соединяющий начало вектора  $\vec{a}$  с концом вектора  $\vec{b}$ , при условии, что вектор  $\vec{b}$  отложен от конца вектора  $\vec{a}$  (рис. 3).

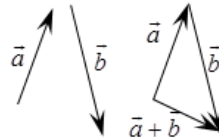
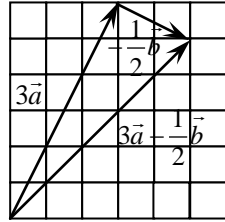
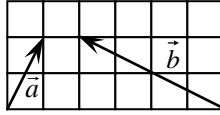


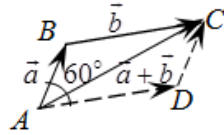
Рис. 3

Произведением вектора  $\vec{a} \neq 0$  на число  $\lambda \neq 0$  называется вектор, который имеет длину  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и коллинеарен вектору  $\vec{a}$ . Причем векторы  $\vec{a}$  и  $\lambda \cdot \vec{a}$  сонаправлены в случае  $\lambda > 0$  и имеют противоположные направления, если  $\lambda < 0$ .

1. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построить вектор  $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .



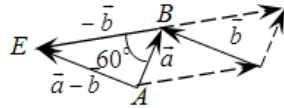
2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = 60^\circ$ , причем  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 7$ . Определить  $|\vec{a} + \vec{b}|$  и  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .



Решение. Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является вектор  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ . Заметим, что  $\angle ABC = 120^\circ$ . Тогда длину вектора  $|\vec{AC}|$  можем найти по

$$\begin{aligned} \text{теореме косинусов} \quad |\vec{AC}| &= |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle ABC)} = \\ &= \sqrt{2^2 + 7^2 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4 + 49 + 14} = \sqrt{67}. \end{aligned}$$

Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является вектор  $\vec{AE} = \vec{a} - \vec{b}$ . Так как  $\angle ABE = 60^\circ$ , то длина вектора  $|\vec{AE}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  по теореме косинусов равна



$$\begin{aligned} |\vec{AE}| &= |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle ABE)} = \sqrt{2^2 + 7^2 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{4 + 49 - 14} = \sqrt{39}. \end{aligned}$$

#### 1.4.

Пусть заданы векторы  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$  в прямоугольной системе координат. Линейные операции над ними выполняются по следующим формулам:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}(x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_a; \alpha y_a; \alpha z_a).$$

1. Даны два вектора  $\vec{a}(2; -1; 4)$  и  $\vec{b}(0; -1; 2)$ . Найти координаты и длину вектора  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

Решение.  $2\vec{a}(4; -2; 8)$ ;  $-3\vec{b}(0; 3; -6)$ ;  $2\vec{a} - 3\vec{b}(4+0; -2+3; 8-6)$ ;  $2\vec{a} - 3\vec{b}(4; 1; 2)$ ;  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$ .

2. Дан вектор  $\vec{a}$ , образующий с осью  $\ell$  угол  $\varphi_1 = 60^\circ$ , и вектор  $\vec{b}$ , образующий с той же осью угол  $\varphi_2 = 120^\circ$ . Найти проекцию суммы  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , где  $\vec{c} = 2(\vec{a} - \vec{b})$ , на ось  $\ell$ , если известно, что  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 4$ .

Решение. Так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, необходимо найти проекцию каждого слагаемого на ось  $\ell$ .

$$np_\ell \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\varphi_1) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$np_\ell \vec{b} = |\vec{b}| \cos(\varphi_2) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

$$np_\ell \vec{c} = 2(np_\ell \vec{a} - np_\ell \vec{b}) = 2 \cdot (3 + 2) = 10.$$

Тогда  $np_\ell(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 3 - 2 + 10 = 11$ .

*Понятие радиус-вектора точки. Координаты и длина вектора, заданного граничными точками.*

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxuz$  произвольную точку  $M$ . Координаты вектора  $\overline{OM}$  будем называть *координатами точки  $M$* . Вектор  $\overline{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$  и обозначается  $\overline{OM} = \vec{r}_M$ .

Найдем координаты вектора  $\overline{AB}$ , если известны координаты начальной точки  $A(x_A; y_A; z_A)$  и конечной точки  $B(x_B; y_B; z_B)$  (рис. 4). Нетрудно заметить, что  $\overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ . Тогда согласно введенным для векторов операциям имеем  $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ .

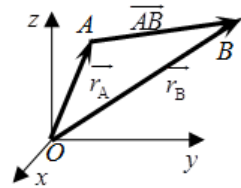


Рис. 4

Рассмотрим *радиус-вектор* точки  $M(x_M; y_M; z_M)$  в прямоугольной системе координат  $Oxuz$ .

Пусть  $\overline{r_M}$  образует с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (рис. 5). Направление вектора  $\overline{r_M}$  определяется с помощью направляющих косинусов  $\cos(\alpha)$ ,  $\cos(\beta)$ ,  $\cos(\gamma)$ , которые равны:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_M}{|\overline{r_M}|}; \quad \cos(\beta) = \frac{y_M}{|\overline{r_M}|}; \quad \cos(\gamma) = \frac{z_M}{|\overline{r_M}|},$$

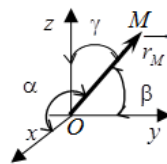


Рис. 5

где  $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ .

**3.** Найти координаты вектора  $\overline{AB}$  и его длину, если  $A(-3; -4)$ ,  $B(1; -2)$ .

Решение. Найдем координаты вектора  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB}(1 - (-3); -2 - (-4)), \quad \overline{AB}(1 + 3; -2 + 4), \quad \overline{AB}(4; 2).$$

Тогда длина вектора будет равна

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

**4.** Найти направляющие косинусы вектора  $\overline{AM}$ , если  $A(3; -4; 1)$ ,  $M(4; 6; -3)$ .

Решение. Найдем координаты вектора  $\overline{AM}$ :

$$\overline{AM}(4 - 3; 6 - (-4); -3 - 1); \quad \overline{AM}(1; 10; -4).$$

Тогда его длина и направляющие косинусы будут соответственно равны:

$$|\overline{AM}| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 100 + 16} = \sqrt{117},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{117}}; \quad \cos(\beta) = \frac{10}{\sqrt{117}}; \quad \cos(\gamma) = \frac{-4}{\sqrt{117}}.$$

*Условия коллинеарности и равенства векторов, заданных в координатах.*

Пусть задан ненулевой вектор  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ . Тогда любой коллинеарный с ним вектор будет отличаться от него на постоянный множитель, т. е.  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ , где  $\vec{b}(\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$ . Следовательно, у коллинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  координаты пропорциональны:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda,$$

причем, если: 1)  $\lambda > 0$ , то  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены;

2)  $\lambda < 0$ , то  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют противоположные направления;

3)  $0 < |\lambda| < 1$ , то  $\vec{a}$  короче вектора  $\vec{b}$  в  $\lambda$  раз;

4)  $|\lambda| > 1$ , то  $\vec{a}$  длиннее вектора  $\vec{b}$  в  $\lambda$  раз.

Условием равенства двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является *совпадение их координат*.

**5.** Определить, при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a}(-2; 3; \beta)$  и  $\vec{b}(\alpha; -6; 2)$  коллинеарны. Как направлены эти векторы и как соотносятся их длины?

Решение. Из коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будет следовать пропорциональность их соответствующих координат  $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} =$

$= \frac{z_a}{z_b} = \lambda$ . В нашем случае эти пропорции будут выглядеть следующим

$$\text{образом } \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} = \lambda.$$

Вторая пропорция полностью определена, откуда  $\lambda = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $\frac{-2}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ , откуда  $\alpha = 4$ . С другой стороны  $\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}$ ,

тогда  $\beta = -1$ .

Так как  $\lambda = -0,5$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют противоположные направления и вектор  $\vec{a}$  в два раза короче вектора  $\vec{b}$ .

**6.** Даны три вершины параллелограмма  $ABCD$ :  $A(3; -4; 7)$ ;  $B(-5; 3; -2)$ ;  $C(1; 2; -3)$ . Найти координаты вершины  $D$ .



Решение. Заметим, что вектор  $\overline{BC}$  равен вектору  $\overline{AD}$ , а значит координаты этих векторов равны. Найдем координаты этих векторов:  $\overline{BC}(6; -1; -1)$ ,  $\overline{AD}(x_D - 3; y_D + 4; z_D - 7)$ . Тогда  $x_D - 3 = 6$  или  $x_D = 9$ ;  $y_D + 4 = -1$  или  $y_D = -5$ ;  $z_D - 7 = -1$  или  $z_D = 6$ . Таким образом, точка  $D$  имеет координаты  $D(9; -5; 6)$ .

### 1.5.

Пусть в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  задан произвольный отрезок  $AB$ , где граничные точки отрезка имеют координаты  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ , а также известно, что внутренняя точка  $C$  этого отрезка делит отрезок  $AB$

в отношении  $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m_1}{m_2}$  (рис. 6).

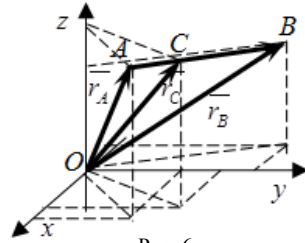


Рис. 6

Тогда радиус-вектор точки  $C$  определяется по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{m_2 \cdot \vec{r}_A + m_1 \cdot \vec{r}_B}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{r}_B}{1 + \lambda}.$$

В координатной форме данную зависимость можно переписать так:

$$x_C = \frac{m_2 \cdot x_A + m_1 \cdot x_B}{m_1 + m_2} = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}; \quad y_C = \frac{m_2 \cdot y_A + m_1 \cdot y_B}{m_1 + m_2} = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda};$$

$$z_C = \frac{m_2 \cdot z_A + m_1 \cdot z_B}{m_1 + m_2} = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1 + \lambda}.$$

В частном случае, когда точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ , формулы преобразуются к виду:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

• Найти координаты точки  $C$ , делящей отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda = \frac{2}{3}$ , если  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(-3; -1; 6)$ .

Решение. Воспользуемся расчетными формулами:

$$x_C = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot (-3)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{0}{\frac{5}{3}} = 0; \quad y_C = \frac{4 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{10}{3} : \frac{5}{3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2;$$

$$z_C = \frac{-1 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{1} : \frac{5}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}.$$

Таким образом, точка  $C$  имеет координаты  $C(0; 2; 1,8)$ .

## 1.6.

Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . В противном случае векторы называются *линейно зависимыми*.

Если произвольный вектор  $\vec{a}$  можно представить в виде  $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ , то говорят, что этот вектор *линейно выражается* через векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .

Справедливы следующие утверждения:

1) векторы (при  $n > 1$ ) линейно зависимы тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из них линейно выражается через остальные;

2) если векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно независимы, то ни один из них нельзя выразить через остальные; в частности, ни один из них не может быть нулевым;

3) векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.

. Разложить вектор  $\vec{c}(9; 4)$  по векторам  $\vec{a}(1; 2)$  и  $\vec{b}(2; -3)$ .

Решение.  $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ ;  $\vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$ ;  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ;  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .

$$9\vec{i} + 4\vec{j} = \lambda_1 (\vec{i} + 2\vec{j}) + \lambda_2 (2\vec{i} - 3\vec{j}) = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{i} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\vec{j}.$$

Нахождение неизвестных параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  сведем к решению системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 9, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Систему решим методом Крамера:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{-7} = 5; \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Тогда вектор  $\vec{c}(9; 4)$  в разложении по векторам  $\vec{a}(1; 2)$  и  $\vec{b}(2; -3)$  будет иметь следующий вид:  $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ .

### 1.7.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними (рис. 7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

Из рис. 7 видно, что  $|\vec{a}| \cos(\varphi) = np_{\vec{b}} \vec{a}$ ,  
 $|\vec{b}| \cos(\varphi) = np_{\vec{a}} \vec{b}$ . Поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$  или  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}$ .

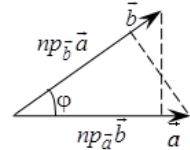


Рис. 7

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  – переместительный закон;
2.  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$  – распределительный закон;
3. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны ( $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ), то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ;
4. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  (или  $\vec{a} = 0$ , или  $\vec{b} = \vec{0}$ );
5. Скалярный квадрат вектора  $\vec{a}$  равен квадрату длины этого вектора  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ .

В частности, скалярное произведение единичных векторов (ортов) удовлетворяет равенствам (рис. 8):

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

В координатной форме скалярное произведение векторов  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$  равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

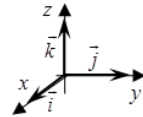


Рис. 8

1. Найти длину вектора  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,

$$(\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

Решение. Воспользуемся пятым свойством скалярного произведения векторов:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{c^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 25} = \sqrt{36 - 120 + 400} = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}. \end{aligned}$$

Применение скалярного произведения векторов.

1. Нахождение угла между векторами  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ :

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

2. Даны вершины треугольника  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(0; 0; 5)$ . Найти внутренний угол при вершине  $C$ .

Решение. Для нахождения угла  $C$  найдем координаты векторов  $\vec{CB}$  и  $\vec{CA}$ .

$$\vec{CB}(1-0; 1-0; 1-5), \quad \vec{CB}(1; 1; -4);$$

$$\vec{CA}(2-0; -1-0; 3-5), \quad \vec{CA}(2; -1; -2).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos(\angle C) &= \frac{\vec{CB} \cdot \vec{CA}}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{CA}|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{2 - 1 + 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Таким образом, } \angle C = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  на ось  $l$ , составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. Определим на оси  $l$  орт  $\vec{e}_l$  и найдем его координаты. Для этого воспользуемся тождеством  $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ . Так как  $\vec{e}_l$  лежит на оси  $l$ , то он образует с осями координат равные острые углы. Таким образом,  $\angle\alpha = \angle\beta = \angle\gamma$ . Тогда тождество примет вид:  $3\cos^2(\alpha) = 1$ , или  $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Это означает, что

орт оси  $l$  имеет координаты  $\vec{e}_l(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

Найдем косинус угла между ортом и вектором  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ :

$$\cos(\vec{a}; \vec{e}_l) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_l}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_l|} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда проекция вектора  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  на ось  $l$  будет равна

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{e}_l) = \sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

2. *Нахождение проекции вектора на вектор.* Пусть векторы заданы в координатной форме:  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ . Тогда проекции определяются формулами:

$$np_b \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}};$$

$$np_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}.$$

4. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  на вектор  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ .

Решение.

$$np_b \vec{a} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{13}{\sqrt{18}} = \frac{13}{3\sqrt{2}}.$$

3. *Проверка векторов на ортогональность.* Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

5. Даны вершины четырехугольника  $A(1; -2; 2)$ ,  $B(1; 4; 0)$ ,  $C(-4; 1; 1)$ ,  $D(-5; -5; 3)$ . Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем координаты векторов, определяющих диагонали четырехугольника  $\vec{AC}(-4-1; 1+2; 1-2)$ , или  $\vec{AC}(-5; 3; -1)$ ;  $\vec{BD}(-5-1; -5-4; 3-0)$ , или  $\vec{BD}(-6; -9; 3)$ . Проверим ортогональность этих векторов  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -5 \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) - 1 \cdot 3 = 30 - 27 - 3 = 0$ .

Это означает, что диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

4. *Нахождение работы постоянной силы.* Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения  $A$  в положение  $B$  под действием силы  $\vec{F}$ ,

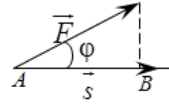


Рис. 9

образующей угол  $\varphi$  с перемещением  $\vec{AB} = \vec{s}$  (рис. 9). Из курса физики известно, что работа силы  $\vec{F}$  при перемещении  $\vec{s}$  равна  $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{s} \cdot \vec{F}$ .

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора перемещения на вектор силы.

6. Вычислить работу, произведенную силой  $\vec{F}$ , если она имеет координаты  $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ , а точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения  $A(2; 4; 6)$  в положение  $B(4; 2; 7)$ . Под каким углом к  $\vec{s}$  направлена сила  $\vec{F}$ ?

Решение. Найдем перемещение материальной точки, т. е. вектор  $\vec{s} = \vec{AB}$ .  $\vec{s}(4-2; 2-4; 7-6)$ , или  $\vec{s}(2; -2; 1)$ . Тогда

$$A = \vec{s} \cdot \vec{F} = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6 \text{ (ед. работы)}.$$

Угол  $\varphi$  между  $\vec{F}$  и  $\vec{s}$  найдем по формуле

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

### 1.8.

*Векторным произведением* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 10) называется вектор  $\vec{c}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) модуль вектора  $\vec{c}$  равен  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\varphi)$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е. численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах;

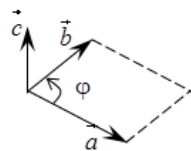


Рис. 10

- 2) вектор  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;

3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в указанном порядке образуют правую тройку векторов, т. е. если смотреть на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с конечной точки вектора  $\vec{c}$ , то кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  будет осуществляться против часовой стрелки.

Обозначается векторное произведение как  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , или  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1.  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ;
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  или  $\vec{a} = \vec{0}$ , или  $\vec{b} = \vec{0}$ ;
3.  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ ;
4.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ .

В частности, векторное произведение единичных векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , образующих прямоугольный базис, определяется по следующей схеме: векторное произведение совпадающих сомножителей равно нулю; векторное произведение несовпадающих сомножителей равно третьему не задействованному в произведении орту, взятому с положительным знаком, если направление кратчайшего поворота от первого сомножителя до второго совпадает с направлением часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

В координатной форме векторное произведение векторов  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$  равно:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

*Применение векторного произведения векторов.*

1. *Проверка векторов на коллинеарность.* Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  и наоборот.

1. Проверить векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  на коллинеарность.

Решение. Запишем векторы в координатной форме  $\vec{a}(2; 5; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 2; -3)$  и найдем их векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Так как  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ , то эти векторы не коллинеарны.

2. *Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.* Согласно определению векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  модуль этого произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, т. е.

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix},$$

а значит площадь соответствующего треугольника будет равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $3\vec{a} + \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

Решение. Площадь параллелограмма определяется по формуле

$$S_{\text{пар}} = |(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})|. \text{ Найдем } (\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = \\ = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8 \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

Тогда  $S_{\text{пар}} = 8 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 30^\circ = 4$  (ед.<sup>2</sup>).

3. Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(2; 2; 2)$ ,  $B(4; 0; 3)$ ,  $C(0; 1; 0)$ .

Решение. Найдем координаты векторов  $\overline{AC}$  и  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AC}(0-2; 1-2; 0-2), \text{ или } \overline{AC}(-2; -1; -2);$$

$$\overline{AB}(4-2; 0-2; 3-2), \text{ или } \overline{AB}(2; -2; 1).$$

Тогда  $\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}, \text{ а его модуль равен}$$

$$|\overline{AC} \times \overline{AB}| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \text{ Следовательно, площадь треугольника}$$

равна  $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед.}^2\text{)}.$

3. *Определение момента силы относительно точки.* Пусть в точке  $A$  приложена сила  $\vec{F} = \overline{AB}$  и пусть  $O$  – некоторая точка пространства (рис. 11).

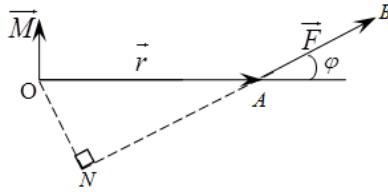


Рис. 11

Из физики известно, что моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется вектор  $\vec{M}$ , который проходит через точку  $O$  и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки  $O, A, B$ ;
- 2) численно равен произведению силы на плечо:

$$\vec{M} = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{F}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \sin(\widehat{F; \overline{OA}});$$

- 3) образует правую тройку векторов с векторами  $\overline{OA}$  и  $\overline{AB}$ .
- Из вышесказанного можно сделать вывод, что

$$\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{F}.$$

4. Найти величину момента силы  $\vec{F}(1; 0; 1)$  относительно точки  $A(-2; 1; 3)$ , если сила приложена к точке  $B(3; -1; 0)$ .

Решение. Определим координаты вектора  $\overline{AB}(3+2; -1-1; 0-3)$ ,  $\overline{AB}(5; -2; -3)$ . Момент  $\overline{M}$  силы  $\overline{F}$  относительно точки  $A$  найдем как

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\overline{M}(-2; -8; 2).$$

Тогда величина момента силы  $\overline{F}$  равна модулю вектора

$$|\overline{M}| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

### 1.9.

*Смешанным произведением векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$*  называется число, равное скалярному произведению вектора  $\vec{a}$  на вектор, равный векторному произведению векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Обозначается как  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хотя бы один из векторов нулевой;
- б) в произведении есть коллинеарные векторы;
- в) векторы компланарны.

$$2. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$3. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}).$$

$$4. (\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \lambda\vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \mu\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}.$$

В координатной форме смешанное произведение векторов  $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ ,  $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$  и  $\vec{c}(x_c; y_c; z_c)$  равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

*Применение смешанного произведения векторов.*

1. *Проверка тройки векторов на компланарность.* Векторы  $\vec{a}$ ;  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю при условии, что  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$ :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

1. Доказать, что точки  $A(5; 7; 2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(9; 4; -4)$ ,  $D(1; 5; 0)$  лежат в одной плоскости.

Решение. Если заданные точки лежат в одной плоскости, то соответствующая тройка векторов, выходящих из общего начала, будет компланарна. Проверим, компланарны ли векторы с общим началом в точке  $A$ . Найдем координаты этих векторов:  $\overline{AB}(-2; -6; 1)$ ,  $\overline{AC}(4; -3; -2)$ ,  $\overline{AD}(-4; -2; 2)$ . Вычислим их смешанное произведение:

$$\overline{AB}\overline{AC}\overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в одной плоскости.

2. *Определение взаимной ориентации тройки векторов в пространстве.* Тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в пространстве правоориентирована, если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , и левоориентирована при  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ .

3. *Нахождение объемов.* Смешанное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , как на сторонах (рис. 12), т. е.

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \left| \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \right|.$$

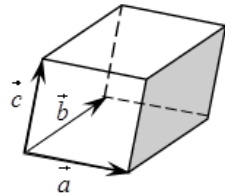


Рис. 12

Объем треугольной пирамиды, построенной

на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , как на сторонах (рис. 13), равен одной шестой смешанного произведения этих векторов, взятого по абсолютной величине, т. е.

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

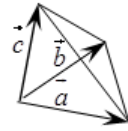


Рис. 13

2. Найти длину высоты треугольной пирамиды с вершинами  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(2; 3; 5)$ ,  $C(6; 2; 3)$ ,  $D(3; 7; 2)$ , опущенную на грань  $BCD$ .

Решение. Найдем координаты векторов:  $\overline{BA}(-2; -3; -4)$ ,  $\overline{BD}(1; 4; -3)$ ,  $\overline{BC}(4; -1; -2)$ . Тогда объем пирамиды можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)| =$$

$$= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20 \text{ (ед.}^3\text{)}.$$

Из школьного курса математики известно, что  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$ . Откуда

следует, что  $h_B = \frac{3 \cdot V}{S_{\text{осн}}}$ . Поэтому для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания  $BCD$ .

$$\overline{BD} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) =$$

$$= -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Определим модуль векторного произведения векторов:

$$|\overline{BD} \times \overline{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}.$$

Тогда площадь треугольника  $BCD$  равна  $S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2$  (ед.<sup>2</sup>), а

$$\text{длина искомой высоты} - h_B = \frac{3 \cdot V}{S_{\text{осн}}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} \text{ (ед.)}.$$

## 2.

1. Построить радиус-вектор точек: 1)  $A(2; -3; 1)$ ; 2)  $C(1; 0; 3)$ .

2. По данным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  построить следующие векторы:

$$1) \vec{a} + 2\vec{b}; \quad 2) \frac{1}{4}\vec{a} - 3\vec{b}.$$

3. Векторы  $\overline{AK}$  и  $\overline{BM}$  являются медианами треугольника  $ABC$ . Выразить через  $\overline{AK}$  и  $\overline{BM}$  векторы, определяющие стороны данного треугольника:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ .

4. Даны точки  $A(3; -1; 2)$  и  $B(-1; 2; 1)$ . Найти координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{BA}$  и их длину.

5. Определить точку  $N$  с которой совпадает конец вектора  $\vec{a}(3; -1; 4)$ , если его начало совпадает с точкой  $M(1; 2; -3)$ .

6. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ ; 2)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 135^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

7. Проверить, коллинеарны ли векторы  $\vec{a}(2; -1; 3)$  и  $\vec{b}(-6; 3; -9)$ . Если да, то установить, какой из них длиннее и во сколько раз. Как они направлены – в одну сторону или в противоположные?

8. Проверить, что четыре точки  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(-1; 1; -3)$ ,  $D(3; -5; 3)$  служат вершинами трапеции.

9. Найти орты векторов: 1)  $\vec{a}(6; -2; -3)$ ; 2)  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ .

10. Даны векторы  $\vec{a}(3; -2; 6)$  и  $\vec{b}(-2; 1; 0)$ . Найти координаты следующих векторов: 1)  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ; 2)  $3\vec{a} - \vec{b}$ ; 3)  $2(\vec{a} + \vec{b})$ .

1. Построить радиус-вектор точки  $B(-1; -4; 2)$ .

2. По данным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  построить следующие векторы:

$$1) 2\vec{b} - \vec{a}; \quad 2) -\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}.$$

3. Даны точки  $M(2; 3; -5)$  и  $N(1; 0; -3)$ . Найти координаты вектора  $\overline{MN}$ , его длину и направляющие косинусы.

4. Определить начало вектора  $\vec{a}(2; -3; -1)$ , если конец вектора имеет координаты  $(1; -1; 2)$ .

5. Даны точки  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 0; -2)$ ,  $C(2; 4; 1)$ ,  $D(1; 1; 5)$ . Найти:

1) координаты вектора  $2\overline{AB} - \overline{CD}$ ; 2) длину вектора  $\overline{CB} - 3\overline{AD} + \overline{DC}$ .

## 2

1. На плоскости даны два вектора:  $\vec{p}(2; -3)$  и  $\vec{g}(1; 2)$ . Разложить вектор  $\vec{a}(9; 4)$  по базису  $\vec{p}$ ,  $\vec{g}$ .

2. Даны три вектора:  $\vec{p}(3; -2; 1)$ ,  $\vec{g}(-1; 1; -2)$ ,  $\vec{r}(2; 1; -3)$ . Разложить вектор  $\vec{c}(11; -6; 5)$  по базису  $\vec{p}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{r}$ .

3. Даны три вектора:  $\vec{a}(1; 2)$ ,  $\vec{b}(-5; -1)$ ,  $\vec{c}(-1; 3)$ . Найти координаты линейных комбинаций векторов  $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$  и  $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c}$ .

4. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ . Зная, что длины этих векторов соответственно равны  $|\vec{a}| = 3$  и  $|\vec{b}| = 4$ , вычислить:

1)  $\vec{a}\vec{b}$ ; 2)  $\vec{a}^2$ ; 3)  $\vec{b}^2$ ; 4)  $(\vec{a} + \vec{b})^2$ ; 5)  $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ ; 6)  $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ .

5. Даны векторы  $\vec{a}(4; -2; -4)$ ,  $\vec{b}(6; -3; 2)$ . Вычислить:

1)  $\vec{a}\vec{b}$ ; 2)  $\sqrt{\vec{a}^2}$ ; 3)  $\sqrt{\vec{b}^2}$ ; 4)  $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ ; 5)  $(\vec{a} + \vec{b})^2$ ; 6)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ .

6. Даны три силы:  $\vec{M}(3; -4; 2)$ ,  $\vec{N}(2; 3; -5)$  и  $\vec{P}(-3; -2; 4)$ , приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $M_1(5; 3; -7)$  в положение  $M_2(4; -1; -4)$ .

7. Определить, при каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$  ортогональны.

8. Даны вершины треугольника  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$ ,  $C(3; -2; 1)$ . Определить его внутренний угол при вершине  $B$ .

9. Даны три вектора:  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$  и  $\vec{c}(3; -4; 12)$ .

Вычислить  $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$ .

10. Даны точки  $A(-2; 3; -4)$ ,  $B(3; 2; 5)$ ,  $C(1; -1; 2)$ ,  $D(3; 2; -4)$ .

Найти:

1)  $(2\vec{AB} + \vec{CD}) \cdot \vec{AC}$ ; 2)  $np_{\vec{AD}}(\vec{BA} - \vec{CB})$ ;

3) угол между векторами  $\vec{BA} - \vec{AC}$  и  $\vec{DA}$ .

## 2

1. Даны векторы  $\vec{a}(4; 1; -1)$ ,  $\vec{b}(3; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(-1; 1; 1)$ ,  $\vec{d}(-1; 3; 4)$ . Найти числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , удовлетворяющие равенству  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

2. Даны точки  $A(-1; 3; -7)$ ,  $B(2; -1; 5)$  и  $C(0; 1; -5)$ . Вычислить:

1)  $(2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA})$ ; 2)  $\sqrt{AB^2}$ ; 3)  $\sqrt{AC^2}$ ;

4) координаты векторов  $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot \vec{BC}$  и  $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \cdot \vec{BC})$ .

3. Вычислить, какую работу производит сила  $\vec{F}(3; -2; -5)$ , когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(2; -3; 5)$  в положение  $B(3; -2; 1)$ .

4. Даны вершины треугольника  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$ ,

$C(3; -2; 1)$ . Определить его внутренний угол при вершине  $C$  и  $np_{\vec{AC}}(\vec{CB} + \vec{BA})$ .

## 3

1. Даны векторы:  $\vec{a} = 10$ ,  $\vec{b} = 2$  и  $\vec{a}\vec{b} = 12$ . Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

2. Даны векторы:  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 26$  и  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . Вычислить  $\vec{a}\vec{b}$ .

3. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны. Зная, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , вычислить: 1)  $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$ ; 2)  $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$ .

4. Даны векторы  $\vec{a}(3; -1; -2)$  и  $\vec{b}(1; 2; -1)$ . Найти координаты векторных произведений: 1)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; 2)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ ; 3)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$ .

5. Сила  $\vec{P}(2; -4; 5)$  приложена к точке  $M_0(4; -2; 3)$ . Определить момент этой силы относительно точки  $A(3; 2; -1)$ .

6. Даны три силы:  $\vec{M}(2; -1; -3)$ ,  $\vec{N}(3; 2; -1)$  и  $\vec{P}(-4; 1; 3)$ , приложенные к точке  $C(-1; 4; -2)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $A(2; 3; -1)$ .

7. Даны вершины треугольника  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(5; -6; 2)$ ,  $C(1; 3; -1)$ . Вычислить длины его высот.

8. Даны три вектора:  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ;  $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ;  $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Требуется:

- 1) вычислить смешанное произведение векторов  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ;
- 2) установить, компланарны ли векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ;
- 3) определить, какой является тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (правой или левой);
- 4) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

9. Проверить, лежат ли точки  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$ ,  $D(2; 1; 3)$  в одной плоскости.

10. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(5; 5; 4)$ ,  $C(3; 2; -1)$  и  $D(4; 1; 3)$ .

11. Даны вершины тетраэдра:  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(4; 1; -2)$ ,  $C(6; 3; 7)$  и  $D(-5; -4; 8)$ . Найти длину его высоты, опущенной из вершины  $D$ .

### 3

1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 5$ , вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  и  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ , вычислить: 1)  $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ ; 2)  $((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}))^2$ .

3. Даны точки  $A(2; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; -1)$  и  $C(3; 2; 1)$ . Найти координаты векторных произведений: 1)  $\overline{AB} \times \overline{BC}$ ; 2)  $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$ .

4. Даны точки  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 0; -3)$  и  $C(5; 2; 6)$ . Вычислить площадь треугольника  $ABC$ .

5. Проверить, лежат ли точки  $A(2; -1; 0)$ ,  $B(1; 4; -1)$ ,  $C(2; 3; -1)$ ,  $D(4; 5; 1)$  в одной плоскости. Если не лежат, то определить:

1) какой является тройка векторов  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  – правой или левой;

2) высоту пирамиды, построенной на векторах  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ , опущенную из вершины  $C$ .

### 3.

. Даны два неколлинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построить векторы:

1.1. а)  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;      б)  $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ ;      в)  $-\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .

1.2. а)  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ;      б)  $-2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;      в)  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ .

1.3. а)  $\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b}$ ;      б)  $2\vec{a} + 4\vec{b}$ ;      в)  $-3\vec{a} - \vec{b}$ .

1.4. а)  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$ ;      б)  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ;      в)  $3\vec{a} + 4\vec{b}$ .

1.5. а)  $2\vec{b} - 3\vec{a}$ ;      б)  $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ ;      в)  $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

1.6. а)  $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ;      б)  $-\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$ ;      в)  $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

1.7. а)  $-\vec{a} - \vec{b}$ ;      б)  $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ;      в)  $\frac{1}{4}\vec{a} - 4\vec{b}$ .

1.8. а)  $-2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;      б)  $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ;      в)  $4\vec{a} + 2\vec{b}$ .

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1.9. a) $3\bar{a} + 2\bar{b}$ ;                      | б) $-2\bar{a} - \bar{b}$ ;                      | в) $\frac{1}{4}\bar{a} + 5\bar{b}$ .            |
| 1.10. a) $-3\bar{a} - 2\bar{b}$ ;                    | б) $2\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$ ;            | в) $3\bar{a} - \frac{1}{3}\bar{b}$ .            |
| 1.11. a) $-\bar{b} - 4\bar{a}$ ;                     | б) $\frac{1}{3}\bar{a} + 5\bar{b}$ ;            | в) $3\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$ .            |
| 1.12. a) $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$ ; | б) $3\bar{a} - 4\bar{b}$ ;                      | в) $-2\bar{a} - 4\bar{b}$ .                     |
| 1.13. a) $-\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$ ;           | б) $\frac{1}{3}\bar{a} + 5\bar{b}$ ;            | в) $-3\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b}$ .           |
| 1.14. a) $-2\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$ ;          | б) $\frac{1}{2}\bar{a} + 3\bar{b}$ ;            | в) $-3\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$ .           |
| 1.15. a) $-3\bar{a} - 2\bar{b}$ ;                    | б) $\frac{1}{4}\bar{a} - 4\bar{b}$ ;            | в) $2\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b}$ .            |
| 1.16. a) $5\bar{a} - \bar{b}$ ;                      | б) $\frac{1}{4}\bar{a} + 3\bar{b}$ ;            | в) $-2\bar{a} - \frac{1}{3}\bar{b}$ .           |
| 1.17. a) $4\bar{a} - \frac{3}{4}\bar{b}$ ;           | б) $-\frac{2}{5}\bar{a} - \frac{7}{9}\bar{b}$ ; | в) $2\bar{a} + \frac{1}{5}\bar{b}$ .            |
| 1.18. a) $-\bar{a} + \frac{3}{5}\bar{b}$ ;           | б) $3\bar{a} + 4\bar{b}$ ;                      | в) $-\frac{3}{4}\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}$ . |
| 1.19. a) $3\bar{a} + \frac{7}{8}\bar{b}$ ;           | б) $-\frac{1}{7}\bar{a} + 3\bar{b}$ ;           | в) $-2\bar{a} - \frac{4}{9}\bar{b}$ .           |
| 1.20. a) $-2\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$ ;          | б) $\frac{3}{5}\bar{a} - 3\bar{b}$ ;            | в) $-\frac{2}{3}\bar{a} - 4\bar{b}$ .           |
| 1.21. a) $2\bar{a} + \frac{5}{3}\bar{b}$ ;           | б) $5\bar{a} - 3\bar{b}$ ;                      | в) $-\frac{2}{7}\bar{a} - 2\bar{b}$ .           |
| 1.22. a) $-2\bar{a} - \frac{3}{2}\bar{b}$ ;          | б) $\frac{5}{8}\bar{a} + 2\bar{b}$ ;            | в) $\bar{a} - 3\bar{b}$ .                       |
| 1.23. a) $-\bar{a} - 4\bar{b}$ ;                     | б) $\frac{3}{4}\bar{a} + 2\bar{b}$ ;            | в) $-3\bar{a} + \frac{5}{2}\bar{b}$ .           |
| 1.24. a) $2\bar{a} - 3\bar{b}$ ;                     | б) $\frac{3}{7}\bar{a} + \frac{7}{3}\bar{b}$ ;  | в) $-4\bar{a} - \frac{4}{9}\bar{b}$ .           |

- 1.25. а)  $-2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ ; б)  $3\vec{a} - \frac{3}{7}\vec{b}$ ; в)  $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ .
- 1.26. а)  $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$ ; б)  $2\vec{a} - \frac{8}{3}\vec{b}$ ; в)  $\frac{3}{8}\vec{b} - \frac{4}{3}\vec{a}$ .
- 1.27. а)  $\frac{2}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$ ; б)  $\frac{7}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ; в)  $-\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{4}\vec{b}$ .
- 1.28. а)  $-3\vec{a} + 1,5\vec{b}$ ; б)  $\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ ; в)  $-4\vec{a} - 1,5\vec{b}$ .
- 1.29. а)  $\frac{3}{2}\vec{a} + 2,5\vec{b}$ ; б)  $-2\vec{a} + 3,5\vec{b}$ ; в)  $-3\vec{a} - \vec{b}$ .
- 1.30. а)  $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ ; б)  $-2\vec{a} + 1,5\vec{b}$ ; в)  $-2,5\vec{a} - 2\vec{b}$ .

**2. Найти длину вектора  $\overline{AB}$  и его направляющие косинусы.**

- 2.1.  $A(1; 2; 0), B(3; 0; 3)$ .      2.2.  $A(0; 6; 4), B(3; 5; 3)$ .  
 2.3.  $A(3; 0; 1), B(-1; 2; 0)$ .      2.4.  $A(3; -1; 2), B(1; 2; -1)$ .  
 2.5.  $A(1; 3; -1), B(1; -1; 3)$ .      2.6.  $A(1; 2; -1), B(-1; 1; -3)$ .  
 2.7.  $A(3; 1; 4), B(-1; 6; 1)$ .      2.8.  $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1)$ .  
 2.9.  $A(2; -1; 2), B(1; 2; -1)$ .      2.10.  $A(3; -4; 2), B(4; -2; 0)$ .

2.11. Доказать коллинеарность векторов  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{b}(-6; 3; -9)$ . Установить, какой из них длиннее и во сколько раз и как они относительно друг друга направлены.

2.12. Определить, при каких значениях  $\lambda$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a}(-2; 3; \beta)$  и  $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$  коллинеарны.

2.13. Найти орт вектора  $\vec{a}(6; -2; -3)$ .

2.14. Дан вектор  $\vec{c} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ . Найти вектор  $\vec{d}$ , противоположно направленный к вектору  $\vec{c}$ , если  $|\vec{d}| = 27$ .

2.15. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(3; -5; 8)$ ,  $\vec{b}(-1; 1; -4)$ .

2.16. Векторы  $\overline{AB}(2; 6; -4)$  и  $\overline{AC}(4; 2; -2)$  являются сторонами  $\triangle ABC$ . Определить координаты векторов, проведенных из вершин треугольника и совпадающих с его медианами  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$ ,  $\overline{CD}$ .

2.17. В точке  $A(1; 3)$  приложена сила, проекции которой на оси координат равны:  $x = 3$ ,  $y = 4$ . Определить конец вектора  $\overline{AB}$ , изображающего силу и величину силы.

2.18. Даны три вершины параллелограмма:  $A(3; -4; 7)$ ,  $B(-5; 3; -2)$ ,  $C(1; 2; -3)$ . Найти его четвертую вершину  $D$ , противоположную вершине  $B$ .

2.19. Доказать, что точки  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(-1; 1; -3)$ ,  $C(1; 2; -1)$ ,  $D(3; -5; 3)$  являются вершинами трапеции. Найти длины ее параллельных сторон.

2.20. В точке  $A(-3; -2)$  приложена сила, проекция которой  $y = -1$ , а проекция  $x$  положительна. Определить конец вектора  $\overline{AB}$ , изображающего силу, если его величина равна  $5\sqrt{2}$ .

2.21. Найти единичный вектор, перпендикулярный вектору  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и оси  $Oy$ .

2.22. Найти вектор  $\vec{x}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a}(1; 2; -3)$  и удовлетворяющий условию  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 12$ .

2.23. Найти направляющие косинусы вектора, перпендикулярного к оси  $Oz$  и к вектору  $\overline{AB}$ , проходящему через точки  $A(1; -1; 4)$  и  $B(-3; 2; 4)$ .

2.24. Вектор  $\vec{m}$ , перпендикулярный к оси  $Oz$  и к вектору  $\vec{a}(8; -15; 3)$ , образует острый угол с осью  $Ox$ . Зная, что длина вектора  $|\vec{m}| = 51$ , найти его координаты.

2.25. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ , у которого длины сторон равны 1. Полагая, что  $\overline{BC} = \vec{a}$ ,  $\overline{CA} = \vec{b}$ ,  $\overline{AB} = \vec{c}$ , вычислить выражение  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

2.26. Найти единичный вектор, перпендикулярный к векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

2.27. Даны силы  $\vec{F}_1(3; -4; 2)$ ,  $\vec{F}_2(2; 3; -5)$ ,  $\vec{F}_3(-3; -2; 4)$ , приложенные к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки  $B(5; 3; -7)$  в точку  $C(4; -1; -4)$ .

2.28. На материальную точку действуют силы  $\vec{F}_1(2; 0; 3)$ ,  $\vec{F}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{F}_3 = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ . Найти работу равнодействующей этих сил при перемещении из точки  $B(-2; 5; -1)$  в точку  $C(0; 0; -3)$ .

2.29. Упростить выражение  $\vec{a}^2 + 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 1$ , если  $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ , где  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$ .

2.30. Определить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$  и  $\vec{a} - 2\vec{b}$  будут взаимно перпендикулярны, если  $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ .

Разложить аналитически и геометрически вектор  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$

3.1.  $\vec{a}(6; 5)$ ,  $\vec{b}(3; 1)$ ,  $\vec{c}(-4; -1)$ .

3.2.  $\vec{a}(7; 4)$ ,  $\vec{b}(3; 4)$ ,  $\vec{c}(2; -5)$ .

3.3.  $\vec{a}(6; 5)$ ,  $\vec{b}(3; 4)$ ,  $\vec{c}(1; 1)$ .

3.4.  $\vec{a}(4; 8)$ ,  $\vec{b}(5; 7)$ ,  $\vec{c}(2; 4)$ .

3.5.  $\vec{a}(8; 15)$ ,  $\vec{b}(5; 3)$ ,  $\vec{c}(-4; 1)$ .

3.6.  $\vec{a}(11; -3)$ ,  $\vec{b}(2; 1)$ ,  $\vec{c}(-5; 6)$ .

3.7.  $\vec{a}(5; 12)$ ,  $\vec{b}(4; 3)$ ,  $\vec{c}(1; -2)$ .

3.8.  $\vec{a}(-1; -17)$ ,  $\vec{b}(3; 7)$ ,  $\vec{c}(-5; 3)$ .

3.9.  $\vec{a}(21; 20)$ ,  $\vec{b}(5; 2)$ ,  $\vec{c}(3; 5)$ .

3.10.  $\vec{a}(12; 5)$ ,  $\vec{b}(5; 4)$ ,  $\vec{c}(-2; 3)$ .

3.11.  $\vec{a}(1; 5)$ ,  $\vec{b}(6; 8)$ ,  $\vec{c}(5; 3)$ .

3.12.  $\vec{a}(-17; 1)$ ,  $\vec{b}(2; 4)$ ,  $\vec{c}(-3; 1)$ .

3.13.  $\vec{a}(8; 3)$ ,  $\vec{b}(9; 4)$ ,  $\vec{c}(2; 1)$ .

3.14.  $\vec{a}(6; 13)$ ,  $\vec{b}(4; 3)$ ,  $\vec{c}(3; -2)$ .

3.15.  $\vec{a}(9; 6)$ ,  $\vec{b}(2; 5)$ ,  $\vec{c}(3; 2)$ .

3.16.  $\vec{a}(9; 10)$ ,  $\vec{b}(5; 3)$ ,  $\vec{c}(1; -4)$ .

- 3.17.  $\vec{a}(4; 12), \vec{b}(1; 3), \vec{c}(2; 1)$ .  
 3.18.  $\vec{a}(2; 8), \vec{b}(1; 2), \vec{c}(2; 3)$ .  
 3.19.  $\vec{a}(1; 6), \vec{b}(5; 1), \vec{c}(-3; 11)$ .  
 3.20.  $\vec{a}(10; 16), \vec{b}(7; 3), \vec{c}(2; -5)$ .  
 3.21.  $\vec{a}(1; 4), \vec{b}(2; 3), \vec{c}(3; 5)$ .  
 3.22.  $\vec{a}(5; 11), \vec{b}(3; 1), \vec{c}(5; -3)$ .  
 3.23.  $\vec{a}(4; 1), \vec{b}(3; 2), \vec{c}(1; 4)$ .  
 3.24.  $\vec{a}(13; 15), \vec{b}(4; 2), \vec{c}(-7; 5)$ .  
 3.25.  $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(1; 1), \vec{c}(1; -1)$ .  
 3.26.  $\vec{a}(0; 7), \vec{b}(1; 3), \vec{c}(-2; 1)$ .  
 3.27.  $\vec{a}(-6; 18), \vec{b}(3; 3), \vec{c}(-4; 4)$ .  
 3.28.  $\vec{a}(4; 3), \vec{b}(1; 2), \vec{c}(4; 1)$ .  
 3.29.  $\vec{a}(13; 17), \vec{b}(3; 2), \vec{c}(-5; 7)$ .  
 3.30.  $\vec{a}(-2; -5), \vec{b}(1; 3), \vec{c}(-2; -7)$ .

Вычислить длины векторов  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ , угол между ними  $(\vec{a}; \vec{b})$  и проекцию  $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b})$ .

- 4.1.  $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{g}, \vec{b} = 3\vec{p} + 6\vec{g}, |\vec{p}| = 1, |\vec{g}| = 2, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{\pi}{3}$ .  
 4.2.  $\vec{a} = \vec{p} - \vec{g}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{g}, |\vec{p}| = 2, |\vec{g}| = 4, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{2\pi}{3}$ .  
 4.3.  $\vec{a} = 2\vec{p}, \vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{g}, |\vec{p}| = 2, |\vec{g}| = 1, (\vec{p}; \vec{g}) = \pi$ .  
 4.4.  $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{g}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{g}, |\vec{p}| = 3, |\vec{g}| = 3, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{\pi}{3}$ .  
 4.5.  $\vec{a} = 3\vec{g}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{g}, |\vec{p}| = 4, |\vec{g}| = 4, (\vec{p}; \vec{g}) = 0$ .  
 4.6.  $\vec{a} = \vec{p} + \vec{g}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{g}, |\vec{p}| = 1, |\vec{g}| = 2, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{\pi}{3}$ .

$$4.7. \vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{g}, \vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{g}, |\vec{p}| = 1, |\vec{g}| = 1, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$4.8. \vec{a} = \vec{p} - \vec{g}, \vec{b} = 4\vec{p} + 6\vec{g}, |\vec{p}| = 2, |\vec{g}| = 3, (\vec{p}; \vec{g}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$4.9. \vec{a} = 2\vec{p} - \vec{g}, \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{g}, |\vec{p}| = 1, |\vec{g}| = 2, (\vec{p}; \vec{g}) = \pi.$$

$$4.10. \vec{a} = \vec{p} - 2\vec{g}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{g}, |\vec{p}| = 2, |\vec{g}| = 5, (\vec{p}; \vec{g}) = 0.$$

4.11. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{g}$  и  $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{g}$ , если  $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{g}| = 3$  и угол между ними  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

4.12. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  – единичные векторы, угол между которыми  $60^\circ$ .

4.13. Доказать, что вектор  $\vec{p} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$  перпендикулярен к вектору  $\vec{a}$ .

4.14. Доказать, что вектор  $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2}$  перпендикулярен к вектору  $\vec{a}$ .

4.15. Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный к другому сомножителю.

4.16. Вычислить, какую работу производит сила  $\vec{F}(3; -2; -5)$ , когда точка ее приложения перемещается прямолинейно из точки  $A(2; -3; 5)$  в точку  $B(3; -2; -1)$ .

4.17. Силы  $\vec{F}_1(3; -4; 2)$ ,  $\vec{F}_2(2; 3; -5)$ ,  $\vec{F}_3(-3; -2; 4)$  приложены к одной точке. Вычислить величину и направляющие косинусы равнодействующей.

4.18. Найти единичный вектор, перпендикулярный к вектору  $\vec{a}(3; 6; 8)$  и к оси  $Ox$ .

4.19. Найти вектор  $\vec{x}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a}(1; 2; 3)$  и удовлетворяющий условию  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 28$ .

4.20. В плоскости  $xOy$  найти вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярный к вектору  $\vec{a}(1; -2; 2)$ , имеющий одинаковую с ним длину.

4.21. На плоскости  $xOy$  построить радиус-векторы  $\vec{a} = 2\vec{i}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Разложить геометрически и аналитически вектор  $\vec{c}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

4.22. Разложить вектор  $\vec{a} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$  по векторам  $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{g} = \vec{i} + 2\vec{j}$  аналитически и геометрически.

4.23. Разложить вектор  $\vec{a}(1; 6)$  по векторам  $\vec{m}(5; 1)$  и  $\vec{n}(-3; 11)$  аналитически и геометрически.

4.24. Вектор  $\vec{a}(11; -3)$  разложить по векторам  $\vec{m}(2; 1)$  и  $\vec{n}(-5; 6)$  аналитически и геометрически.

4.25. Найти разложение вектора  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  аналитически и геометрически:  $\vec{a}(1; 5)$ ,  $\vec{m}(6; 8)$ ,  $\vec{n}(5; 3)$ .

4.26. Разложить вектор  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  аналитически и геометрически:  $\vec{a}(8; 15)$ ,  $\vec{m}(5; 3)$ ,  $\vec{n}(-4; 1)$ .

4.27. Разложить вектор  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  аналитически и геометрически:  $\vec{a}(7; -3)$ ,  $\vec{m}(2; 1)$ ,  $\vec{n}(-3; 5)$ . Будут ли векторы линейно зависимы?

4.28.  $\vec{a}(3; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(-6; 2; -4)$ ,  $\vec{c}(1; 0; -2)$ .

4.29.  $\vec{a}(-1; 2; 0)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 3)$ ,  $\vec{c}(3; 4; 6)$ .

4.30.  $\vec{a}(-1; -1; 1)$ ,  $\vec{b}(0; 4; -2)$ ,  $\vec{c}(-2; 0; -4)$ .

5. Сила  $\vec{F}$  приложена к вершине  $A$  треугольника  $ABC$ . Вычислить работу силы  $\vec{F}$  по сторонам  $AB$  и  $AC$ , момент силы относительно середины стороны  $BC$ .

5.1.  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(0; -1; 2)$ ,  $C(2; -3; 6)$ ,  $\vec{F}(1; 0; 3)$ .

5.2.  $A(6; 0; -5)$ ,  $B(3; 4; 1)$ ,  $C(1; -2; 1)$ ,  $\vec{F}(2; 3; 7)$ .

5.3.  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(7; 2; 1)$ ,  $C(3; 0; 1)$ ,  $\vec{F}(8; 0; 1)$ .

5.4.  $A(0; 3; -5)$ ,  $B(7; 8; -4)$ ,  $C(1; 2; -2)$ ,  $\vec{F}(5; -1; 2)$ .

5.5.  $A(-1; 3; 0)$ ,  $B(6; 5; -2)$ ,  $C(0; 1; 2)$ ,  $\vec{F}(2; 1; 3)$ .

$$5.6. A(5; 2; -1), B(3; 0; 4), C(1; 2; -2), \overline{F}(1; 3; -5).$$

$$5.7. A(3; 1; 4), B(-2; 4; 6), C(6; 0; 10), \overline{F}(1; 4; 0).$$

$$5.8. A(6; 2; 0), B(-4; 10; 5), C(-2; 6; 9), \overline{F}(3; 2; 4).$$

$$5.9. A(3; 2; -1), B(5; 3; 3), C(1; 10; 5), \overline{F}(5; 1; 2).$$

$$5.10. A(2; 0; 8), B(4; 5; -2), C(6; 3; 0), \overline{F}(1; 7; -3).$$

Вычислить площадь треугольника  $ABC$ ; длину высоты, проведенной из вершины  $B$ ; угол  $BAC$ ;  $(3\overline{AB} + 2\overline{BC}) \times \overline{AC}$ .

$$5.11. A(3; 2; 1); B(6; 2; 5); C(-1; 2; 1).$$

$$5.12. A(1; 3; -1); B(2; 0; 4); C(1; 5; -2).$$

$$5.13. A(2; 0; 3); B(1; 1; 2); C(3; 1; 4).$$

$$5.14. A(1; 2; 3); B(2; 1; -3); C(3; 0; 4).$$

$$5.15. A(1; -2; 0); B(5; 4; 1); C(1; -1; -1).$$

$$5.16. A(0; 1; 2); B(-1; 3; 2); C(3; 3; 1).$$

$$5.17. A(2; 1; 3); B(-1; 2; 0); C(3; 2; 5).$$

$$5.18. A(5; 3; 2); B(4; 1; 0); C(8; 4; 3).$$

$$5.19. A(2; 0; -1); B(3; 4; -1); C(2; 1; 0).$$

$$5.20. A(5; -2; 1); B(2; -1; 6); C(6; 1; 3).$$

Диагонали параллелограмма лежат на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Вычислить площадь и меньшую высоту параллелограмма.

$$5.21. |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{3}. \quad 5.26. |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 4, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$5.22. |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 1, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{2}. \quad 5.27. |\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 7, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$5.23. |\vec{a}| = 2,5, |\vec{b}| = 2, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{4}. \quad 5.28. |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.24. |\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 2, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}. \quad 5.29. |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$5.25. |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{6}. \quad 5.30. |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 3, (\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

**6.** Проверить, лежат ли точки  $A, B, C, D$  в одной плоскости.

$$6.1. A(1; -2; 3), B(1; 0; -1), C(3; 2; 4), D(0; -2; 1).$$

$$6.2. A(3; 0; -1), B(2; 1; 4), C(5; 2; -2), D(-1; -4; 1).$$

- 6.3.  $A(2; 1; -5), B(3; 0; 1), C(-2; 7; 1), D(4; 3; 1)$ .  
 6.4.  $A(5; 1; -1), B(4; 1; 2), C(0; 3; -5), D(3; 2; 1)$ .  
 6.5.  $A(6; 3; -2), B(0; 2; 5), C(3; 4; 1), D(0; 5; 4)$ .  
 6.6.  $A(1; 5; 2), B(-3; 1; 1), C(7; 9; 0), D(1; 2; -3)$ .  
 6.7.  $A(4; 2; -1), B(3; 1; 6), C(-2; 5; -4), D(8; 0; 1)$ .  
 6.8.  $A(2; 1; 5), B(0; 11; 2), C(3; 8; 1), D(6; 2; 7)$ .  
 6.9.  $A(3; 2; 1), B(-1; 2; 0), C(3; 5; -2), D(11; 2; 3)$ .  
 6.10.  $A(2; 6; 3), B(0; -3; 5), C(7; 2; -1), D(-3; 10; 7)$ .

Вершины тетраэдра расположены в точках  $A, B, C, D$ . Вычислить его объем и высоту, опущенную из вершины  $A$  на грань  $BCD$ .

- 6.11.  $A(-1; 0; 5), B(1; 2; -1), C(0; 2; 2), D(-1; 0; 2)$ .  
 6.12.  $A(-5; 4; 8), B(2; 3; 1), C(4; 1; -2), D(6; 3; 7)$ .  
 6.13.  $A(2; -4; 5), B(-1; 3; 4), C(5; 5; -1), D(1; -2; 2)$ .  
 6.14.  $A(0; 0; 0), B(3; 4; -1), C(2; 3; 5), D(6; 0; -3)$ .  
 6.15.  $A(3; 2; -6), B(4; -1; 3), C(-2; 1; 0), D(0; -5; 1)$ .  
 6.16.  $A(3; 4; 5), B(-1; 2; -3), C(4; -1; 0), D(2; 1; -2)$ .  
 6.17.  $A(7; 5; -3), B(2; 3; 1), C(4; 1; -2), D(6; 3; 7)$ .  
 6.18.  $A(-4; 3; -12), B(1; 5; -7), C(-3; 6; 3), D(-2; 7; 3)$ .  
 6.19.  $A(8; 4; -9), B(1; 2; 0), C(3; 0; -3), D(5; 2; 6)$ .  
 6.20.  $A(-1; 0; -2), B(1; 1; 2), C(-1; 1; 3), D(2; -2; 4)$ .

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и его высоту, опущенную на грань, лежащую на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$ .

- 6.21.  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .  
 6.22.  $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ .  
 6.23.  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 7\vec{k}$ .  
 6.24.  $\vec{a} = \vec{i} + 7\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ .  
 6.25.  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 8\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .  
 6.26.  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .  
 6.27.  $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ .  
 6.28.  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ .  
 6.29.  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .  
 6.30.  $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

1.1. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(-1; -1; -2)$ ,  $\vec{F}_2(1; -1; -2)$ ,  $\vec{F}_3(-2; -1; -1)$  равна ...

- 1)  $(-2; -3; -5)$ ; 2)  $(-1; 3; -3)$ ; 3)  $(-2; 0; 5)$ ; 4)  $(-3; -3; -3)$ .

1.2. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(1; 2; 3)$ ,  $\vec{F}_2(1; -1; -2)$ ,  $\vec{F}_3(-2; -1; -1)$  равна ...

- 1)  $\vec{0}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $2\vec{i}$ ; 4) 0.

1.3. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(-1; -1; -2)$ ,  $\vec{F}_2(3; 2; 4)$ ,  $\vec{F}_3(-1; 0; -1)$  равна ...

- 1)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $3\vec{i} - \vec{j}$ ; 3) 0; 4)  $\vec{e}$ .

1.4. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(3; -5; 7)$ ,  $\vec{F}_2(-2; 3; 7)$ ,  $\vec{F}_3 = 3\vec{i} - 14\vec{k}$  равна ...

- 1)  $4\vec{i} - 2\vec{k}$ ; 2)  $(4; 1; -2)$ ; 3)  $(4; 4; -4)$ ; 4)  $4\vec{i} - 2\vec{j}$ .

1.5. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(1; 0; 9)$ ,  $\vec{F}_2(-2; 2; -5)$ ,  $\vec{F}_3(1; -3; -3)$  равна ...

- 1)  $\vec{i} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} - \vec{j}$ ; 3)  $-\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} + \vec{k}$ .

1.6. Заданы векторы  $\vec{a}(1; 0; -1)$ ,  $\vec{b}(0; 1; 2)$ ,  $\vec{c}(2; 1; 0)$ . Найти  $2\vec{a} + (3\vec{b} + \vec{c})$ .

- 1)  $4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 2)  $4\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 3)  $4\vec{i} - 2\vec{j}$ ; 4)  $4\vec{j} + 3\vec{k}$ .

1.7. Заданы векторы  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Найти  $2\vec{a} + (3\vec{b} + \vec{c})$ .

- 1)  $(2; -4; 4)$ ; 2)  $(0; 3; 2)$ ; 3)  $(1; 4; 0)$ ; 4)  $(4; 4; 4)$ .

1.8. Заданы векторы  $\vec{a}(-4; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(1; 0; 3)$ ,  $\vec{c}(-1; -1; -2)$ . Найти  $(\vec{a} + \vec{b}) + 3\vec{c}$ .

- 1)  $-6\vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $-6\vec{i} - \vec{j}$ ; 4)  $\vec{0}$ .

1.9. Найти  $(\vec{a} + \vec{b}) + 3\vec{c}$ , если заданы векторы  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{a}(-4; 2; 3)$ ,  $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ .

- 1)  $(-6; -1; 0)$ ; 2)  $(1; 1; 1)$ ; 3)  $(-6; 0; -1)$ ; 4)  $(0; 0; 0)$ .

1.10. Найти  $\vec{a} - (\vec{b} + 3\vec{c})$ , если заданы векторы  $\vec{a}(2; -3; 4)$ ,  $\vec{b}(-1; -2; 0)$ ,  $\vec{c}(0; 4; 3)$ .

- 1)  $(3; 13; -6)$ ; 2)  $4\vec{i} + 6\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} - 13\vec{j} - 5\vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ .

1.11. Заданы векторы  $\vec{a}(2; -3; 4)$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ . Найти  $\vec{a} - (\vec{b} + 3\vec{c})$ .

- 1)  $(3; -1; 5)$ ; 2)  $(4; 0; 6)$ ; 3)  $(3; 13; -6)$ ; 4)  $(3; -13; -5)$ .

1.12. Заданы векторы  $\vec{a}(4; 5; -3)$ ,  $\vec{b}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{c}(6; 7; 0)$ . Найти  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

- 1)  $-\vec{i}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j}$ ; 3)  $-\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

1.13. Заданы векторы  $\vec{a}(4; 5; -3)$ ,  $\vec{c} = 6\vec{i} + 7\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Найти  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

- 1)  $(1; 1; 0)$ ; 2)  $(-1; 0; 0)$ ; 3)  $(0; 0; -1)$ ; 4)  $(1; 1; -1)$ .

1.14. Заданы векторы  $\vec{a}(6; -2; 4)$ ,  $\vec{b}(-3; -3; -3)$ ,  $\vec{c}(2; 1; -2)$ . Найти  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$ .

- 1)  $\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ .

1.15. Заданы векторы  $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b}(-3; -3; -3)$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Найти  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$ .

- 1)  $(1; -5; 1)$ ; 2)  $(2; 4; -2)$ ; 3)  $(1; -3; 5)$ ; 4)  $(1; -6; 3)$ .

1.16. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(2; -1; 0)$ ,  $\vec{F}_2(0; -1; 4)$ ,  $\vec{F}_3(5; 1; -2)$  равна...

- 1)  $(7; -2; 1)$ ; 2)  $(2; -1; 7)$ ; 3)  $(7; -1; 2)$ ; 4)  $(2; 7; -1)$ .

1.17. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(5; 0; 6)$ ,  $\vec{F}_2(-1; -6; 4)$ ,  $\vec{F}_3(5; 8; -1)$  равна...

- 1)  $(9; 9; 9)$ ; 2)  $(9; 2; 9)$ ; 3)  $(2; 9; 2)$ ; 4)  $(2; 2; 2)$ .

1.18. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(3; 2; 1)$ ,  $\vec{F}_2(-1; 2; 5)$ ,  $\vec{F}_3(2; -1; -2)$  равна...

- 1)  $(4; 3; 4)$ ; 2)  $(4; 4; 4)$ ; 3)  $(3; 3; 3)$ ; 4)  $(3; 4; 3)$ .

1.19. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(6; -1; -2)$ ,  $\vec{F}_2(-1; 0; -1)$ ,  $\vec{F}_3(-2; -3; -1)$  равна...

- 1)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 4)  $\vec{0}$ .

1.20. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(-1; -1; 2)$ ,  $\vec{F}_2(2; 2; -1)$ ,  $\vec{F}_3(-3; 2; 0)$  равна...

- 1)  $\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ; 3)  $-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} - 2\vec{j}$ .

1.21. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(3; 4; 5)$ ,  $\vec{F}_2(-1; 0; -1)$ ,  $\vec{F}_3(2; 2; 3)$  равна...

- 1)  $4\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ ; 2)  $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} + 3\vec{k}$ ; 4)  $-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

1.22. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(1; -1; 5)$ ,  $\vec{F}_2(-1; 0; -1)$ ,  $\vec{F}_3(0; -3; 1)$  равна...

- 1)  $4\vec{i} + 5\vec{k}$ ; 2)  $-4\vec{i} + 5\vec{j}$ ; 3)  $3\vec{i} + 3\vec{k}$ ; 4)  $-4\vec{j} + 5\vec{k}$ .

1.23. Равнодействующая сил  $\vec{F}_1(1; 2; 4)$ ,  $\vec{F}_2(0; -1; -1)$ ,  $\vec{F}_3(3; 2; 1)$  равна...

- 1)  $3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 4)  $4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ .

1.24. Заданы векторы  $\vec{a}(1; -1; 0)$ ,  $\vec{b}(0; 2; 3)$ ,  $\vec{c}(2; 3; -2)$ . Найти  $2\vec{a} + (\vec{b} - \vec{c})$ .

- 1)  $\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ ; 2)  $-2\vec{j} + 5\vec{k}$ ; 3)  $2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ ; 4)  $-3\vec{j} + 5\vec{k}$ .

1.25. Заданы векторы  $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ . Найти  $\vec{a} + (\vec{b} + 2\vec{c})$ .

- 1)  $8\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ; 2)  $6\vec{i}$ ; 3)  $7\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $9\vec{i} + 4\vec{j}$ .

1.26. Заданы векторы  $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{k}$ ,  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Найти  $(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{c}$ .

- 1)  $4\vec{i} + 2\vec{k}$ ; 2)  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ ; 3)  $13\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$ ; 4)  $9\vec{i} + 3\vec{k}$ .

1.27. Заданы векторы  $\vec{a}(1; 1; 1)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 2)$ ,  $\vec{c}(3; 1; -1)$ . Найти  $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ .

- 1)  $\vec{0}$ ; 2)  $-4$ ; 3)  $\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ ; 4)  $-4\vec{k}$ .

1.28. Заданы векторы  $\vec{a}(-1; -2; 5)$ ,  $\vec{b}(-3; 5; -2)$ ,  $\vec{c}(1; 1; 1)$ . Найти  $2\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ .

- 1)  $-10\vec{j}+11\vec{k}$ ; 2)  $\vec{i}+10\vec{j}+11\vec{k}$ ; 3)  $11\vec{j}+10\vec{k}$ ; 4)  $10\vec{k}$ .

1.29. Заданы векторы  $\vec{a}(-1;-1;-1)$ ,  $\vec{b}(-2;0;-2)$ ,  $\vec{c}(0;1;2)$ . Найти  $3\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ .

- 1)  $-3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$ ; 2)  $-5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ ; 3)  $2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ ; 4)  $-3\vec{i}+2\vec{k}$ .

1.30. Заданы векторы  $\vec{a}(2;3;1)$ ,  $\vec{b}(-1;-2;-3)$ ,  $\vec{c}(0;2;3)$ . Найти  $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$ .

- 1)  $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ; 2)  $3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов

ответов.

2.1. Если  $A(2;7)$ ,  $B(5;11)$ , то длина вектора  $\overline{AB}$  равна ...

- 1) 10; 2) 7; 3) 1; 4) 5.

2.2. Если  $\vec{r}_A(2;7)$ ,  $\vec{r}_B(5;11)$ , то длина вектора  $\overline{AB}$  равна ...

- 1) 5; 2) 7; 3) 1; 4) 10.

2.3. Если  $B(-2;4)$ ,  $C(4;12)$ , то  $|\overline{BC}|$  равен ...

- 1) 8; 2) 5; 3) 10; 4) 7.

2.4. Если  $\vec{r}_B(-2;4)$ ,  $\vec{r}_C(4;12)$ , то  $|\overline{BC}|$  равен ...

- 1) 10; 2) 5; 3) 8; 4) 7.

2.5. Если  $C(5;11)$ ,  $M(2;7)$ , то  $|\overline{CM}|$  равен ...

- 1) 4; 2) 1; 3) 5; 4) 2.

2.6. Если  $\vec{r}_C = 5\vec{i}+11\vec{k}$ ,  $\vec{r}_M = 2\vec{i}+7\vec{k}$ , то  $|\overline{CM}|$  равен ...

- 1) 5; 2) 1; 3) 4; 4) 2.

2.7. Если  $K(1;5)$ ,  $L(4;-4)$ , то  $|\overline{KL}|$  равен...

- 1)  $3\sqrt{10}$ ; 2) 10; 3) 5; 4)  $10\sqrt{3}$ .

2.8. Если  $\vec{r}_L = 4\vec{i}-4\vec{j}$ ,  $\vec{r}_K = \vec{i}+5\vec{j}$ , то  $|\overline{KL}|$  равен ...

- 1)  $3\sqrt{10}$ ; 2) 10; 3) 5; 4)  $10\sqrt{3}$ .

2.9. Если  $O(7;-5)$ ,  $M(9;-3)$ , то  $|\overline{OM}|$  равен ...

- 1)  $2\sqrt{3}$ ; 2)  $3\sqrt{5}$ ; 3)  $2\sqrt{2}$ ; 4)  $4\sqrt{6}$ .

2.10. Если  $\vec{r}_M = 9\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\vec{r}_O = 7\vec{i} - 5\vec{j}$ , то  $|\overline{OM}|$  равен ...

1)  $2\sqrt{2}$ ; 2)  $3\sqrt{5}$ ; 3)  $2\sqrt{3}$ ; 4)  $4\sqrt{6}$ .

2.11. Если  $E(0; -6)$ ,  $F(3; -7)$ , то  $|\overline{EF}|$  равен ...

1)  $\sqrt{10}$ ; 2) 5; 3) 10; 4)  $2\sqrt{5}$ .

2.12. Если  $\vec{r}_F = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ ,  $\vec{r}_E = -6\vec{j}$ , то  $|\overline{EF}|$  равен ...

1)  $\sqrt{10}$ ; 2) 5; 3) 10; 4)  $2\sqrt{5}$ .

2.13. Направляющий косинус угла между вектором  $\overline{AB}(2; 3; 4)$  и осью  $Ox$  равен ...

1)  $\frac{2}{\sqrt{29}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{29}}$ ; 3)  $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

2.14. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(-2; 3; 4)$  и осью  $Ox$  равен ...

1)  $\frac{-2}{\sqrt{29}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{29}}$ ; 3)  $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

2.15. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(-2; 3; 4)$  и осью  $Oy$  равен ...

1)  $\frac{-2}{\sqrt{29}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{29}}$ ; 3)  $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

2.16. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(-2; 3; 4)$  и осью  $Oz$  равен ...

1)  $\frac{-2}{\sqrt{29}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{29}}$ ; 3)  $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

2.17. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(3; 0; 4)$  и осью  $Ox$  равен ...

1)  $\frac{7}{5}$ ; 2)  $\frac{3}{5}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{4}{5}$ .

2.18. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(3; 0; 4)$  и осью  $Oy$  равен ...

1)  $\frac{7}{5}$ ; 2)  $\frac{3}{5}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{4}{5}$ .

2.19. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(3;0;4)$  и осью  $Oz$  равен ...

1)  $\frac{7}{5}$ ; 2)  $\frac{3}{5}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{4}{5}$ .

2.20. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(1;2;3)$  и осью  $Ox$  равен ...

1)  $\frac{1}{\sqrt{14}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{14}}$ ; 3)  $\frac{2}{\sqrt{14}}$ ; 4)  $\frac{6}{\sqrt{14}}$ .

2.21. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(1;2;3)$  и осью  $Oy$  равен ...

1)  $\frac{1}{\sqrt{14}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{14}}$ ; 3)  $\frac{2}{\sqrt{14}}$ ; 4)  $\frac{6}{\sqrt{14}}$ .

2.22. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(1;2;3)$  и осью  $Oz$  равен ...

1)  $\frac{1}{\sqrt{14}}$ ; 2)  $\frac{3}{\sqrt{14}}$ ; 3)  $\frac{2}{\sqrt{14}}$ ; 4)  $\frac{6}{\sqrt{14}}$ .

2.23. Если  $K(2; -3)$ ,  $M(6; 0)$ , то  $|\overline{KM}|$  равен ...

1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 5.

2.24. Если  $C(1; 2)$ ,  $D(3; 5)$ , то  $|\overline{CD}|$  равен ...

1)  $\sqrt{11}$ ; 2)  $\sqrt{12}$ ; 3)  $\sqrt{13}$ ; 4)  $\sqrt{14}$ .

2.25. Если  $\vec{r}_r = \vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{r}_s = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ , то  $|\overline{RS}|$  равен ...

1)  $\sqrt{17}$ ; 2)  $\sqrt{15}$ ; 3)  $\sqrt{14}$ ; 4)  $\sqrt{13}$ .

2.26. Если  $D(4; 5)$ ,  $E(6; 10)$ , то  $|\overline{DE}|$  равен ...

1)  $\sqrt{28}$ ; 2)  $\sqrt{29}$ ; 3)  $\sqrt{30}$ ; 4)  $\sqrt{31}$ .

2.27. Если  $F(-2; -3)$ ,  $E(2; 1)$ , то  $|\overline{FE}|$  равен ...

1) 4; 2)  $4\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $4\sqrt{2}$ .

2.28. Если  $\vec{r}_k = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{r}_o = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ , то  $|\overline{KO}|$  равен ...

1)  $\sqrt{10}$ ; 2)  $\sqrt{11}$ ; 3)  $\sqrt{12}$ ; 4)  $\sqrt{13}$ .

2.29. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(-3; 0; -4)$  и осью  $Oy$  равен ...

1)  $\frac{1}{5}$ ; 2)  $-\frac{3}{5}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{4}{5}$ .

2.30. Направляющий косинус угла между вектором  $\vec{a}(-3; 0; -4)$  и осью  $Oz$  равен ...

1)  $\frac{7}{5}$ ; 2)  $\frac{3}{5}$ ; 3) 0; 4)  $-\frac{4}{5}$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

3.1. Записать координаты вектора  $\overline{AC}$ , если  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(4; 3; 2)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ; 3)  $-\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - \vec{k}$ .

3.2. Записать координаты вектора  $\overline{CB}$ , если  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(4; 3; 2)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $-\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - \vec{k}$ .

3.3. Записать координаты вектора  $\overline{AC}$ , если  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(6; 7; 0)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $-\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - \vec{k}$ .

3.4. Записать координаты вектора  $\overline{MN}$ , если  $M(2; -3; 1)$ ,  $P(6; 5; 3)$ , а точка  $N$  является серединой отрезка  $MP$ .

1)  $-2\vec{i} + 3\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $4\vec{j} - 2\vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ .

3.5. Записать координаты вектора  $\overline{PN}$ , если  $P(6; 5; 3)$ ,  $M(2; -3; 3)$ , а точка  $N$  является серединой отрезка  $PM$ .

1)  $-(2\vec{i} + 4\vec{j})$ ; 2)  $-2\vec{i} + 3\vec{k}$ ; 3)  $-4\vec{j} - 2\vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ .

3.6. Записать координаты вектора  $\overline{MP}$ , если  $M(2; -3; 1)$ ,  $N(4; 1; 2)$ , а точка  $N$  является серединой отрезка  $PM$ .

1)  $(4; 8; 2)$ ; 2)  $2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $(-4; 8; -4)$ ; 4)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ .

3.7. Записать координаты вектора  $\overline{CE}$ , если  $C(-1; 3; -5)$ ,  $O(3; -3; 3)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $CO$ .

1)  $\vec{j} - 3\vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ .

3.8. Записать координаты вектора  $\overline{EO}$ , если  $C(-1; 3; -5)$ ,  $O(3; -3; 3)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $CO$ .

1)  $2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $\vec{j} - 3\vec{k}$ .

3.9. Записать координаты вектора  $\overline{CO}$ , если  $C(-1; 3; -5)$ ,  $E(1; 0; -1)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $CO$ .

1)  $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$ ; 4)  $\vec{j} - 3\vec{k}$ .

3.10. Записать координаты вектора  $\overline{KM}$ , если  $K(-2; -4; 8)$ ,  $L(2; -6; 4)$ , а точка  $M$  является серединой отрезка  $KL$ .

1)  $3\vec{i} + 4\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 3)  $5\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 4)  $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

3.11. Записать координаты вектора  $\overline{ML}$ , если  $K(-2; -4; 8)$ ,  $L(2; -6; 4)$ , а точка  $M$  является серединой отрезка  $KL$ .

1)  $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 2)  $3\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 3)  $5\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 4)  $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

3.12. Записать координаты вектора  $\overline{KL}$ , если  $K(-2; -4; 8)$ ,  $M(0; -5; 6)$ , а точка  $M$  является серединой отрезка  $KL$ .

1)  $4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{j} + 4\vec{k}$ ; 4)  $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

3.13. Записать координаты вектора  $\overline{AC}$ , если  $A(3; -2; 5)$ ,  $B(-3; 4; -3)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $(2; 5; 2)$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $(-3; 3; -4)$ ; 4)  $5\vec{i} - 4\vec{k}$ .

3.14. Записать координаты вектора  $\overline{CB}$ , если  $A(3; -2; 5)$ ,  $B(-3; 4; -3)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $(-3; 3; -4)$ ; 3)  $(-2; 5; 2)$ ; 4)  $5\vec{i} - 4\vec{k}$ .

3.15. Записать координаты вектора  $\overline{AB}$ , если  $A(3; -2; 5)$ ,  $C(0; 1; 1)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $(-6; 6; -8)$ ; 2)  $(-3; 3; -4)$ ; 3)  $(-2; 5; 2)$ ; 4)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3.16. Записать координаты вектора  $\overline{AB}$ , если  $A(2; 6; -2)$ ,  $C(6; 4; -2)$ , а точка  $B$  является серединой отрезка  $AC$ .

1)  $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} - \vec{j}$ ; 3)  $2\vec{i} + \vec{j}$ ; 4)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3.17. Записать координаты вектора  $\overline{FB}$ , если  $A(-1; 3; 1)$ ,  $B(-5; 11; 1)$ , а точка  $F$  является серединой отрезка  $AB$ .

1)  $-2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $-2\vec{i} + 4\vec{j}$ ; 3)  $4\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $-2\vec{i} + \vec{k}$ .

3.18. Записать координаты вектора  $\overline{MO}$ , если  $M(-7; 3; 2)$ ,  $C(2; -7; 3)$ , а точка  $C$  является серединой отрезка  $MO$ .

1)  $(18; -20; 2)$ ; 2)  $(9; -10; 1)$ ; 3)  $(10; 20; 2)$ ; 4)  $9\vec{i} - \vec{k}$ .

3.19. Записать координаты вектора  $\overline{MN}$ , если  $M(5; -2; 1)$ ,  $K(3; 4; 3)$ , а точка  $N$  является серединой отрезка  $MK$ .

1)  $\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $-\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3.20. Записать координаты вектора  $\overline{CD}$ , если  $C(3; 2; 1)$ ,  $M(5; 4; 3)$ , а точка  $D$  является серединой отрезка  $CM$ .

1)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i}$ ; 3)  $\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $\vec{k}$ .

3.21. Записать координаты вектора  $\overline{LK}$ , если  $L(1; 4; 8)$ ,  $E(2; -1; 0)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $LK$ .

1)  $(10; -2; -16)$ ; 2)  $\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $(1; -5; -8)$ ; 4)  $(2; -10; -16)$ .

3.22. Записать координаты вектора  $\overline{KE}$ , если  $K(2; 4; 3)$ ,  $O(4; 2; 5)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $KO$ .

1)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} + \vec{j}$ ; 4)  $\vec{j} + \vec{k}$ .

3.23. Записать координаты вектора  $\overline{EO}$ , если  $A(2; -1; 3)$ ,  $O(2; -3; 5)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $AO$ .

1)  $\vec{i} + \vec{k}$ ; 2)  $-\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

3.24. Записать координаты вектора  $\overline{MO}$ , если  $M(2; 3; 4)$ ,  $B(4; 5; 2)$ , а точка  $B$  является серединой отрезка  $MO$ .

1)  $4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ ; 2)  $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ; 3)  $4\vec{i} + 4\vec{j}$ ; 4)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3.25. Записать координаты вектора  $\overline{KP}$ , если  $K(2; -1; -3)$ ,  $O(4; -3; 5)$ , а точка  $P$  является серединой отрезка  $KO$ .

1)  $4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ; 2)  $4\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ; 4)  $\vec{i}$ .

3.26. Записать координаты вектора  $\overline{AB}$ , если  $C(-2; 4; 1)$ ,  $B(-4; 2; 3)$ , а точка  $A$  является серединой отрезка  $CB$ .

1)  $-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

3.27. Записать координаты вектора  $\overline{CD}$ , если  $C(5; 1; 3)$ ,  $K(3; 1; 7)$ , а точка  $K$  является серединой отрезка  $CD$ .

1)  $\vec{i} + \vec{j} + 11\vec{k}$ ; 2)  $-4\vec{i} + 8\vec{k}$ ; 3)  $\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ; 4)  $-4\vec{i} + 8\vec{j}$ .

3.28. Записать координаты вектора  $\overline{DE}$ , если  $D(3; -1; 4)$ ,  $B(-3; -5; 6)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $DB$ .

- 1)  $-3\vec{i} + 5\vec{j}$ ; 2)  $-2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ; 3)  $-3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .

3.29. Записать координаты вектора  $\overline{EA}$ , если  $A(-3; 2; -5)$ ,  $B(-1; -4; 1)$ , а точка  $E$  является серединой отрезка  $AB$ .

- 1)  $-\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ ; 2)  $-2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ; 3)  $3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ; 4)  $-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ .

3.30. Записать координаты вектора  $\overline{AD}$ , если  $A(1; 1; 1)$ ;  $B(0; -1; 2)$ , а точка  $B$  является серединой отрезка  $AD$ .

- 1)  $2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ ; 2)  $(-2; -4; 2)$ ; 3)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; 4)  $(2; 4; 2)$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

4.1. Если два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  связаны соотношением  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ , где  $\lambda = \text{const}$ , то можно утверждать, что они ...

- 1) коллинеарны; 2) ортогональны;  
3) равны; 4) имеют одинаковое направление.

4.2. Соответствующие координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  пропорциональны. Тогда можно утверждать, что эти векторы ...

- 1) равны; 2) ортогональны;  
3) коллинеарны; 4) имеют одинаковую длину.

4.3. Если у векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  соответствующие координаты различны, то эти векторы ...

- 1) равны по длине; 2) не равны;  
3) не коллинеарны; 4) ортогональны.

4.4. Если два вектора  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  связаны соотношением  $\vec{d} = \beta \cdot \vec{c}$ , где  $\beta = 1$ , то можно утверждать, что эти векторы ...

- 1) равны; 2) ортогональны;  
3) не коллинеарны; 4) не равны.

4.5. Если у векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  соответствующие координаты равны. Тогда можно утверждать, что эти векторы ...

- 1) равны; 2) ортогональны;  
3) не коллинеарны; 4) не равны.

4.6. Координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  связаны соотношениями

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \frac{1}{2}, \text{ тогда можно утверждать, что ...}$$

- 1) вектор  $\vec{a}$  в 2 раза длиннее вектора  $\vec{b}$ ;
- 2) противоположны по направлению;
- 3) вектор  $\vec{b}$  в 2 раза длиннее вектора  $\vec{a}$ ;
- 4) векторы равны.

4.7. Координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  связаны соотношениями

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = 1, \text{ тогда можно утверждать, что они ...}$$

- 1) равны;
- 2) не равны;
- 3) ортогональны;
- 4) противоположны по направлению.

4.8. Координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  связаны соотношениями

$$\frac{x_a}{x_b} \cdot \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = -1, \text{ тогда можно утверждать, что они ...}$$

- 1) противоположны по направлению;
- 2) не равны;
- 3) ортогональны;
- 4) имеют одинаковое направление.

4.9. Известно, что векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одинаковую длину, но противоположны по направлению, тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно...

- 1) 1;
- 2) -1;
- 3) 0;
- 4) 2.

4.10. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем вектор  $\vec{c}$  в 2 раза короче вектора  $\vec{d}$ . Тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно...

- 1)  $\frac{1}{2}$ ;
- 2) 2;
- 3) -2;
- 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.11. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем  $|\vec{c}| = 3|\vec{d}|$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно...

- 1) 3;
- 2)  $\frac{1}{3}$ ;
- 3) -3;
- 4)  $-\frac{1}{3}$ .

4.12. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление и вектор  $\vec{c}$  в 2 раза длиннее вектора  $\vec{d}$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно...

- 1) 2;
- 2) -2;
- 3)  $\frac{1}{2}$ ;
- 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.13. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор  $\vec{c}$  в 2 раза длиннее вектора  $\vec{d}$ , тогда

$$\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda, \text{ где } \lambda \text{ равно } \dots$$

1) 2; 2) -2; 3)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.14. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  равны. Тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 2.

4.15. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор  $\vec{c}$  в 2 раза короче вектора  $\vec{d}$ , тогда

$$\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda, \text{ где } \lambda \text{ равно } \dots$$

1)  $\frac{1}{2}$ ; 2) 2; 3) -2; 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.16. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления и вектор  $\vec{c}$  в 4 раза длиннее вектора  $\vec{d}$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 4; 2)  $-\frac{1}{4}$ ; 3) -4; 4)  $\frac{1}{4}$ .

4.17. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем  $2|\vec{c}| = |\vec{d}|$ , тогда  $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 2; 2) -2; 3)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.18. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор  $\vec{a}$  в 4 раза длиннее вектора  $\vec{b}$ , тогда  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 4; 2) -4; 3)  $-\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{4}$ .

4.19. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем  $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}|$ , тогда  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 2; 2) -2; 3)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ .

4.20. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем  $|\vec{c}| = 3|\vec{d}|$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 3; 2) -3; 3)  $\frac{1}{3}$ ; 4)  $-\frac{1}{3}$ .

4.21. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор  $\vec{c}$  в 5 раз длиннее вектора  $\vec{d}$ , тогда  $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$ , где  $\lambda$  равно ...

1) 5; 2) -5; 3)  $\frac{1}{5}$ ; 4)  $-\frac{1}{5}$ .

4.22. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем  $3|\vec{c}| = |\vec{d}|$ ,  $\vec{c} = \lambda \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

1)  $\frac{1}{3}$ ; 2)  $-\frac{1}{3}$ ; 3) 3; 4) -3.

4.23. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем вектор  $\vec{a}$  в 6 раз короче вектора  $\vec{b}$ , тогда  $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$ , где  $\lambda$  равно ...

1)  $\frac{1}{6}$ ; 2)  $-\frac{1}{6}$ ; 3) 6; 4) -6.

4.24. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем  $|\vec{c}| = \frac{1}{3}|\vec{d}|$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

1)  $-\frac{1}{3}$ ; 2) 3; 3) -3; 4)  $\frac{1}{3}$ .

4.25. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем  $\frac{1}{2}|\vec{c}| = |\vec{d}|$ , тогда  $\vec{c} = \lambda \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

- 1)  $\frac{1}{2}$ ; 2)  $-\frac{1}{2}$ ; 3)  $-2$ ; 4)  $2$ .

4.26. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление, причем вектор  $\vec{c}$  длиннее  $\vec{d}$  в 4 раза, тогда  $\frac{x_c}{x_d} = \frac{y_c}{y_d} = \frac{z_c}{z_d} = \lambda$ , где  $\lambda$  равно ...

- 1)  $4$ ; 2)  $-4$ ; 3)  $-\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{4}$ .

4.27. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, длина вектора  $\vec{a}$  в 6 раз меньше длины вектора  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ , тогда  $\lambda$  равно ...

- 1)  $6$ ; 2)  $-6$ ; 3)  $-\frac{1}{6}$ ; 4)  $\frac{1}{6}$ .

4.28. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют одно и то же направление и  $5|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , тогда  $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$ , где  $\lambda$  равно ...

- 1)  $5$ ; 2)  $-5$ ; 3)  $-\frac{1}{5}$ ; 4)  $\frac{1}{5}$ .

4.29. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем  $\frac{1}{7}|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , тогда  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ , где  $\lambda$  равно ...

- 1)  $7$ ; 2)  $-\frac{1}{7}$ ; 3)  $\frac{1}{7}$ ; 4)  $-7$ .

4.30. Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  коллинеарны, имеют противоположные направления, причем  $7|\vec{c}| = |\vec{d}|$ , тогда  $\lambda\vec{c} = \vec{d}$ , где  $\lambda$  равно ...

- 1)  $\frac{1}{7}$ ; 2)  $-\frac{1}{7}$ ; 3)  $7$ ; 4)  $-7$ .

#### -4.

1. Для заданных векторов  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -4\vec{i} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$ . Найти  $\vec{a} - (2\vec{b} - \vec{c})$ .

Решение. Запишем векторы в координатной форме:  $\vec{a}(2; -3; 1)$ ,  $\vec{b}(-4; 0; 5)$ ,  $\vec{c}(1; -5; -7)$ .

Последовательно найдем результат: 1)  $2\vec{b} = 2 \cdot (-4; 0; 5) = (-8; 0; 10)$ ; 2)  $2\vec{b} - \vec{c} = (-8; 0; 10) - (1; -5; -7) = (-9; 5; 17)$ ; 3)  $\vec{a} - (2\vec{b} - \vec{c}) = (2; -3; 1) - (-9; 5; 17) = (11; -8; -16)$ . Запишем полученный вектор в разложении по базису  $\vec{a} - (2\vec{b} - \vec{c}) = 11\vec{i} - 8\vec{j} - 16\vec{k}$ . Ответ:  $11\vec{i} - 8\vec{j} - 16\vec{k}$ .

2. Найти равнодействующую заданных сил  $\vec{F}_1(2; 0; -3)$ ,  $\vec{F}_2(-3; 1; 4)$ ,  $\vec{F}_3(5; -3; -1)$ .

Решение. Равнодействующая заданных сил равна их сумме, поэтому:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2; 0; -3) + (-3; 1; 4) + (5; -3; -1) = (4; -2; 0)$ .

Ответ:  $(4; -2; 0)$ .

3. Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{AB}$ , если  $A(0; 3; 5)$ ,  $B(4; -1; 3)$ .

Решение. Найдем координаты вектора  $\vec{AB}(4 - 0; -1 - 3; 3 - 5)$ , или  $\vec{AB}(4; -4; -2)$ . Вычислим длину вектора  $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ .

Тогда направляющие косинусы вектора  $\vec{AB}$  будут равны:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{AB}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{AB}|} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{AB}|} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ:  $6; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$ .

4. Найти длину вектора  $\vec{ME}$ , если  $\vec{r}_M = 2\vec{i} - \vec{j}$ ;  $\vec{r}_E = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ .

Решение. Граничные точки вектора  $\vec{ME}$  заданы радиус-векторами точек. Запишем координаты этих точек:  $M(2; -1)$ ,  $E(5; 6)$ .

Найдем координаты вектора  $\vec{ME}(5 - 2; 6 - (-1))$ , или  $\vec{ME}(3; 7)$ . Тогда длина этого вектора будет равна:

$$|\vec{ME}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}. \quad \text{Ответ: } \sqrt{58}.$$

5. Для заданных точек  $A(-1; 0; 4)$  и  $C(-3; 2; 4)$  найти координаты вектора  $\overline{AB}$ , где точка  $B$  является серединой отрезка  $AC$ .

Решение. Точка  $B$  является серединой отрезка  $AC$ , поэтому ее координаты найдем по следующим формулам:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2; \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1;$$

$$z_B = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4, \quad \text{т. е. } B(-2; 1; 4).$$

Тогда  $\overline{AB}(-2 - (-1); 1 - 0; 4 - 4)$ ,  $\overline{AB}(-1; 1; 0)$ , или  $\overline{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$ .

Ответ:  $-\vec{i} + \vec{j}$ .

6. Записать условие коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в векторной форме, если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют противоположные направления, а длина вектора  $\vec{a}$  в 5 раз меньше длины вектора  $\vec{b}$ .

Решение. Условие коллинеарности в векторной форме имеет следующий вид:  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$ , где  $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = -5$ . Значит, запишем

$$\vec{b} = -5\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{a} = -\frac{1}{5}\vec{b}.$$

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

5.1. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

1) 12; 2) 24; 3)  $\frac{12}{\sqrt{3}}$ ; 4)  $12\sqrt{3}$ .

5.2. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 9$ ,  $|\vec{b}| = 10$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

1)  $45\sqrt{2}$ ; 2) 90; 3)  $\frac{45}{\sqrt{2}}$ ; 4)  $45\sqrt{3}$ .

5.3. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

- 1)  $30\sqrt{3}$ ; 2)  $30\sqrt{2}$ ; 3) 30; 4)  $\frac{30}{\sqrt{2}}$ .

5.4. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

- 1) 1; 2) 0; 3) 6; 4)  $2\sqrt{2}$ .

5.5. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$ .

- 1) 15; 2)  $15\sqrt{3}$ ; 3) -15; 4)  $15\sqrt{2}$ .

5.6. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 11$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$ .

- 1)  $-22\sqrt{3}$ ; 2) 44; 3)  $22\sqrt{2}$ ; 4) -22.

5.7. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .

- 1) 7,5; 2) 13; 3) 0; 4) 26.

5.8. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 14$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$ .

- 1) 21; 2) 42; 3) -42; 4) -21.

5.9. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$ .

- 1) 14; 2)  $-7\sqrt{2}$ ; 3) -7; 4)  $7\sqrt{2}$ .

5.10. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

- 1) 16; 2) 32; 3) -16; 4)  $16\sqrt{3}$ .

5.11. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

- 1)  $5\sqrt{2}$ ; 2)  $5\sqrt{3}$ ; 3) 5; 4)  $20\sqrt{3}$ .

5.12. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 15$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

- 1)  $\frac{45\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $\frac{6\sqrt{2}}{2}$ ; 3)  $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ; 4)  $\frac{75\sqrt{2}}{2}$ .

5.13. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

- 1)  $\frac{7}{2}$ ; 2) 42; 3)  $\frac{74\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ .

5.14. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 8$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{2}.$$

- 1) 40; 2) 20; 3) 1; 4) 0.

5.15. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 9$ ,

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

- 1)  $\frac{27}{6}$ ; 2)  $\frac{3}{2}$ ; 3)  $-\frac{3}{2}$ ; 4)  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ .

5.16. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 15$ ,

$$|\vec{b}| = 13, (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}.$$

- 1)  $-\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ; 3)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $\frac{26\sqrt{3}}{2}$ .

5.17. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 11$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0$ .

1) 11; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

5.18. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 19$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$ .

1)  $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $3\sqrt{3}$ ; 3)  $-3\sqrt{2}$ ; 4)  $3\sqrt{2}$ .

5.19. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 18$ ,  $|\vec{b}| = 14$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

1) 74; 2) 7; 3) 1; 4) -7.

5.20. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 12$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ .

1) 1; 2) 0; 3) 24; 4) 12.

5.21. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$ .

1)  $\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{4}$ ; 3)  $\frac{\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{\pi}{2}$ .

5.22. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 9$ ,  $|\vec{b}| = 10$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 45\sqrt{2}$ .

1)  $\frac{2\pi}{3}$ ; 2)  $\frac{\pi}{2}$ ; 3)  $\frac{\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{\pi}{4}$ .

5.23. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ .

1)  $\frac{\pi}{4}$ ; 2)  $\frac{\pi}{2}$ ; 3)  $\frac{\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{2\pi}{3}$ .

5.24. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

- 1)  $\frac{2\pi}{3}$ ; 2)  $\frac{\pi}{2}$ ; 3)  $\frac{\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{\pi}{4}$ .

5.25. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$ .

- 1)  $\frac{\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{\pi}{3}$ ; 3)  $\frac{\pi}{4}$ ; 4)  $\frac{2\pi}{3}$ .

5.26. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = 5\sqrt{3}$ .

- 1)  $30^\circ$ ; 2)  $0^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ ; 4)  $45^\circ$ .

5.27. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 15$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ .

- 1)  $0^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $30^\circ$ ; 4)  $60^\circ$ .

5.28. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{7}{2}$ .

- 1)  $90^\circ$ ; 2)  $30^\circ$ ; 3)  $45^\circ$ ; 4)  $60^\circ$ .

5.29. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 15$ ,  $|\vec{b}| = 13$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{13\sqrt{3}}{2}$ .

- 1)  $45^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ ; 3)  $150^\circ$ ; 4)  $90^\circ$ .

5.30. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 11$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = 0$ .

- 1)  $30^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $90^\circ$ ; 4)  $0^\circ$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

6.1. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(2; -3; \sqrt{3})$ ,  $\vec{b}(1; 4; \sqrt{3})$ .

1)  $-\frac{7}{2}$ ; 2)  $-\frac{7}{2\sqrt{5}}$ ; 3)  $-\frac{7}{4}$ ; 4)  $-7$ .

6.2. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}(2; -3; \sqrt{3})$ ,  $\vec{b}(1; 4; \sqrt{3})$ .

1)  $-\frac{7}{4}$ ; 2)  $-\frac{7}{2}$ ; 3)  $-7$ ; 4)  $1$ .

6.3. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(3; -4; 0)$ ,  $\vec{b}(-2; 4; \sqrt{5})$ .

1)  $-22$ ; 2)  $-\frac{22}{3}$ ; 3)  $-\frac{22}{5}$ ; 4)  $-\frac{22}{4}$ .

6.4. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}(3; -4; 0)$ ,  $\vec{b}(-2; 4; \sqrt{5})$ .

1)  $11$ ; 2)  $-\frac{22}{3}$ ; 3)  $-\frac{22}{4}$ ; 4)  $-\frac{22}{5}$ .

6.5. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(1; 2\sqrt{2}; 0)$ ,  $\vec{b}(0; -3; 4)$ .

1)  $1$ ; 2)  $-\frac{6\sqrt{2}}{5}$ ; 3)  $-\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ; 4)  $2$ .

6.6. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}(1; 2\sqrt{2}; 0)$ ,  $\vec{b}(0; -3; 4)$ .

1)  $-2\sqrt{2}$ ; 2)  $-2$ ; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4)  $\sqrt{2}$ .

6.7. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-6; 0; 8)$ ,  $\vec{b}(1; -2; 2)$ .

1)  $-\frac{22}{3}$ ; 2)  $-\frac{22}{4}$ ; 3)  $-\frac{12}{3}$ ; 4)  $\frac{10}{3}$ .

6.8. Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}(-6;0;8)$ ,  $\vec{b}(1;-2;2)$ .

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0.

6.9. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-4;2;4)$ ,  $\vec{b}(-8;6;0)$ .

1) 4,4; 2) 4; 3) 3; 4) 3,4.

6.10. Найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(2;1;-2)$ ,  $\vec{b}(2;4;4)$ .

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 3.

6.11. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(1;2;-3)$ ,  $\vec{b}(4;7;6)$ .

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0.

6.12. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(3;-7;4)$ ,  $\vec{b}(1;-2;3)$ .

1) 29; 2) 28; 3) 27; 4) 26.

6.13. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(5;1;-6)$ ,  $\vec{b}(2;-10;-1)$ .

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

6.14. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(0;-4;3)$ ,  $\vec{b}(7;6;8)$ .

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

6.15. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(9;0;-11)$ ,  $\vec{b}(5;6;4)$ .

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

6.16. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(4;-7;3)$ ,  $\vec{b}(4;3;2)$ .

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

6.17. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(8;2;-5)$ ,  $\vec{b}(4;-9;-1)$ .

1) 17; 2) 18; 3) 19; 4) 20.

6.18. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(-3; -4; -5)$ .

1) -55; 2) -26; 3) -57; 4) -58.

6.19. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(10; -9; 0)$ ,  $\vec{b}(-2; 3; 18)$ .

1) -44; 2) -45; 3) -46; 4) -47.

6.20. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{a}(3; 6; -7)$ ,  $\vec{b}(4; -2; 2)$ .

1) -14; 2) -15; 3) -16; 4) -17.

6.21. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(0; -3; 0)$ ,  $\vec{b}(2; 1; -2)$ ?

1)  $-\frac{1}{3}$ ; 2)  $-\frac{1}{4}$ ; 3)  $-\frac{1}{5}$ ; 4)  $-\frac{1}{6}$ .

6.22. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-4; 2; 4)$ ,  $\vec{b}(-8; 6; 0)$ ?

1)  $\frac{11}{3}$ ; 2)  $\frac{11}{4}$ ; 3)  $\frac{11}{15}$ ; 4)  $\frac{11}{6}$ .

6.23. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-6; 0; 8)$ ,  $\vec{b}(1; -2; 2)$ ?

1)  $\frac{1}{6}$ ; 2)  $\frac{1}{5}$ ; 3)  $\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{3}$ .

6.24. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(3; 0; -4)$ ,  $\vec{b}(1; 2\sqrt{2}; 0)$ ?

1)  $-\frac{1}{6}$ ; 2)  $\frac{1}{5}$ ; 3)  $-\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{3}$ .

6.25. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-4; 3; 0)$ ,  $\vec{b}(2; 4; 4)$ ?

1)  $\frac{2}{15}$ ; 2)  $\frac{1}{15}$ ; 3)  $\frac{3}{15}$ ; 4)  $\frac{4}{15}$ .

6.26. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(1; 4; \sqrt{8})$ ,  $\vec{b}(3; -4; 0)$ ?

1)  $-\frac{12}{25}$ ; 2)  $-\frac{14}{25}$ ; 3)  $-\frac{15}{25}$ ; 4)  $-\frac{13}{25}$ .

6.27. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-2; 4; \sqrt{5})$ ,  $\vec{b}(8; -6; 0)$ ?

1)  $-\frac{2}{5}$ ; 2)  $-\frac{3}{5}$ ; 3)  $-\frac{4}{5}$ ; 4)  $-\frac{1}{5}$ .

6.28. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(1; -2; 2)$ ,  $\vec{b}(2; -1; 2)$ ?

1)  $\frac{7}{9}$ ; 2)  $\frac{8}{9}$ ; 3) 1; 4)  $\frac{10}{9}$ .

6.29. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-4; 2; 4)$ ,  $\vec{b}(4; 4; 2)$ ?

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

6.30. Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(6; 0; -8)$ ,  $\vec{b}(0; 6; 8)$ ?

1)  $-\frac{13}{25}$ ; 2)  $-\frac{14}{25}$ ; 3)  $-\frac{15}{25}$ ; 4)  $-\frac{16}{25}$ .

Вычислите работу, произведенную силой  $\vec{F}$  по перемещению тела из точки  $C$  в точку  $B$ .

7.1.  $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $C(2; 4)$ ,  $B(4; 2)$ .

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 5.

7.2.  $\vec{F} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $C(-1; 3)$ ,  $B(2; 7)$ .

1) 1; 2) 9; 3) 6; 4) 0.

7.3.  $\vec{F} = \vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $C(4; 4)$ ,  $B(1; 6)$ .

1) 20; 2) 7; 3) 5; 4) 8.

7.4.  $\vec{F} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $C(2; -3)$ ,  $B(5; -2)$ .

1) 11; 2) 1; 3) 3; 4) 2.

7.5.  $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $C(6; 3)$ ,  $B(0; 9)$ .

1) 5; 2) 6; 3) 9; 4) 0.

- 7.6.  $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $C(1; -3)$ ,  $B(5; 2)$ .  
 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
- 7.7.  $\vec{F} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $C(4; 5)$ ,  $B(-6; 3)$ .  
 1) 3; 2) 2; 3) 9; 4) 1.
- 7.8.  $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $C(3; 7)$ ,  $B(1; 4)$ .  
 1) 0; 2) 5; 3) 10; 4) 1.
- 7.9.  $\vec{F} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $C(6; -1)$ ,  $B(8; 4)$ .  
 1) 1; 2) 5; 3) 12; 4) 2.
- 7.10.  $\vec{F} = -2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $C(3; 5)$ ,  $B(-2; 4)$ .  
 1) 1; 2) 8; 3) 9; 4) 10.
- 7.11.  $\vec{F} = 7\vec{i} - \vec{j}$ ,  $C(1; 1)$ ,  $B(3; 2)$ .  
 1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14.
- 7.12.  $\vec{F} = 7\vec{i} - \vec{j}$ ,  $C(3; 9)$ ,  $B(2; -3)$ .  
 1) 6; 2) 12; 3) 1; 4) 5.
- 7.13.  $\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $C(2; 4)$ ,  $B(3; 3)$ .  
 1) 7; 2) 1; 3) 6; 4) 0.
- 7.14.  $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j}$ ,  $C(7; 4)$ ,  $B(9; 3)$ .  
 1) 7; 2) 2; 3) 11; 4) 12.
- 7.15.  $\vec{F} = 3\vec{j}$ ,  $C(0; -2)$ ,  $B(1; 4)$ .  
 1) 18; 2) 3; 3) 2; 4) 5.
- 7.16.  $\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ ,  $C(1; 2)$ ,  $B(-1; 4)$ .  
 1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.
- 7.17.  $\vec{F} = -\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $C(-1; 0)$ ,  $B(2; -1)$ .  
 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- 7.18.  $\vec{F} = 5\vec{i} + \vec{j}$ ,  $C(5; 1)$ ,  $B(6; 7)$ .  
 1) 6; 2) 12; 3) 11; 4) 13.
- 7.19.  $\vec{F} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $C(-5; 4)$ ,  $B(-2; -1)$ .  
 1) 7; 2) 15; 3) 18; 4) 19.
- 7.20.  $\vec{F} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$ ,  $C(-2; 0)$ ,  $B(-6; -5)$ .  
 1) 0; 2) 16; 3) 17; 4) 15.
- 7.21.  $\vec{F} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $C(-1; -7)$ ,  $B(1; -1)$ .

1) 8; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

7.22.  $\vec{F} = 7\vec{i} + \vec{j}$ ,  $C(-8;1)$ ,  $B(1;2)$ .

1) 8; 2) 32; 3) 64; 4) 28.

7.23.  $\vec{F} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $C(1;1)$ ,  $B(4;6)$ .

1) 5; 2) 1; 3) 2; 4) 10.

7.24.  $\vec{F} = 11\vec{i} + 10\vec{j}$ ,  $C(-5;2)$ ,  $B(1;-1)$ .

1) 36; 2) 24; 3) 12; 4) 6.

7.25.  $\vec{F} = -9\vec{i} + 5\vec{j}$ ,  $C(2;8)$ ,  $B(-1;4)$ .

1) 4; 2) 10; 3) 7; 4) 3.

7.26.  $\vec{F} = -6\vec{i} - 12\vec{j}$ ,  $C(8;1)$ ,  $B(-4;2)$ .

1) 30; 2) 9; 3) 2; 4) 60.

7.27.  $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $C(-2;1)$ ,  $B(7;6)$ .

1) 1; 2) 21; 3) 30; 4) 42.

7.28.  $\vec{F} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $C(2;1)$ ,  $B(-4;1)$ .

1) 30; 2) 20; 3) 1; 4) 0.

7.29.  $\vec{F} = 8\vec{i} + 81\vec{j}$ ,  $C(3;1)$ ,  $B(-7;2)$ .

1) 1; 2) 13; 3) 5; 4) 2.

7.30.  $\vec{F} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$ ,  $C(1;2)$ ,  $B(-4;4)$ .

1) 5; 2) 1; 3) 0; 4) 14.

-7.

1. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если

$$|\vec{a}| = 9, |\vec{b}| = 16, (\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Решение. Применим формулу  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$ . Тогда скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 16 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 9 \cdot 16 \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -72\sqrt{2}. \quad \text{Ответ: } -72\sqrt{2}.$$

2. Найти угол, образованный векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если

$$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8, n_{\vec{a}} \cdot \vec{b} = -4\sqrt{3}.$$

Решение.

1-й способ. Из формулы  $np_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$  находим скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b} = np_a \vec{b} \cdot |\vec{a}| = -4\sqrt{3} \cdot 5 = -20\sqrt{3}$ . Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  найдем по формуле  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-20\sqrt{3}}{5 \cdot 8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Значит угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $150^\circ$ .

2-й способ. Для данных условий угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  найдем следующим образом:  $np_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$ , отсюда  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{np_a \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ответ:  $150^\circ$ .

Найти проекцию вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}(-4; 2; -4)$ ,  $\vec{b}(0; -1; 4)$ .

Решение. Применим формулу  $np_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ . Найдем скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 4 = -18$  и длину вектора  $|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$ . Тогда  $np_a \vec{b} = \frac{-18}{6} = -3$ .

Ответ:  $-3$ .

Вычислить работу, произведенную силой  $\vec{F}$  по перемещению тела из точки  $C$  в точку  $B$ , если  $\vec{F} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $C(-3; 1)$ ,  $B(0; -2)$ .

Решение. Работа, произведенная силой  $\vec{F}$  по перемещению тела из точки  $C$  в точку  $B$ , равна скалярному произведению векторов силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{CB}$ :  $A = \vec{F} \cdot \vec{CB}$ . Вектор перемещения имеет координаты  $\vec{CB}(0+3; -2-1)$ , или  $\vec{CB}(3; -3)$ . Тогда работа силы  $\vec{F}$  равна  $A = \vec{F} \cdot \vec{CB} = 5 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) = 15 + 9 = 24$ . Ответ: 24.

Найти векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

8.1.  $\vec{a}(2;3;0)$ ,  $\vec{b}(-1;1;0)$ .

1)  $(-2; 3; 0)$ ; 2)  $(0; 0; 5)$ ; 3)  $(1; 4; 0)$ ; 4)  $(1; 1; 4)$ .

8.2.  $\vec{a}(-1;0;4)$ ,  $\vec{b}(2;0;-3)$ .

1)  $(-2; 0; 1)$ ; 2)  $(1; 0; 1)$ ; 3)  $(0; 5; 0)$ ; 4)  $(1; 0; -12)$ .

8.3.  $\vec{a}(0;6;3)$ ,  $\vec{b}(0;1;-1)$ .

1)  $(0; 6; -3)$ ; 2)  $(-9; 0; 0)$ ; 3)  $(0; 7; 2)$ ; 4)  $(0; 6; 2)$ .

8.4.  $\vec{a}(1;-2;0)$ ,  $\vec{b}(3;-4;0)$ .

1)  $(0; 0; 2)$ ; 2)  $(4; -6; 0)$ ; 3)  $(3; 6; 0)$ ; 4)  $(2; -2; 0)$ .

8.5.  $\vec{a}(0;3;-5)$ ,  $\vec{b}(0;4;1)$ .

1)  $(0; 7; 4)$ ; 2)  $(0; 12; -4)$ ; 3)  $(2; 0; 0)$ ; 4)  $(23; 0; 0)$ .

8.6.  $\vec{a}(2;0;4)$ ,  $\vec{b}(9;0;3)$ .

1)  $(18; 0; 12)$ ; 2)  $(11; 0; 7)$ ; 3)  $(0; 30; 0)$ ; 4)  $(0; 28; 0)$ .

8.7.  $\vec{a}(3;1;-4)$ ,  $\vec{b}(2;0;0)$ .

1)  $(0; -8; -2)$ ; 2)  $(5; 1; -4)$ ; 3)  $(6; 1; 0)$ ; 4)  $(0; -7; 1)$ .

8.8.  $\vec{a}(0;5;0)$ ,  $\vec{b}(2;3;4)$ .

1)  $(0; 15; 0)$ ; 2)  $(20;0;-10)$ ; 3)  $(2; 8; 4)$ ; 4)  $(10; 0; -5)$ .

8.9.  $\vec{a}(1;6;-3)$ ,  $\vec{b}(0;2;0)$ .

1)  $(1; 8; -3)$ ; 2)  $(4; 0; 5)$ ; 3)  $(6; 0; 2)$ ; 4)  $(0; 12; 0)$ .

8.10.  $\vec{a}(7;0;0)$ ,  $\vec{b}(1;-1;1)$ .

1)  $(0; -7; -7)$ ; 2)  $(0; 1; 5)$ ; 3)  $(7; 0; 0)$ ; 4)  $(8; -1; 1)$ .

8.11.  $\vec{a}(1;2;4)$ ,  $\vec{b}(0;6;0)$ .

1)  $(1; 8; 4)$ ; 2)  $(0; 12; 0)$ ; 3)  $(-20; 0; 5)$ ; 4)  $(-24;0;6)$ .

8.12.  $\vec{a}(2;3;0)$ ,  $\vec{b}(-6;4; 0)$ .

1)  $(0;0;26)$ ; 2)  $(-12; 1; 0)$ ; 3)  $(-4; 7; 0)$ ; 4)  $(0; 0; 6)$ .

8.13.  $\vec{a}(7;0;3)$ ,  $\vec{b}(-2;0;1)$ .

1)  $(-14; 0; 3)$ ; 2)  $(0; -13; 0)$ ; 3)  $(5; 0; 4)$ ; 4)  $(0; -10; 5)$ .

8.14.  $\vec{a}(2;0;0)$ ,  $\vec{b}(5;2;8)$ .

1)  $(10; 0; 0)$ ; 2)  $(7; 2; 8)$ ; 3)  $(0; -16; 4)$ ; 4)  $(0; -17; 5)$ .

8.15.  $\vec{a}(3;7;4)$ ,  $\vec{b}(0;5;0)$ .

1)  $(3; 12; 4)$ ; 2)  $(0; 35; 0)$ ; 3)  $(-10; 0; 5)$ ; 4)  $(-20;0;15)$ .

- 8.16.  $\bar{a}(1; 2; 3)$ ,  $\bar{b}(-1; 4; 2)$ .  
 1)  $(-1; 6; 6)$ ; 2)  $(-8; -5; 6)$ ; 3)  $(0; 6; 5)$ ; 4)  $(-4; -1; 5)$ .
- 8.17.  $\bar{a}(-1; 0; 4)$ ,  $\bar{b}(2; 1; -1)$ .  
 1)  $(-4; 7; -1)$ ; 2)  $(1; 1; 3)$ ; 3)  $(-2; 0; -4)$ ; 4)  $(-2; 4; 5)$ .
- 8.18.  $\bar{a}(-1; 4; 1)$ ,  $\bar{b}(0; 2; 4)$ .  
 1)  $(0; 8; 4)$ ; 2)  $(-1; 8; 4)$ ; 3)  $(10; 4; -6)$ ; 4)  $(14; 4; -2)$ .
- 8.19.  $\bar{a}(2; -1; 0)$ ,  $\bar{b}(-1; 2; -1)$ .  
 1)  $(-2; -2; 0)$ ; 2)  $(1; 2; 5)$ ; 3)  $(1; 1; -1)$ ; 4)  $(1; 2; 3)$ .
- 8.20.  $\bar{a}(-3; 1; 0)$ ,  $\bar{b}(6; 5; 1)$ .  
 1)  $(-18; 5; 0)$ ; 2)  $(3; 6; 0)$ ; 3)  $(1; 3; -21)$ ; 4)  $(2; -9; 5)$ .
- 8.21.  $\bar{a}(1; 4; 8)$ ,  $\bar{b}(-2; 0; 5)$ .  
 1)  $(1; 4; 13)$ ; 2)  $(-2; 0; 40)$ ; 3)  $(20; -21; 8)$ ; 4)  $(10; 11; 5)$ .
- 8.22.  $\bar{a}(3; 1; 0)$ ,  $\bar{b}(-1; 2; -3)$ .  
 1)  $(2; 3; -3)$ ; 2)  $(-3; 9; 7)$ ; 3)  $(5; 1; 9)$ ; 4)  $(-3; 3; -3)$ .
- 8.23.  $\bar{a}(1; -2; 5)$ ,  $\bar{b}(-1; 0; 2)$ .  
 1)  $(-4; -7; -2)$ ; 2)  $(0; -2; 7)$ ; 3)  $(-1; -2; 1)$ ; 4)  $(1; 6; 5)$ .
- 8.24.  $\bar{a}(5; 1; -4)$ ,  $\bar{b}(3; -1; 0)$ .  
 1)  $(8; 0; -4)$ ; 2)  $(15; -1; 0)$ ; 3)  $(-5; 10; 1)$ ; 4)  $(-4; -12; -8)$ .
- 8.25.  $\bar{a}(1; 7; 5)$ ,  $\bar{b}(-1; 0; 2)$ .  
 1)  $(0; 7; 7)$ ; 2)  $(-1; 0; 10)$ ; 3)  $(10; -5; 5)$ ; 4)  $(14; -7; 7)$ .
- 8.26.  $\bar{a}(-1; 4; 5)$ ,  $\bar{b}(1; 0; 8)$ .  
 1)  $(32; 13; -4)$ ; 2)  $(0; 0; 40)$ ; 3)  $(30; 15; 5)$ ; 4)  $(0; 4; 13)$ .
- 8.27.  $\bar{a}(2; -3; 1)$ ,  $\bar{b}(0; 1; 2)$ .  
 1)  $(2; -2; 3)$ ; 2)  $(-7; -4; 2)$ ; 3)  $(0; -3; 2)$ ; 4)  $(-5; -3; 5)$ .
- 8.28.  $\bar{a}(-1; 0; 2)$ ,  $\bar{b}(3; 4; 5)$ .  
 1)  $(-3; 0; 10)$ ; 2)  $(2; 4; 7)$ ; 3)  $(-8; 11; -4)$ ; 4)  $(-7; 1; -3)$ .
- 8.29.  $\bar{a}(4; 5; 1)$ ,  $\bar{b}(1; 8; 7)$ .  
 1)  $(5; 13; 8)$ ; 2)  $(4; 40; 8)$ ; 3)  $(17; 17; 17)$ ; 4)  $(27; -27; 27)$ .
- 8.30.  $\bar{a}(7; 2; -1)$ ,  $\bar{b}(5; 0; 4)$ .  
 1)  $(8; -33; -10)$ ; 2)  $(35; 0; -4)$ ; 3)  $(12; 0; -4)$ ; 4)  $(8; -30; 5)$ .

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах.

9.1.  $\vec{a}(-5;1;-3)$ ,  $\vec{b}(0;-3;-1)$ .

1) 1; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $5\sqrt{14}$ ; 4)  $\sqrt{15}$ .

9.2.  $\vec{a}(-5;1;3)$ ,  $\vec{b}(0;3;-1)$ .

1)  $5\sqrt{14}$ ; 2)  $\sqrt{3}$ ; 3) 1; 4)  $3\sqrt{14}$ .

9.3.  $\vec{a}(5;1;3)$ ,  $\vec{b}(0;3;-1)$ .

1) 1; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{15}$ ; 4)  $5\sqrt{14}$ .

9.4.  $\vec{a}(4;1;1)$ ,  $\vec{b}(0;1;-1)$ .

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.

9.5.  $\vec{a}(4;1;-1)$ ,  $\vec{b}(0;-1;-1)$ .

1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.

9.6.  $\vec{a}(-4;1;-1)$ ,  $\vec{b}(0;-1;-1)$ .

1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3.

9.7.  $\vec{a}(-2;1;-1)$ ,  $\vec{b}(0;-1;-1)$ .

1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $2\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4) 2.

9.8.  $\vec{a}(-2;1;1)$ ,  $\vec{b}(0;1;-1)$ .

1)  $\sqrt{3}$ ; 2) 2; 3) 1; 4)  $2\sqrt{3}$ .

9.9.  $\vec{a}(-2;1;3)$ ,  $\vec{b}(0;3;-1)$ .

1) 2; 2)  $2\sqrt{3}$ ; 3)  $2\sqrt{35}$ ; 4)  $\sqrt{3}$ .

9.10.  $\vec{a}(2;1;3)$ ,  $\vec{b}(0;3;-1)$ .

1)  $2\sqrt{35}$ ; 2)  $\sqrt{35}$ ; 3) 2; 4)  $2\sqrt{3}$ .

9.11.  $\vec{a}(1;1;-2)$ ,  $\vec{b}(0;-2;-3)$ .

1)  $2\sqrt{3}$ ; 2)  $2\sqrt{32}$ ; 3) 2; 4)  $\sqrt{62}$ .

9.12.  $\vec{a}(1;1;-2)$ ,  $\vec{b}(1;-2;-3)$ .

1)  $\sqrt{69}$ ; 2)  $2\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{59}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

9.13.  $\vec{a}(-1;1;-2)$ ,  $\vec{b}(1;-2;-1)$ .

1)  $\sqrt{35}$ ; 2)  $\sqrt{45}$ ; 3)  $\sqrt{55}$ ; 4)  $\sqrt{65}$ .

- 9.14.  $\vec{a}(-1;1;2)$ ,  $\vec{b}(1;2;3)$ .  
 1)  $2\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{35}$ ; 3)  $3\sqrt{5}$ ; 4) 8.
- 9.15.  $\vec{a}(-2;1;2)$ ,  $\vec{b}(1;2;4)$ .  
 1) 5; 2)  $5\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4)  $2\sqrt{3}$ .
- 9.16.  $\vec{a}(-3;1;2)$ ,  $\vec{b}(-4;2;5)$ .  
 1) 6; 2)  $2\sqrt{3}$ ; 3)  $3\sqrt{6}$ ; 4) 9.
- 9.17.  $\vec{a}(-1;1;2)$ ,  $\vec{b}(-4;2;3)$ .  
 1)  $\sqrt{30}$ ; 2)  $\sqrt{35}$ ; 3)  $2\sqrt{32}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .
- 9.18.  $\vec{a}(-1;1;1)$ ,  $\vec{b}(-4;1;2)$ .  
 1)  $\sqrt{10}$ ; 2)  $\sqrt{11}$ ; 3)  $\sqrt{12}$ ; 4)  $\sqrt{14}$ .
- 9.19.  $\vec{a}(-1;1;-1)$ ,  $\vec{b}(-4;-1;0)$ .  
 1)  $\sqrt{42}$ ; 2)  $\sqrt{45}$ ; 3)  $\sqrt{55}$ ; 4)  $\sqrt{14}$ .
- 9.20.  $\vec{a}(1;1;-1)$ ,  $\vec{b}(-6;-1;-2)$ .  
 1) 7; 2)  $2\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $7\sqrt{2}$ .
- 9.21.  $\vec{a}(-1;1;1)$ ,  $\vec{b}(-6;1;2)$ .  
 1)  $\sqrt{45}$ ; 2)  $\sqrt{43}$ ; 3)  $\sqrt{42}$ ; 4)  $\sqrt{40}$ .
- 9.22.  $\vec{a}(-2;1;1)$ ,  $\vec{b}(-6;1;3)$ .  
 1)  $5\sqrt{5}$ ; 2)  $2\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $7\sqrt{2}$ .
- 9.23.  $\vec{a}(-2;1;3)$ ,  $\vec{b}(-6;3;5)$ .  
 1)  $2\sqrt{5}$ ; 2)  $3\sqrt{5}$ ; 3)  $4\sqrt{5}$ ; 4)  $5\sqrt{5}$ .
- 9.24.  $\vec{a}(-2;1;-3)$ ,  $\vec{b}(-6;-3;-1)$ .  
 1)  $6\sqrt{5}$ ; 2)  $10\sqrt{5}$ ; 3)  $7\sqrt{5}$ ; 4)  $12\sqrt{5}$ .
- 9.25.  $\vec{a}(-2;1;-1)$ ,  $\vec{b}(3;-1;1)$ .  
 1) 2; 2)  $7\sqrt{2}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $\sqrt{12}$ .
- 9.26.  $\vec{a}(2;1;5)$ ,  $\vec{b}(0;5;-2)$ .  
 1)  $13\sqrt{5}$ ; 2)  $12\sqrt{5}$ ; 3)  $10\sqrt{5}$ ; 4)  $5\sqrt{5}$ .
- 9.27.  $\vec{a}(2;1;-5)$ ,  $\vec{b}(0;-5;-2)$ .

1)  $6\sqrt{5}$ ; 2)  $13\sqrt{5}$ ; 3)  $2\sqrt{5}$ ; 4)  $12\sqrt{5}$ .

9.28.  $\vec{a}(3; 1; -2)$ ,  $\vec{b}(0; -2; -5)$ .

1)  $\sqrt{35}$ ; 2)  $\sqrt{30}$ ; 3) 3; 4)  $3\sqrt{38}$ .

9.29.  $\vec{a}(2; 1; -1)$ ,  $\vec{b}(0; -1; -3)$ .

1)  $\sqrt{12}$ ; 2)  $\sqrt{10}$ ; 3)  $2\sqrt{14}$ ; 4)  $\sqrt{29}$ .

9.30.  $\vec{a}(2; 1; -2)$ ,  $\vec{b}(0; -2; -4)$ .

1) 10; 2) 12; 3) 14; 4) 15.

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов

ответов.

10.1. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

1) 6; 2)  $6\sqrt{2}$ ; 3) 12; 4)  $6\sqrt{3}$ ;

10.2. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

1) 15; 2)  $15\sqrt{2}$ ; 3) 30; 4)  $15\sqrt{3}$ .

10.3. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ .

1)  $42\sqrt{3}$ ; 2)  $42\sqrt{2}$ ; 3) 42; 4) 82.

10.4. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 9$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ .

1)  $9\sqrt{2}$ ; 2) 9; 3)  $18\sqrt{3}$ ; 4) 36.

10.5. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$ .

1) 6; 2)  $3\sqrt{2}$ ; 3)  $3\sqrt{3}$ ; 4) 3.

10.6. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ .

1) 0; 2) 16; 3) 32; 4) 12.

10.7. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ .

1)  $\frac{21}{2}$ ; 2) 21; 3)  $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ ; 4)  $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ .

10.8. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 14, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

1)  $21\sqrt{2}$ ; 2)  $21\sqrt{3}$ ; 3) 21; 4) 0.

10.9. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .

1) 0; 2) 1; 3) 22; 4) 11.

10.10. Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

1) 15; 2) 28; 3)  $28\sqrt{2}$ ; 4)  $28\sqrt{3}$ .

10.11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

1)  $12\sqrt{3}$ ; 2)  $12\sqrt{2}$ ; 3) 12; 4) 1.

10.12. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 19, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

1)  $19\sqrt{3}$ ; 2)  $19\sqrt{2}$ ; 3) 19; 4) 1.

10.13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 34, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$ .

1)  $17\sqrt{3}$ ; 2) 17; 3)  $17\sqrt{2}$ ; 4) 1.

10.14. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$ .

1)  $28\sqrt{2}$ ; 2) 28; 3) 56; 4)  $28\sqrt{3}$ .

10.15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$ .

1)  $\frac{15}{2}$ ; 2) 15; 3)  $15\sqrt{2}$ ; 4)  $15\sqrt{3}$ .

10.16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 18, (\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

1) 72; 2) 0; 3)  $72\sqrt{2}$ ; 4)  $72\sqrt{3}$ .

10.17. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

1) 30; 2)  $15\sqrt{2}$ ; 3)  $15\sqrt{3}$ ; 4) 15.

10.18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 14$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

- 1) 42; 2) 21; 3)  $21\sqrt{2}$ ; 4)  $21\sqrt{3}$ .

10.19. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 18$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

- 1)  $36\sqrt{3}$ ; 2)  $36\sqrt{2}$ ; 3) 36; 4) 0.

10.20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

- 1) 35; 2)  $\frac{35}{2}$ ; 3)  $35\sqrt{2}$ ; 4)  $35\sqrt{3}$ .

10.21. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

- 1)  $6\sqrt{3}$ ; 2)  $12\sqrt{3}$ ; 3)  $24\sqrt{3}$ ; 4) 12.

10.22. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 19$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

- 1) 19; 2)  $19\sqrt{2}$ ; 3)  $\frac{19}{2}\sqrt{2}$ ; 4) 9,5.

10.23. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 34$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$ .

- 1) 8,5; 2) 34; 3)  $17\sqrt{2}$ ; 4)  $\frac{17}{2}\sqrt{2}$ .

10.24. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$ .

- 1)  $14\sqrt{3}$ ; 2) 28; 3)  $28\sqrt{2}$ ; 4) 14.

10.25. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$ .

- 1) 15; 2)  $\frac{15}{4}$ ; 3)  $\frac{15}{2}$ ; 4)  $7,5\sqrt{2}$ .

10.26. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 18, (\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

- 1) 36; 2) 18; 3)  $36\sqrt{2}$ ; 4)  $36\sqrt{3}$ .

10.27. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

- 1) 15; 2)  $\frac{15}{4}$ ; 3)  $15\sqrt{3}$ ; 4)  $\frac{15}{2}$ .

10.28. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 14, (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

- 1) 21; 2)  $\frac{21}{2}\sqrt{2}$ ; 3)  $21\sqrt{2}$ ; 4)  $21\sqrt{3}$ .

10.29. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 18, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .

- 1)  $18\sqrt{2}$ ; 2) 18; 3)  $18\sqrt{3}$ ; 4) 36.

10.30. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$ .

- 1)  $\frac{35}{4}$ ; 2)  $\frac{35}{2}$ ; 3)  $\frac{35\sqrt{2}}{2}$ ; 4)  $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ .

Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

11.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(1; -1; 0)$  и  $\vec{b}(2; 1; 0)$ , как на сторонах.

- 1)  $\frac{3}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{4}$ ; 3) 2; 4) 3.

11.2. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(2; 0; -1)$  и  $\vec{b}(1; 0; 2)$ , как на сторонах.

- 1) 4; 2)  $\frac{5}{4}$ ; 3)  $\frac{5}{2}$ ; 4) 1.

11.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(0;1;2)$  и  $\vec{b}(0;-1;2)$ , как на сторонах.

- 1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

11.4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(1;2;4)$  и  $\vec{b}(0;0;-1)$ , как на сторонах.

- 1)  $\frac{3}{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ; 3) 4; 4) 2.

11.5. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(1;2;4)$  и  $\vec{b}(-1;0;0)$ , как на сторонах.

- 1)  $\sqrt{21}$ ; 2)  $\sqrt{7}$ ; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4)  $\sqrt{6}$ .

11.6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(1;2;4)$  и  $\vec{b}(0;-1;0)$ , как на сторонах.

- 1)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ; 2) 1; 3)  $\sqrt{17}$ ; 4)  $\sqrt{18}$ .

11.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(0;0;2)$  и  $\vec{b}(1;-1;1)$ , как на сторонах.

- 1) 1; 2)  $\sqrt{6}$ ; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4)  $\sqrt{2}$ .

11.8. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(0;2;0)$  и  $\vec{b}(1;-1;1)$ , как на сторонах.

- 1)  $\sqrt{7}$ ; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $\sqrt{3}$ .

11.9. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(2;0;0)$  и  $\vec{b}(1;-1;1)$ , как на сторонах.

- 1) 2; 2)  $\sqrt{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ ; 4)  $\sqrt{7}$ .

11.10. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}(-4;3;0)$  и  $\vec{b}(0;0;1)$ , как на сторонах.

- 1) 5; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $\frac{5}{4}$ ; 4)  $\frac{5}{2}$ .

11.11. Найти величину момента силы  $\vec{F}(1;0;0)$  относительно точки  $N(-2;2;1)$ , если сила приложена к точке  $M(1;2;3)$ .

- 1) 2; 2) 8; 3) 7; 4) 6.

11.12. Найти величину момента силы  $\vec{F}(1;0;0)$  относительно точки  $N(1; -3;2)$ , если сила приложена к точке  $M(3; -1;2)$ .

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 4.

11.13. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;0;1)$  относительно точки  $N(4;1;1)$ , если сила приложена к точке  $M(4; -2;3)$ .

1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 6.

11.14. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;1;0)$  относительно точки  $N(3;1;-5)$ , если сила приложена к точке  $M(-1;2;-5)$ .

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

11.15. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;1;0)$  относительно точки  $N(2;6;4)$ , если сила приложена к точке  $M(3;6;5)$ .

1)  $\sqrt{2}$ ; 2) 1; 3)  $\sqrt{5}$ ; 4)  $\sqrt{3}$ .

11.16. Найти величину момента силы  $\vec{F}(1;0;0)$  относительно точки  $N(7;0;-1)$ , если сила приложена к точке  $M(7;3;2)$ .

1)  $\sqrt{2}$ ; 2)  $3\sqrt{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ ; 4)  $2\sqrt{3}$ .

11.17. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;0;-1)$  относительно точки  $N(2;4;1)$ , если сила приложена к точке  $M(4;4;-2)$ .

1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

11.18. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;-1;0)$  относительно точки  $N(1;3;0)$ , если сила приложена к точке  $M(3;3;-1)$ .

1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{2}$ ; 3) 2; 4)  $\sqrt{5}$ .

11.19. Найти величину момента силы  $\vec{F}(0;-1;0)$  относительно точки  $N(7;0;-1)$ , если сила приложена к точке  $M(7;3;2)$ .

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

11.20. Найти величину момента силы  $\vec{F}(-1;0;0)$  относительно точки  $N(3;1;-5)$ , если сила приложена к точке  $M(-1;2;-5)$ .

1) 1; 2)  $\sqrt{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ ; 4) 2.

11.21. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(2;0;-1)$ ,  $\vec{b}(1;0;2)$ , как на сторонах.

1)  $\sqrt{2}$ ; 2) 1; 3) 5; 4)  $\sqrt{5}$ .

11.22. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(1; -1; 0)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 0)$ , как на сторонах.

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

11.23. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(0; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(0; -1; 2)$ , как на сторонах.

1) 5; 2) 3; 3) 4; 4) 2.

11.24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(1; 2; 4)$ ,  $\vec{b}(0; 0; -1)$ , как на сторонах.

1) 1; 2)  $\sqrt{2}$ ; 3)  $\sqrt{3}$ ; 4)  $\sqrt{5}$ .

11.25. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(1; 2; 4)$ ,  $\vec{b}(-1; 0; 0)$ , как на сторонах.

1)  $2\sqrt{5}$ ; 2)  $\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4) 1.

11.26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(1; 2; 4)$ ,  $\vec{b}(0; -1; 0)$ , как на сторонах.

1)  $\sqrt{13}$ ; 2)  $\sqrt{14}$ ; 3) 4; 4)  $\sqrt{17}$ .

11.27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(-4; 3; 0)$ ,  $\vec{b}(0; 0; 1)$ , как на сторонах.

1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 2.

11.28. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(0; 2; 0)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 1)$ , как на сторонах.

1)  $2\sqrt{2}$ ; 2)  $\sqrt{2}$ ; 3) 3; 4) 1.

11.29. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(2; 0; 0)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 1)$ , как на сторонах.

1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $2\sqrt{2}$ ; 3) 3; 4) 2.

11.30. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(0; 0; 2)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 1)$ , как на сторонах.

1) 1; 2) 2; 3)  $2\sqrt{2}$ ; 4)  $\sqrt{2}$ .

Найти смешанное произведение векторов.

12.1.  $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ .

1) -25; 2) -24; 3) -23; 4) -22.

12.2.  $\vec{a}(-1; 0; 2)$ ,  $\vec{b}(3; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(5; -1; -2)$ .

1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 4.

- 12.3.  $\bar{a}(-4;1;-2)$ ,  $\bar{b}(2;1;2)$ ,  $\bar{c}(0;-1;-2)$ .  
 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8.
- 12.4.  $\bar{a}(1;2;3)$ ,  $\bar{b}(0;-1;-2)$ ,  $\bar{c}(-3;1;0)$ .  
 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
- 12.5.  $\bar{a}(3;2;1)$ ,  $\bar{b}(-1;-2;0)$ ,  $\bar{c}(4;1;0)$ .  
 1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 4.
- 12.6.  $\bar{a}(4;-1;0)$ ,  $\bar{b}(3;-1;0)$ ,  $\bar{c}(0;2;5)$ .  
 1) -6; 2) -5; 3) -4; 4) -3.
- 12.7.  $\bar{a}(1;0;-1)$ ,  $\bar{b}(2;-1;1)$ ,  $\bar{c}(5;2;1)$ .  
 1) -10; 2) -11; 3) -12; 4) -13.
- 12.8.  $\bar{a}(2;-1;0)$ ,  $\bar{b}(5;4;1)$ ,  $\bar{c}(3;0;-2)$ .  
 1) -26; 2) -27; 3) -28; 4) -29.
- 12.9.  $\bar{a}(2;1;0)$ ,  $\bar{b}(1;4;1)$ ,  $\bar{c}(-1;0;-2)$ .  
 1) -14; 2) -15; 3) -16; 4) -17.
- 12.10.  $\bar{a}(0;1;1)$ ,  $\bar{b}(2;-1;3)$ ,  $\bar{c}(1;2;0)$ .  
 1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9.
- 12.11.  $\bar{a}(-1;0;2)$ ,  $\bar{b}(-2;1;-3)$ ,  $\bar{c}(4;-1;0)$ .  
 1) -4; 2) -3; 3) -2; 4) -1.
- 12.12.  $\bar{a}(-2;0;-1)$ ,  $\bar{b}(1;3;-1)$ ,  $\bar{c}(3;2;1)$ .  
 1) -3; 2) -2; 3) -1; 4) 1.
- 12.13.  $\bar{a}(-4;1;0)$ ,  $\bar{b}(1;0;1)$ ,  $\bar{c}(2;-1;0)$ .  
 1) -2; 2) -1; 3) 2; 4) 3.
- 12.14.  $\bar{a}(-1;1;-1)$ ,  $\bar{b}(2;1;0)$ ,  $\bar{c}(-1;1;0)$ .  
 1) -7; 2) -3; 3) -5; 4) -4.
- 12.15.  $\bar{a}(2;-1;0)$ ,  $\bar{b}(1;-1;1)$ ,  $\bar{c}(0;-1;2)$ .  
 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1.
- 12.16.  $\bar{a}(3;1;-1)$ ,  $\bar{b}(0;-1;1)$ ,  $\bar{c}(1;1;1)$ .  
 1) -3; 2) -4; 3) -5; 4) -6.
- 12.17.  $\bar{a}(1;4;-2)$ ,  $\bar{b}(0;-1;1)$ ,  $\bar{c}(1;1;-1)$ .  
 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- 12.18.  $\bar{a}(2;-3;4)$ ,  $\bar{b}(0;1;-2)$ ,  $\bar{c}(1;-1;0)$ .  
 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1.

12.19.  $\vec{a}(5; 0; -1)$ ,  $\vec{b}(-1; 2; 1)$ ,  $\vec{c}(2; 3; -1)$ .

1)  $-19$ ; 2)  $-18$ ; 3)  $-16$ ; 4)  $-15$ .

12.20.  $\vec{a}(-1; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(2; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(3; 4; 5)$ .

1)  $18$ ; 2)  $17$ ; 3)  $16$ ; 4)  $15$ .

12.21.  $\vec{a}(5; 0; 7)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(0; 1; 2)$ .

1)  $-3$ ; 2)  $-2$ ; 3)  $-1$ ; 4)  $1$ .

12.22.  $\vec{a}(-4; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(5; 1; 0)$ ,  $\vec{c}(-1; 0; 1)$ .

1)  $4$ ; 2)  $3$ ; 3)  $2$ ; 4)  $-7$ .

12.23.  $\vec{a}(1; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(3; 4; 5)$ ,  $\vec{c}(0; 1; 2)$ .

1)  $17$ ; 2)  $16$ ; 3)  $15$ ; 4)  $14$ .

12.24.  $\vec{a}(1; 3; 1)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 3)$ ,  $\vec{c}(3; 1; 2)$ .

1)  $12$ ; 2)  $13$ ; 3)  $11$ ; 4)  $14$ .

12.25.  $\vec{a}(0; 3; 0)$ ,  $\vec{b}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{c}(-2; 6; 0)$ .

1)  $-18$ ; 2)  $-17$ ; 3)  $-16$ ; 4)  $-15$ .

12.26.  $\vec{a}(1; 7; 0)$ ,  $\vec{b}(0; 6; 2)$ ,  $\vec{c}(1; 0; 2)$ .

1)  $29$ ; 2)  $28$ ; 3)  $27$ ; 4)  $26$ .

12.27.  $\vec{a}(1; 3; -4)$ ,  $\vec{b}(0; -1; 2)$ ,  $\vec{c}(1; -1; 4)$ .

1)  $0$ ; 2)  $1$ ; 3)  $2$ ; 4)  $3$ .

12.28.  $\vec{a}(-1; 1; 4)$ ,  $\vec{b}(0; 1; 3)$ ,  $\vec{c}(5; 1; 3)$ .

1)  $-6$ ; 2)  $-5$ ; 3)  $-4$ ; 4)  $-3$ .

12.29.  $\vec{a}(-1; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(1; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(2; 4; 0)$ .

1)  $5$ ; 2)  $4$ ; 3)  $3$ ; 4)  $2$ .

12.30.  $\vec{a}(5; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(3; 4; 0)$ .

1)  $31$ ; 2)  $32$ ; 3)  $33$ ; 4)  $34$ .

Выбрать верные утверждения для заданных векторов, взятых в указанном порядке (*тестовое задание может иметь несколько правильных ответов*).

13.1.  $\vec{a}(1; -2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; -5; 6)$ ,  $\vec{c}(5; -7; 9)$ .

1) некопланарные вектора; 2) компланарные вектора;

3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.2.  $\vec{a}(0; 0; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(3; 4; 0)$ .

1) некопланарные вектора; 2) компланарные вектора;

3) тройка векторов правая; 4) тройка векторов левая.

13.3.  $\vec{a}(-1; 0; 2)$ ,  $\vec{b}(1; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(-1; -1; 0)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.4.  $\vec{a}(-1; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(-1; 1; 0)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.5.  $\vec{a}(-1; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 1)$ ,  $\vec{c}(1; 1; 0)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.6.  $\vec{a}(1; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(3; 5; 1)$ ,  $\vec{c}(2; 2; 4)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.7.  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; 5; 6)$ ,  $\vec{c}(7; 8; 9)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.8.  $\vec{a}(1; 3; 5)$ ,  $\vec{b}(2; 4; 6)$ ,  $\vec{c}(8; 9; 7)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.9.  $\vec{a}(2; 1; 2)$ ,  $\vec{b}(1; 2; 2)$ ,  $\vec{c}(2; 2; 1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.10.  $\vec{a}(1; 7; 1)$ ,  $\vec{b}(8; 1; 8)$ ,  $\vec{c}(1; 2; 1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.11.  $\vec{a}(-1; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(-2; 1; 1)$ ,  $\vec{c}(1; -2; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.12.  $\vec{a}(1; 2; 1)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 1)$ ,  $\vec{c}(1; 1; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.13.  $\vec{a}(3; -2; -1)$ ,  $\vec{b}(2; -3; 1)$ ,  $\vec{c}(1; -2; -3)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.14.  $\vec{a}(1; 4; 3)$ ,  $\vec{b}(2; -5; 1)$ ,  $\vec{c}(1; -3; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора ;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.15.  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(1; 0; 3)$ ,  $\vec{c}(2; 0; 6)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.16.  $\vec{a}(1; 3; 2)$ ,  $\vec{b}(-1; 0; 5)$ ,  $\vec{c}(1; 1; 1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.17.  $\vec{a}(1; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(-1; 0; -1)$ ,  $\vec{c}(0; 1; 1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.18.  $\vec{a}(1; 0; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 0; 2)$ ,  $\vec{c}(1; -1; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.19.  $\vec{a}(6; 1; 4)$ ,  $\vec{b}(12; 2; 3)$ ,  $\vec{c}(18; 3; 4)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.20.  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; 5; 6)$ ,  $\vec{c}(7; 8; 9)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.21.  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(0; 1; 0)$ ,  $\vec{c}(2; 1; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.22.  $\vec{a}(2; -1; -2)$ ,  $\vec{b}(-1; 0; 3)$ ,  $\vec{c}(-3; 4; 1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.23.  $\vec{a}(4; 1; 1)$ ,  $\vec{b}(-4; 0; -2)$ ,  $\vec{c}(0; 1; -1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.24.  $\vec{a}(1; 2; 0)$ ,  $\vec{b}(3; 2; 1)$ ,  $\vec{c}(0; 1; 2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.25.  $\vec{a}(1;3;4)$ ,  $\vec{b}(2;4;-2)$ ,  $\vec{c}(1;1;2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.26.  $\vec{a}(2;1;4)$ ,  $\vec{b}(-1;2;-2)$ ,  $\vec{c}(-1;1;2)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.27.  $\vec{a}(1;2;3)$ ,  $\vec{b}(7;2;1)$ ,  $\vec{c}(2;1;1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.28.  $\vec{a}(2;2;3)$ ,  $\vec{b}(4;-1;4)$ ,  $\vec{c}(1;-1;1)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.29.  $\vec{a}(1;2;3)$ ,  $\vec{b}(2;4;8)$ ,  $\vec{c}(3;6;5)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

13.30.  $\vec{a}(1;4;2)$ ,  $\vec{b}(-1;6;3)$ ,  $\vec{c}(0;8;4)$ .

- 1) некопланарные вектора;    2) компланарные вектора;  
3) тройка векторов правая;    4) тройка векторов левая.

Найти объем пирамиды  $ABCD$ .

14.1.  $A(6; 1; 4)$ ,  $B(1; -3; 7)$ ,  $C(7; 1; 3)$ ,  $D(2; -2; -5)$ .

- 1)  $\frac{25}{2}$ ;    2)  $\frac{23}{3}$ ;    3)  $\frac{23}{2}$ ;    4)  $\frac{25}{3}$ .

14.2.  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(3; 5; 5)$ ,  $D(3; 2; 5)$ .

- 1) 1;    2) 3;    3) 4;    4) 5.

14.3.  $A(2; -1; 0)$ ,  $B(6; 0; 0)$ ,  $C(5; 3; 5)$ ,  $D(4; 0; 4)$ .

- 1) 4;    2) 5;    3) 6;    4)  $\frac{17}{3}$ .

14.4.  $A(-1; 3; 2)$ ,  $B(3; 3; 5)$ ,  $C(2; 5; 1)$ ,  $D(1; 4; 3)$ .

- 1)  $\frac{2}{3}$ ;    2) 2;    3) 3;    4)  $\frac{3}{2}$ .

14.5.  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(0; 2; 8)$ ,  $C(8; 4; 2)$ ,  $D(3; 3; 4)$ .

- 1) 2;    2) 3;    3) 4;    4) 5.

14.6.  $A(5; 0; -1)$ ,  $B(9; 1; -1)$ ,  $C(6; 4; 1)$ ,  $D(6; 1; 1)$ .

- 1) 3;    2) 4;    3) 5;    4) 6.

14.7.  $A(-1; -2; 3)$ ,  $B(0; 0; 8)$ ,  $C(6; 0; 4)$ ,  $D(1; -1; 4)$ .

- 1) 3;    2) 2;    3) 1;    4) 0.

- 14.8.  $A(5; -3; 1)$ ,  $B(6; -1; 1)$ ,  $C(3; 0; -3)$ ,  $D(2; -2; 3)$ .  
 1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 7.
- 14.9.  $A(0; 1; 2)$ ,  $B(-1; 3; -1)$ ,  $C(4; 4; 7)$ ,  $D(1; 0; 2)$ .  
 1)  $\frac{13}{2}$ ; 2)  $\frac{13}{3}$ ; 3)  $\frac{5}{2}$ ; 4) 2.
- 14.10.  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(0; 4; -6)$ ,  $C(0; 5; -2)$ ,  $D(2; 3; -3)$ .  
 1)  $\frac{5}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{2}$ ; 3) 3; 4) 2.
- 14.11.  $A(-5; 2; 1)$ ,  $B(-1; 4; -2)$ ,  $C(-4; 5; 2)$ ,  $D(-4; 3; 1)$ .  
 1) 2; 2)  $\frac{3}{2}$ ; 3) 1; 4)  $\frac{2}{3}$ .
- 14.12.  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(5; 3; -3)$ ,  $C(3; -2; 2)$ ,  $D(0; 2; 0)$ .  
 1)  $\frac{1}{7}$ ; 2)  $\frac{1}{5}$ ; 3)  $\frac{1}{6}$ ; 4) 1.
- 14.13.  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(4; 1; 5)$ ,  $C(6; 2; 4)$ ,  $D(-1; 0; 3)$ .  
 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
- 14.14.  $A(0; -3; 4)$ ,  $B(3; -5; 7)$ ,  $C(9; 0; 4)$ ,  $D(-2; -2; 3)$ .  
 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
- 14.15.  $A(1; 2; 5)$ ,  $B(4; 0; 8)$ ,  $C(-1; 5; 5)$ ,  $D(-1; 3; 11)$ .  
 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.
- 14.16.  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(2; -2; 4)$ ,  $C(3; 3; 2)$ ,  $D(-3; 1; 4)$ .  
 1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10.
- 14.17.  $A(5; 1; 0)$ ,  $B(4; -1; 2)$ ,  $C(7; 4; 1)$ ,  $D(3; 2; 3)$ .  
 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
- 14.18.  $A(1; 3; 8)$ ,  $B(0; -1; 10)$ ,  $C(-4; 5; 6)$ ,  $D(2; 4; 4)$ .  
 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.
- 14.19.  $A(5; 1; 2)$ ,  $B(6; -1; 4)$ ,  $C(10; 3; 0)$ ,  $D(6; 2; 6)$ .  
 1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10.
- 14.20.  $A(8; 1; -1)$ ,  $B(7; -1; 1)$ ,  $C(10; 4; 0)$ ,  $D(6; 2; -4)$ .  
 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
- 14.21.  $A(0; -1; 2)$ ,  $B(-1; -3; 4)$ ,  $C(4; 2; 2)$ ,  $D(-2; 0; 4)$ .  
 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.
- 14.22.  $A(-1; 4; 3)$ ,  $B(0; 2; 5)$ ,  $C(4; 6; 1)$ ,  $D(0; 5; 7)$ .  
 1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11.
- 14.23.  $A(0; 2; 7)$ ,  $B(3; 0; 9)$ ,  $C(4; 5; 7)$ ,  $D(-2; 3; 9)$ .  
 1) 9; 2) 8; 3) 7; 4) 6.
- 14.24.  $A(-4; 2; -3)$ ,  $B(-1; 0; 0)$ ,  $C(-6; 5; -3)$ ,  $D(-6; 3; 3)$ .  
 1) 8; 2) 7; 3) 6; 4) 5.

14.25.  $A(1; 8; 1)$ ,  $B(4; 6; 4)$ ,  $C(-1; 11; 1)$ ,  $D(-1; 9; 0)$ .

1) 1; 2)  $\frac{6}{7}$ ; 3)  $\frac{1}{7}$ ; 4)  $\frac{7}{6}$ .

14.26.  $A(-5; -3; -1)$ ,  $B(-2; -6; 2)$ ,  $C(4; 0; -1)$ ,  $D(-7; -2; 2)$ .

1) 1; 2) 5; 3)  $\frac{51}{2}$ ; 4) 4.

14.27.  $A(5; 1; 2)$ ,  $B(4; -1; 4)$ ,  $C(9; 2; 2)$ ,  $D(3; 2; 4)$ .

1)  $\frac{13}{3}$ ; 1) 4; 1) 3; 1) 2.

14.28.  $A(-1; 0; 1)$ ,  $B(2; -2; 4)$ ,  $C(6; 3; 1)$ ,  $D(-3; 1; 0)$ .

1) 2; 2)  $\frac{7}{3}$ ; 3)  $\frac{5}{3}$ ; 4)  $\frac{8}{3}$ .

14.29.  $A(4; -1; 0)$ ,  $B(7; -3; 4)$ ,  $C(8; 2; 1)$ ,  $D(3; 2; -1)$ .

1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3.

14.30.  $A(1; 2; 4)$ ,  $B(4; 0; 6)$ ,  $C(5; 5; 4)$ ,  $D(-1; 3; 6)$ .

1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7.

#### -14.

Найти векторное произведение векторов  $\vec{a}(-1; 2; 5)$  и  $\vec{b}(3; -4; -2)$ .

Решение. Составим и вычислим определитель:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 16\vec{i} - (-(-3)\vec{j}) + (-2)\vec{k} = 16\vec{i} + 13\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть вектор  $\vec{a} \times \vec{b} = 16\vec{i} + 13\vec{j} - 2\vec{k} = (16; 13; -2)$ . Ответ:  $(16; 13; -2)$ .

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(2; -4; 1)$  и  $\vec{b}(2; 1; -1)$ .

Решение. Найдем векторное произведение векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - (-4)\vec{j} + 10\vec{k} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k} = (3; 4; 10).$$

Тогда площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, равна модулю векторного произведения:

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}. \quad \text{Ответ: } 5\sqrt{5}.$$

• Вычислить модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 15$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$ .

Решение. Модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b}) = 15 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 15 \cdot 4 \cdot \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 15 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 15 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 30. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 30.$$

4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как на сторонах, если  $|\vec{a}| = 15$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .

Решение.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 \cdot \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}.$$

Ответ:  $15\sqrt{2}$ .

• Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a}(-3; 2; 5)$ ,  $\vec{b}(0; -3; 4)$ ,  $\vec{c}(1; -5; -3)$ .

Решение. Найдем смешанное произведение данных векторов:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 29 + 1 \cdot 23 = \\ &= -87 + 23 = -64. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } -64.$$

• Проверить, что векторы  $\vec{a}(-1; 2; -3)$ ,  $\vec{b}(0; -1; 5)$ ,  $\vec{c}(-2; 3; -1)$  компланарны.

Решение. Найдем смешанное произведение данных векторов:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-14) - \\ &- 2 \cdot 7 = 14 - 14 = 0. \end{aligned}$$

Так как смешанное произведение векторов равно 0, значит вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарны. Ответ: вектора компланарны.

7. Найти объем пирамиды  $ABCD$  с вершинами  $A(-1; 0; 5)$ ,  $B(2; -6; 8)$ ,  $C(-1; 2; -1)$ ,  $D(0; 4; 4)$ .

Решение. Найдем векторы, образующие пирамиду:

$$\overline{AB}(2+1; -6-0; 8-5), \quad \overline{AB}(3; -6; 3);$$

$$\overline{AC}(-1+1; 2-0; -1-5), \quad \overline{AC}(0; 2; -6);$$

$$\overline{AD}(0+1; 4-0; 5-5), \quad \overline{AD}(1; 4; 0).$$

Тогда объем пирамиды  $ABCD$  равен шестой части абсолютной величины смешанного произведения этих векторов. Найдем смешанное произведение векторов:

$$\overline{ABACAD} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 24 + 1 \cdot 30 = 102.$$

Объем пирамиды  $ABCD$  равен  $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 102 = 17$ . Ответ: 17.

1. Дан вектор  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ . Найти вектор  $\vec{d}$ , коллинеарный вектору  $\vec{c}$  и противоположного с ним направления, если  $|\vec{d}| = 3$ .

2. Вычислить  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $np_a(\vec{b} + 3\vec{a})$ , если  $\vec{a} = 3\vec{q}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}; \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ .

3. Сила  $\vec{F}$  приложена к вершине  $A$  треугольника  $ABC$ . Вычислить работу силы по сторонам  $AB$  и  $AC$ , момент силы относительно середины стороны  $BC$ , если  $A(3; 2; -1)$ ,  $B(5; 3; 3)$ ,  $C(1; 10; 5)$ ,  $F(5; 1; 2)$ .

4. Даны координаты точек  $A(0; 3; 0)$ ,  $B(-2; 6; 0)$ ,  $C(-2; 3; 6)$ ,  $D(0; 6; 8)$ . Выполнить следующие действия:

- записать векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  в разложении по базису;
- найти модули этих векторов и их направляющие косинусы;
- проверить, лежат ли заданные точки в одной плоскости;
- если точки не лежат в одной плоскости, то найти высоту пирамиды  $ABCD$ , опущенную из вершины  $B$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Список рекомендуемой литературы .....	3
1. Элементы векторной алгебры .....	4
2. Задания, рекомендуемые для аудиторных и домашних занятий.....	22
3. Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.....	26
4. Тестовые задания .....	36
5. Пример модульного задания .....	82

Учебное издание

Сергей Владимирович  
Татьяна Борисовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор *А. С. Зайцева*  
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 14.02.2022. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,74.  
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».  
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.  
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».  
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.