МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

# ФИЗИКА

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА

*Курс лекций*
*для студентов, обучающихся по специальностям*
*1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий*
*1-75 05 01 Мелиорация и водное хозяйство, 1-74 06 04 Техническое*
*обеспечение мелиоративных и водохозяйственных работ*

Горки
БГСХА
2019

УДК 537.2(075.8)
ББК 22.33я73
Ф48

*Одобрено методической комиссией
факультета механизации сельского хозяйства
19.03.2019 (протокол № 7), методической комиссией мелиоративно-строительного факультета 25.03.2019 (протокол № 7)
и Научно-методическим советом БГСХА 29.05.2019 (протокол № 9)*

Авторы:
кандидат педагогических наук, доцент *О. М. Астахова*;
кандидат технический наук, доцент *С. И. Козлов*;
старший преподаватель *Т. М. Чубукова*;
ассистент *Н. А. Дубина*

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор *В. Н. Наумчик*;
кандидат физико-математических наук *В. Ю. Плавский*;
доктор технических наук, профессор *А. Н. Карташевич*

Ф48 **Физика. Электростатика** : курс лекций / О. М. Астахова [и др.]. – Горки : БГСХА, 2019. – 35 с.
ISBN 978-985-467-933-4.

Изложены основные понятия и законы электростатики; рассмотрен принцип суперпозиции электростатических полей, описано применение теоремы Гаусса для расчета поля диполя, бесконечной заряженной нити, плоскости и т. д. Подробно рассмотрено электростатическое поле в диэлектрике.

Для студентов, обучающихся по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-75 05 01 Мелиорация и водное хозяйство, 1-74 06 04 Техническое обеспечение мелиоративных и водохозяйственных работ.

**УДК 537.2(075.8)**
**ББК 22.33я73**

**ISBN 978-985-467-933-4**

## ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика – раздел физики, в котором изучают электрические и магнитные явления. В основе электродинамики лежат понятия электрического заряда и электромагнитного поля. Раздел электродинамики, в котором изучают свойства и взаимодействия неподвижных (относительно данной инерциальной системы отсчета) заряженных частиц и тел, называют электростатикой.

Становление электростатики происходило в XVI–XVII вв. в Европе и большой вклад в это внесли такие ученые, как В. Гильберт (1540–1603), Б. Франклин (1706–1790), М. Ломоносов (1711–1765), Ш. Кулон (1736–1806) и многие другие. Уже тогда ученые поняли, что наряду с такой фундаментальной силой, как сила тяготения, между телами проявляется действие и иных фундаментальных сил. Важнейшее место среди них занимает взаимодействие, которое подобно тяготению также изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, но является намного более сильным, – электрическое взаимодействие. С электрическим взаимодействием, как показывает опыт, тесно связано и магнитное взаимодействие. Попытки объяснить природу сил тяготения, так же как электрических и магнитных явлений, вплоть до XVIII в. оставались безуспешными. Усилия ученых были направлены на выяснение тех законов, которые определяют взаимодействие между точечными объектами, обладающими электрическими и магнитными свойствами. Эти законы копировали законы всемирного тяготения Ньютона, например закон Кулона, и описывали взаимодействие тел на расстоянии, причем взаимодействие должно распространяться с бесконечно большой скоростью.

В отличие от сил тяготения, силы электрического взаимодействия могут быть как силами притяжения, так и силами отталкивания. Соответственно существуют два сорта свойств «веществ», один из которых чисто условно можно назвать положительным, другой – отрицательным. «Вещества» одного сорта отталкиваются, а разных сортов притягиваются, данные свойства вещества называют электрическим зарядом.

Электрические явления играют важную роль в науке и технике и определяют развитие энергетики, транспорта, вычислительных технологий и т. д.

## Л е к ц и я 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 1.1. Электрический заряд. Способы электризации тел

Существует два вида электрических зарядов, которые условно называют *положительными* и *отрицательными.* Носителем отрицательного заряда является электрон, это наименьший заряд, существующий в природе, его называют *элементарным зарядом*. Установлено, что элементарный заряд $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Носителем положительного заряда является элементарная частица – *протон,* $e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Протоны и электроны входят в состав атомов любого вещества. Если в теле число протонов равно числу электронов и они равномерно распределены по телу, то тело является *электрически нейтральным.* Если же тело содержит заряженных частиц одного знака больше, чем противоположного, оно является заряженным. Именно этот избыточный заряд определяет собой электрические свойства тела, и его называют зарядом тела, обозначают $q$, и он равен

$$q = eN, \tag{1.1}$$

где $N$ – число избыточных в теле зарядов (положительных или отрицательных).

Процесс, приводящий к появлению на телах или разных частях одного тела избыточного электрического заряда, называют *электризацией.*

Наэлектризовать тела можно тремя способами:

1) *в процессе трения*. В этом случае тела заряжаются одинаковым по модулю и противоположным по знаку зарядом. Тело, отдавшее часть электронов, заряжается положительно, а тело, получившее эти электроны, заряжается отрицательно;

2) *при соприкосновении с заряженным телом*. В этом случае часть электронов переходит на тело, где их недостаток. Оба тела заряжаются одинаковым знаком;

3) *по индукции*. Появление заряда противоположного знака на телах, находящихся вблизи заряженных тел.

Электрический заряд – это внутреннее свойство тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям.

**Единица электрического заряда – кулон (Кл) –** электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

Фундаментальные свойства электрического заряда, установленные опытным путем:

1. Существует в двух видах: **положительный** и **отрицательный**. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

2. Электрический заряд **инвариантен** – его величина не зависит от системы отсчета, т. е. от того, движется он или покоится.

3. Электрический заряд **дискретен** – заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда $e$.

4. Электрический заряд **аддитивен** – заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему.

Для электрических зарядов выполняется закон их сохранения: *алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.*

Под замкнутой системой в данном случае понимают систему, которая не обменивается зарядами с внешними телами.

В электростатике используется физическая модель – **точечный электрический заряд** – заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче.

### 1.2. Закон Кулона

*Закон взаимодействия точечных зарядов* – **закон Кулона**: *сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам* $q_1$ *и* $q_2$ *и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (1.2)$$

Сила $\vec{F}$ направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной и соответствует притяжению ($F < 0$) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ($F > 0$) в случае одноименных зарядов. В векторной форме сила, действующая на заряд $q_1$ со стороны заряда $q_2$,

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}, \qquad (1.3)$$

на заряд $q_2$ со стороны заряда $q_1$ действует сила $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная, относящаяся к числу фундаментальных физических постоянных,

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \text{ или } \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}},$$

тогда

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}, \tag{1.4}$$

где **фарад (Ф)** – единица электрической емкости.

Если взаимодействующие заряды находятся в изотропной среде, то кулоновская сила

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}, \tag{1.5}$$

где $\varepsilon$ – **диэлектрическая проницаемость среды** – безразмерная величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия $F$ между зарядами в данной среде меньше их силы взаимодействия $F_0$ в вакууме,

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}. \tag{1.6}$$

Диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_{\text{вак}} = 1$. Подробнее диэлектрики и их свойства буду рассмотрены ниже.

Всякое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов, аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна геометрической сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

Часто бывает значительно удобнее считать, что заряды **распределены в заряженном теле непрерывно** – вдоль некоторой линии (например, в случае заряженного тонкого стержня), поверхности (например, в случае заряженной пластины) или объема. Соответственно пользуются понятиями *линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов.*

**Объемная плотность электрических зарядов**

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \tag{1.7}$$

где $dq$ – заряд малого элемента заряженного тела объемом $dV$.

**Поверхностная плотность электрических зарядов**

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \tag{1.8}$$

где $dq$ – заряд малого участка заряженной поверхности площадью $dS$.

**Линейная плотность электрических зарядов**

$$\tau = \frac{dq}{dS}, \tag{1.9}$$

где $dq$ – заряд малого участка заряженной линии длиной $dl$.

### 1.3. Напряженность электростатического поля

Электростатическим полем называется поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами.

Электростатическое поле описывается двумя величинами: **потенциалом** (энергетическая *скалярная* характеристика поля) и **напряженностью** (силовая *векторная* характеристика поля).

**Напряженность электростатического поля –** векторная физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд $q_0$, помещенный в данную точку поля,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{1.10}$$

**Единица напряженности электростатического поля – ньютон на кулон** (Н/Кл): 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля.

**Напряженность поля точечного заряда** в вакууме (и в диэлектрике)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r};\ (\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}), \tag{1.11}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий данную точку поля с зарядом $q$.

В скалярной форме

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2};\ (E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}). \tag{1.12}$$

**Направление вектора** $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Если поле создается **положительным** зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создается **отрицательным** зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен к заряду (притяжение).

Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$ (рис. 1.1, *а*). Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Так как в данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются. Для **однородного поля** (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по модулю и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности.

Если поля создаются точечным зарядом, то линии напряженности – радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен, и входящие в него, если заряд отрицателен (рис. 1.1, *б*).

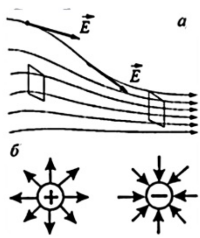



Рис. 1.1

## 1.4. Поток вектора напряженности

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, их проводят с определенной густотой: число линий напряженности, пронизывающих единицу к площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$ (рис. 1.1, *а*).

Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку $dS$, равно $E \cdot dS\cos\alpha = E_n dS$, где $E_n$ – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $dS$. (Вектор $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный к площадке $dS$.) *Величина*

$$d\Phi_E = E \cdot dS_\perp = E \cdot dS\cos\alpha = E_n dS = \vec{E}d\vec{S} \qquad (1.13)$$

*называется потоком вектора напряженности через площадку* $dS$. Здесь $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен $dS$, а направление вектора совпадает с направлением $\vec{n}$ к площадке (рис. 1.2).

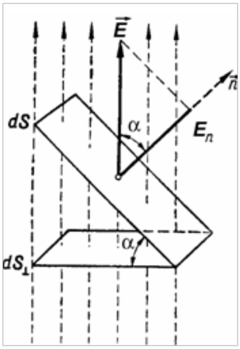



Рис. 1.2

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность $S$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \tag{1.14}$$

### 1.5. Принцип суперпозиции электростатических полей

К кулоновским силам применим рассмотренный в механике **принцип независимости действия сил** – результирующая сила, действующая со стороны поля на пробный заряд, равна векторной сумме сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов, создающих электростатическое поле.

Напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов, также равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i. \tag{1.15}$$

Эта формула выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**. Он позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, представив ее в виде совокупности полей точечных зарядов (рис. 1.3).

Рис. 1.3

Напомним правило определения величины вектора $\vec{c}$ суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}\ .$$

произвольную замкнутую поверхность равен **алгебраической** сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на $\varepsilon_0$.

Если заряд распределен в пространстве с объемной плотностью $\rho = dq / dV$, то теорема Гаусса имеет следующий вид:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_V \rho dV. \qquad (1.18)$$

# Л е к ц и я 2. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

## 2.1. Циркуляция вектора напряженности

Если в электронном поле точечного заряда $q$ из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд $q_0$, то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dl \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr. \qquad (2.1)$$

Работа при перемещении заряда $q_0$ из точки 1 в точку 2 равна:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2}). \qquad (2.2)$$

Работа $A_{12}$ не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек (рис. 2.1).

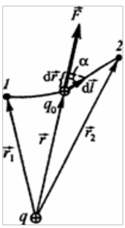



Рис. 2.1

Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы – **консервативными**.

Таким образом, работа перемещения заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру $L$ равна нулю:

$$\oint_L dA = 0.$$

Если переносимый заряд **единичный**, то элементарная работа сил поля на пути $d\vec{l}$ равна $\vec{E}d\vec{l} = E_l dl$, где $E_l = E\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

Интеграл $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl$ называется **циркуляцией вектора напряженности** по заданному замкнутому контуру $L$ (рис. 2.2).

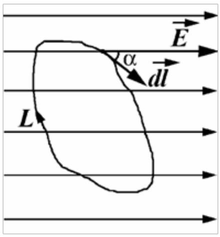



Рис. 2.2

**Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$.**

*Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю*:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0.$$

Силовое поле, обладающее таким свойством, называется **потенциальным**. Эта формула справедлива **только для** электрического поля **неподвижных** зарядов (**электростатического**).

## 2.2. Потенциальная энергия заряда. Потенциал

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии.

Поэтому работу $A_{12}$ можно представить как разность потенциальных энергий заряда $q_0$ в начальной и конечной точках заряда $q$:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2. \qquad (2.3)$$

Потенциальная энергия заряда $q_0$, находящегося в поле заряда $q$ на расстоянии $r$ от него, равна:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + \text{const.} \qquad (2.4)$$

Считая, что при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращается в нуль, получаем: $\text{const} = 0$.

Для **одноименных** зарядов потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) **положительна**, для **разноименных** зарядов потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) **отрицательна**.

Если поле создается системой $n$-точечных зарядов, то потенциальная энергия заряда $q_0$, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий, создаваемых каждым из зарядов в отдельности,

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i}. \qquad (2.5)$$

Отношение $\dfrac{W}{q_0}$ не зависит от пробного заряда $q_0$ и является энергетической характеристикой поля, называемой **потенциалом**:

$$\varphi = \frac{W}{q_0}. \qquad (2.6)$$

**Потенциал** $\varphi$ в какой-либо точке электростатического поля есть **скалярная** физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. Например, потенциал поля, создаваемого точечным зарядом $q$, равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (2.7)$$

С учетом формул (2.3) и (2.6) работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда $q_0$ из точки 1 в точку 2, может быть представлена следующим образом:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0\Delta\varphi,$$

т. е. равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

**Разность потенциалов** двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля при перемм п

***Принцип суперпозиции потенциалов электростатических полей***: если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов.

## 2.3. Связь между напряженностью и потенциалом

Найдем взаимосвязь между напряженностью электростатического поля, являющейся *силовой характеристикой*, и потенциалом – *энергетической характеристикой поля.*

Работа по перемещению единичного точечного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси $x$ при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и $x_2 - x_1 = dx$, то

$$dA = q_0 E_x dx.$$

Та же работа равна

$$dA = q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q_0 d\varphi.$$

Приравнивая оба выражения, можем записать

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2.11}$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по $x$. Повторив аналогичные рассуждения для осей $y$ и $z$, можно найти вектор $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right), \tag{2.12}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей $x, y, z$.

Выражение в скобках есть определение $qrad\varphi$. Таким образом,

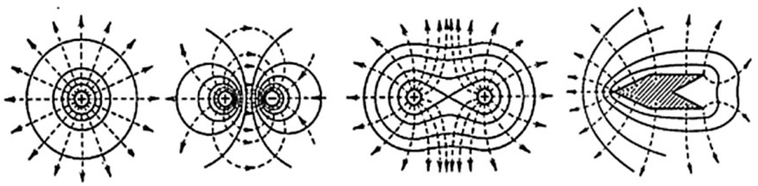
$$\vec{E} = -qrad\varphi.$$

Знак минус показывает, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала φ.

## 2.4. Эквипотенциальные поверхности

Для графического изображения распределения потенциала используются **эквипотенциальные поверхности** – *поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.*

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтоб разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше. На рис. 2.3 пунктиром изображены силовые линии, сплошными линиями – сечения эквипотенциальных поверхностей: для положительного точечного заряда (*а*), диполя (*б*), двух одноименных зарядов (*в*), заряженного металлического проводника сложной конфигурации (*г*).



*а* *б* *в* *г*

Рис. 2.3

Для точечного заряда потенциал $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{q}$, поэтому эквипотенциальные поверхности – концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности – радиальные прямые. Следовательно, *линии напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям*.

Можно показать, что во всех случаях:

1. Вектор $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям.
2. Всегда направлен в сторону убывания потенциала.

# Лекция 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

## 3.1. Электростатическое поле электрического диполя в вакууме

**Электрическим диполем** (или двойным электрическим полюсом) называется система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ($+q$, $-q$), расстояние $l$ между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля ($l << r$).

**Плечо диполя** $\vec{l}$ – вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними.

**Электрический момент диполя** $\vec{p}_e$ – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда $|q|$ на плечо $\vec{l}$,

$$\vec{p}_e = |q|\vec{l}. \tag{3.1}$$

Напряженность поля диполя на продолжении диполя в точке $A$:

$$E_A = E_+ - E_-, \ \varphi = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Пусть $r$ – расстояние до точки $A$ от середины оси диполя (рис. 3.1).

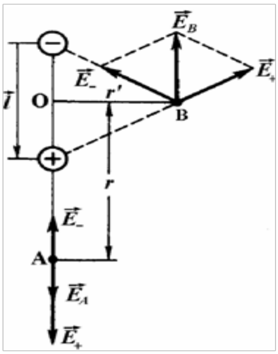



Рис. 3.1

Тогда, учитывая, что $r >> l$,

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e}{r^3}; \tag{3.2}$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-l/2} - \frac{q}{r+l/2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e}{r^2}. \tag{3.3}$$

Напряженность поля в точке $B$ на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины, при $r>>l$:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^2+(l/2)^2} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^2},\ \frac{E_B}{E_+} \approx \frac{l}{r'},$$

поэтому

$$E_B = (E_+)\frac{l}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e}{(r')^3}, \qquad (3.4)$$

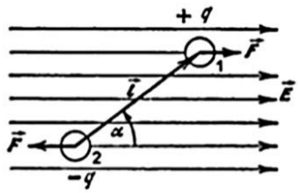
$$\varphi_B = 0.$$

Точка $B$ равноудалена от зарядов $+q$ и $-q$ диполя, поэтому потенциал поля в точке $B$ равен нулю. Вектор $\vec{E}_B$ направлен противоположно вектору $\vec{l}$.

Во внешнем электрическом поле на концы диполя действует пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы электрический момент $\vec{p}_e$ диполя развернулся вдоль направления поля $\vec{E}$ (рис. 3.2, *а*).

Во внешнем **однородном** поле момент пары сил равен $M = qEl\sin\alpha$ или $\vec{M} = \left[\vec{p}_e, \vec{E}\right]$. Во внешнем **неоднородном** поле (рис. 3.2, *б*) силы, действующие на концы диполя, неодинаковы ($\left|\vec{F}_2\right| > \left|\vec{F}_1\right|$) и их результирующая стремится передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью – диполь втягивается в область более сильного поля.

*а*




*б*

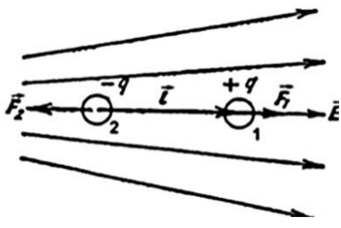



Рис. 3.2

### 3.2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плоскостью $+\sigma = dq/dS$. Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны.

В качестве Гауссовой поверхности примем поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от нее и на одинаковых расстояниях.

Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания $2ES$ (рис. 3.3). Заряд, заключенный внутри цилиндра, равен $\sigma S$. По теореме Гаусса $2ES = \sigma S/\varepsilon_0$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.5}$$

Напряженность $E$ не зависит от длины цилиндра, т. е. *напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю.* Такое поле называется **однородным**.

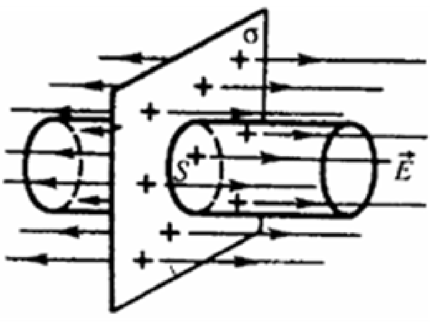



Рис. 3.3

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояних $x_1$ и $x_2$ от плоскости, равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \tag{3.6}$$

## 3.3. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с равными по абсолютному значению поверхностными плотностями зарядов $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$

Рассмотрим две бесконечные разноименно заряженные плоскости, расположенные параллельно друг другу.

Векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ первой и второй плоскостей равны по модулю и всюду направлены перпендикулярно плоскостям (рис. 3.4).

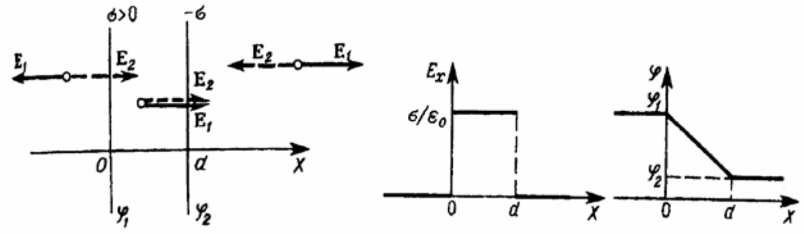



Рис. 3.4

Поэтому в пространстве вне плоскостей они компенсируют друг друга, а в пространстве между плоскостями суммарная напряженность $\vec{E} = 2\vec{E}_1$. Следовательно,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ (в диэлектрике } E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\text{)}.$$

Поле между плоскостями однородное. Разность потенциалов между плоскостями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \text{ (в диэлектрике } \Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} = Ed\text{)}.$$

## 3.4. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Сферическая поверхность радиуса $R$ с общим зарядом $q$ заряжена равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$.

Поскольку система зарядов и, следовательно, само поле центрально-симметрично относительно центра сферы, то линии напряженности направлены радиально (рис. 3.5).

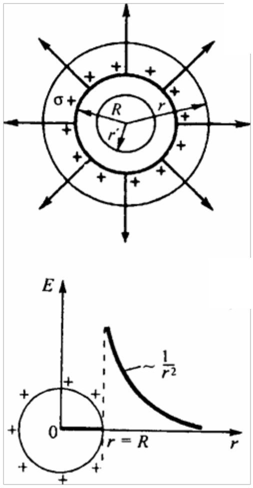



Рис. 3.5

В качестве Гауссовой поверхности выберем сферу радиуса $r$, имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд $q$. По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{3.7}$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}, \ (r \geq R). \tag{3.8}$$

При $r \geq R$ замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферы $E = 0$.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от центра сферы ($r_1 > R$, $r_2 > R$), равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{3.9}$$

Если принять $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$.

Вне заряженной сферы поле такое же, как после точечного заряда $q$, находящегося в центре сферы. Внутри заряженной сферы поля нет, поэтому потенциал всюду одинаков и такой же, как на поверхности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}. \qquad (3.10)$$

### 3.5. Поле объемно заряженного шара

Заряд $q$ равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса $R$ с объемной плотностью $\rho = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q}{4/3\pi R^3}$. Центр шара является центром симметрии поля (рис. 3.6).

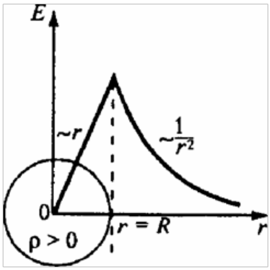



Рис. 3.6

1) для поля вне шара ($r > R$) получаем тот же результат, что и в случае сферической поверхности:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},\ \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

2) при $r = R$: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R_2} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$;

3) внутри шара сфера радиусом $r < R$ охватывает заряд $q = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}, \qquad (3.11)$$

отсюда для точек, лежащих внутри шара ($r_1 < R$, $r_2 > R$), с учетом

$$\rho = \frac{q}{4/3\pi R^3}$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{pr}{3\varepsilon_0}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r_2^2 - r_1^2). \qquad (3.12)$$

## 3.6. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)

Бесконечный цилиндр радиуса $R$ заряжен равномерно с линейной плотностью $\tau = \dfrac{dq}{dl}$. Линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра (рис. 3.7).

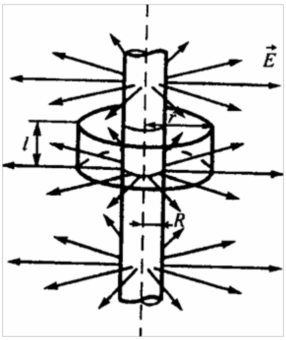



Рис. 3.7

В качестве Гауссовой поверхности выберем цилиндр радиуса $r$ и высотой $l$ коаксиальный с заряженной нитью.

Торцы этого цилиндра параллельны линиям напряженности, поэтому поток через них равен нулю.

Поток через боковую поверхность равен $E 2\pi r l$.

По теореме Гаусса (при $r > R$) $2\pi rlE = \dfrac{\tau l}{\varepsilon_0}$, отсюда при $r_1 > R$, $r_2 > R$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},\ \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому $E = 0$.

# Л е к ц и я 4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

## 4.1. Типы диэлектриков и их поляризация

**Диэлектриками** называются вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток.

Диэлектрик, как и всякое другое вещество, состоит из атомов или молекул, каждая из которых в целом электрически нейтральна.

Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом $+q$, находящимся в, так сказать, «центре тяжести» положительных зарядов, а заряд всех электронов – суммарным отрицательным зарядом $-q$, находящимся в «центре тяжести» отрицательных зарядов, то молекулы можно рассматривать как *электрические диполи с электрическим моментом*.

Различают три типа диэлектриков.

**1. Диэлектрики с неполярными молекулами**, симметричные молекулы которых в отсутствие внешнего поля имеют нулевой дипольный момент (например, $N_2$, $H_2$, $O_2$, $CO_2$).

**2. Диэлектрики с полярными молекулами**, молекулы которых вследствие ассиметрии имеют ненулевой дипольный момент (например, $H_2O$, $NH_3$, $SO_2$, $CO$).

**3. Ионные диэлектрики** (например, NaCl, KCl). Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием разных знаков.

Внесение диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика.

*Поляризацией диэлектрика* называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием электрического поля ориентированных по полю диполей.

Следовательно, трем видам диэлектриков соответствует *три вида поляризации*.

**1. Электронная**, или **деформационная поляризация**, диэлектрика с неполярными молекулами – за счет деформации электронных орбит возникает индуцированный дипольный момент у атомов или молекул диэлектрика (рис. 4.1).

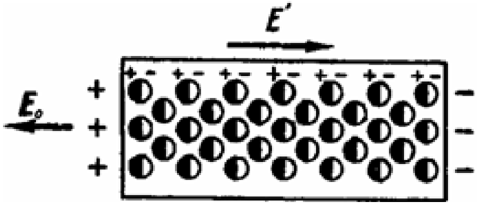



Рис. 4.1

**2. Ориентационная**, или **дипольная поляризация**, диэлектрика с полярными молекулами – ориентация имеющихся дипольных моментов молекул по полю (рис. 4.2) (эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и чем ниже температура).

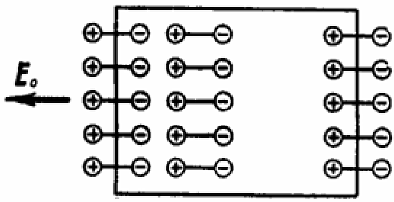



Рис. 4.2

**3. Ионная поляризация** диэлектрика с ионными кристаллическими решетками – смещение подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных ионов против поля приводит к возникновению дипольных моментов.

## 4.2. Поляризованность, диэлектрическая проницаемость среды

Если пластину из однородного диэлектрика поместить во внешнее электрическое поле, созданное двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, то во внешнем электрическом поле диэлектрик объемом *V поляризуется*, т. е. приобретает дипольный момент

$$\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i, \tag{4.1}$$

где $\vec{p}_i$ – дипольный момент одной молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика используется векторная величина – **поляризованность**, которая определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}v}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}. \tag{4.2}$$

В случае изотропного диэлектрика поляризованность (для большинства диэлектриков за исключением сегнетоэлектриков) линейно зависит от напряженности внешнего поля:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \tag{4.3}$$

где $\chi$ – **диэлектрическая восприимчивость вещества**, характеризующая свойства диэлектрика (положительная безразмерная величина).

Вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды, которые называются **связанными** (в отличие от **свободных** зарядов, которые создают внешнее поле) (рис. 4.3).

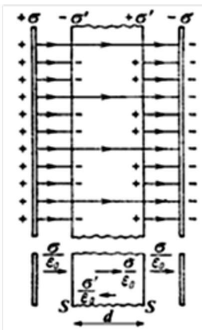



Рис. 4.3

Поле $\vec{E}'$ внутри диэлектрика, создаваемое связанными зарядами, направлено против внешнего поля $E_0$, создаваемого свободными зарядами. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'. \tag{4.4}$$

В нашем примере поле, создаваемое двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов $\sigma'$,

$$E' = \sigma' / \varepsilon_0, \tag{4.5}$$

поэтому

$$E = E_0 - \sigma' / \varepsilon_0. \tag{4.6}$$

Полный дипольный момент диэлектрической пластинки с толщиной $d$ и площадью грани $S$ определяется по формуле $p_V = PV = PSd$, с другой стороны – $p_V = q'd = \sigma' Sd$. Отсюда $\sigma' = P$.

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E, \tag{4.7}$$

отсюда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна:

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Безразмерная величина $\varepsilon = 1 + \chi = \dfrac{E_0}{E}$ называется **диэлектрической проницаемостью среды**. Она характеризует способность диэлектриков поляризоваться в электрическом поле и показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком.

### 4.3. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Напряженность электростатического поля зависит от свойств среды. Кроме того, вектор напряженности $\vec{E}$, переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, поэтому для описания (непрерывного) электрического поля системы зарядов с учетом поляризационных свойств диэлектриков вводится **вектор электрического смещения** (электрической индукции), который для изотропной среды записывается следующим образом:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \qquad (4.9)$$

Единица электрического смещения – Кл/м$^2$.

Вектор $\vec{D}$ описывает электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряженности можно ввести линии электрического смещения. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора $\vec{D}$ проходят не прерываясь.

Для произвольной замкнутой поверхности $S$ поток вектора $\vec{D}$ сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS, \qquad (4.10)$$

где $D_n$ – проекция вектора $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $dS$.

***Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике***: *поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (4.11)$$

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью $\rho = dq / dV$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \qquad (4.12)$$

Другая форма записи этого соотношения с учетом определения дивергенции вектора:

$$div\vec{D} = \rho. \qquad (4.13)$$

## Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектриками называются кристаллические диэлектрики, у которых в отсутствие внешнего электрического поля возникает самопроизвольная ориентация дипольных электрических моментов составляющих его частиц (рис. 4.4).

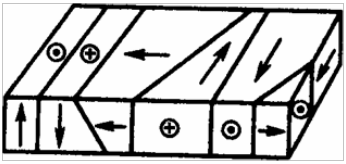


Рис. 4.4

*Примеры:* сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$; титанат бария $BaTiO_3$.

Сегнетоэлектрики состоят из **доменов** – областей с различными направлениями поляризованности.

Температура, выше которой исчезают сегнетоэлектрические свойства, – **точка Кюри**.

Для сегнетоэлектриков связь между векторами *E* и *P* нелинейная и наблюдается явление диэлектрического гистерезиса – сохранения остаточной поляризованности при снятии внешнего поля.

**Пьезоэлектрики** – кристаллические диэлектрики, в которых при сжатии или растяжении возникает электрическая поляризация – **прямой пьезоэффект**.

**Обратный пьезоэффект** – появление механической деформации под действием электрического поля.

## 4.4. Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль $\vec{E} = 0$.

Иначе, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии.

Следствия этого ($\vec{E} = -\,grad\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$):

– потенциал во всех точках проводника **одинаков**;

– поверхность проводника является **эквипотенциальной**;

– вектор $\vec{E}$ направлен по **нормали** к каждой точке поверхности.

При перемещении нейтрального проводника во внешнее поле свободные заряды (электроны и ионы) начнут перемещаться: положительные – по полю, а отрицательные – против поля (рис. 4.5, *а*). На одном конце проводника будет избыток положительных зарядов, на другом – отрицательных. Эти заряды называются **индуцированными**. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока напряженность поля **внутри проводника** не станет **равной нулю**, а линии напряженности вне проводника – **перпендикулярными** к его поверхности (рис. 4.5, *б*).

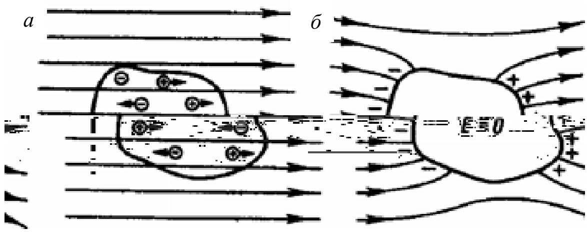



Рис. 4.5

Если проводнику сообщить некоторый заряд $q$, то *нескомпенсированные* заряды располагаются только **на поверхности** проводника, причем $D = \sigma$ и $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, где $\sigma$ – поверхностная плотность зарядов и $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются на **внешней** поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией**.

## Л е к ц и я 5. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

### 5.1. Электроемкость. Конденсаторы

Рассмотрим **уединенный проводник** – проводник, удаленный от других тел и зарядов. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют разные потенциалы.

Физическая величина $C$, равная отношению заряда проводника $q$ к его потенциалу $\varphi$, называется электрической емкостью этого проводника.

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{5.1}$$

*Электроемкость уединенного проводника численно равна заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу.*

Она зависит от формы и размеров проводника и от диэлектрических свойств окружающей среды. Емкости геометрически подобных проводников пропорциональны их линейным размерам.
*Пример:* **емкость уединенного проводящего шара**

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{5.2}$$

**Единица электроемкости – фарад (Ф): 1 Ф** – емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Емкостью 1 Ф обладает шар с радиусом $R = 9\cdot 10^6$ км.

Емкость земли – 0,7 мФ.

Если к проводнику с зарядом $q$ приблизить другие тела, то на их поверхности возникнут индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Эти заряды ослабляют поле, создаваемое зарядом $q$, тем самым понижая потенциал проводника и повышая его электроемкость.

**Конденсатор** – это система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками.

**Емкость конденсатора** – физическая величина, равная отношению заряда $q$, накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между его обкладками:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}. \tag{5.3}$$

1. Емкость плоского конденсатора (две параллельные металлические пластины площадью $S$ каждая, расположенные на расстоянии $d$ друг от друга ( $\sigma = \dfrac{q}{S}$ ))

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}\,. \tag{5.4}$$

2. Емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной $l$ с радиусами $r_1$ и $r_2$ ( $\tau = q / l$ ))

$$C = \frac{q}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{5.5}$$

3. Емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы с радиусами $r_1$ и $r_2$)

$$C = \frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \tag{5.6}$$

## 5.2. Соединения конденсаторов

У параллельно соединенных конденсаторов $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ (рис. 5.1) разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова $\Delta\varphi$. Полная емкость

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}{\Delta\varphi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{5.7}$$

У последовательно соединенных конденсаторов $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ заряды $q$ всех обкладок равны по модулю, а суммарная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C}, \tag{5.8}$$

отсюда

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{5.9}$$

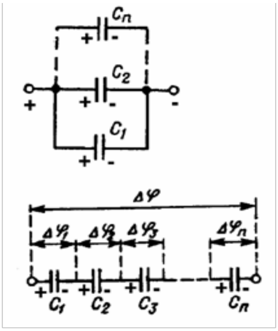



Рис. 5.1

## 5.3. Энергия системы неподвижных точечных зарядов и уединенного проводника

Для системы двух зарядов $q_1$ и $q_2$, находящихся на расстоянии $r$ друг от друга, каждый их них в поле другого обладает потенциальной энергией:

$$W_1 = q_1\varphi_{12} = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = q_2\varphi_{12} = W_2. \qquad (5.10)$$

Поэтому $W = q_1\varphi_{12} = q_2\varphi_{12} = 1/2\,(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{12})$. Добавляя последовательно по одному заряду, получим, что энергия взаимодействия системы $n$ неподвижных точечных зарядов равна:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \qquad (5.11)$$

где $\varphi_i$ – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд, всеми зарядами $q_i$, кроме $i$-го.

Элементарная работа внешних сил по перенесению малого заряда $dq$ с обкладки второго конденсатора на обкладку первого

$$dA = \Delta\varphi dq = \frac{qdq}{C}. \qquad (5.12)$$

Работа внешних сил при увеличении заряда конденсатора от 0 до $q$

$$A = \int_0^q \frac{qdq}{C} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (5.13)$$

**Энергия заряженного конденсатора** (используя $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi}$)

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2}. \qquad (5.14)$$

## 5.4. Энергия электростатического поля

В общем случае **электрическую энергию любой системы заряженных неподвижных тел** – проводников и непроводников – можно найти по формуле

$$W = \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS + \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV, \qquad (5.15)$$

где $\sigma$ и $\rho$ – поверхностная и объемная плотности свободных зарядов;

$\varphi$ – потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках малых элементов $dS$ и $dV$ заряженных поверхностей и объемов. Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям $S$ и по всему заряженному объему $V$ тел системы.

На примере поля плоского конденсатора выразим энергию поля через его напряженность. Для конденсатора

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S / d \text{ и } \Delta\varphi = Ed, \qquad (5.16)$$

отсюда

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V. \qquad (5.17)$$

В **однородном** поле конденсатора его энергия распределена равномерно по всему объему поля

$$V = Sd. \qquad (5.18)$$

Объемная плотность энергии электростатического поля плоского конденсатора $w$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED, \qquad (5.19)$$

где $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ – электрическое смещение.

Эта формула является отражением того факта, что электростатическая энергия сосредоточена в электростатическом поле. Это выражение справедливо также и для неоднородных полей.

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е   и з д а н и е

**Астахова** Ольга Максимовна
**Козлов** Степан Иванович
**Чубукова** Татьяна Михайловна и др.

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Курс лекций

Редактор *С. Н. Кириленко*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *А. С. Зайцева*

Подписано в печать 25.09.2019. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,67.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.