

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,  
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Курс лекций  
для студентов, обучающихся по специальности  
специального высшего образования  
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений*

Горки  
БГСХА  
2024

УДК 519.6  
ББК 22.193я73  
К85

*Одобрено методической комиссией  
мелиоративно-строительного факультета 25.03.2024 (протокол № 7)  
и Научно-методическим советом БГСХА 27.03.2024 (протокол № 7)*

Авторы:  
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*

Рецензенты:  
доктор архитектуры, профессор *И. Г. Малков*;  
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*

**Курзенков, С. В.**  
К85 Численные методы решения задач : курс лекций /  
С. В. Курзенков. – Горки : БГСХА, 2024. – 166 с.  
ISBN 978-985-882-559-1.

Изложен необходимый теоретический материал по численным методам, приведены решения типовых примеров.

Для студентов, обучающихся по специальности специального высшего образования 7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений.

**УДК 519.6  
ББК 22.193я73**

**ISBN 978-985-882-559-1**

© УО «Белорусская государственная  
сельскохозяйственная академия», 2024

## ВВЕДЕНИЕ

Математика как наука возникла в связи с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, навигации и т. д. Вследствие этого одной из ее проблем было получение числового результата той или иной задачи.

Великие ученые прошлого сочетали в своих исследованиях изучение явлений природы, получение их математического описания – модели и ее исследование. Анализ некоторых усложненных моделей потребовал создания специальных, как правило, приближенных методов решения задач. Названия большинства из них: методы Ньютона, Эйлера, Лобачевского, Гаусса, Чебышева и других свидетельствуют о вкладе выдающихся ученых своего времени в формирование математики в целом и ее раздела «Численные методы решения задач».

Сегодня широкое распространение и развитие приближенных методов можно связать с математизацией других наук: экономики, химии, биологии, медицины, планирования, социологии, лингвистики, еще недавно казавшихся далекими от математики. Суть математизации состоит в построении математических моделей процессов и явлений и в разработке методов их исследования.

Целью дисциплины «Численные методы решения задач» является подготовка студентов к применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе математического моделирования.

### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: <https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf>.

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

## Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

### 1.1. Источники и классификация погрешностей

В ходе решения математических задач могут возникнуть погрешности по различным причинам.

1. При составлении математической модели физического процесса или явления приходится принимать условия, упрощающие постановку задачи. Поэтому математическая модель не отражает реальный процесс, а дает его идеализированную картину. Погрешность, возникающая при этом, называется погрешностью постановки задачи.

2. Часто приходится для решения задачи применять приближенный метод (интеграл заменяют квадратурной суммой, производную заменяют разностью, функцию – многочленом). Погрешность, возникающая при этом, называется погрешностью метода.

3. Часто исходные данные заданы не точно, а приближенно. При выполнении вычислений погрешность исходных данных, как правило, переходит в погрешность результата. Такая погрешность называется погрешностью арифметических действий.

4. Погрешность, возникающая при округлении бесконечных и конечных десятичных чисел, имеющих большее число десятичных знаков, чем нужно в округлении, называется погрешностью округления.

Соответственно различают неустранимую погрешность, погрешность метода, вычислительную погрешность.

Часто неустранимую погрешность подразделяют на две части:

- *неустранимая погрешность* – погрешность, являющаяся следствием неточности задания числовых данных;
- *погрешность математической модели* – погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальному объекту.

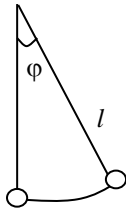


Рис. 1.1

Проиллюстрируем смысл этих понятий на следующем примере.

Пусть имеется маятник (рис. 1.1), начинающий движение в момент времени  $t = t_0$ . Требуется предсказать угол  $\varphi$  отклонения от вертикали в момент времени  $t_1$ . С определенными допущениями в качестве математической модели можно использовать следующую:

$$l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \cdot \sin(\varphi) + \mu \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

где  $l$  – длина маятника;

$\mu$  – коэффициент трения.

Как только принимается эта модель, ее решение заведомо приобретает неустранимую погрешность, в частности, потому что реальное трение зависит от скорости нелинейно. С другой стороны, любой па-

раметр, входящий в данную модель при фактическом ее использовании, есть величина приближенная (измеренная с определенной точностью и зависящая от прибора, которым производился замер).

Название «неустраняемая ошибка» соответствует ее существу: она неконтролируема в процессе численного решения и может быть уменьшена только за счет более точного описания физической задачи или более точного определения ее параметров.

Данное дифференциальное уравнение не имеет точного решения, однако может быть решено численно, например методом Рунге – Кутты. Вследствие этого возникнет погрешность метода.

Вычислительная погрешность может возникнуть, например, из-за конечности количества разрядов чисел, участвующих в вычислениях.

Пусть  $x$  – точное значение отыскиваемой величины (в данном случае – реальный угол отклонения маятника в момент времени  $t_1$ ), а  $x^*$  – ее приближенное значение, соответствующее принятому математическому описанию,  $x_h$  – решение задачи, получаемое при реализации численного метода в предположении отсутствия округлений,  $x_h^*$  – приближение к решению задачи, получаемое при реальных вычислениях. Согласно введенным обозначениям, можно выделить следующие погрешности:

$$\Delta_1 = x^* - x \text{ – неустраняемая погрешность;}$$

$$\Delta_2 = x_h - x^* \text{ – погрешность метода;}$$

$$\Delta_3 = x_h^* - x_h \text{ – вычислительная погрешность.}$$

Тогда полная погрешность результата

$$\Delta = x_h^* - x = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (1.1)$$

Во многих случаях под термином «погрешность» понимают не рассмотренные выше разности между приближениями, а некоторые меры близости между ними:  $\Delta = |x_h^* - x|$ ,  $\Delta_1 = |x^* - x|$ ,  $\Delta_2 = |x_h - x^*|$ ,  $\Delta_3 = |x_h^* - x_h|$ . В таком случае обычно оперируют оценкой:

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (1.2)$$

Может возникнуть вопрос: зачем изучать неустраняемую погрешность решения задачи, если она все равно будет в процессе решения.

Исследователь, занимаясь анализом различных факторов на погрешность решения и зная требуемую точность искомого результата,

практически всегда может получить простейшее описание процесса с допустимой погрешностью. Если же исследователь использует уже готовую математическую модель, то по величине неустранимой погрешности он может судить о необходимой точности метода для решения поставленной задачи. При решении большинства задач нет смысла применять метод решения с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустранимой погрешности. Поэтому, имея представление о величине неустранимой погрешности, можно разумно сформулировать требования к точности результата численного решения задачи.

В процессе обсуждения вопроса о точности результата численного вычисления полезно ответить на приведенные далее вопросы.

1. Где в дальнейшем будет использован результат и нужна ли там выбранная точность?
2. Могут ли быть определены с соответствующей точностью параметры, входящие в модель?
3. Как хорошо подобрана модель для данного процесса?
4. Какой результат необходимо получить – количественный или качественный?

## **1.2. Абсолютная и относительная погрешности. Форма записи данных**

Разность между точным значением величины  $x$  и приближенным  $x^*$  называется погрешностью величины  $x$ :

$$\varepsilon = x - x^*. \quad (1.3)$$

Обычно рассматривают абсолютную величину погрешности, которую измерить невозможно, так как неизвестно точное значение величины  $x$  и поэтому погрешность лишь оценивают по ее максимальному (предельному) значению, которое называют абсолютной погрешностью результата и обозначают следующим образом:

$$\begin{aligned} |x - x^*| &\leq \Delta_x; \\ -\Delta_x &< x - x^* < \Delta_x; \\ x^* - \Delta_x &\leq x \leq x^* + \Delta_x. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем только приближенную оценку истинного числа  $x$  по недостатку  $x^* - \Delta_x$  и по избытку  $x^* + \Delta_x$  некоторой величины. Тогда точное значение этой величины можно оценить следующей записью:

$$x = x^* (\pm \Delta_x). \quad (1.4)$$

Например, запись  $x = 1,123 \pm 0,004$  или  $1,123 \pm 4 \cdot 10^{-3}$  означает, что точное значение величины находится на отрезке  $[1,119; 1,127]$ .

Замечание 1. Если  $x^*$  есть приближенное значение числа  $x$ , причем предельная абсолютная погрешность  $\Delta_x$  равна  $\varepsilon$ , то говорят, что  $x^*$  есть приближенное значение числа  $x$  с точностью до  $\varepsilon$ .

**Пример 1.** Определить абсолютную погрешность числа  $x = 3,16$ , взятого в качестве приближенного значения числа  $\sqrt{10}$ .

Известно, что  $3,16 < \sqrt{10} < 3,17$ . Значит,  $|\sqrt{10} - 3,16| < 0,01$ . Можно принять за абсолютную погрешность  $\Delta_x = 0,01$ . Если же учесть, что  $3,16 < \sqrt{10} < 3,16228$ , то получим лучшую оценку:  $\Delta_x = 0,00228$ . Заменяем это число большим, но более простым по записи, получаем:  $\Delta_x = 0,003$ .

Замечание 2. На практике пользуются преимущественно предельной абсолютной погрешностью. Для краткости речи в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, вместо «предельная абсолютная погрешность» говорят просто «абсолютная погрешность».

Замечание 3. Слово «погрешность» употребляется, когда идет речь об арифметических действиях над числами. Когда говорят об измерениях, вместо слова «погрешность» употребляют слово «ошибка». Обращаем внимание на то, что в обыденной речи под ошибкой понимают неверный результат. В практике вычислений неверный результат выражают словом «просчет».

Абсолютная погрешность недостаточно оценивает величину с точки зрения ее весомости.

Например, если измеряется расстояние между двумя городами с точностью до одного километра, то такая точность вполне достаточна для такого измерения, в то же время при измерении расстояния между двумя домами одной улицы такая точность будет недопустимой. Следовательно, точность приближенного значения величины зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от значения измеряемой величины.

Поэтому мерой точности величин служит ее относительная погрешность.

Относительной погрешностью приближенной величины  $x^*$  называется отношение

$$\delta_x = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}. \quad (1.5)$$

Иногда относительную погрешность выражают в процентах:

$$\delta_x = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} \cdot 100 \%. \quad (1.6)$$

Так, например, для значения  $100 \pm 0,1$  относительная погрешность

$$\delta_x = \frac{0,1}{100} \cdot 100 \% = 0,1 \%,$$

а для значения с той же абсолютной погрешностью  $0,5 \pm 0,1$

$$\delta_x = \frac{0,1}{0,5} \cdot 100 \% = 20 \%.$$

В этом примере хорошо виден «вес» ошибки в каждом измерении: в первом случае это 0,1 %, а во втором – 20 %.

**Пример 2.**  $\sqrt{10} \approx 3,16$ . Полагая  $\Delta_x = 0,00228$ , можем принять  $\delta_x = \frac{0,00228}{3,16}$ . Производя деление и округляя (обязательно в сторону увеличения), получим  $\delta_x = 0,0008 = 0,08 \%$ .

Информация о том, что величина  $x^*$  является приближенной для некоторой точной величины  $x$  с относительной погрешностью  $\delta(x^*)$ , записывается в виде  $x = x^* \cdot (1 \pm \delta(x))$ .

Например, записи  $x = 1,123 (1 \pm 0,003)$ ,  $x = 1,123 (1 \pm 3 \cdot 10^{-3})$ ,  $x = 1,123 (1 \pm 0,3 \%)$  означают, что точная величина  $x$  удовлетворяет неравенству  $1,123 (1 - 0,003) \leq x \leq 1,123 (1 + 0,003)$ .

Учитывая вышесказанное, можно установить связь между абсолютной и относительной погрешностью:

$$\Delta(x^*) = |x^*| \cdot \delta(x). \quad (1.7)$$

Нередко формулы (1.5, 1.7) приходится применять тогда, когда мы еще не знаем приближенной величины с требуемой точностью, а знаем лишь грубое ее значение.

**Пример 3.** Требуется измерить длину предмета с относительной погрешностью не выше 0,1 %. Возможно ли измерить длину с нужной точностью с помощью штангенциркуля, допускающего при этом абсолютную погрешностью до 0,1 мм?

Пусть мы еще не измеряли предмет, но знаем, что грубое значение длины – около 12 см. Тогда по формуле мы можем найти абсолютную

погрешность:  $\Delta(x) = 120 \cdot 0,001 = 0,12 \text{ мм} > 0,1 \text{ мм}$ . Таким образом, мы можем сказать, что с помощью штангенциркуля можно произвести измерение с заданной точностью.

Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащие цифры.

*Значащими цифрами* числа называются все цифры в его записи, начиная с первой слева, отличной от нуля.

**Пример 4.** У чисел  $x^* = 0,03045$  и  $x^* = 0,03045000$  значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором – 7.

Значащую цифру называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующей этой цифре, иначе она называется сомнительной.

**Пример 5.** Рассмотрим приближенное число  $x^* = 0,03045$ . Если известно, что его абсолютная погрешность  $\Delta(x) = 0,000003$ , то можем сказать, что число  $x^*$  записано со всеми верными цифрами. В случае же, если абсолютная погрешность  $\Delta(x) = 0,0000051$ , можем сказать, что в записи числа сомнительной является цифра 5.

За правило примем следующее.

1. При десятичной записи приближенной величины следует писать только верные цифры. В таком случае по записи числа можно определить предельную абсолютную погрешность.

**Пример 6.** Даны приближенные числа, записанные только с верными цифрами: 3,8; 0,0283; 4260. По записи этих чисел можно сказать, что погрешности этих чисел равны соответственно 0,05; 0,00005; 0,5.

2. Если величина записана с некоторым числом десятичных знаков после запятой, причем последние десятичные знаки есть нули, являющиеся верными цифрами, то их не следует отбрасывать при записи числа.

**Пример 7.** Если абсолютная погрешность числа 3,2 равна 0,0005, то вместо 3,2 следует писать 3,200.

3. Если известно, что число точное, то в дробных разрядах его десятичной записи нули справа отбрасываются.

### 1.3. Представление чисел в ЭВМ. Погрешность округления

Число в ЭВМ может быть представлено двумя формами записи: с фиксированной и плавающей запятой.

С фиксированной запятой называют запись

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} = \pm a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + \dots + a_{-1} p^{-1} + a_{-2} p^{-2} + \dots + a_{-n} p^{-n}. \quad (1.8)$$

Например:

$$234,305 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

С плавающей точкой в нормализованном виде число представляется следующим образом

$$x = \pm a \cdot p^b, \quad (1.9)$$

где  $1 \leq a < p$ ,  $b \in Z$ ;

$p$  – основание системы счисления (для десятичной системы  $p = 10$ );  
 $a$  – мантисса числа  $x$ , записывается в форме числа с фиксированной запятой;

$b$  – порядок числа  $x$ .

Например:  $234,305 = 2,34305 \cdot 10^2$ .

**Округлением числа  $x$  до  $s$  разрядов** называют запись данного числа таким числом  $x_s^*$ , у которого все разряды начиная с  $s - 1$  нулевые.

**Погрешностью округления** называют разность  $|x - x_s^*|$ .

**Способы округления.**

Пусть  $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n}$ .

*Первый способ округления.*

$$x_s = a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{s-n} \dots a_{s+1} a_s 000. \quad (1.10)$$

Погрешность в этом случае равна

$$\Delta_s = |x - x_s| = |0,0 \dots 0 a_{s-1} a_{s-2} \dots| \leq p. \quad (1.11)$$

*Второй способ округления.*

$$x_s^* = \begin{cases} x_s, & |x - x_s| < \frac{1}{2} p^s, \\ x_s + p^s, & |x - x_s| \geq \frac{1}{2} p^s. \end{cases} \quad (1.12)$$

В этом случае погрешность не превышает половины округленного разряда:

$$|x - x_s^*| \leq \frac{1}{2} p^s. \quad (1.13)$$

Пусть приближенное число еще и округляется. Очевидно, что на погрешность измерения будет накладываться погрешность округления. Если ввести обозначения:  $x$  – точное число,  $x^*$  – приближенное,  $x_s^*$  – после округления.

Тогда после округления абсолютная погрешность будет выглядеть следующим образом:

$$|x - x_s^*| = |x - x^* + x^* - x_s^*| \leq |x - x^*| + |x^* - x_s^*|. \quad (1.14)$$

Таким образом, абсолютная погрешность числа с учетом его округления не превосходит суммы погрешности числа  $x$  и погрешности округления.

**Пример.** Округляя приближенное число  $x^* = 13,73$  до десятых, получим  $x_{-1}^* = 13,7$ . Тогда  $\Delta_x = 0,005 + |13,7 - 13,73| = 0,005 + 0,03 = 0,035$ . В округленном числе все цифры верные. Поэтому в окончательном ответе мы запишем  $x^* = 13,7$ .

С другой стороны, округляя число  $x^* = 5,45$  до десятых, получим  $x_{-1}^* = 5,5$ . В данном случае  $\Delta_x = 0,005 + 0,05 = 0,055 > \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$ . Верной будет только цифра 5, которая и пойдет в ответ.

#### 1.4. Взаимосвязь числа верных цифр в записи числа и относительной погрешности

По числу верных десятичных знаков в записи числа можно судить об абсолютной погрешности. Можно показать, что этих сведений достаточно для того, чтобы судить и об относительной погрешности.

**Пример.** Пусть дана приближенная величина  $x^* = 246$ , записанная со всеми верными цифрами, т. е.  $\Delta_{x^*} = 0,5$ .

$$\text{Тогда } \delta_{x^*} = \frac{0,5}{246} = \frac{1}{2 \cdot 246} = 0,0021.$$

Возьмем число  $x^* = 2,46$ ,  $\Delta_{x^*} = 0,005$ . Получаем

$$\delta_{x^*} = \frac{0,005}{2,46} = \frac{1}{2 \cdot 246} = 0,0021.$$

**Вывод.** Относительная погрешность приближенного числа определяется набором и порядком расположения верных значащих цифр в записи числа и не зависит от положения запятой.

*Правило вычисления относительной погрешности.* Пусть в записи приближенного числа все цифры верны. Предельную относительную погрешность можно принять равной дроби, числитель которой равен 1, а знаменатель есть удвоенное целое число, написанное с помощью всех значащих цифр данного числа с сохранением порядка их записи.

Замечание 1. Данным правилом пользуются для промежуточных вычислений, так как оно позволяет оценить результат, оставив в нем одну сомнительную цифру.

Замечание 2. Главную роль при вычислении предельной относительной погрешности по указанному правилу играет первая из значащих цифр, остальные можно заменить нулями.

На основании замечания 2 можно привести данные о зависимости относительной погрешности от числа значащих цифр с учетом первой значащей цифры (табл. 1.1).

Таблица 1.1. Относительная погрешность в зависимости от первой значащей цифры и числа верных значащих цифр, %

Число верных значащих цифр	Первая значащая цифра								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	50	25	17	13	10	9	8	7	6
2	5	3,0	2	1,3	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
3	0,5	0,3	0,2	0,13	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06

Замечание 3. Если приближенное число написано с плавающей запятой, то относительная погрешность определяется набором верных значащих цифр в записи числа  $x$ . Так, числа  $0,24 \cdot 10^{-4}$ ;  $2,4 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,024 \cdot 10^{-5}$  имеют одну и ту же относительную погрешность.

*Отыскание числа значащих цифр по заданной относительной погрешности.* Можно решить и обратную задачу – отыскание числа значащих цифр по заданной относительной погрешности.

Пусть требуется найти приближенное значение некоторой величины так, чтобы относительная погрешность не превышала значения  $\delta$ .

Если никаких других сведений нет, то обычно рассуждают так: по правилу вычисления относительной погрешности можем записать

$$\frac{1}{2 \cdot x} \leq \delta. \quad (1.15)$$

Тогда остается подобрать наименьшее количество значащих цифр в записи числа, чтобы выполнялось данное неравенство.

**Пример.** Найти сторону квадрата, площадь которого  $S = 32,4 \text{ дм}^2$ , так, чтобы относительная погрешность не превысила 9 %.

$$a = \sqrt{39,4} = 6,276942\dots$$

Округлим полученный результат так, чтобы обеспечить требуемую точность. Подберем такое целое число  $x$ , чтобы

$$\frac{1}{2 \cdot x} \leq 0,09.$$

Нетрудно заметить, что уже при одной значащей цифре в записи числа это неравенство выполняется. Таким образом, сторона квадрата будет равна  $6 \pm 0,3 \text{ дм}$ .

### 1.5. Основные арифметические действия над приближенными величинами

При выполнении действий над приближенными числами мы получаем также приближенное число. Возникает вопрос, как оценить погрешности арифметических действий над приближенными числами?

*Сложение и вычитание приближенных чисел.* Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных величин равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_{x_1 \pm x_2}^* = \Delta_{x_1}^* + \Delta_{x_2}^* \quad (1.16)$$

Зная абсолютную погрешность суммы и разности приближенных величин и грубый результат алгебраического сложения, можно перейти к относительной погрешности результата.

**Пример 1.**  $x_1 = 25,74(\pm 0,02)$ ;  $x_2 = 96,42(\pm 0,03)$ ;  $x_1 + x_2 = 122,16(\pm 0,05)$ .

**Пример 2.** Записать результат действий  $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$  с учетом их погрешностей, если  $x_1 = 27,35$ ;  $x_2 = 181,17$ ;  $x_3 = 1,15$ ;  $x_4 = 0,18$ ;  $x_5 = 33,84$ ;  $x_6 = 19,85$ ;  $x_7 = 45,76$ ;  $x_8 = 53,74$ ;  $x_9 = 165,61$  приближенные числа.

Вычисляя сумму, получим  $u = 27,35 + 181,17 + 1,15 + 0,18 + 33,84 + 19,85 + 45,76 + 53,74 + 165,61 = 528,65$ .

$$\Delta_{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9} = 0,005 + 0,005 + \dots + 0,005 = 9 \cdot 0,005 = 0,045.$$

Так как  $\Delta_{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9} = 0,045 < 0,05$ , то цифра, записанная в разряде сотых, – сомнительна, поэтому производим округление до десятых:  $u = 528,7$ ,  $\Delta_u = \Delta_{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9} + \Delta_{u_{-1}} = 0,045 + 0,05 = 0,095 < 0,5$ . Это означает, что цифра, записанная в разряде десятых с учетом округления, сомнительная и результат необходимо округлить до единиц. Округляя и учитывая ошибку округления, записываем результат только с верными значащими цифрами:  $u \approx 529(\pm 0,4)$ .

*Умножение и деление приближенных чисел.* Относительная погрешность произведения нескольких приближенных величин равна сумме относительных погрешностей сомножителей:

$$\delta_{x_1 \cdot x_2}^* = \delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^*. \quad (1.17)$$

Относительная погрешность частного от деления двух приближенных величин равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя:

$$\delta_{x_1/x_2}^* = \delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^*. \quad (1.18)$$

Зная грубый результат произведения и частного величин и относительную погрешность результата этих операций, всегда можно оценить абсолютную погрешность результата.

**Пример 3.** Найдем относительную погрешность произведения двух приближенных чисел:  $a = 6,32$ ;  $b = 0,783$ .

Из записи чисел определяем  $\Delta_a = 0,005$ ,  $\Delta_b = 0,0005$ . Следовательно,  $\delta_a = 0,0008$ ;  $\delta_b = 0,0007$ . Это значит, что  $\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b = 0,0015$ .

**Пример 4.** Найти приближенное значение величины  $u = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ , если  $\sqrt{3}$  и  $\pi$  вычислены приближенно с четырьмя верными значащими цифрами.

Итак,  $\sqrt{3} \approx 1,732$ ;  $\pi \approx 3,142$ . Из записи чисел определяем:  $\delta_{\sqrt{3}} = 0,0003$ ;  $\delta_{\pi} = 0,0002$ . Значит,  $\delta_u = 0,0005$ . Пользуясь полученными результатами, можем определить, сколько верных цифр будет в десятичной записи искомого числа  $u$ . Найдя грубое приближенное значение числа  $u$  ( $u \approx 0,6$ ) и учитывая, что  $\delta_u = 0,0005$ , определяем  $\Delta_u = 0,0003$ . Это значит, что в записи результата верны три значащие цифры. Производя деление числа 1,732 на число 3,142 и сохраняя в частном только три значащие цифры, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0,551.$$

На практике очень часто приходится оценивать погрешность числового значения величины, полученной в результате вычислений по формуле, которая содержит не одно, а несколько действий. В таких случаях для оценки погрешности последовательно применяют теоремы о погрешностях. Поясним это на примерах.

**Пример 5.** Вычислить  $u = \frac{a \cdot b}{c + d}$ , где  $a = 5,64$ ;  $b = 7,26$ ;  $c = 2,33$ ;  $d = 1,64$ .

В данной задаче необходимо произвести ряд действий. Согласно приведенным выше правилам вычисления погрешностей видно, что при сложении легко определяется абсолютная погрешность, а при умножении и делении – относительная погрешность. Поэтому при оценке погрешности результата необходимо переходить от одного вида погрешности к другому.

Найдем  $\Delta_{c+d} = \Delta_c + \Delta_d = 0,005 + 0,005 = 0,01$ . Для дальнейших вычислений найдем относительную погрешность знаменателя. Грубое приближенное значение знаменателя примем равным 4. Тогда

$$\Delta_{c+d} = \frac{0,01}{4} = 0,0025 = 0,25 \%$$

Из записи чисел видно, что  $\delta_a = 0,1 \%$ ,  $\delta_b = 0,08 \%$ . Теперь можем найти относительную погрешность результата  $\delta_u = \delta_a + \delta_b + \delta_{c+d} = 0,1 \% + 0,08 \% + 0,25 \% = 0,43 \%$ . Найдем грубое приближенное значение результата:  $u \approx 10$ . Очевидно, что  $\Delta_u = 0,043$ . Это значит, что результат будет иметь три верных значащих цифры. Производя вычисления и сохраняя лишь три значащие цифры, получим  $u \approx 10,3$ .

## 1.6. Приближенные вычисления без учета погрешностей

При выполнении арифметических действий над приближенными числами в тех случаях, когда не требуется строгого учета точности, установлены правила, позволяющие быстро, без громоздких исследований определить, как нужно проводить вычисления, чтобы получить результат нужной точности. Эти правила не столь точны, как правила вычислений со строгим учетом погрешностей, но во многих вычислениях вполне достаточны. Они называются *правилами верных цифр*. При формулировке этих правил будем считать, что число данных чисел невелико.

Для того чтобы вычислить алгебраическую сумму приближенных слагаемых, нужно:

- среди слагаемых выбрать наименее точное (имеет наименьшее число разрядов после запятой);
- все остальные слагаемые округлить, сохраняя один запасной разряд, следующий за последним разрядом выделенного слагаемого;
- сложить полученные после округления числа;
- округлить полученный результат до предпоследнего разряда.

**Пример 1.**  $S = 2,737 + 0,77974 + 27,1 + 0,283 \approx 2,74 + 0,78 + 27,1 + 0,28 \approx 30,90 \approx 30,9$ .

Для того чтобы вычислить произведение (частное) приближенных чисел, нужно:

- выделить сомножитель (делимое/делитель), содержащий наименьшее число значащих цифр;
- округлить остальные сомножители (делимое/делитель), оставляя на одну значащую цифру больше, чем в выделенном сомножителе;
- произвести умножение (деление);
- округлить полученный результат, сохраняя столько значащих цифр, сколько их в выделенном сомножителе (делимом/делителе).

**Пример 2.**  $P = 3,34 \cdot 0,7 \cdot 4,748 = 3,3 \cdot 0,7 \cdot 4,7 \approx 10,857 \approx 1 \cdot 10^1$ .

При возведении приближенного значения в квадрат или куб, при извлечении квадратного или кубического корня в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

**Замечание.** Если число является результатом промежуточных действий, то следует сохранить в нем на 1 цифру больше, чем в вышеуказанных правилах.

### 1.7. Прямая задача теории погрешности.

#### Погрешность вычисления значения функции одной переменной

В теории приближенных вычислений рассматриваются две основные задачи: прямая и обратная.

*Постановка прямой задачи теории погрешности.* Необходимо оценить погрешность результата указанных действий над приближенными числами (например, произвести вычисления по данной формуле), если заданы предельные погрешности этих чисел.

Прямая задача теории погрешности решается на основании определения производной функции одной переменной. Вспомним, что производная функции определяется по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

где  $\Delta x$  – приращение аргумента;

$\Delta f$  – приращение функции.

Пусть  $x$  – точное значение аргумента функции,  $x^* = x + \Delta x$  – приближенное его значение,  $\Delta x$  – абсолютная погрешность аргумента функции.

Тогда под  $f(x)$  будем понимать точное значение функции,  $f(x^*)$  – значение функции, вычисленное с погрешностью,  $\Delta f(x)$  – погрешность вычисления функции.

Из определения производной и теоремы о пределах можно записать

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x) \quad (\text{для малых } \Delta x).$$

Из последней формулы следует  $\Delta f(x) \approx f'(x^*) \cdot \Delta x$  или применительно к погрешностям без учета знака

$$\Delta f(x) \approx |f'(x^*)| \cdot \Delta x. \quad (1.19)$$

Относительная погрешность функции вычисляется по формуле

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{|f|}. \quad (1.20)$$

Приведенные выше формулы дают возможность оценить погрешность значения произвольной функции в  $\Delta$  – окрестности некоторой точки  $x$  из ее области определения.

На основании данных формул можно вычислить погрешности некоторых элементарных функций.

1. *Относительная погрешность степенной функции.* Пусть  $f(x) = x^n$ . Тогда  $f'(x) = n \cdot x^{n-1} = \frac{n \cdot x^n}{x}$ . Абсолютная погрешность вычисления степенной функции может быть записана в виде

$$\Delta f = |f'(x)| \cdot \Delta x = \left| \frac{n \cdot x^n}{x} \right| \cdot \Delta x = n \cdot \left| \frac{x^n}{x} \right| \cdot \Delta x,$$

а относительную погрешность можно вычислить по следующему правилу:

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{|f|} = n \cdot \left| \frac{x^n}{x \cdot x^n} \right| \cdot \Delta x = n \cdot \frac{\Delta x}{|x|} = n \cdot \delta_x.$$

Таким образом, относительная погрешность степенной функции равна произведению степени этой функции на относительную погрешность ее аргумента.

2. *Относительная погрешность логарифмической функции.* Пусть

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (x > 0), \quad \text{для нее производная равна}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}.$$

Пользуясь формулой, можем записать следующее

$$\text{выражение: } \Delta f = |f'(x)| \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{|x \cdot \ln(a)|} = \left| \frac{1}{\ln(a)} \right| \cdot \delta_x.$$

Относительная по-

$$\text{грешность } \delta_f = \frac{\delta_x}{|\ln(x)|}.$$

**Пример.** Определить куб числа 2,33. Результат записать только с верными цифрами.

$$2,33^3 = 12,6493;$$

$$\Delta x = 0,005; \quad \delta_x = \frac{0,005}{2,33} = 0,0022;$$

$$\delta_f = 0,022 \cdot 3 = 0,066 = 6,6 \%, \quad \text{а абсолютная погрешность результата}$$

$\Delta_f = \delta_f \cdot |x^3| = 0,066 \cdot 12,65 = 0,837$ . Таким образом, по определению верными цифрами результата являются первые две. Поэтому результат запишется в виде  $13 \pm 0,5$ .

Формулы для вычисления погрешностей основных элементарных функций приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. **Правила вычисления основных элементарных формул**

Функция	Предельная абсолютная погрешность	Предельная относительная погрешность
1	2	3
1. $y = x^n$	$\Delta_y =  n  \cdot  x ^{n-1} \cdot \Delta_x$	$\delta_y =  n  \cdot \delta_x$

1	2	3
2. $y = a^x$	$\Delta_y = a^x \cdot  \ln a  \cdot \Delta_x$	$\delta_y =  \ln a  \cdot \Delta_x$
3. $y = \lg x$	$\Delta_y = \frac{M}{ x } \Delta_x = M \cdot \delta_x$ $M = \lg(e) = 0,43429\dots$	$\delta_y = \frac{M}{ \lg x } \cdot \delta_x$
4. $y = \sin x$	$\Delta_y =  \cos x  \cdot \Delta_x$	$\delta_y =  \operatorname{ctg} x  \cdot \Delta_x$
5. $y = \cos x$	$\Delta_y =  \sin x  \cdot \Delta_x$	$\delta_y =  \operatorname{tg} x  \cdot \Delta_x$
6. $y = \operatorname{tg} x$	$\Delta_y = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \frac{2}{ \sin 2x } \cdot \Delta_x$
7. $y = \operatorname{ctg} x$	$\Delta_y = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \frac{2}{ \sin 2x } \cdot \Delta_x$
8. $\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \end{cases}$	$\Delta_y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \frac{x}{y\sqrt{1-x^2}} \cdot \delta_x$
9. $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \\ y = \operatorname{arctg} x \end{cases}$	$\Delta_y = \frac{1}{1+x^2} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \frac{x}{y(1+x^2)} \cdot \delta_x$
10. $y = u \cdot v$	$\Delta_y =  u  \cdot \Delta_v +  v  \cdot \Delta_u$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v$
11. $y = u \cdot v \cdot w$	$\Delta_y =  v \cdot w  \cdot \Delta_u +  u \cdot w  \cdot \Delta_v +  u \cdot v  \cdot \Delta_w$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v + \delta_w$
12. $y = \frac{u}{v}$	$\Delta_y = \frac{ v  \cdot \Delta_u +  u  \cdot \Delta_v}{v^2}$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v$

### 1.8. Обратная задача теории погрешности

*Постановка обратной задачи теории погрешности.* Необходимо установить допустимые погрешности приближенных чисел при выполнении указанных действий, чтобы полученный результат имел наперед заданную предельную погрешность.

Пусть  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена и непрерывно-дифференцируема в области  $D$  и точка  $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ .

Какими должны быть погрешности  $\varepsilon_{x_i}$  приближенных величин  $x_i^*$  для аргументов  $x_i$ , чтобы погрешность результата вычисления функции не превышала по модулю  $\varepsilon_{\bar{y}}$ ?

Погрешность вычисления функции, зависящей от нескольких аргументов, связана следующим соотношением:

$$|\Delta\bar{y}| \leq \sum_{i=1}^n \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_X \right| \varepsilon_{x_i} \leq \varepsilon_{\bar{y}},$$

в котором заведомо известным является погрешность результата  $-\varepsilon_{\bar{y}}$ , требуется найти погрешности аргументов  $-\varepsilon_{x_i}$ .

В общем случае поставленная задача не имеет решения. Она может быть решена только при некоторых допущениях.

1. Если неизвестна погрешность лишь одного аргумента. Тогда погрешность  $i$ -го аргумента можно определить по формуле

$$\varepsilon_{x_i^*} \leq \frac{\varepsilon_{\bar{y}} - \sum_{j=1}^{i-1} \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_X \right| \varepsilon_{x_j^*} - \sum_{j=i+1}^n \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_X \right| \varepsilon_{x_j^*}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}. \quad (1.21)$$

2. Если погрешности всех аргументов вносят одинаковые доли в погрешности функции, т. е. частные дифференциалы равны между собой по модулю

$$\varepsilon_{x_i^*} \leq \frac{\varepsilon_{\bar{y}}}{n \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_X \right|}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.22)$$

3. Если погрешности всех аргументов равны ( $\varepsilon_{x_1^*} = \varepsilon_{x_2^*} = \dots = \varepsilon_{x_n^*} = \varepsilon$ ), тогда

$$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon_{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^n \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_X \right|}. \quad (1.23)$$

**Пример.** Требуется вычислить объем конуса по формуле  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$  так, чтобы относительная погрешность не превышала 0,1 %. С какой точностью следует измерить радиус основания и высоту, чтобы обеспечить требуемую точность результата?

Для решения задачи следует знать грубые приближенные значения  $R$  и  $H$ . Пусть  $R \approx 30$  см;  $H \approx 80$  см. Найдем также грубое приближенное значение объема:  $V \approx 75\,400$  см<sup>3</sup>. На основании правил вычисления погрешности арифметических действий приближенных чисел составим уравнение  $\delta_\pi + 2\delta_R + \delta_H = 0,001$ .

Число  $\pi$  мы можем взять с любой степенью точности, т. е.  $\delta_\pi$  можно взять сколь угодно малым. Положим пока,  $\pi = 3,142$ , т. е.  $\delta_\pi = 0,00016$ . Тогда уравнение примет следующий вид:  $2\delta_R + \delta_H = 0,00084$ .

В этом уравнении два неизвестных:  $\delta_R$  и  $\delta_H$ . Значит, уравнение имеет бесконечное множество решений, задача оказывается неопределенной. Но мы можем наложить на  $\delta_R$  и  $\delta_H$  некоторые дополнительные условия. Например, мы можем считать, что измерения  $R$  и  $H$  будут проведены при одинаковой точности измерительных инструментов.

Тогда, можно положить  $\Delta_R = \Delta_H$ . Так как  $\delta_R = \frac{\Delta_R}{30}$ ,  $\delta_H = \frac{\Delta_H}{80}$ , то будем иметь  $\frac{19}{240}\Delta_R = 0,00084$ . Отсюда  $\Delta_R = \Delta_H = 0,0106$  см = 0,106 мм. Значит, для получения требуемой точности достаточно произвести измерения  $R$  и  $H$  с погрешностью, не превышающей 0,1 мм.

## **Лекция 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

### **2.1. Основные понятия численного решения уравнения**

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

где  $f(x)$  – некоторая функция, заданная на конечном или бесконечном промежутке.

Всякое значение  $\xi$ , обращающее функцию  $f(x)$  в нуль, т. е. такое, при котором  $f(\xi) = 0$ , называется корнем уравнения (2.1), или нулем функции  $f(x)$ .

Методы решения нелинейных уравнений делятся: на прямые и итерационные.

Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений. Найти аналитическое решение уравнения – значит, определить все его корни.

Как известно, большинство уравнений не имеют аналитического решения. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нет определенного алгоритма, по которому можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение выше четвертой степени. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются итерационные (приближенные с заданной степенью точности) методы.

Пусть в уравнении (2.1):

1) функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка;

2) значения  $f(x)$  на концах отрезка имеют разные знаки ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ );

3) первая и вторая производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Первые два условия гарантируют то, что внутри отрезка  $[a; b]$  находится хотя бы один корень, а из третьего следует, что  $f(x)$  на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

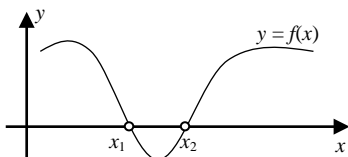


Рис. 2.1. Геометрический смысл корня уравнения

Решая уравнения итерационными методами, как правило, пользуются геометрическим смыслом корня уравнения.

Графически корень уравнения есть абсцисса пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью  $Ox$  (рис. 2.1). Это значит, что хотя бы один корень находится в интервале, на

котором функция  $f(x)$  меняет знак на противоположный.

Задача нахождения корня уравнения  $f(x) = 0$  приближенными методами состоит из двух этапов:

1) отделение (локализация) корня – нахождение отрезка, на котором содержится единственный корень;

2) уточнение корня – нахождение его с заданной степенью точности.

Обычно отделение корня производят аналитическим или графическим способами.

При отделении корня аналитическим способом целесообразно уравнение привести к виду (2.1) и протабулировать функцию, стоящую в левой его части на некотором заведомо большом отрезке числовой прямой или области определения. Корни будут на тех интервалах, на концах которых функция имеет значения, различные по знаку.

**Пример.** Рассмотрим уравнение  $x^3 - 6x + 2 = 0$ . Уравнение имеет вид (2.1), поэтому соответствующей функцией будет являться  $f(x) = x^3 - 6x + 2$ .

Функция определена на всей числовой прямой. Протабулировав ее на заданном интервале, определяем, что уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах  $[-3; -1]$ ,  $[0; 1]$  и  $[1; 3]$ .

К сожалению, четких рекомендаций по выбору интервала, содержащего единственный корень, не существует. И в этом не последнюю роль играет интуиция и опыт исследователя.

В инженерной практике зачастую прибегают к графическому способу отделения корней. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (2.1) – это точки пересечения графика функции  $f(x)$  с осью абсцисс, достаточно построить график функции  $f(x)$  и отметить на оси  $Ox$  отрезки, содержащие по одному корню.

Второй этап решения уравнения состоит в последовательном уточнении начального приближения  $x_0$ . Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Если эти значения с увеличением числа итераций  $n$  приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

## 2.2. Уточнение корня по методу половинного деления (бисекции)

Предположим, что корень уравнения  $f(x) = 0$  отделен на отрезке  $[a; b]$  и его необходимо уточнить с погрешностью, не превосходящей  $\varepsilon$ . Для этого данный отрезок точкой  $x_0$  разобьем пополам на 2 отрезка  $[a; x_0]$  и  $[x_0; b]$ , (рис. 2.2):

$$x_0 = \frac{a + b}{2}. \quad (2.2)$$

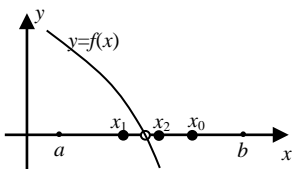


Рис. 2.2. Графическая интерпретация метода бисекции

Для дальнейшего исследования выберем тот отрезок, на концах которого функция  $f(x)$  принимает значения, различные по знаку. С математической точки зрения это означает, что произведение значений функции на концах этого интервала меньше нуля.

Предположим, что это отрезок  $[a; x_0]$ , т. е.  $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ . Отрезок  $[a; x_0]$  точкой  $x_1$  делим пополам. Получим отрезки  $[a; x_1]$  и  $[x_1; x_0]$ , из которых выберем тот, на концах которого функция меняет знак на противоположный. Данный процесс будем продолжать до тех пор, пока разность значений концов выбранного отрезка по модулю станет меньше  $\varepsilon$ . Тогда за корень с заданной точностью выбирают любое число из последнего отрезка. Обычно это середина последнего отрезка.

Приведенный метод является универсальным для решения любого уравнения. Метод прост, надежен и всегда сходится. Однако скорость приближения к корню значительно меньшая по сравнению с некоторыми другими методами.

При реализации этого метода в электронных таблицах удобно делить отрезок не пополам, а на  $n$  равных частей. Это позволяет уже на первом итерационном шаге сузить интервал поиска решения в  $n$  раз.

Предложим варианты решения задачи в Excel и MathCAD.

**Пример.** Найти корень уравнения

$$\sqrt{x} - \frac{\cos(x)}{12} = \frac{1}{24}$$

с погрешностью, не превосходящей  $\varepsilon = 0,0001$ .

*Решение.*

1. Реализуем метод половинного деления в Excel. Для этого преобразуем исходное уравнение к виду (2.1). Получим уравнение

$$\sqrt{x} - \frac{\cos(x)}{12} - \frac{1}{24} = 0. \text{ Исследуем функцию } f(x) = \sqrt{x} - \frac{\cos(x)}{12} - \frac{1}{24}.$$

Данная функция определена на интервале  $[0; \infty)$ . Для отделения корня выберем заведомо большой отрезок из области определения, например  $[0; 100]$ . Протабулируем исследуемую функцию на выбранном отрезке. Для упрощения метода разобьем отрезок на 10 равных частей. Макет таблицы и результаты табулирования показаны на рис. 2.3 и 2.4.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	=C2	=A2^(1/2)-COS(A2)/12-1/24	0	100	=(D2-C2)/10
3	=A2+\$E\$2	=A3^(1/2)-COS(A3)/12-1/24			
4	=A3+\$E\$2	=A4^(1/2)-COS(A4)/12-1/24			
5	=A4+\$E\$2	=A5^(1/2)-COS(A5)/12-1/24			
6	=A5+\$E\$2	=A6^(1/2)-COS(A6)/12-1/24			
7	=A6+\$E\$2	=A7^(1/2)-COS(A7)/12-1/24			
8	=A7+\$E\$2	=A8^(1/2)-COS(A8)/12-1/24			
9	=A8+\$E\$2	=A9^(1/2)-COS(A9)/12-1/24			
10	=A9+\$E\$2	=A10^(1/2)-COS(A10)/12-1/24			
11	=A10+\$E\$2	=A11^(1/2)-COS(A11)/12-1/24			
12	=A11+\$E\$2	=A12^(1/2)-COS(A12)/12-1/24			

Рис. 2.3. Макет расчетной таблицы по методу половинного деления

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,125	0	100	10
3	10	3,19053			
4	20	4,39646			
5	30	5,4227			
6	40	6,33847			
7	50	6,94899			
8	60	7,78367			
9	70	8,27216			
10	80	8,9118			
11	90	9,48251			
12	100	9,88647			

Рис. 2.4. Результаты табулирования функции

Так как функция меняет знак с «-» на «+» на интервале  $[0; 10]$ , то можно сделать вывод, что этот интервал содержит хотя бы один корень.

Тогда дальнейший процесс уточнения корня сведется к следующей процедуре. Заменяем значение начала интервала  $a$ , стоящее в ячейке **C2**, на значение начала найденного интервала, а значение конца интервала  $b$  в ячейке **D2** – на соответствующее значение найденного конца интервала, т. е. 10 (рис. 2.5).

Заметим, что при этом пересчет таблицы происходит автоматически. Процедуру повторяем до тех пор (рис. 2.6–2.9), пока выбранный шаг не станет меньше либо равен заданной погрешности  $\varepsilon$ .

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	100	10
3	1	0,913			
4	2	1,407			
5	3	1,773			
6	4	2,013			
7	5	2,171			
8	6	2,328			
9	7	2,541			
10	8	2,799			
11	9	3,034			
12	10	3,191			

Рис. 2.5. Первая итерация

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	1	0,1
3	0,1	0,192			
4	0,2	0,324			
5	0,3	0,426			
6	0,4	0,514			
7	0,5	0,592			
8	0,6	0,664			
9	0,7	0,731			
10	0,8	0,795			
11	0,9	0,855			
12	1	0,913			

Рис. 2.6. Вторая итерация

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	0,1	0,01
3	0,01	-0,02			
4	0,02	0,016			
5	0,03	0,048			
6	0,04	0,075			
7	0,05	0,099			
8	0,06	0,12			
9	0,07	0,14			
10	0,08	0,158			
11	0,09	0,175			
12	0,1	0,192			

Рис. 2.7. Третья итерация

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0,01	-0,025	0,01	0,02	0,001
3	0,011	-0,02			
4	0,012	-0,015			
5	0,013	-0,011			
6	0,014	-0,007			
7	0,015	-0,003			
8	0,016	0,0015			
9	0,017	0,0054			
10	0,018	0,0092			
11	0,019	0,0129			
12	0,02	0,0164			

Рис. 2.8. Четвертая итерация

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0,015	-0,003	0,015	0,001	0,0001
3	0,0151	-0,002			
4	0,0152	-0,002			
5	0,0153	-0,001			
6	0,0154	-9E-04			
7	0,0155	-5E-04			
8	0,0156	-9E-05			
9	0,0157	0,0003			
10	0,0158	0,0007			
11	0,0159	0,0011			
12	0,016	0,0015			

Рис. 2.9. Пятая итерация

В качестве корня возьмем середину последнего найденного интервала. В процессе вычислений проследим, чтобы после каждого итерационного шага в столбце значений функции расчетной таблицы был переход знака.



пересечения нетрудно вычислить. Действительно уравнение хорды  $AB$  будет иметь вид

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \quad (2.3)$$

Для точки пересечения хорды  $AB$  с осью абсцисс ( $x = x_1, y = 0$ ) получим уравнение

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \quad (2.4)$$

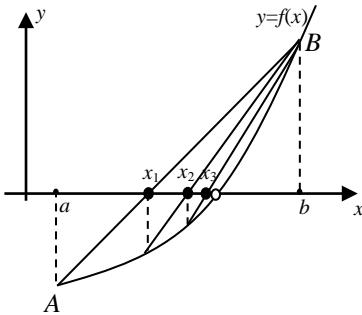


Рис. 2.11. Графическая интерпретация

Пусть для определенности  $f''(x) > 0$  при  $a \leq x \leq b$  (случай  $f''(x) < 0$  сводится к нашему, если записать уравнение в виде  $-f(x) = 0$ ). Это означает, что кривая  $y = f(x)$  будет вогнута и, следовательно, расположена ниже своей хорды  $AB$ . Возможны два случая: 1)  $f(a) < 0$ , а значит  $f(b) > 0$  и 2)  $f(a) > 0, f(b) < 0$ .

В первом случае неподвижен конец  $b$ , а последовательные приближения при  $x_0 = a$  вычисляются по формуле

$$x_{i+1} = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

и образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < \xi < b.$$

Во втором случае конец  $a$  неподвижен и последовательные приближения при  $x_0 = b$  находятся как

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

и образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < \xi < \dots < x_{i+1} < x_i < \dots < x_1 < x_0.$$

Обобщая эти результаты, заключаем:

1) в качестве неподвижного следует выбрать тот конец, для которого знак функции  $f(x)$  совпадает со знаком ее второй производной  $f''(x)$ ;

2) последовательные приближения  $x_n$  лежат по ту сторону корня  $\xi$ , где функция  $f(x)$  имеет знак, противоположный знаку ее второй производной  $f''(x)$ .

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon, \quad (2.7)$$

где  $\varepsilon$  – заданная предельная абсолютная погрешность.

При реализации данного метода обычно на практике пользуются исходной формулой, фиксируя один и варьируя другим концом локализованного отрезка. Причем варьируется тот конец отрезка, в котором значение функции по знаку совпадает со значением функции в точках приближения к корню.

Представим на примере варианты организации ручного счета по методу хорд в Excel и MathCAD.

**Пример.** Найти положительный корень уравнения

$$x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$$

с погрешностью, не превышающей  $\varepsilon = 0,001$ .

*Решение.*

1. Реализация метода хорд в Excel при ручном счете.

Прежде всего, отделяем корень. Так как

$$f(1) = -0,6 < 0 \text{ и } f(2) = 5,6 > 0,$$

то искомый корень  $\xi$  лежит внутри отрезка  $[1; 2]$ . Полученный отрезок велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$$f(1,5) = 1,425 > 0, \text{ то } 1 < \xi < 1,5.$$

Так как  $f''(x) = 6x - 0,4 > 0$  при  $1 < x < 1,5$  и  $f(1,5) > 0$ , то воспользуемся формулой (2.6) для решения поставленной задачи. Проведем первый итерационный шаг. Реализация его в Excel показана на рис. 2.12 и 2.13.

$$x_1 = 1 - \frac{-0,6}{1,425 + 0,6}(1,5 - 1) = 1,148;$$

$$|x_1 - x_0| = 0,148 > \varepsilon;$$

$$f(x_1) = -0,17974.$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	=D2	=B2^3-0,2*B2^2-0,2*B2-1,2	1	1,5	0,001
3	Конец	=E2	=B3^3-0,2*B3^2-0,2*B3-1,2			=ABS(B2-B4)
4	Приближение	=B2-C2*(B3-B2)/(C3-C2)	=B4^3-0,2*B4^2-0,2*B4-1,2	Контроль		=F2-F3

Рис. 2.12. Макет расчетной таблицы метода хорд

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,000	-0,600	1	1,5	0,001
3	Конец	1,500	1,425			0,1481
4	Приближение	1,148	-0,17974	Контроль		-0,1471

Рис. 2.13. Результаты первого итерационного шага

Так как число  $-0,1471$ , стоящее в ячейке контроля, по абсолютной величине превышает заданную погрешность, продолжаем вычисления и делаем второй итерационный шаг (рис. 2.14). Мы определились с расчетной формулой, для которой зафиксировано значение конечной точки выбранного интервала, поэтому при следующих итерационных шагах нам достаточно изменять начальное значение интервала на значение, полученное в ячейке **B4**, а контроль вести по текущей погрешности, находящейся в ячейке **F3**.

$$x_2 = 1,148 + \frac{0,17974}{1,425 + 0,17974}(1,5 - 1,148) = 1,188;$$

$$|x_2 - x_1| = 0,0394 > \varepsilon;$$

$$f(x_2) = -0,04477.$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,148	-0,180	1	1,5	0,001
3	Конец	1,500	1,425			0,0394
4	Приближение	1,188	-0,04477	Контроль		-0,0384

Рис. 2.14. Результаты второго итерационного шага

Так как погрешность еще велика, делаем третий итерационный шаг (рис. 2.15).

$$x_3 = 1,188 + \frac{0,04477}{1,425 + 0,04477}(1,5 - 1,188) = 1,197;$$

$$|x_3 - x_2| = 0,0095 < \varepsilon ;$$

$$f(x_3) = -0,01062.$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,188	-0,045	1	1,5	0,001
3	Конец	1,500	1,425			0,0095
4	Приближение	1,197	-0,01062	Контроль		<u>-0,0085</u>

Рис. 2.15. Результаты третьего итерационного шага

Поступая аналогично, на еще двух итерационных шагах приходим к результату решения задачи.

После пяти итерационных шагов (рис. 2.16) можно принять  $\xi = 1,20$  с погрешностью  $\varepsilon = 0,001$ . Заметим, что точный корень уравнения равен  $\xi = 1,2$ .

	A	B	C
1		x	f(x)
2	Начало	1,197	-0,011
3	Конец	1,500	1,425
4	Приближение	1,199	-0,00249

	A	B	C
1		x	f(x)
2	Начало	1,199	-0,002
3	Конец	1,500	1,425
4	Приближение	1,200	-0,00058

Рис. 2.16. Результаты четвертого и пятого итерационных шагов

## 2. Реализация метода хорд в Excel в автоматическом режиме.

Приведенный выше алгоритм может быть усовершенствован с учетом возможностей Excel. Для этого достаточно на листе Excel оформить задачу так, как показано на рис. 2.12, и проделать первый итерационный шаг. Затем в меню **Сервис** выбрать команду **Параметры** и вкладку **Вычисления**. Установить флажок **Итерации**. В поле **Предельное число итераций** ввести количество итераций при обработке формул, а в поле **Относительная погрешность** ввести заданную погрешность вычислений. В ячейке **B2** сделать циклическую ссылку =B4 и нажать ввод. При этом Excel самостоятельно проделает необходимое число итерационных шагов по формуле, занесенной в ячейку **B4**, закончив вычисления при достижении указанной точности  $\varepsilon$ .

## 3. Реализация метода хорд в MathCAD показана на рис. 2.17.

Для этого проделаем следующие действия:

- 1) графическим способом отделим корень уравнения;

2) создадим функцию **methord**(*f, a, b, ε*), реализующую приведенный алгоритм;

3) вычислим данную функцию при заданных параметрах: *f* – исходная функция, *a* = 1 – начало отрезка локализации корня, *b* = 1,5 – конечная точка отрезка локализации,  $\epsilon = 10^{-3}$  – точность вычислений.

Результатом вычислений будет вектор, состоящий из двух элементов, первым из которых будет сам корень, второй – число проведенных итераций.

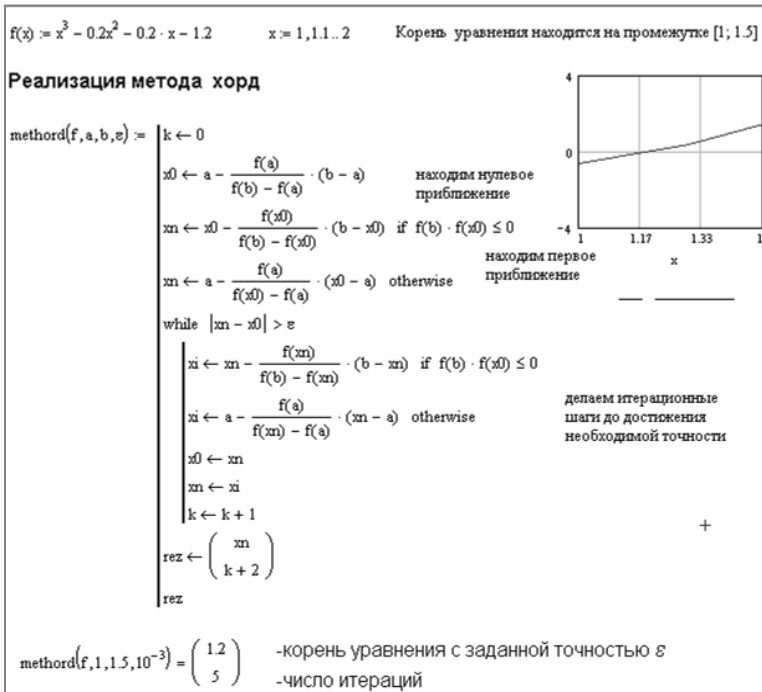


Рис. 2.17. Решение уравнения методом хорд в MathCAD

## 2.4. Уточнение корня по методу касательных (методу Ньютона)

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой  $y = f(x)$  при  $x = x_i$  и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 2.18). При этом не обязательно задавать отрезок  $[a; b]$ ,

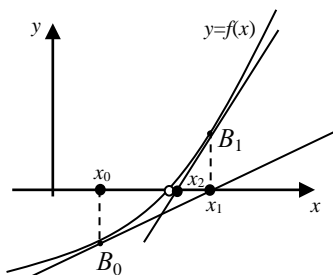


Рис. 2.18. Графическая интерпретация метода Ньютона

содержащий корень уравнения (2.1), достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня  $x = x_0$ .

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: в качестве исходной точки  $x_0$  выбирается тот конец интервала  $[a; b]$ , которому отвечает ордината того же знака, что и знак  $f''(x)$ .

Уравнение касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  через точку  $B_0$  с координатами  $x_0$  и  $f(x_0)$ , имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.8)$$

Отсюда найдем следующее приближение корня  $x_1$  как абсциссу точки пересечения касательной с осью  $Ox$  ( $y = 0$ ):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках  $B_1, B_2$  и т. д. Формула для  $i + 1$  приближения имеет следующий вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (2.9)$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие  $|f(x_i)| < \varepsilon$ , или условие близости двух последовательных приближений  $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Итерационный процесс сходится, если

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (2.10)$$

Покажем реализацию метода Ньютона в Excel на примере, рассмотренном выше. Для этого оформим лист электронной таблицы так, как это показано на рис. 2.19.

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	f'(x)	Погрешность
2		1	=B2^3-0,2*B2^2-0,2*B2-1,2	=3*B2^2-0,4*B2-0,2	0,001
3	Корень	=B2-C2/D2	=B3^3-0,2*B3^2-0,2*B3-1,2		
4					

Рис. 2.19. Макет расчетной таблицы метода Ньютона

На рис. 2.20 показаны результаты первого итерационного шага.

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	f'(x)	Погрешность
2		1	-0,6	2,4	0,001
3	Корень	1,25	0,190625		

Рис. 2.20. Результаты первого итерационного шага по методу Ньютона

В меню **Сервис** выберем команду **Параметры** и вкладку **Вычисления**. Появившееся окно оформим по образцу, показанному на рис. 2.21.

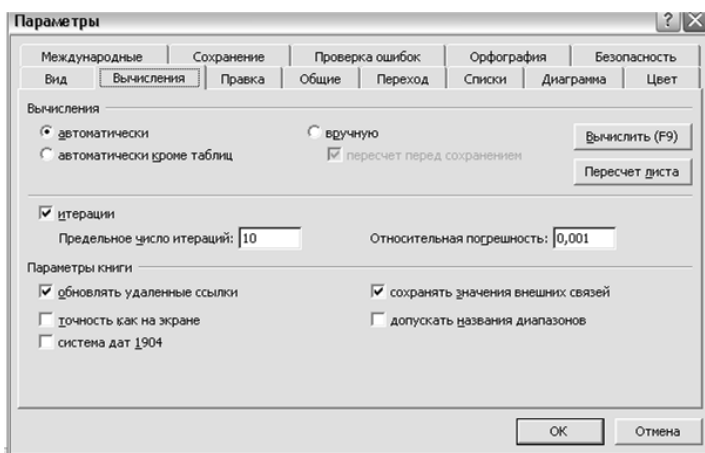


Рис. 2.21. Вид окна **Параметры**

Циклический процесс вычисления стартует, когда в расчетной таблице появится перекрестная ссылка. Для этого в ячейку **B2** необходимо внести формулу **=B3**. Данная команда послужит началом итерационного процесса. Окончательный вид расчетной таблицы показан на рис. 2.22.

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	f'(x)	Погрешность
2		1,2	6,8395E-11	3,64	0,001
3	Корень	1,2	0		

Рис. 2.22. Результаты итерационного процесса по методу Ньютона

Таким образом, корнем уравнения с заданной точностью является 1,2.

Главным недостатком этого метода является то, что при определенных условиях он не обеспечивает сходимость. В частности, это может произойти, когда при промежуточных вычислениях производная функции примет значение, близкое к нулю.

Итерационный процесс по методу Ньютона в MathCAD можно организовать с помощью функции *until(X, Y)*, которая производит однотипные вычисления по формуле *Y*, до тех пор, пока заданное выражение *X* принимает неотрицательные значения.

**Пример.** Решить уравнение  $x - e^x + 4 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

*Решение* примера в MathCAD показано на рис. 2.23.

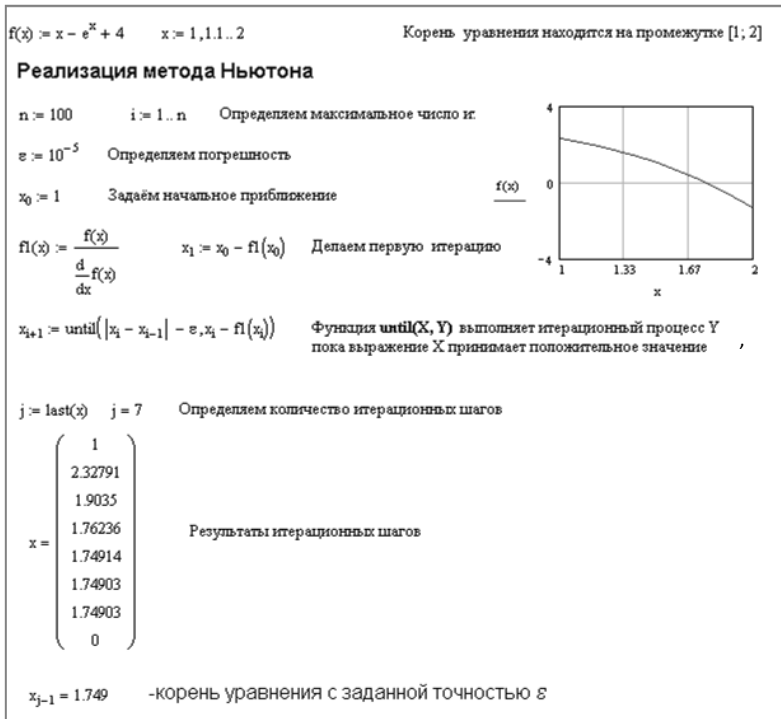


Рис. 2.23. Вариант решения уравнения методом Ньютона в MathCAD

## 2.5. Уточнение корня методом простой итерации (последовательных приближений)

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение  $f(x) = 0$  заменяется равносильным уравнением:

$$x = \varphi(x). \quad (2.11)$$

Пусть известно начальное приближение корня  $x = x_0$ . Подставляя это значение в правую часть уравнения (2.11), получим новое приближение:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение (2.11), получаем последовательность значений:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (2.12)$$

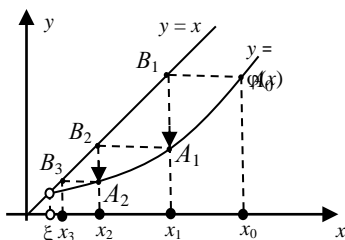


Рис. 2.24. Графическая интерпретация метода простой итерации

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости  $xOy$  графики функций  $y = x$  и  $y = \varphi(x)$  (рис. 2.24). Каждый действительный корень  $\xi$  уравнения (2.12) является абсциссой точки пересечения кривой  $y = \varphi(x)$  с прямой  $y = x$ .

Отправляясь от некоторой точки  $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ , строим ломаную  $A_0B_1A_1B_2A_2$ , звенья которой попеременно параллельны оси  $Ox$  и оси  $Oy$ , вершины  $A_0, A_1, A_2$  лежат на кривой  $y = \varphi(x)$ , а вершины  $B_1, B_2, B_3$  – на прямой  $y = x$ . Общие абсциссы точек  $A_1$  и  $B_1, A_2$  и  $B_2$ , очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения  $x_1, x_2, \dots$  корня  $\xi$ .

Метод итераций  $x_{i+1} = \varphi(x_i), (i = 0, 1, \dots)$  сходится при выполнении условия  $|\varphi'(x)| < 1$  на выбранном отрезке  $[a; b]$  и не зависит от начального приближения  $x_0 \in [a; b]$ . При этом предельное значение  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  является единственным корнем уравнения  $x = \varphi(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

**Пример.** Решить уравнение  $x^3 - x - 1 = 0$  с погрешностью, не превышающей  $\varepsilon = 10^{-3}$ , если известно, что корень отделен на отрезке  $\xi \in [1; 2]$ .

*Решение.*

Уравнение можно записать в виде  $x = x^3 - 1$ . Здесь  $\varphi(x) = x^3 - 1$ , следовательно  $\varphi'(x) = 3x^2$ . Нетрудно заметить, что  $\varphi'(x) \geq 3$  при  $1 \leq x \leq 2$ , а значит, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если же записать исходное уравнение в виде  $x = \sqrt[3]{x+1}$ , то будем иметь:  $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$  и  $\psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ .

Отсюда  $0 < \psi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$  при  $1 \leq x \leq 2$ . Это означает, что процесс итерации для рассматриваемого уравнения сходится.

Найдем корень  $\xi$  уравнения с заданной точностью. Вычисляем последовательные приближения  $x_n$  по итерационной формуле

$$x_i = \sqrt[3]{x_i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

1. Организация итерационного процесса нахождения корня уравнения по методу простой итерации в Excel показана на рис. 2.25.

	A	B	C
1	x	$\phi(x)$	X0
2	=C2	=(A2+1)^(1/3)	1
3	=B2	=ЕСЛИ(A3-A2<=0,001;"стоп";(A3+1)^(1/3))	
4	=B3	=ЕСЛИ(A4-A3<=0,001;"стоп";(A4+1)^(1/3))	
5	=B4	=ЕСЛИ(A5-A4<=0,001;"стоп";(A5+1)^(1/3))	
6	=B5	=ЕСЛИ(A6-A5<=0,001;"стоп";(A6+1)^(1/3))	
7	=B6	=ЕСЛИ(A7-A6<=0,001;"стоп";(A7+1)^(1/3))	

Рис. 2.25. Макет расчетной таблицы метода простой итерации

	A	B	C
1	x	$\phi(x)$	X0
2	1,0000	1,260	1
3	1,2599	1,312	
4	1,3123	1,322	
5	1,3224	1,324	
6	1,3243	1,325	
7	1,3246	стоп	

Рис. 2.26. Результаты вычислений по методу простых итераций

Результаты расчетов (рис. 2.26) показывают, что уже на шестом шаге итерационного процесса достигается заданная точность. При этом корень уравнения  $\xi = 1,325$ .

В Excel довольно просто реализуется процесс циклических вычислений по методу простых итераций. Данный способ на основании примеров, рассмотренных выше, предлагается студентам оформить самостоятельно.

2. Решение примера в MathCAD показано на рис. 2.27.

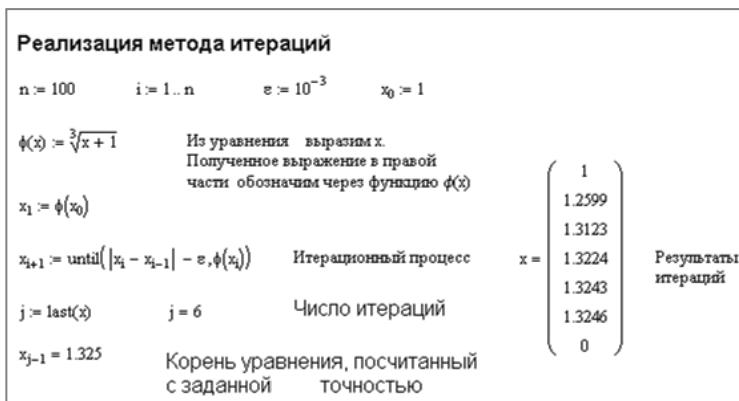


Рис. 2.27. Решение уравнения методом простых итераций в MathCAD

## 2.6. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений средствами Excel и MathCAD

В Excel и MathCAD встроены средства автоматического поиска решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Рассмотрим их применение.

*Решение уравнений средствами Excel.* В Excel это реализуется через диалоговые окна **Подбор параметра** и **Поиск решения**.

Решение уравнений через диалоговое окно **Подбор параметра** позволяет организовать поиск приближенного значения одной ячейки при заданном значении другой, ссылающейся на нее. Так как в данном случае при нахождении корней используется метод простой итерации, результат будет зависеть от начального приближения. В качестве корня будет взято значение, ближайшее к начальному приближению.

Диалоговое окно **Подбор параметра** открывается щелчком по строке меню **Сервис**  $\Rightarrow$  **Подбор параметра**.

**Пример.** Решить уравнение  $-2 \cdot x \cdot e^{-x^2} + 4 \cdot x + 1 = 0$  через диалоговое окно **Подбор параметра**, если известно, что один из корней находится вблизи точки  $x = 0$ .

*Решение.*

Макет заполнения расчетной таблицы показан на рис. 2.28. Расположим начальное приближение в ячейке **A2**. В некоторую другую вы-

бранную ячейку, например **B2**, вводим формулу левой части уравнения, заменяя  $x$  на **A2**.

	A	B		A	B
1	x	f(x)	1	x	f(x)
2	0	=-2*A2*EXP(-(A2^2))+4*A2+1	2	0	1

Рис. 2.28. Макет расчетной таблицы и результаты ее вычислений

Откроем диалоговое окно **Подбор параметра** и заполним его поля так, как это показано на рис. 2.29.

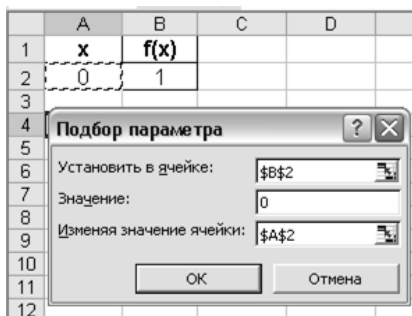


Рис. 2.29. Вид окна **Подбор параметра**

При нажатии кнопки **ОК** появится окно с сообщением (рис. 2.30).

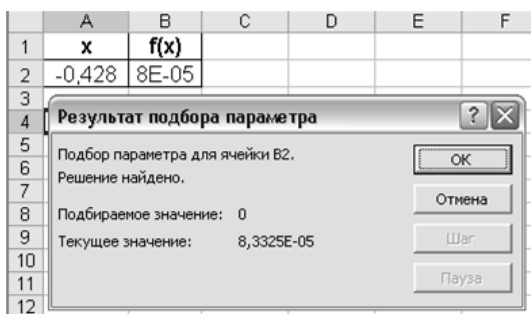


Рис. 2.30. Сообщение о результатах подбора параметра

Нажатием кнопки **ОК** закрываем панель **Результат подбора параметра**. Приближенный результат решения уравнения будет находиться

в ячейке **A2**. Замечаем, что для данного примера приближенный корень уравнения  $\xi = -0,428$ .

Замечание 1. В случае, когда значение корня записано с плавающей запятой, необходимо увеличить разрядность результата, соответствующего полученному приближению. При этом следует воспользоваться вкладкой **Число** диалогового окна **Формат ячеек**.

Замечание 2. Для уравнения  $f(x) = 0$  с известным корнем  $\xi$  нахождение дополнительных корней эквивалентно поиску корней уравнения  $f(x) / (x - \xi) = 0$ . Проще искать корень выражения  $h(x) = f(x) / (x - \xi)$ , чем пробовать искать другой корень уравнения, выбирая различные начальные приближения.

Более широкие возможности решения нелинейных уравнений, неравенств и систем реализуются с помощью надстройки **Поиск решения**. Данную надстройку можно активизировать в меню **Сервис**, щелкнув по выкладке **Надстройки**, а затем поставив галочку напротив строки **Поиск решения** появившегося одноименного окна.

Это позволит при последующих запусках Excel загружать данную надстройку в меню **Сервис**.

Например. Решим поставленную выше задачу через **Поиск решения**.

Для этого достаточно на листе Excel оформить задачу так, как это показано на рис. 2.29. Щелчком в меню Excel **Сервис**  $\Rightarrow$  **Поиск решения** открыть диалоговое окно **Поиск решения** и задать сценарий решения (рис. 2.31).

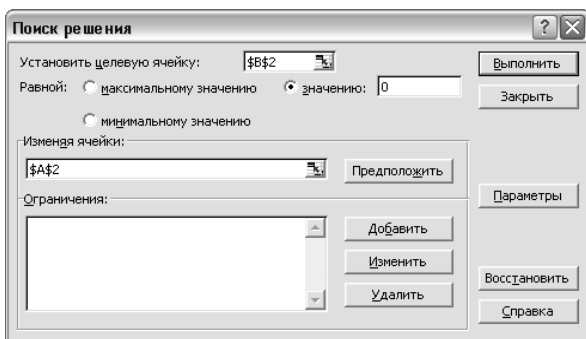


Рис. 2.31. Вид окна **Поиск решения**

На рис. 2.31 показаны три режима вычислений, устанавливающие в целевой ячейке соответственно: максимальное значение, минимальное

значение, заданное значение. По команде **Выполнить** проводятся вычисления, возвращающие результат, ближайший к начальному приближению. Пока нам будет нужен только последний режим. Работа в нем очень похожа на работу со средством **Подбор параметра**.

На рис. 2.32 показаны параметры, с помощью которых пользователь может управлять процессом поиска решения. Окно параметров запускается нажатием на соответствующую кнопку **Параметры**. Воспользовавшись кнопкой **Справка**, можно ознакомиться с подробным их описанием.

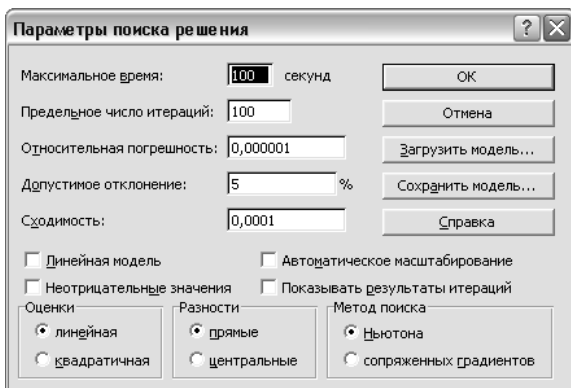


Рис. 2.32. Вид окна **Параметры поиска решения**

Нажатие кнопки **Выполнить** позволяет найти решение исходного уравнения  $\xi = -0,428$  (рис. 2.33).

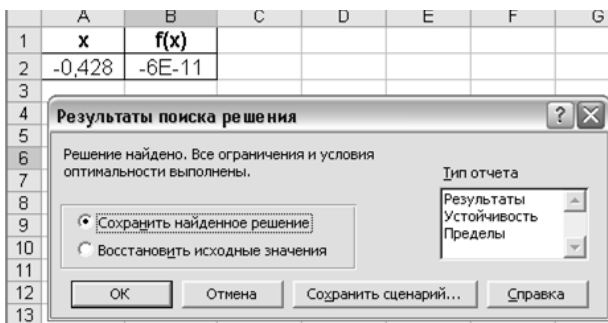


Рис. 2.33. Сообщение о результатах поиска решения

*Решение уравнений средствами MathCAD.* MathCAD позволяет находить через встроенные функции не только приближенное решение уравнения, но и для большинства алгебраических уравнений определять их аналитическое решение.

Для простейших уравнений вида  $f(x) = 0$  решение в MathCAD находится с помощью функции  $\text{root}(f(x1, x2, \dots), x1, a, b)$ . Она возвращает значение  $x1$ , принадлежащее отрезку  $[a; b]$ , при котором выражение или функция  $f(x)$  обращаются в 0. При этом используется метод хорд. Поэтому перед применением данной функции должно быть определено начальное приближение к корню.

Если после многих итераций MathCAD не находит подходящего приближения, то появится сообщение **Отсутствует сходимость**. Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- уравнение не имеет корней;
- корни уравнения расположены далеко от начального приближения;
- выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями;
- выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями;
- выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, необходимо исследовать график функции  $f(x)$ . Он поможет выяснить наличие корней уравнения  $f(x) = 0$  и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет **root** сходиться.

На рис. 2.34 показано решение поставленной задачи с помощью функции **root**.

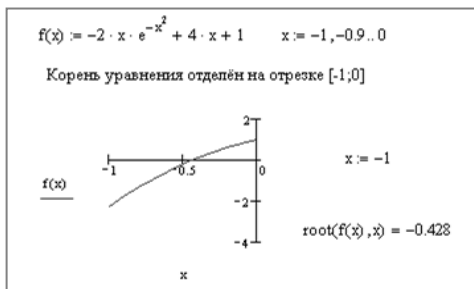


Рис. 2.34. Решение уравнения в MathCAD

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} -6.13 \\ 0 \\ 4.12 \\ 0 \\ -3.15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -0.932 + 0.56i \\ -0.932 - 0.56i \\ 1.157 + 0.761i \\ 1.157 - 0.761i \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.35





$$x = A^{-1} \cdot b. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) дает единственное решение системы (3.2).

**Пример.** Решить систему линейных алгебраических уравнений в EXCEL и MathCAD:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -0,3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0,7, \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -0,1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -0,5, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 0,3. \end{cases}$$

*Решение.*

1. Чтобы решить заданную систему матричным способом (рис. 3.1), выпишем на лист Excel матрицу коэффициентов  $A$  в блок ячеек **A2:E6** и столбец свободных членов  $b$  в блок ячеек **G2:G6**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Матрица коэффициентов A</b>						<b>Столбец B</b>
2	1	-1	2	-3	4		-0,3
3	3	1	1	-1	-1		0,7
4	0	5	1	-2	-3		-0,1
5	1	2	-2	-1	1		-0,5
6	4	1	0	0	1		0,3
7							
8	<b>Обратная матрица</b>						<b>Решение</b>
9	-0,034	0,23	-0,08	0,039	0,076		0,182984
10	0,01	-0,455	0,257	-0,09	0,361		-0,19476
11	0,11	-0,283	0,194	-0,43	0,293		0,054974
12	-0,107	-0,581	0,12	-0,34	0,547		-0,05366
13	0,126	-0,466	0,079	-0,07	0,335		-0,23717

Рис. 3.1

Для нахождения обратной матрицы в свободном месте этого же листа выделим блок ячеек, соответствующий размерности матрицы  $A$ , например **A9:E13**, активизируем кнопку **Мастер функций** на панели кнопок и в категории **Математические** выберем функцию **МОБР()**. В качестве аргумента этой функции введем блок ячеек с элементами матрицы  $A$ , т.е. **A2:E6** и одновременно нажмем три клавиши **<CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>**. В результате этих действий в ячейках **A9:E13** появятся значения обратной матрицы. Аналогичным образом с помощью функции **МУМНОЖ()** найдем вектор решения  $x = A^{-1}b$ . Для этого в свободном месте рабочего листа, например **G9:G13**, выделим блок ячеек, совпадающий с размерностью столбца  $b$ , выберем

функцию **МУМНОЖ()**, указав в качестве первого аргумента блок ячеек **A9:E13**, в котором находится обратная матрица, а в качестве второго аргумента – блок ячеек **G2:G6** (столбец *b*). Для получения результата нажмем **<CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>**. В ячейках **G9:G13** появится результат. На рис. 3.2 показан макет расчетной таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Матрица коэффициентов</b>					<b>Столбец B</b>	
2	1	-1	2	-3	4		-0,3
3	3	1	1	-1	-1		0,7
4	0	5	1	-2	-3		-0,1
5	1	2	-2	-1	1		-0,5
6	4	1	0	0	1		0,3
7							
8	<b>Обратная матрица</b>					<b>Решение</b>	
9	=МОБР(A2:E6)	=M	=M	=M	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
10	=МОБР(A2:E6)	=M	=M	=M	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
11	=МОБР(A2:E6)	=M	=M	=M	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
12	=МОБР(A2:E6)	=M	=M	=M	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
13	=МОБР(A2:E6)	=M	=M	=M	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)

Рис. 3.2

2. Покажем два варианта решения заданной системы в MathCAD. Решение системы матричным способом показано на рис. 3.3.

Матрица A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Столбец b

$$b = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.7 \\ -0.1 \\ -0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя.

$$|A| = -382$$

Т.к. определитель не равен 0, то система имеет единственное решение

Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.034 & 0.23 & -0.084 & 0.039 & 0.076 \\ 0.01 & -0.455 & 0.257 & -0.089 & 0.361 \\ 0.11 & -0.283 & 0.194 & -0.435 & 0.293 \\ -0.107 & -0.581 & 0.12 & -0.338 & 0.547 \\ 0.126 & -0.466 & 0.079 & -0.068 & 0.335 \end{pmatrix}$$

Решение

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.183 \\ -0.195 \\ 0.055 \\ -0.054 \\ -0.237 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.3

В пакете MathCAD предусмотрена специальная функция для решения СЛАУ. Функция ***solve*(A, b)** возвращает вектор *x*, такой что  $A \cdot x = b$  для заданной матрицы *A* и вектора *b*. На рис. 3.4 показано решение системы в MathCAD с помощью функции ***solve*()**.

Матрица A	Столбец b	Решение системы
$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$b := \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.7 \\ -0.1 \\ -0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.183 \\ -0.195 \\ 0.055 \\ -0.054 \\ -0.237 \end{pmatrix}$

Рис. 3.4

### 3.3. Решение СЛАУ методом Гаусса

Метод Гаусса является одним из методов исключения. Решение методами исключения осуществляется поэтапно. На первом этапе систему преобразуют к простому виду, на втором – решают упрощенную систему и по рекуррентным формулам получают значения неизвестных.

Пусть задана система (3.2). Идея метода Гауссовых исключений заключается в отыскании системы матриц  $L_k, L_{k-1}, L_1$  таких, что матрица  $B = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_1 \cdot A$  будет иметь один из перечисленных видов:

- 1) диагональная матрица;
- 2) треугольная матрица;
- 3) унитарная (ортогональная) матрица.

Если все матрицы  $L_i$  невырожденные, то система (3.2) преобразуется в эквивалентную систему

$$B \cdot x = C, \quad (3.5)$$

где  $B = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_1 \cdot A$ ,  $C = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_1 \cdot b$ .

Если  $B$  – диагональная матрица, то решение системы (3.1) находят непосредственно из системы (3.5).

Если  $B$  – треугольная, решение системы (3.1) находим, решая систему (3.5).

Если  $B$  – унитарная, то умножая систему (3.5) слева на сопряженную матрицу  $B^*$ , получаем решение в явном виде.

Одним из наиболее распространенных методов, основанных на указанных выше преобразованиях, является метод Гаусса, в котором исключение неизвестных производится с помощью левых треугольных матриц  $L_i$  и искомая система приводится к эквивалентной с правой (верхнетреугольной) треугольной матрицей.

Метод Гаусса является оптимальным по быстродействию и почти универсальным по отношению к свойствам матрицы  $A$ . Наибольшее



тарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \beta_1^1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^2 & \beta_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

На этом вычисления прямого хода заканчиваются и начинаются вычисления по определению неизвестных – обратный ход метода Гаусса.

**Обратный ход.** Из последнего уравнения системы находим  $x_n$ . Подставляя его в предпоследнее уравнение, получим  $x_{n-1}$  и т. д. Процедуру обратного хода можно свести к применению рекуррентных формул:

$$x_n = \beta_n^{(n)}; \quad x_i = \beta_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1).$$

С матричной точки зрения данная процедура равносильна тому, что с помощью элементарных преобразований, аналогичных прямому ходу метода Гаусса, ступенчатая матрица преобразуется в матрицу, у которой первые  $n$  столбцов представляют собой единичную матрицу. Последний столбец этой матрицы содержит решение системы (3.5), которое, в свою очередь, является решением системы (3.1).

**Замечание 1.** Если в ходе преобразований системы один из «ведущих элементов» обращается в нуль, то в соответствующей системе достаточно переставить уравнения так, чтобы сделать «ведущий элемент» отличным от нуля.

В процессе вычислений, чтобы избежать ошибки, необходимо организовать контроль. Простая схема контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу равносильно замене системы (3.1) контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующих строк. Решая одновременно исходную и контрольную системы, получаем возможность контролировать попутно каждый шаг расчета.

**Замечание 2.** Рассмотрим матрицу-столбец, состоящую из  $n$  строк, элементами которой являются 1.

$$l = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T.$$

Тогда  $A \cdot (x+1) = Ax + A \cdot 1 = b + A \cdot 1 = d$ . Таким образом, имеем систему с матрицей-столбцом свободных членов  $d = b + A \cdot 1$ , элементы которой определяются по формуле

$$d_i = b_i + a_{i1} + \dots + a_{in}, i = \overline{1, n}.$$

Решения полученной контрольной системы отличаются от решения системы (3.2) на единицу. Поэтому для контроля в прямом ходе необходимо дополнительно вести над элементами  $d$  такие же преобразования, как и над  $b$ . Обратный ход следует выполнить отдельно для вычисления  $x$  из систем:  $Bx = c$ ;  $Bx = d$ . Если окажется, что  $x_i = x_i + 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то вычисления выполняются правильно.

**Пример.** Методом Гаусса в Excel и MathCAD решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 15x_4 = 23,2, \\ 5,5x_1 + 0,5x_2 + 0,75x_3 = -0,9, \\ 5x_1 + 20x_2 - 2x_4 = 26, \\ 3,5x_1 - 20,5x_3 - 2,8x_4 = -48,6. \end{cases}$$

В Excel организовать контроль над вычислениями.

*Решение.*

1. Рассмотрим схему Гаусса для приведенной выше системы в Excel. Порядок заполнения таблицы следующий. Согласно рис. 3.5 создадим блок ввода расширенной матрицы системы.

	A	B	C	D	E	F
1	Расширенная матрица системы					Столбец контроля
2	x1	x2	x3	x4	b	Сумма
3	5,5	0,5	0,75	0	-0,9	5,85
4	0	3	-1	-15	23,2	10,2
5	5	20	0	-2	26	49
6	3,5	0	-20,5	-2,8	-48,6	-68,4

Рис. 3.5

Заметим, что для получения первого ненулевого разрешающего элемента целесообразно первое и второе уравнения поменять местами. Для организации контроля в ячейках **F3:F6** вычислим суммы соответствующих строк интервала **A – E**.

В блоке ячеек **A8:E26** поэтапно реализуем прямой ход метода Гаусса с одновременным контролем за вычислениями в блоке ячеек **F8:H26**. Столбец **F** рассчитывается одновременно с основными расчетами по формулам, аналогичным формулам в блоках прямого хода, а столбец **H** – построчным суммированием элементов столбцов **A – E**.

При верных вычислениях результаты столбца **F** должны совпасть с результатами столбца **H**. Результаты вычислений показаны на рис. 3.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Прямой ход метода Гаусса						Сумма	
8	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
9	0	3	-1	-15	23,2	10,2		10,2
10	0	19,545	-0,682	-2	26,8182	43,681818		43,68182
11	0	-0,318	-20,98	-2,8	-48,027	-72,12273		-72,12273
12								
13	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
14	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
15	0	0	5,8333	95,727	-124,33	-22,77273		-22,77273
16	0	0	-21,08	-4,391	-45,567	-71,04091		-71,04091
17								
18	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
19	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
20	0	0	1	16,41	-21,314	-3,903896		-3,903896
21	0	0	0	341,59	-494,94	-153,3481		-153,3481
22								
23	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
24	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
25	0	0	1	16,41	-21,314	-3,903896		-3,903896
26	0	0	0	1	-1,4489	-0,448918		-0,448918

Рис. 3.6

После приведения расширенной матрицы к ступенчатому виду выполним обратный ход метода Гаусса. Для этого снизу вверх применим рекуррентные формулы. Результаты этих вычислений приведены на рис. 3.7.

В блоке ячеек **E28:E31** получено решение исходной системы (соответственно  $x_4, x_3, x_2, x_1$ ). Для контроля значения в ячейках **F28:F31** и **H28:H31** должны совпасть и отличаться от соответствующих значений в ячейках **E28:E31** на единицу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
27	Обратный ход метода Гаусса								
28	0	0	0	1	-1,4489	-0,448918	x4	-0,448918	
29	0	0	1	0	2,46302	3,4630229	x3	3,463023	
30	0	1	0	0	1,3098	2,3097511	x2	2,309751	
31	1	0	0	0	-0,6186	0,3814286	x1	0,381429	

Рис. 3.7

На рис. 3.8 показан макет расчетной таблицы метода Гаусса.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Расширенная матрица системы					Столбец контроля		
2	x1	x2	x3	x4	b	Сумма		
3	5,5	0,5	0,75	0	-0,9	=СУММ(A3:E3)		
4	0	3	-1	-15	23,2	=СУММ(A4:E4)		
5	5	20	0	-2	26	=СУММ(A5:E5)		
6	3,5	0	-20,5	-2,8	-48,6	=СУММ(A6:E6)		
7	Прямой ход метода Гаусса							Сумма
8	=A3/\$A\$3	=B3/\$A\$3	=C3/\$A\$3	=D3/\$A\$3	=E3/\$A\$3	=F3/\$A\$3		=СУММ(A8:E8)
9	=A4-\$A4*\$A\$8	=B4-\$A4*\$B\$8	=C4-\$A4*\$C\$8	=D4-\$A4*\$D\$8	=E4-\$A4*\$E\$8	=F4-\$A4*\$F\$8		=СУММ(A9:E9)
10	=A5-\$A5*\$A\$8	=B5-\$A5*\$B\$8	=C5-\$A5*\$C\$8	=D5-\$A5*\$D\$8	=E5-\$A5*\$E\$8	=F5-\$A5*\$F\$8		=СУММ(A10:E10)
11	=A6-\$A6*\$A\$8	=B6-\$A6*\$B\$8	=C6-\$A6*\$C\$8	=D6-\$A6*\$D\$8	=E6-\$A6*\$E\$8	=F6-\$A6*\$F\$8		=СУММ(A11:E11)
12								
13	=A8	=B8	=C8	=D8	=E8	=F8		=СУММ(A13:E13)
14	=A9	=B9/\$B\$9	=C9/\$B\$9	=D9/\$B\$9	=E9/\$B\$9	=F9/\$B\$9		=СУММ(A14:E14)
15	=A10	=B10-\$B10*\$B\$14	=C10-\$B10*\$C\$14	=D10-\$B10*\$D\$14	=E10-\$B10*\$E\$14	=F10-\$B10*\$F\$14		=СУММ(A15:E15)
16	=A11	=B11-\$B11*\$B\$14	=C11-\$B11*\$C\$14	=D11-\$B11*\$D\$14	=E11-\$B11*\$E\$14	=F11-\$B11*\$F\$14		=СУММ(A16:E16)
17								
18	=A13	=B13	=C13	=D13	=E13	=F13		=СУММ(A18:E18)
19	=A14	=B14	=C14	=D14	=E14	=F14		=СУММ(A19:E19)
20	=A15	=B15	=C15/\$C\$15	=D15/\$C\$15	=E15/\$C\$15	=F15/\$C\$15		=СУММ(A20:E20)
21	=A16-\$C16*\$A\$20	=B16-\$C16*\$B\$20	=C16-\$C16*\$C\$20	=D16-\$C16*\$D\$20	=E16-\$C16*\$E\$20	=F16-\$C16*\$F\$20		=СУММ(A21:E21)
22								
23	=A18	=B18	=C18	=D18	=E18	=F18		=СУММ(A23:E23)
24	=A19	=B19	=C19	=D19	=E19	=F19		=СУММ(A24:E24)
25	=A20	=B20	=C20	=D20	=E20	=F20		=СУММ(A25:E25)
26	=A21	=B21	=C21	=D21/\$D\$21	=E21/\$D\$21	=F21/\$D\$21		=СУММ(A26:E26)
27	Обратный ход метода Гаусса							
28	=A26	=B26	=C26	=D26	=E26	=F26		x4 =СУММ(A26:E26)
29	=A20-\$D\$20*\$A28	=B20-\$D\$20*\$B28	=C20-\$D\$20*\$C28	=D20-\$D\$20*\$D28	=E20-\$D\$20*\$E28	=F20-\$D\$20*\$F28		x3 =СУММ(A29:E29)
30	=A14-\$D\$14*\$A28-\$C\$14*\$A29	=B14-\$D\$14*\$B28-\$C\$14*\$B29	=C14-\$D\$14*\$C28-\$C\$14*\$C29	=D14-\$D\$14*\$D28-\$C\$14*\$D29	=E14-\$D\$14*\$E28-\$C\$14*\$E29	=F14-\$D\$14*\$F28-\$C\$14*\$F29		x2 =СУММ(A30:E30)
31	=A8-\$D\$8*\$A28-\$C\$8*\$A29-\$B\$8*\$A30	=B8-\$D\$8*\$B28-\$C\$8*\$B29-\$B\$8*\$B30	=C8-\$D\$8*\$C28-\$C\$8*\$C29-\$B\$8*\$C30	=D8-\$D\$8*\$D28-\$C\$8*\$D29-\$B\$8*\$D30	=E8-\$D\$8*\$E28-\$C\$8*\$E29-\$B\$8*\$E30	=F8-\$D\$8*\$F28-\$C\$8*\$F29-\$B\$8*\$F30		x1 =СУММ(A31:E31)

Рис. 3.8

2. В MathCAD прямой и обратный ход метода Гаусса выполняет функция **rref()**. Реализация метода Гаусса средствами MathCAD показана на рис. 3.9.

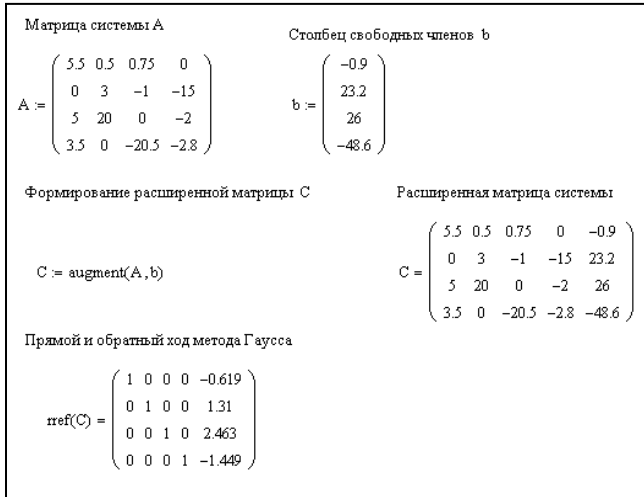


Рис. 3.9

В результате применения функции **rref(C)** к расширенной матрице системы **C** получаем матрицу, у которой в левой части стоит единичная матрица размерности, соответствующей размерности матрицы **A**, а справа – столбец решения этой системы.

### 3.4. Метод квадратного корня (метод Холецкого)

Пусть задана система  $A \cdot x = b$ , где  $A \neq 0$  – симметрическая и положительно определенная матрица. В этом случае матрицу **A** можно разложить в произведение двух треугольных матриц (нижней **S** и верхней треугольной  $S^T$ ):

$$A = S \cdot S^T. \quad (3.6)$$

Это позволяет свести решение заданной системы к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами, что является задачей более простой.

Подставим в исходную систему правую часть выражения (3.6). В результате получим  $S \cdot S^T \cdot x = b$ . Обозначим  $S^T \cdot x = z$ . Тогда  $S \cdot z = b$  и решение исходной системы сводится к решению двух систем:

$S \cdot z = b$ , решая которую находим столбец неизвестных  $z$ ;

$S^T x = z$ , из которой получаем матрицу неизвестных исходной системы  $x$ .

Для нахождения матрицы  $S$  элементы матрицы  $S \cdot S^T$ , представляющие собой суммы произведений неизвестных элементов нижнетреугольной матрицы  $S$ , приравнивают к соответствующим элементам матрицы  $A$ . Элементы матрицы  $S$  последовательно вычисляются по следующим формулам:

$$1) S_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad d_{11} = \text{sign}(a_{11});$$

$$2) S_{i1} = \frac{a_{i1}}{S_{11} \cdot d_{11}}, \quad (i = 2, 3, \dots, n);$$

$$3) d_{ii} = \text{sign} \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2 d_{kk} \right), \quad S_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ik}^2 d_{kk} \right|};$$

$$4) S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ik} c_{jk} d_{kk}}{S_{ii} d_{ii}}, \quad i \leq j;$$

$$5) S_{ij} = 0, \quad i > j.$$

После нахождения элементов матрицы  $S$  системы примут вид:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & \dots & S_{n1} \\ 0 & S_{22} & S_{32} & \dots & S_{n2} \\ 0 & 0 & S_{33} & \dots & S_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$



## Реализация метода Холецкого

	Расширенная матрица					Сумма по строке
	I	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$b_1$
$a_{21}$		$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$b_2$	$\bar{b}_2$
$a_{31}$		$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$b_3$	$\bar{b}_3$
$a_{41}$		$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$b_4$	$\bar{b}_4$
II	$S_{ij}^*$ (транспонированная матрица к $S_{ij}$ )				$Z_i$	$\bar{Z}_i$
	$S_{11}$	$S_{21}$	$S_{31}$	$S_{41}$	$Z_1$	$\bar{Z}_1$
		$S_{22}$	$S_{32}$	$S_{42}$	$Z_2$	$\bar{Z}_2$
			$S_{33}$	$S_{43}$	$Z_3$	$\bar{Z}_3$
				$S_{44}$	$Z_4$	$\bar{Z}_4$
III	Решение и его проверка					
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$		
	$1 + \bar{x}_1$	$1 + \bar{x}_2$	$1 + \bar{x}_3$	$1 + \bar{x}_4$		

После этого находим решение исходной системы по формулам

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{z_4}{S_{44}}, \\
 x_3 &= (z_3 - S_{43} \cdot x_4) / S_{33}, \\
 x_2 &= (z_2 - S_{42} \cdot x_4 - S_{32} \cdot x_3) / S_{22}, \\
 x_1 &= (z_1 - S_{41} \cdot x_4 - S_{31} \cdot x_3 - S_{21} \cdot x_2) / S_{11}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично находим  $\bar{x}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) контрольной системы, заменив  $Z_i$  на  $\bar{Z}_i$  и ссылаясь уже на расчетную строку.

Если все вычисления верны, то значения решения  $x_i$  будут отличаться от соответствующего значения  $\bar{x}_i$  на единицу, и, значит, две последних строки расчетной таблицы должны совпасть.

**Пример.** Методом квадратного корня в Excel и MathCAD решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1,23x_1 + 0,42x_2 + 0,35x_3 + 1,7x_4 = 1,3, \\ 0,42x_1 + 4,45x_2 + 0,17x_3 + 2,2x_4 = 0,15, \\ 0,35x_1 + 0,17x_2 + 6,37x_3 + 0,29x_4 = 0,72, \\ 1,7x_1 + 2,2x_2 + 0,29x_3 + 9x_4 = 0,9. \end{cases}$$

В Excel организовать контроль над вычислениями.

*Решение.*

1. Рассмотрим решение приведенной выше системы методом квадратного корня в Excel. Результаты вычислений и макет расчетной таблицы показаны соответственно на рис. 3.10 и 3.11.

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Расширенная матрица</b>					<b>Сумма по строкам</b>
2	<b>1,23</b>	<b>0,42</b>	<b>0,35</b>	<b>1,7</b>	<b>1,3</b>	5
3	<b>0,42</b>	<b>4,45</b>	<b>0,17</b>	<b>2,2</b>	<b>0,15</b>	7,39
4	<b>0,35</b>	<b>0,17</b>	<b>6,37</b>	<b>0,29</b>	<b>0,72</b>	7,9
5	<b>1,7</b>	<b>2,2</b>	<b>0,29</b>	<b>9</b>	<b>0,9</b>	14,09
6	Sij				Zi	
7	1,1091	0,3787	0,3156	1,5328	1,1722	4,5083
8	0	2,0752	0,0243	0,7804	-0,1416	2,7383
9	0	0	2,5040	-0,0850	0,1412	2,5602
10	0	0	0	2,4565	-0,3152	2,1413
11	Решение и его проверка					
12	<b>X4</b>	<b>X3</b>	<b>X2</b>	<b>X1</b>		
13	<b>-0,1283</b>	<b>0,0520</b>	<b>-0,0206</b>	<b>1,2265</b>		
14	0,8717	1,0520	0,9794	2,2265		
15	0,8717	1,0520	0,9794	2,2265		

Рис. 3.10

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Расширенная матрица</b>					<b>Сумма по строкам</b>
2	=A3	=A4	=A5	=A6	=A7	=СУММ(A2:E2)
3	=B3	=B4	=B5	=B6	=B7	=СУММ(A3:E3)
4	=C3	=C4	=C5	=C6	=C7	=СУММ(A4:E4)
5	=D3	=D4	=D5	=D6	=D7	=СУММ(A5:E5)
6	Sij				Zi	
7	=A2*(1/2)	=A3/\$A\$7	=A4/\$A\$7	=A5/\$A\$7	=E2/A7	=СУММ(A7:E7)
8	0	=(B3-B7*(2)/(1/2))	=(B4-C7*B7)/\$B\$8	=(B5-D7*B7)/\$B\$8	=(E3-B7*\$E7)/B8	=СУММ(A8:E8)
9	0	0	=(C4-C7*(2-C8*(2)/(1/2))	=(C5-D7*(C7-D8*(C8)/C9)	=(E4-C7*\$E7-C8*\$E8)/C9	=СУММ(A9:E9)
10	0	0	0	=(D5-D7*(2-D8*(2-D9*(2)/(1/2))	=(E5-D7*\$E7-D8*\$E8-D9*\$E9)/D10	=СУММ(A10:E10)
11	Решение и его проверка					
12	<b>X4</b>	<b>X3</b>	<b>X2</b>	<b>X1</b>		
13	=E10/D10	=(E9-A13*(D9)/C9)	=(E8-D8*(A13-C8*(B13)/B8)	=(E7-D7*(A13-C7*(B13-B7*(C13)/A7)		
14	=F10/D10	=(F9-A14*(D9)/C9)	=(F8-D8*(A14-C8*(B14)/B8)	=(F7-D7*(A14-C7*(B14-B7*(C14)/A7)		
15	=A13+1	=B13+1	=C13+1	=D13+1		

Рис. 3.11

2. В MathCAD реализация метода квадратного корня показана на рис. 3.12.

Матрица системы и столбец свободных членов

$$A := \begin{pmatrix} 1.23 & 0.42 & 0.35 & 1.7 \\ 0.42 & 4.45 & 0.17 & 2.2 \\ 0.35 & 0.17 & 6.37 & 0.29 \\ 1.7 & 2.2 & 0.29 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.15 \\ 0.72 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Применение метода Холецкого

$$s_{0,0} := \sqrt{|A_{0,0}|} \quad s_{0,0} = 1.109 \quad d_{0,0} := \text{signum}(A_{0,0}) \quad d_{0,0} = 1$$

$$j := 1..3 \quad s_{0,j} := \frac{A_{0,j}}{s_{0,0} \cdot d_{0,0}} \quad s_{1,1} := \sqrt{|A_{1,1} - (s_{0,1})^2 \cdot d_{0,0}|} \quad d_{1,1} := \text{signum}[A_{1,1} - (s_{0,1})^2 \cdot d_{0,0}]$$

$$j := 2..3 \quad s_{1,j} := \frac{A_{1,j} - s_{0,j} \cdot s_{0,1}}{s_{1,1}}$$

$$s_{2,2} := \sqrt{|A_{2,2} - (s_{0,2})^2 \cdot d_{0,0} - (s_{1,2})^2 \cdot d_{1,1}|} \quad s_{2,3} := \frac{(A_{2,3} - s_{0,3} \cdot s_{0,1} - s_{1,3} \cdot s_{1,2})}{s_{2,2}}$$

$$d_{2,2} := \text{signum}[A_{2,2} - (s_{0,2})^2 \cdot d_{0,0} - (s_{1,2})^2 \cdot d_{1,1}]$$

$$s_{3,3} := \sqrt{|A_{3,3} - (s_{0,3})^2 \cdot d_{0,0} - (s_{1,3})^2 \cdot d_{1,1} - (s_{2,3})^2 \cdot d_{2,2}|} \quad s_{2,3} = -0.085$$

$$s = \begin{pmatrix} 1.109 & 0.379 & 0.316 & 1.533 \\ 0 & 2.075 & 0.024 & 0.78 \\ 0 & 0 & 2.504 & -0.085 \\ 0 & 0 & 0 & 2.456 \end{pmatrix} \quad s^T \cdot s = \begin{pmatrix} 1.23 & 0.42 & 0.35 & 1.7 \\ 0.42 & 4.45 & 0.17 & 2.2 \\ 0.35 & 0.17 & 6.37 & 0.29 \\ 1.7 & 2.2 & 0.29 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{-- проверка результата}$$

$$Z := (s^T)^{-1} \cdot B \quad Z = \begin{pmatrix} 1.1722 \\ -0.1416 \\ 0.1412 \\ -0.3152 \end{pmatrix} \quad x := s^{-1} \cdot Z \quad x = \begin{pmatrix} 1.226 \\ -0.021 \\ 0.052 \\ -0.128 \end{pmatrix} \quad \text{Решение системы}$$

Рис. 3.12

### 3.5. Метод прогонки

Часто возникает необходимость в решении линейных алгебраических систем, матрицы которых являются слабо заполненными, т. е. содержат ненулевые элементы, размещенные в определенном порядке. Среди таких систем выделим системы с матрицами ленточной структуры, в которых ненулевые элементы располагаются на главной и нескольких побочных диагоналях. Для решения систем с ленточными

матрицами коэффициентов метод Гаусса можно трансформировать в более эффективные методы.

Рассмотрим наиболее простой случай систем, к которым, как увидим впоследствии в курсе «Методов численного анализа», сводится решение задач сплайн-интерполяции функций, дискретизации краевых задач для дифференциальных уравнений методами конечных разностей и др. А именно, будем искать решение такой системы, каждое уравнение которой связывает три «соседних» неизвестных:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \quad (3.12)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $b_1 = 0$ ,  $d_n = 0$ .

Данная система имеет трехдиагональную структуру, что хорошо видно из эквивалентного векторно-матричного представления:

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Как и в решении СЛАУ методом Гаусса, цель – избавиться от ненулевых элементов в поддиагональной части матрицы системы. Предположим, что существуют такие наборы чисел  $\delta_i$  и  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), при которых

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i. \quad (3.13)$$

Уменьшив в выражении (3.13) индекс на единицу и подставив полученное выражение  $x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1}$  в систему (3.12), придем к эквивалентной системе:

$$b_i \delta_{i-1} x_i + b_i \lambda_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i. \quad (3.14)$$

Откуда

$$x_i = -((d_i / (c_i + b_i \delta_{i-1})) x_{i+1} + (r_i - b_i \lambda_{i-1}) / (c_i + b_i \delta_{i-1})). \quad (3.15)$$

Таким образом, представление (3.13) будет иметь место, если при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  выполняются рекуррентные соотношения

$$\delta_i = -d_i / (c_i + b_i \delta_{i-1}), \quad \lambda_i = (r_i - b_i \lambda_{i-1}) / (c_i + b_i \delta_{i-1}). \quad (3.16)$$

Учитывая, что  $b_1 = 0$ , процесс вычисления  $\delta_i, \lambda_i$  может быть начат со значений

$$\delta_1 = -d_1 / c_1, \lambda_1 = r_1 / c_1 \quad (3.17)$$

и продолжен далее по формулам (3.12) последовательно при  $i = 2, 3, \dots, n$ , причем при  $i = n$ , в силу  $d_n = 0$ , получим  $\delta_n = 0$ . Следовательно, полагая в системе (3.13)  $i = n$ , будем иметь

$$x_n = \lambda_n = (r_n - b_n \lambda_{n-1}) / (c_n + b_n \delta_{n-1}). \quad (3.18)$$

Далее по формулам (3.12) последовательно находятся  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$  при  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  соответственно.

Такой метод решения системы называется **методом прогонки** и сводится к вычислениям по следующей схеме: нахождение прогоночных коэффициентов  $\delta_i, \lambda_i$  по формулам (3.16), (3.17), (3.18) при  $i = 1, 2, \dots, n$  (прямая прогонка) и затем неизвестных  $x_i$  по формуле (3.13) при  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  (обратная прогонка).

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникало ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть строгого роста погрешностей округлений.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогоночных коэффициентов (3.16) не обращаются в нуль, и устойчивой, если  $|\delta_i| < 1$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Приведем достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки, которые во многих приложениях метода автоматически выполняются.

**Теорема.** Пусть коэффициенты  $b_i$  и  $d_i$  уравнения (3.14) при  $i = 2, 3, \dots, n-1$  отличны от нуля и удовлетворяют неравенствам

$$|c_i| > |b_i| + |d_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Тогда прогонка по формулам (3.16), (3.17), (3.18) корректна и устойчива (т. е.  $c_i + b_i \delta_{i-1} \neq 0, |\delta_i| < 1$ ).

При этом правильность расчетов можно проверить на основании следующего тождества

$$|A| = c_1 \cdot \prod_{k=2}^n \Delta_k, \quad (3.20)$$

где  $\Delta_i = c_i + b_i \delta_{i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ).

**Пример.** Решить систему методом прогонки в Excel и MathCAD

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = -5, \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 & = -18, \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 & = -40, \\ x_3 + 4x_4 & = -27. \end{cases}$$

Правильность промежуточных расчетов в MathCAD проверить на основании тождества (3.20).

*Решение.*

1. Макет расчетной таблицы в Excel и результаты вычислений показаны соответственно на рис. 3.13 и 3.14.

	A	B	C	D
1	Исходные данные			
2	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>r</b>
3	0	2	1	5
4	1	10	5	-18
5	1	5	2	40
6	1	4	0	27
7	Применение метода прогонки			
8	дельта	лямбда	решение	
9	=C3/B3	=D3/B3	x1=-A9*D10+B9	
10	=C4/(B4+A4*A9)	=(D4-A4*B9)/(B4+A4*A9)	x2=-A10*D11+B10	
11	=C5/(B5+A5*A10)	=(D5-A5*B10)/(B5+A5*A10)	x3=-A11*D12+B11	
12	=C6/(B6+A6*A11)	=(D6-A6*B11)/(B6+A6*A11)	x4=-B12	

Рис. 3.13

	A	B	C	D
1	Исходные данные			
2	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>r</b>
3	0	2	1	-5
4	1	10	-5	-18
5	1	-5	2	-40
6	1	4	0	-27
7	Применение метода прогонки			
8	дельта	лямбда	решение	
9	-0,50	-2,50	x1=-3	
10	0,53	-1,63	x2= 1	
11	0,45	8,58	x3= 5	
12	0,00	-8,00	x4=-8	

Рис. 3.14

2. В MathCAD реализация метода прогонки показана на рис. 3.15.

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ -40 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Реализация метода прогонки

$$i = 1..3 \quad \delta_0 = \frac{-d_i}{c_0} \quad \lambda_0 = \frac{r_0}{c_0}$$

$$\delta_i = \frac{-d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \quad \delta = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.526 \\ 0.447 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.632 \\ 8.576 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Проверка расчетов

$$\Delta_i = c_i + b_i \cdot \delta_{i-1} \quad |A| = -378 \quad c_0 \prod_{k=1}^3 \Delta_k = -378$$

$$j = 2..0 \quad x_j = \lambda_j \quad x_j = \delta_j \cdot x_{j+1} + \lambda_j \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ - решение системы}$$

Рис. 3.15

### 3.6. Особенность итерационных методов решения СЛАУ

Существует большое количество итерационных методов, основанных на различных принципах. Вычислительные схемы этих методов обладают свойством самоисправляемости. Если при использовании точных методов отдельный сбой в вычислениях ведет к ошибке в окончательном результате, то в случае сходящегося итерационного процесса такой сбой приводит лишь к увеличению итерационных шагов. Ошибка, допущенная в каком-либо приближении, будет исправлена последующими приближениями. Однако каждый итерационный процесс имеет свою ограниченную область применимости, так как, во-первых, он может оказаться расходящимся для данной системы и, во-вторых, сходимость процесса может быть весьма медленной.

К простейшим итерационным методам относятся: метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя.

Условия и скорость каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств матрицы системы и выбора начального приближения.

Пусть дана СЛАУ порядка  $n$ :

$$A \cdot x = f, \quad \det A \neq 0. \quad (3.21)$$

При использовании итерационных методов решения систему (3.21) приводят к каноническому виду:

$$x = B \cdot x + b. \quad (3.22)$$

Далее выбирается некоторое начальное приближение к решению системы уравнений  $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  и вычисляется последовательность  $x^{(k)}$  приближений к корню ( $k$  – номер итерации) по рекуррентным формулам:

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Систему (3.21) можно привести к каноническому виду (3.22) различными способами.

Например, с помощью любой неособенной матрицы  $C$  такое преобразование может быть проведено следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x + C \cdot (f - Ax), \\ x &= x + C \cdot f - C \cdot A \cdot x, \end{aligned}$$

$$x = (E - C \cdot A) \cdot x + C \cdot f,$$

$$x = B \cdot x + b,$$

где  $B = E - C \cdot A$ ,  $b = C \cdot f$ .

Другой способ приведения системы к каноническому виду (3.22) заключается в следующем: представим матрицу  $A$  как сумму двух матриц  $P$  и  $Q$ ,  $A = P + Q$ , где  $\det P \neq 0$ , причем  $P^{-1}$  находится сравнительно просто. Тогда

$$(P + Q) \cdot x = f, \quad P \cdot x + Q \cdot x = f, \quad P \cdot x = -Q \cdot x + f, \quad x = -P^{-1} \cdot Q \cdot x + P^{-1} \cdot f.$$

Положим  $-P^{-1} \cdot Q = B$ ;  $P^{-1} \cdot f = b$ . Получим  $x = B \cdot x + b$ . Последовательность приближений  $x^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) к решению  $x$  системы (3.21) строится по формуле (3.23).

Начальное приближение  $x^{(0)}$  обычно выбирается произвольно. Удобнее всего в качестве начального приближения  $x^{(0)}$  брать матрицу-столбец  $b$ , т. е.

$$x^{(0)} = b. \quad (3.24)$$

Для практических вычислений важными являются вопросы сходимости итерационного процесса и оценки погрешности решения.

**Теорема.** Итерационный процесс (3.23) для приведенной линейной системы сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы  $B$  меньше единицы, т. е.

$$\|B\| < 1. \quad (3.25)$$

К каноническим нормам относятся:

$$\|B\|_m = \max_i \sum_j |B_{ij}| \quad (m\text{-норма}); \quad (3.26)$$

$$\|B\|_l = \max_j \sum_i |B_{ij}| \quad (l\text{-норма}); \quad (3.27)$$

$$\|B\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |B_{ij}|^2} \quad (k\text{-норма или Евклидова норма}). \quad (3.28)$$

**Пример.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\|A\|_m &= \max(1+2+3, 4+5+6, 7+8+9) = \max(6, 15, 24) = 24; \\ \|A\|_l &= \max(1+4+7, 2+5+8, 3+6+9) = \max(12, 15, 18) = 18; \\ \|A\|_k &= \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2} = \sqrt{285} \approx 16,9.\end{aligned}$$

В MathCAD существуют специальные функции для вычисления норм матриц:

**normi**(A) – возвращает  $m$ -норму матрицы  $A$ ;

**norml**(A) – возвращает  $l$ -норму матрицы  $A$ ;

**norme**(A) – возвращает Евклидову норму матрицы  $A$ .

Если процесс сходящийся, например, при  $\|B\| < 1$ , то для погрешности метода простой итерации (наиболее грубого метода) справедлива оценка

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^{k+1} \cdot \|B\| < \varepsilon. \quad (3.29)$$

Используя неравенство (3.23), получим ограничение снизу для числа итераций, необходимых для достижения решения с заданной точностью  $\varepsilon$ :

$$k(\varepsilon) \geq \ln \left[ \frac{(1 - \|B\|) \cdot \varepsilon}{\|B\|} \right] / \ln \|B\| - 1. \quad (3.30)$$

В зависимости от применяемого итерационного метода используют различные критерии окончания итераций. При применении метода простой итерации таким критерием служит

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \varepsilon. \quad (3.31)$$

Для всех остальных вышеперечисленных методов, имеющих заведомо большую точность, применяют более простой критерий

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon, \quad (3.32)$$

где  $\varepsilon$  – заданная погрешность приближенного решения.



*Решение.* Приведем эту систему к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 - 0,02x_2. \end{cases}$$

В матричной форме ее можно записать так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & -0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1. На рис. 3.16 и 3.17 приведены макет расчетной таблицы и результаты реализации метода простой итерации при решении вышеприведенной системы.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица B					
2	x1	x2	x3	b		
3	0	-0,06	0,02	2		
4	-0,03	0	0,05	3		
5	-0,01	-0,02	0	5		
6						
7	Применение метода простой итерации					
8	k	0	1	2	3	4
9	x1	=D3	=B9+\$A3*B9+\$B3*B\$10+\$C3*B\$11	=B9+\$A3*C	=B9+\$A3*	=B9+\$A3*E9+\$B3*E\$10+\$C3*E\$11
10	x2	=D4	=B10+\$A4*B\$9+\$B4*B\$10+\$C4*B\$11	=B10+\$A4*	=B10+\$A4*	=B10+\$A4*E9+\$B4*E\$10+\$C4*E\$11
11	x3	=D5	=B11+\$A5*B\$9+\$B5*B\$10+\$C5*B\$11	=B11+\$A5*	=B11+\$A5*	=B11+\$A5*E9+\$B5*E\$10+\$C5*E\$11
12						

Рис. 3.16

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица B					
2	x1	x2	x3	b		
3	0	-0,06	0,02	2		
4	-0,03	0	0,05	3		
5	-0,01	-0,02	0	5		
6						
7	Применение метода простой итерации					
8	k	0	1	2	3	4
9	x1	2	1,9200	1,9070	1,9070	1,9070
10	x2	3	3,1900	3,1884	3,1886	3,1886
11	x3	5	4,9200	4,9170	4,9172	4,9172

Рис. 3.17

2. Реализация метода в MathCAD показана на рис. 3.18.

Таким образом, в качестве приближенного решения данной системы можно взять:  $x_1 = 1,907$ ,  $x_2 = 3,189$ ,  $x_3 = 4,917$ . При этом погрешность вычисления составит  $8,612 \cdot 10^{-8}$ .

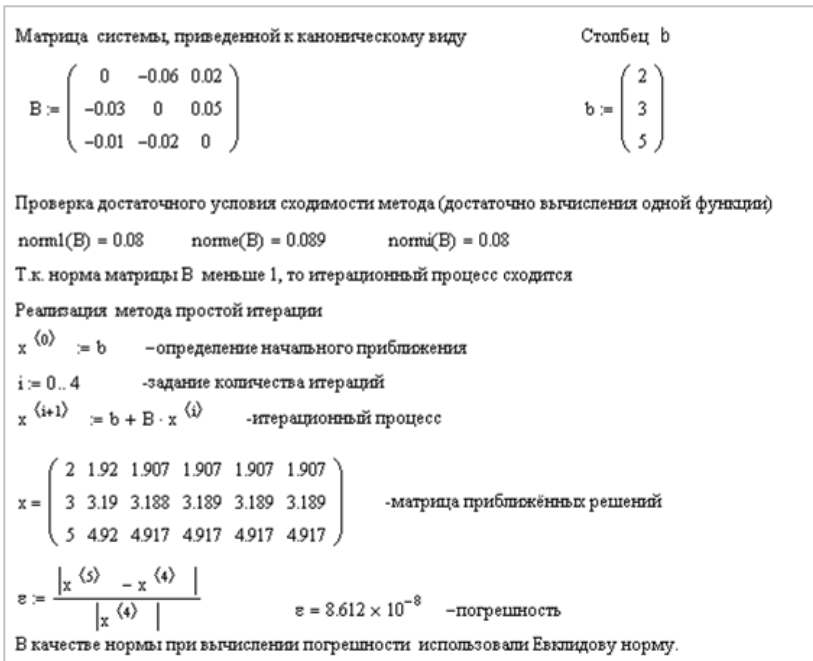


Рис. 3.18

### 3.8. Метод Якоби

Метод Якоби является некоторой модификацией метода простой итерации. Он позволяет за счет целенаправленного выбора линейных преобразований в системе (3.21) прийти к эквивалентной системе с матрицей, имеющей диагональное преобладание по строкам. Тем самым заведомо обеспечивается условие сходимости итерационного процесса.

Матрица A имеет диагональное преобладание по строкам, если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.35)$$

Далее повторяются все действия предыдущего параграфа. Поясним это на примере.

**Пример.** Решить систему методом Якоби

$$\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,7x_3 = 0,2, \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1, \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6. \end{cases}$$

*Решение.*

Добьемся диагонального преобладания в системе. Для этого умножим первое уравнение на  $\alpha$ , второе на  $\beta$ , третье на  $\gamma$  и сложим их. При этом получим выражение

$$(3,1\alpha + 1,9\beta + 7,5\gamma)x_1 + (2,8\alpha + 3,1\beta + 3,8\gamma)x_2 + (1,9\alpha + 2,1\beta + 4,8\gamma)x_3 = 0,2\alpha + 2,1\beta + 5,6\gamma.$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выберем так, чтобы последовательно доминировали коэффициенты при  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Данная задача не однозначная. Одним из ее решений является:

– для первого уравнения  $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0$ ;

$$4,3x_1 + 2,5x_2 + 1,7x_3 = -1,7;$$

– для второго уравнения  $\alpha = -1; \beta = 2; \gamma = 0$ ;

$$0,7x_1 + 3,4x_2 + 2,3x_3 = 4;$$

– для третьего уравнения  $\alpha = -3; \beta = 1,8; \gamma = 1$ ;

$$1,62x_1 + 0,98x_2 + 2,88x_3 = 8,78.$$

Таким образом, система преобразована к эквивалентной системе

$$\begin{cases} 4,3x_1 + 2,5x_2 + 1,7x_3 = -1,7, \\ 0,7x_1 + 3,4x_2 + 2,3x_3 = 4, \\ 1,62x_1 + 0,98x_2 + 2,88x_3 = 8,78, \end{cases}$$

в которой матрица имеет диагональное преобладание по строкам. Приведем полученную систему к виду (3.21), разделив каждое из уравнений на диагональные элементы. Далее из 1-го уравнения выразим  $x_1$ ; из 2-го –  $x_2$ ; из 3-го –  $x_3$ .

$$\begin{cases} x_1 = -0,581x_2 - 0,395x_3 - 0,395, \\ x_2 = -0,206x_1 - 0,676x_3 + 1,176, \\ x_3 = -0,563x_1 - 0,340x_2 + 3,049. \end{cases}$$

В качестве начального приближения выбираем

$$x^{(0)} = (-1,7; 4; 8,78).$$



Точные значения корней составляют:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 1$ .

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица В						
2	x1	x2	x3	b			
3	0	-0,1	-0,1	1,2			
4	-0,2	0	-0,1	1,3			
5	-0,2	-0,2	0	1,4			
6	Применение метода Зейделя						
7	k	0	1	2	3	4	5
9	x1	=0,3	=0,3+0,3*B9+0,3*B10+0,3*B11	=0,99	=0,99+0,99*B9+0,99*B10+0,99*B11	=0,999	=0,999+0,999*B9+0,999*B10+0,999*B11
10	x2	=0,4	=0,4+0,4*A3*B9+0,4*B10+0,4*B11	=0,44	=0,44+0,44*B9+0,44*B10+0,44*B11	=0,444	=0,444+0,444*B9+0,444*B10+0,444*B11
11	x3	=0,5	=0,5+0,5*A3*B9+0,5*B10+0,5*B11	=0,55	=0,55+0,55*B9+0,55*B10+0,55*B11	=0,555	=0,555+0,555*B9+0,555*B10+0,555*B11

Рис. 3.19

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица В						
2	x1	x2	x3	b			
3	0	-0,1	-0,1	1,2			
4	-0,2	0	-0,1	1,3			
5	-0,2	-0,2	0	1,4			
6	Применение метода Зейделя						
8	k	0	1	2	3	4	5
9	x1	1,2	0,9300	1,0007	1,0002	1,0000	1,0000
10	x2	1,3	0,9740	0,9979	0,9999	1,0000	1,0000
11	x3	1,4	1,0192	1,0003	1,0000	1,0000	1,0000

Рис. 3.20

2. Решение задачи в MathCAD приведено на рис. 3.21.

Матрица системы, приведенной к каноническому виду

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Столбец b

$$b = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

k := 5

zeidel(B, x, b, k) := 
$$\begin{cases} X^{(0)} \leftarrow b \\ \text{for } j \in 1..k \\ \quad \text{for } i \in 0.. \text{rows}(B) - 1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow (B^T)^{(j)} \cdot x + b_i \\ X^{(j)} \leftarrow x \end{array} \right. \end{cases}$$
 - реализация метода Зейделя

Вывод результатов итераций

$$\text{zeidel}(B, b, b, k) = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,93 & 1,0007 & 1,0002 & 1 & 1 \\ 1,3 & 0,974 & 0,9979 & 0,9999 & 1 & 1 \\ 1,4 & 1,0192 & 1,0003 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X := \text{zeidel}(B, b, b, k)$$

Оценка погрешности результата

$$\varepsilon := \frac{|X^{(k)} - X^{(k-1)}|}{|X^{(k)}|} \quad \varepsilon = 5,012 \times 10^{-6}$$

Рис. 3.21

### 3.10. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

В отличие от систем линейных уравнений для систем нелинейных уравнений не известны прямые методы решения. Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Поэтому итерационные методы для нелинейных систем приобретают особую важность.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

или в векторной форме  $f(x) = 0$ , где  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ .

Для решения системы (3.37) будем пользоваться методом последовательных приближений. Предположим, что известно  $k$ -е приближение

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

одного из изолированных корней  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  векторного уравнения. Тогда точный корень уравнения можно представить в виде

$$x = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad (3.38)$$

где  $\Delta x^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)})$  – погрешность решения.

Подставляя выражение (3.38) в формулу (3.37), будем иметь

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = 0. \quad (3.39)$$

Предполагая, что функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей точки  $x$  и  $x^{(k)}$ , разложим левую часть уравнения (3.39) по степеням вектора  $\Delta x^{(k)}$ , ограничиваясь линейными членами

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = 0. \quad (3.40)$$

Под производной  $f'(x)$  понимается матрица Якоби системы функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , т. е.

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

или в краткой записи

$$f'(x) = W(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right], \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому формула (3.40) может быть записана в следующем виде:

$$f(x^{(k)}) + W(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = 0.$$

Если  $\det W(x) = \det \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] \neq 0$ , то  $\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)}) \cdot f(x^{(k)})$ .

Отсюда видно, что метод Ньютона решения системы (3.37) состоит в построении итерационной последовательности:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.41)$$

Итерационный процесс метода Ньютона продолжается до тех пор, пока погрешности решений  $\Delta x^{(k)}$  не окажутся достаточно малыми или пока не станет ясно, что решение получить не удастся. При этом для нахождения последующих приближений используются найденные значения.

**Пример.** Методом Ньютона в MathCAD найти положительное решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4z, \\ f_3(x, y, z) = 3x^2 - 4y + z^2, \end{cases}$$

исходя из начального приближения  $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5$ , сделав три итерационных шага.

*Решение.* Полагая, что

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix},$$

имеем:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,25 + 0,25 + 0,25 - 1 \\ 0,50 + 0,25 - 2,00 \\ 0,75 - 2,00 + 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}.$$

Имеем  $W(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ , причем  $\Delta = \det W(x^{(0)}) = -40$ .

Следовательно, матрица  $W(x^{(0)})$  – невырожденная. Составим обратную ей матрицу

$$W^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}.$$

По формуле (3.41) получаем первое приближение

$$x^{(1)} = x^{(0)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся последующие приближения. Решение задачи в MathCAD показано на рис. 3.22.

$W(x) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x_0 & 2 \cdot x_1 & 2 \cdot x_2 \\ 4 \cdot x_0 & 2 \cdot x_1 & -4 \\ 6 \cdot x_0 & -4 & 2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$	- задание вектор-функции, определяющей матрицу Якоби
$F(x) := \begin{pmatrix} (x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 - 1 \\ 2(x_0)^2 + (x_1)^2 - 4x_2 \\ 3 \cdot (x_0)^2 - 4 \cdot x_1 + (x_2)^2 \end{pmatrix}$	- задание вектор-функции, определяющей систему
$X^{(0)} := \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	- определение начального приближения
$\text{Nuton}(W, F, X, k) := \begin{cases} x \leftarrow X^{(0)} \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \begin{cases} X^{(i)} \leftarrow X^{(i-1)} - W(x)^{-1} \cdot F(x) \\ x \leftarrow X^{(i)} \end{cases} \\ X \end{cases}$	- реализация метода Ньютона
$\text{Nuton}(W, F, X, 3) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,875 & 0,79 & 0,785 \\ 0,5 & 0,5 & 0,497 & 0,497 \\ 0,5 & 0,375 & 0,37 & 0,37 \end{pmatrix}$	- результаты итераций
$\text{Nuton}(W, F, X, 3) \{3\} = \begin{pmatrix} 0,785 \\ 0,497 \\ 0,37 \end{pmatrix}$	- решение системы

Рис. 3.22

Остановившись на приближении  $x^{(3)}$ , будем иметь в качестве решения:  $x = 0,785$ ;  $y = 0,497$ ;  $z = 0,37$ .



дем под эти формулы интервал **C7:C9** текущего рабочего листа. В ячейку **C7** введем формулу  $= A3 * B\$7 + B3 * B\$8 + C3 * B\$9 - D3$  и скопируем ее в **C8** и **C9**. В них появятся соответственно  $= A4 * B\$7 + B4 * B\$8 + C4 * B\$9 - D4$  и  $= A5 * B\$7 + B5 * B\$8 + C5 * B\$9 - D5$ . Обратившись к пункту меню **Сервис** ⇒ **Поиск решения**, в окне диалога (рис. 3.24) зададим параметры поиска. Установим целевую ячейку **C7** равной нулю, решение в изменяемых ячейках **B7:B9**. Ограничения заданы формулами в ячейках **C8** и **C9**. После щелчка по кнопке **Выполнить** в интервале **B7:B9** получим результат (рис. 3.25) – решение заданной системы.

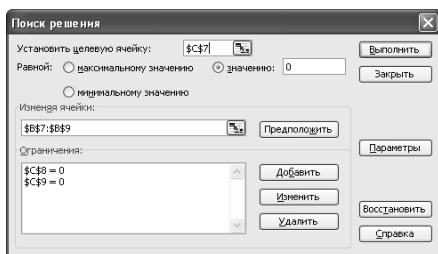


Рис. 3.24

	A	B
6	Решение X	
7	$x_1 =$	3
8	$x_2 =$	-4
9	$x_3 =$	5

Рис. 3.25

*Решение систем средствами MathCAD.* MathCAD представляет дополнительные возможности для решения систем линейных и нелинейных уравнений с числом уравнений и переменных, не превышающих 50. Эта возможность реализуется с помощью блока **Given** в сочетании с функциями **Find** или **Minerr**. При этом важно правильно оформить поставленную задачу. Для этого необходимо выполнить следующее:

- 1) задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений;
- 2) напечатать ключевое слово **Given**. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений;
- 3) ниже или правее слова **Given** ввести уравнения и неравенства, входящие в систему, используя при наборе символ « $\Leftarrow$ » (сочетание клавиш [Ctrl]+=). Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$  и  $\leq$ ;
- 4) ввести любое выражение, которое включает функцию **Find()**, например,  $a := \text{Find}(x, y)$  или аналогичное выражение с функцией **Minerr**. В качестве аргументов этих функций нужно указать переменные, значения которых находим. Данные функции возвращают реше-

ние системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Замечание. Функция **Find** применяется, если мы хотим найти точное решение системы, функция **Minerr** – если система не может быть решена точно и мы хотим найти наилучшее приближение, обеспечивающее минимальную погрешность.

В том случае, если решение не может быть найдено при заданном выборе начального приближения, появится сообщение в красной рамке *Did not find solution* – решение не найдено.

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 1,4 \cdot \cos(x-1) = 1, \\ 0,4 \cdot x^2 - 0,5 \cdot y^2 = 1 \end{cases}$  в

MathCAD с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Графически показать решения системы.

*Решение.* Решение поставленной задачи показано на рис. 3.26.

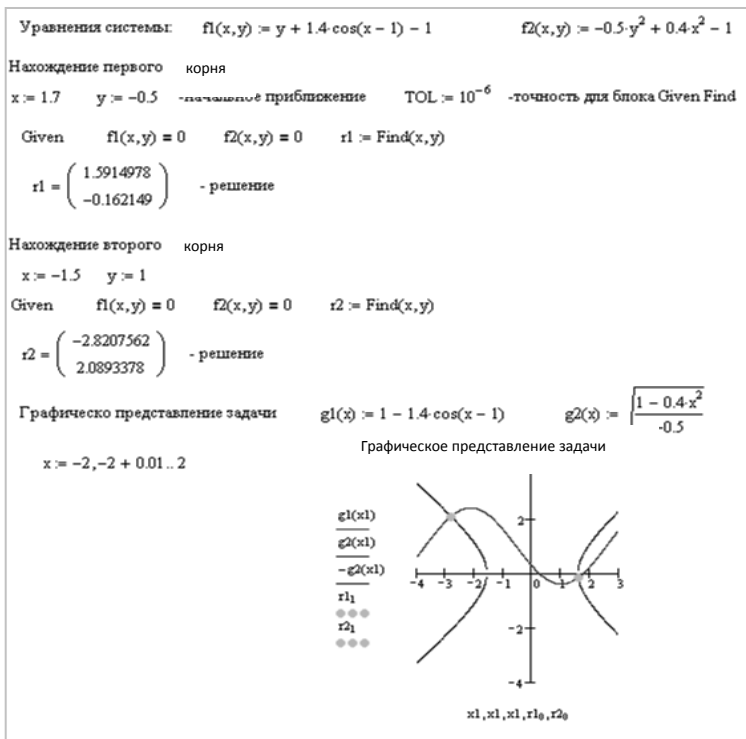


Рис. 3.26

В случае если необходимо найти решение при различных начальных приближениях или система зависит от параметров, имеет смысл решение определить как функцию. В этом случае не нужно задавать начальные приближения перед началом блока **Given – Find**. Начальные приближения задаются в качестве аргументов функции – решения.

**Пример.** Найти одно решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \cos(x-1) = 1, \\ b \cdot x^2 - c \cdot y^2 = 1 \end{cases}$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  при заданных значениях параметров:

$$1) a = 4, b = 0,2, c = 10; \quad 2) a = 5, b = 10, c = 1.$$

*Решение.* Решение поставленной задачи показано на рис. 3.27.

```

Уравнения системы:  f1(x,y,a) := y + a*cos(x-1) - 1      f2(x,y,b,c) := b*y^2 + c*x^2 - 1
TOL := 10^-6 -точность для блока Given Find
Нахождение корня
Given  f1(x,y,a) = 0  f2(x,y,b,c) = 0  r(x,y,a,b,c) := Find(x,y)
+
r(0,-1,4,0.2,10) = ( 0.1935558 ) - решение  r(1,7,5,10,1) = ( -0.4274817 ) - решение
                  (-1.768278)

```

Рис. 3.27

Аналогично решаются системы линейных уравнений. Во многих случаях решение системы уравнений может быть найдено не только численно, но и аналитически. Для этого также используется блок **Given** и функция **Find**, но вместо знака равенства после функции следует поставить знак символического преобразования  $\rightarrow$  (Ctrl+).

**Пример.** Решить аналитически систему нелинейных уравнений, зависящую от параметра  $a$ :

$$\begin{cases} x^2 + 2\pi \cdot y = a, \\ -2 \cdot x - z = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Решение данного примера в MathCAD показано на рис. 3.28. Результаты решения задачи записываются в виде матрицы, каждый столбец которой соответствует тройке  $(x; y; z)$ .

Given

$$X^2 + 2\pi \cdot Y = a$$

$$-2X - Z = 2$$

$$Y - Z = 1$$

Find(X,Y,Z) →

$$\begin{bmatrix} 2\pi + (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) & 2\pi - (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) \\ -4\pi - 2 \cdot (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) - 1 & -4\pi + 2 \cdot (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ -4\pi - 2 \cdot (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) - 2 & -4\pi + 2 \cdot (4\pi^2 + 2\pi + a)\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \end{bmatrix}$$

Рис. 3.28

## Лекция 4. МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ

### 4.1. Основные понятия и постановка задачи интерполяции функции

Интерполирование первоначально рассматривалось как нахождение промежуточных значений функции по известным значениям заданных узлов (термин «*интерполирование*» означает «чтение между строк»).

Интерполирование – задача обратная табулированию. При табулировании по аналитически заданной функции находят значения в узлах, а при интерполировании – по узловым значениям находят промежуточные значения функции.

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

С геометрической точки зрения это означает, что между интерполяционными узлами можно провести линию, соответствующую выбранной функции.

Основной задачей интерполирования является подбор функции, приближающей ее значения к значениям в заданных узлах. Из рис. 4.1 следует, что выбор такой функции неоднозначен. А такие задачи решать сложно.

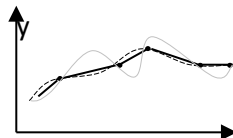


Рис. 4.1

x

Однако если на искомую функцию наложить дополнительные ограничения, то в этом случае задача может быть решена.

Задача интерполяции состоит в следующем: заданы точки  $(x_i; y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , требуется найти функцию  $\tau(x)$ , которая проходит через эти точки (рис. 4.1), т. е.

$$\tau(x_i) = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.1)$$

Точки  $(x_i, y_i)$  называют узлами интерполяции, а функцию  $\tau(x)$  – интерполирующей функцией, или интерполянтном.

Как правило, в качестве интерполирующей функции используют обобщенный многочлен  $\tau(x)$  на системе линейно-независимых функций.

Линейно-независимыми называются функции, линейная комбинация которых  $\lambda_0\varphi_0(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x)$  равна 0, в случае, когда все  $\lambda_k = 0$  ( $k = \overline{0, m}$ ).

Если  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  – система линейно-независимых функций, то обобщенный многочлен  $\tau(x)$  на системе линейно-независимых функций примет вид

$$\tau(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x).$$

Совокупность функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  называется системой Чебышева на отрезке  $[a; b]$ , если любой обобщенный многочлен по этой системе, у которого хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, имеет на данном отрезке не более  $n$  корней.

Справедливо следующее утверждение: для любого  $n + 1$  узла  $x_0, x_1, \dots, x_n$  на  $[a; b]$  существует единственный обобщенный интерполяционный многочлен  $\tau(x) = \sum_{k=0}^m \lambda_k \varphi_k(x)$  тогда и только тогда, когда система функций  $\varphi_k(x)$ ,  $k = \overline{0, m}$  являлась системой Чебышева на данном промежутке. Пусть интерполирующая функция имеет следующий вид:

$$\tau(x) = \tau(\bar{C}, x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k \varphi_k(x), \quad (4.2)$$

где  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  – базисные функции.

Используя условие (4.1) и выражение (4.2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \tau(\vec{C}, x_0) = c_0 \varphi_0(x_0) + c_1 \varphi_1(x_0) + \dots + c_m \varphi_m(x_0) = y_0, \\ \tau(\vec{C}, x_1) = c_0 \varphi_0(x_1) + c_1 \varphi_1(x_1) + \dots + c_m \varphi_m(x_1) = y_1, \\ \dots \\ \tau(\vec{C}, x_n) = c_0 \varphi_0(x_n) + c_1 \varphi_1(x_n) + \dots + c_m \varphi_m(x_n) = y_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система (4.3) будет иметь единственное решение в случае, когда:

1) число точек  $(x_i; y_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  равно числу коэффициентов  $c_k$ ,  $k = \overline{0, m}$ ;

2) система уравнений (4.3) является невырожденной, т. е. определитель системы  $\Delta \neq 0$ .

Таким образом, если выполняются вышеуказанные условия, то через точки  $(x_i; y_i)$  проходит единственная функция  $\tau(\vec{C}, x) = \sum_{k=0}^m c_k \varphi_k(x)$ .

Вид обобщенного многочлена  $\tau(x)$  определяет способ интерполяции. Существуют три основные группы функций, широко применяемых в численном анализе. Первая включает в себя линейные комбинации функций  $1, x, x^2, \dots, x^n$ , что совпадает с классом всех многочленов степени  $n$ . Вторую образуют функции  $1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$ . Этот класс имеет отношение к рядам Фурье и интегралу Фурье. Третья образуется функциями  $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$ . Эти функции встречаются в реальных ситуациях при решении задач накопления и распада. Если в качестве системы линейно-независимых функций в обобщенный многочлен входят степенные функции  $\{1, x^2, \dots, x^n\}$  – интерполяцию называют алгебраической;  $\{\sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)\}$  – тригонометрической;  $\{e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}\}$  – экспоненциальной.

## 4.2. Алгебраическое интерполирование

На практике в качестве интерполирующей функции  $\tau(x)$  часто используются алгебраические полиномы, так как их легко вычислять, дифференцировать и интегрировать. При этом интерполяция носит название *алгебраической*.

Для однозначности решения этой задачи потребуем, чтобы искомой функцией был многочлен степени, на единицу меньшей, чем число заданных узлов, и в узловых точках значения совпадали. В этом случае базисными функциями будут:



Таким образом, через заданные на интервале  $[a; b]$  точки  $(x_i; y_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  всегда можно провести единственный интерполяционный многочлен  $\tau_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$ , коэффициенты которого находятся в результате решения системы (4.5).

**Пример.** Определить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблично.

$x$	0	1	2
$f(x)$	1	1	3

*Решение.* Так как функция, заданная таблично, имеет три узловые точки, то степень интерполяционного многочлена будет равна  $n - 1 = 3 - 1 = 2$ . А значит, его мы можем записать в общем виде как  $\tau_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ . Согласно основному интерполяционному тождеству, подставив узловые точки в многочлен, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 = 1, \\ c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 1, \\ c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 = 3. \end{cases}$$

Решение данной системы удобно выполнять в математических пакетах Microsoft Excel или MathCAD.

Реализация алгебраической интерполяции в Microsoft Excel показана на рис. 4.2 и 4.3.

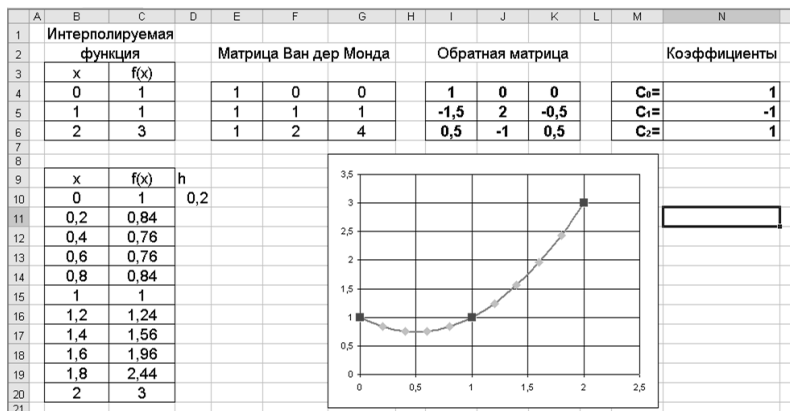


Рис. 4.2. Нахождение параметров алгебраической интерполяции в Microsoft Excel

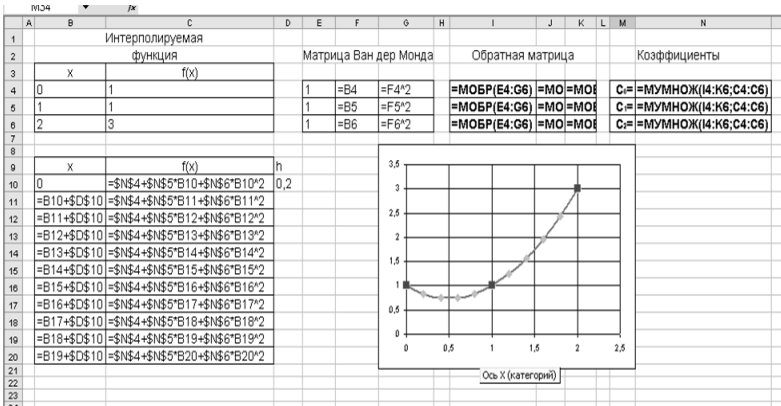


Рис. 4.3. Макет расчетной таблицы

Реализация алгебраического интерполирования в MathCAD показана на рис. 4.4.

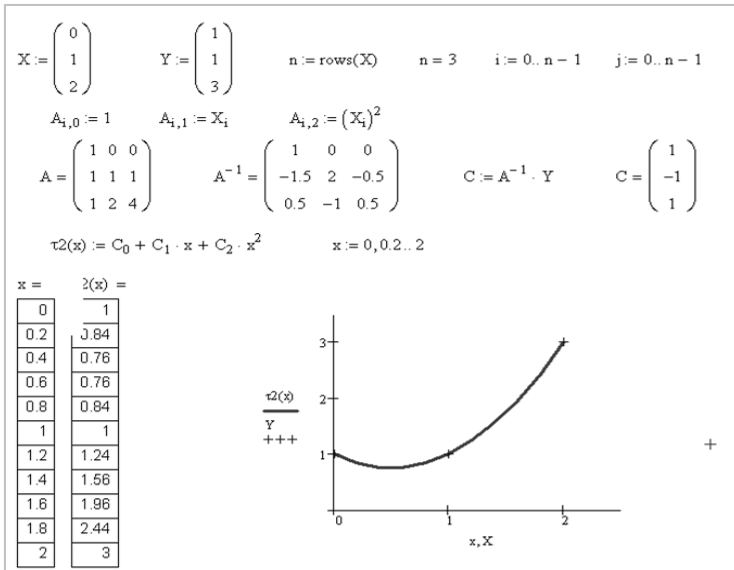


Рис. 4.4. Нахождение параметров алгебраической интерполяции MathCAD

Значит, искомый многочлен будет иметь вид  $\tau_2(x) = 1 - x + x^2$ .

#### 4.4. Алгебраическое интерполирование с помощью формулы Лагранжа

Интерполирование с помощью систем линейных уравнений является громоздким и зачастую неоправданным. Существует общий подход к построению интерполяционных многочленов. Подберем такую функцию  $F(x)$ , которая в узловом значении  $x_0$  равна 1, а в остальных узлах равна 0, т. е.

$$F(x_0) = 1, F(x_i) = 0, x_i \neq x_0.$$

Такую функцию мы можем представить в следующем виде:

$$F(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1}) \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot \dots \cdot (x_0-x_{n-1}) \cdot (x_0-x_n)}.$$

Построим многочлен, который в точке  $x_0$  принимает значение  $f(x_0)$ , а в остальных узловых точках обращается в 0. Он будет иметь вид

$$F_0(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot \dots \cdot (x_0-x_n)} \cdot f(x_0).$$

Аналогичным образом определяется многочлен, принимающий значение  $f(x_1)$  в точке  $x_1$ , а в остальных узловых точках равный 0

$$F_1(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot \dots \cdot (x_1-x_n)} \cdot f(x_1).$$

Обобщив результаты, можно записать подобные функции для всех узловых точек, т. е. функции вида

$$F_j(x) = \begin{cases} f(x_j), & \text{если } x = x_j, \\ 0, & \text{если } x \neq x_j. \end{cases}$$

Они будут выглядеть так:

$$F_j(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1}) \cdot (x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_j-x_0) \cdot (x_j-x_1) \cdot \dots \cdot (x_j-x_{j-1}) \cdot (x_j-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j-x_n)} f(x_j).$$

Тогда интерполяционный многочлен может быть записан в виде суммы представленных выше многочленов и называется *интерполяционной формулой Лагранжа*

$$\tau_n(x) = W(x) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i) \cdot W'(x_i)}, \quad (4.6)$$

где  $W(x) = \prod_{j=0}^n x - x_j$ ;

$$W'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n x_i - x_j.$$

Полином Лагранжа удобно использовать, если требуется находить приближения различных функций, заданных в одних и тех же узловых точках. В таких случаях можно предварительно вычислить коэффициенты Лагранжа по формуле

$$\frac{W(x)}{(x-x_i) \cdot W'(x_i)}, \quad i = \overline{0, n}.$$

**Пример.** Составить интерполяционный многочлен для следующих функций, заданных таблично, построить их графики.

x	0	1	2
y	1	1	3

x	0	1	2
y	-5	1,45	3,76

*Решение.* Реализацию формулы Лагранжа для интерполяции функций в Excel покажем на рис. 4.5 и 4.6.



Рис. 4.5. Интерполирование с помощью формулы Лагранжа



$$x_i - x_{i-1} = h = \text{const}, \text{ где } i = \overline{1, n}.$$

В этом случае интерполяционный многочлен Лагранжа строится на равноотстоящих узлах и имеет более удобный вид. Преобразуем формулу, введя новую переменную  $t = \frac{x - x_0}{h}$ , где  $h = \frac{b - a}{n}$ . Так как для равностоящих узлов  $x_{i+1} = x_i + h$ , то можем записать:

$$x = h \cdot t + x_0 \Rightarrow x - x_0 = h \cdot t;$$

$$x - x_1 = h \cdot t + x_0 - x_0 - h = (t - 1) \cdot h \Rightarrow x - x_1 = (t - 1) \cdot h;$$

$$x - x_2 = x - x_1 - h = (t - 1) \cdot h - h = x - x_2 = (t - 2) \cdot h \Rightarrow x - x_2 = (t - 2) \cdot h.$$

Обобщив алгоритм, можем записать, что

$$x - x_i = (t - i) \cdot h. \quad (4.7)$$

Используя равенство (4.8), выражение

$$W(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

перепишем в виде

$$W(x) = h^{n+1} t \cdot (t - 1) \cdot (t - 2) \cdot \dots \cdot (t - n). \quad (4.8)$$

Учитывая, что  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = \overline{0, n}$ , найдем:

$$x_i - x_0 = h \cdot i;$$

$$x_i - x_1 = (x_i - x_0) - (x_1 - x_0) = h \cdot i - h = h \cdot (i - 1);$$

$$x_i - x_2 = (x_i - x_0) - (x_2 - x_0) = h \cdot i - 2h = h \cdot (i - 2);$$

и т. д.

Обобщив алгоритм, можем записать

$$x_i - x_n = (x_i - x_0) - (x_n - x_0) = h \cdot i - h \cdot n = h \cdot (i - n). \quad (4.9)$$

На основании выражения (4.9) получим:

$$\begin{aligned} W'(x_i) &= (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n) = \\ &= h^n \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (i - 2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-(n - i)), \end{aligned}$$

т. е. 
$$W'(x_i) = (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot i! \cdot (n - i)!. \quad (4.10)$$

С учетом равенств (4.7), (4.8) и (4.10) получим частный случай формулы (4.6) для равноотстоящих узлов:

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{h^{n+1} \cdot t(t-1) \cdot (t-2) \cdot \dots \cdot (t-n)}{(-1)^{n-i} \cdot h \cdot (t-i) \cdot h^n \cdot i! \cdot (n-i)!} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (t-k)}{i!(n-i)!} y_i. \quad (4.11)$$

#### 4.5. Понятие конечных разностей. Связь между конечными разностями и узловыми значениями

Во многих случаях интерполяционный многочлен Лагранжа является громоздким при многократных вычислительных процедурах. Для равноотстоящих узлов или при изменении числа узлов удобнее пользоваться интерполяционными формулами Ньютона.

Введем некоторые понятия.

Пусть таблично задана функция:

$x$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_n$

Конечными разностями 1-го порядка будем называть выражения вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0, \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2, \\ \dots, \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}. \end{array} \right. ; \text{ 2-го порядка } - \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \\ \dots, \\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}. \end{array} \right. \quad \text{и т. д.}$$

Как правило, вычисление конечных разностей сводится в таблицу.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	
$x_0$	$y_0$					
$x_1$	$y_1$	$\underline{\Delta y_0}$				
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\underline{\underline{\Delta^2 y_0}}$			
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\underline{\underline{\Delta^3 y_0}}$		
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\underline{\underline{\Delta^4 y_0}}$	

Очевидно, что число конечных разностей на единицу меньше, чем число узлов интерполяционной функции.

Конечные разности многочлена можно выразить через значение функции в узловых точках:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= y_1 - y_0; \\ \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0; \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) y_3 - y_2 - y_2 + y_1 - y_2 + 2y_1 - y_0 = \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, можно заметить, что коэффициенты перед соответствующими  $y_i$  в представлении конечных разностей являются коэффициентами бинома Ньютона:  $C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^i$ . Тогда конечные разности в общем виде можно записать так:

$$\Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot y_i. \quad (4.12)$$

Аналогичным образом можно представить  $\Delta^k y_i$ .

Часто важнее бывает выразить значения функции через конечные разности:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \Delta y_0; \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0; \\ y_3 &= y_2 + \Delta y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты слагаемых являются коэффициентами бинома Ньютона. Тогда значение функции, соответствующей  $k$ -й узловой точке, может быть определено по формуле

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0 = y_0 + \sum_{i=0}^k C_k^i \cdot \Delta^i y_0. \quad (4.13)$$

#### 4.6. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

В силу единственности многочлена степени  $n$ , построенного по  $n + 1$  узловым значениям функции  $f(x)$ , формула Ньютона является разновидностью записи интерполяционного многочлена. Однако данная формула удобнее в случае, когда вычисления производятся для сеточных функций с разным количеством узлов. При этом добавление нового узла интерполирования приводит лишь к добавлению одного слагаемого интерполяционного многочлена, в то время как по формуле Лагранжа приходится делать пересчет всей таблицы.

В начале таблицы используют первую интерполяционную формулу Ньютона, а в конце – вторую. Рассмотрим один из способов построения первой интерполяционной формулы.

Пусть некоторая функция  $f(x)$  задана табличными значениями  $y_0 = f(x_0)$ ;  $y_1 = f(x_1)$ ; ...;  $y_n = f(x_n)$  в равноотстоящих узлах интерполяции  $\{x_0, x_1 = x_0 + h; \dots; x_n = x_0 + n \cdot h\}$ . Требуется построить интерполяционный полином Ньютона  $L_n(x)$  степени  $n$ , при котором

$$L_n(x_0) \equiv y_0; L_n(x_1) \equiv y_1; \dots; L_n(x_n) \equiv y_n.$$

Будем искать полином в виде

$$L_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}),$$

где  $a_i$  – неизвестные коэффициенты.

Для того чтобы найти  $a_0$ , положим  $x = x_0$ . Очевидно, что при этом  $L_n(x_0) \equiv y_0$ . Но так как все члены уравнения, кроме первого, содержат сомножитель  $(x - x_0)$ , следовательно, они все станут равными нулю, т. е.  $a_0 \equiv y_0$ . Для того чтобы найти  $a_1$ , положим  $x = x_1$ . Повторив все рассуждения и учитывая, что значение полинома в указанной точке будет тождественно равно  $y_1$ , после подстановки в формулу  $x_1$  имеем

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + a_1 \cdot h = y_1.$$

Все остальные сомножители при неизвестных коэффициентах  $a_i$  будут равны нулю. Преобразуя последнее выражение, находим  $a_1$  как  $a_1 = \Delta_1/h$ , где  $\Delta_1 = L_n(x_0 + h) - L_n(x_0) = y_1 - y_0$ . Для того чтобы определить  $a_2$ , положим  $x = x_2$  и, рассуждая аналогично, определим третий коэффициент как  $a_2 = \Delta_2/(2! \cdot h^2)$ .

Подставляя в выражение последовательно все  $x_n$ , приходим к общей формуле для получения коэффициентов  $a_i$ :

$$a_i = \Delta_i / (i! \cdot h^i).$$

Тогда интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов будет выглядеть следующим образом:

$$L_n(x) = y_0 + \frac{\Delta_1}{1! \cdot h} (x - x_0) + \frac{\Delta_2}{2! \cdot h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta_n}{n! \cdot h^n} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Сделав в данной формуле замену переменных  $t = (x - x_0) / h$ , где  $h$  – шаг интерполирования, получаем *первую интерполяционную формулу Ньютона*:

$$L_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t \cdot (t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1)}{k!} \cdot \Delta^k y_0. \quad (4.14)$$

Вторую интерполяционную формулу Ньютона получают, если узлы интерполяции в  $L_n(x)$  берут в несколько ином порядке:

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_n) + a_2(x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \dots + a_n \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot (x - x_0).$$

Тогда, рассуждая, как и в случае первой интерполяционной формулы, получаем искомую форму записи полинома Ньютона, которая известна как *вторая интерполяционная формула*:

$$L_n(x) = y_n + \frac{\Delta_1}{1! \cdot h} \cdot (x - x_n) + \frac{\Delta_2}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta_n}{n! \cdot h^n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Выполнив подстановку  $t = (x - x_n) / h$ , получим иную запись интерполяционного многочлена Ньютона:

$$L_n(x) = y_n + \Delta_1 \cdot t + \frac{\Delta_2 \cdot t \cdot (t+1)}{2!} + \dots + \frac{\Delta_n \cdot t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+n-1)}{n!}. \quad (4.15)$$

**Пример.** Реализовать в Microsoft Excel и MathCAD первую и вторую интерполяционные формулы для функции, заданной таблицей равноотстоящих узлов.

$x$	0	1	2	3	4
$y$	-1,6	-2,305	-3,678	-10,96	-5,356

*Решение.* Реализация задачи в Microsoft Excel показана на рис. 4.8.

	A	B	C	D	E	F
1	Таблица конечных разностей					
2						
3	x	y				
4	0	-1,6				
5	1	-2,305	-0,705			
6	2	-3,678	-1,373	-0,668		
7	3	-10,96	-7,282	-5,909	-5,241	
8	4	-5,356	5,604	12,886	18,795	24,038
9						
10	Реализация первой и второй интерполяционной формулы					
11						
12	x	h	t1	t2	t2	y2
13	0	1	0	-1,600	-4	-1,600
14	0,2		0,2	-2,747	-3,8	-2,747
15	0,4		0,4	-3,137	-3,6	-3,137
16	0,6		0,6	-3,044	-3,4	-3,044
17	0,8		0,8	-2,701	-3,2	-2,701
18	1		1	-2,305	-3	-2,305
19	1,2		1,2	-2,012	-2,8	-2,012
20	1,4		1,4	-1,942	-2,6	-1,942
21	1,6		1,6	-2,175	-2,4	-2,175
22	1,8		1,8	-2,752	-2,2	-2,752
23	2		2	-3,678	-2	-3,678
24	2,2		2,2	-4,917	-1,8	-4,917
25	2,4		2,4	-6,396	-1,6	-6,396
26	2,6		2,6	-8,003	-1,4	-8,003
27	2,8		2,8	-9,587	-1,2	-9,587
28	3		3	-10,960	-1	-10,960
29	3,2		3,2	-11,895	-0,8	-11,895
30	3,4		3,4	-12,125	-0,6	-12,125
31	3,6		3,6	-11,347	-0,4	-11,347
32	3,8		3,8	-9,217	-0,2	-9,217
33	4		4	-5,356	0	-5,356

Рис. 4.8. Результаты применения первой и второй интерполяционных формул Ньютона

Решение задачи в MathCAD показано на рис. 4.9.

Определение заданной функции таблично:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} -1.6 \\ -2.305 \\ -3.678 \\ -10.96 \\ -5.356 \end{pmatrix} \quad n := 4 \quad h := \frac{x_n - x_0}{n} \quad * \quad i := 0..n$$

Определение конечных разностей:

$$j := 0..n-1 \quad k := 0..n-2 \quad m := 0..n-3 \quad s := 0..n-4$$

$$\Delta y_j := y_{j+1} - y_j \quad \Delta^2 y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \quad \Delta^3 y_m := \Delta^2 y_{m+1} - \Delta^2 y_m \quad \Delta^4 y_s := \Delta^3 y_{s+1} - \Delta^3 y_s$$

Заполнение матрицы конечных разностей:

$$\Delta_{i,0} := y_i \quad \Delta_{j,1} := \Delta y_j \quad \Delta_{k,2} := \Delta^2 y_k \quad \Delta_{m,3} := \Delta^3 y_m \quad \Delta_{s,4} := \Delta^4 y_s$$

Матрица конечных разностей:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1.6 & -0.705 & -0.668 & -5.241 & 24.036 \\ -2.305 & -1.373 & -5.909 & 18.795 & 0 \\ -3.678 & -7.282 & 12.886 & 0 & 0 \\ -10.96 & 5.604 & 0 & 0 & 0 \\ -5.356 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реализация первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$t(X) := \frac{X - x_0}{h} \quad t(X, k) := t(X) - k + 1 \quad L(X, i) := \Delta_{0,i} \cdot \prod_{k=1}^i \frac{t(X, k)}{k}$$

$$\text{Nuton1}(X) := \sum_{i=1}^n L(X, i) + \Delta_{0,0}$$

Реализация второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$t2(X) := \frac{X - x_n}{h} \quad t3(X, k) := t2(X) + k - 1 \quad L1(X, i) := \Delta_{n-1,i} \cdot \left( \prod_{k=1}^i \frac{t3(X, k)}{k} \right)$$

$$\text{Nuton2}(X) := \sum_{i=1}^n L1(X, i) + \Delta_{n,0} \quad X := 0, 0.01..4$$

Рис. 4.9. Реализация первой и второй интерполяционных формул Ньютона для равноотстоящих узлов

На практике при определении промежуточных значений функции, заданной таблично, не всегда целесообразно привлекать в вычислительный процесс все конечные разности. Можно заметить, что довольно хороший результат может быть получен при использовании уже конечных разностей выше третьего порядка. При этом первую интерполяционную формулу Ньютона целесообразно использовать для ин-

терполирования в начале заданной таблицы, а при интерполировании в конце таблицы – вторую интерполяционную формулу.

**Пример.** На отрезке  $[0; 4]$  в MathCAD протабулировать функцию  $f(x) = \sin(x + e^{\sin(x)})$ , разбив его равномерной сеткой на 10 элементарных отрезков. Для полученной таблицы реализовать интерполяционную формулу Ньютона, используя четыре конечные разности.

*Решение.* Решение задачи в MathCAD показано на рис. 4.10.

$f(x) := \sin\left[x + (e)^{\sin(x)}\right] \quad a := 0 \quad b := 4 \quad n := 10 \quad h := \frac{b-a}{10}$			
$i := 0..n \quad x_i := i \cdot h + a \quad y_i := f(x_i) \quad j := 0..n$			
Определение конечных разностей:			
$j := 0..n-1 \quad k := 0..n-2 \quad m := 0..n-3 \quad s := 0..n-4$			
$\Delta y_j := y_{j+1} - y_j$	$\Delta 2y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$	$\Delta 3y_m := \Delta 2y_{m+1} - \Delta 2y_m$	$\Delta 4y_s := \Delta 3y_{s+1} - \Delta 3y_s$
Заполнение матрицы конечных разностей:			
$\Delta_{i,0} := y_i$	$\Delta_{j,1} := \Delta y_j$	$\Delta_{k,2} := \Delta 2y_k$	$\Delta_{m,3} := \Delta 3y_m \quad \Delta_{s,4} := \Delta 4y_s$
Реализация первой интерполяционной формулы Ньютона: $n := 4$			
$t(X) := \frac{X - x_0}{h} \quad t1(X, k) := t(X) - k + 1 \quad L(X, i) := \Delta_{0,i} \cdot \prod_{k=1}^i \frac{t1(X, k)}{k}$			
$Nuton1(X) := \sum_{i=1}^n L(X, i) + \Delta_{0,0}$			
Реализация второй интерполяционной формулы Ньютона: $p := n \quad n := 10$			
$t2(X) := \frac{X - x_n}{h} \quad t3(X, k) := t2(X) + k - 1 \quad L1(X, i) := \Delta_{n-1,i} \cdot \left( \prod_{k=1}^i \frac{t3(X, k)}{k} \right)$			
$Nuton2(X) := \sum_{i=1}^p L1(X, i) + \Delta_{n,0}$			
$Nuton(Z) := \text{if}\left(\frac{x_0 + x_n}{2} - Z > 0, Nuton1(Z), Nuton2(Z)\right)$			
$Nuton(0.85) = 0.179$		$Nuton(2.41) = -0.939$	

Рис. 4.10. Реализация задачи в MathCAD

#### 4.7. Интерполяционные формулы с центральными разностями

При построении интерполяционных формул Ньютона используются лишь значения функции, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения, т. е. эти формулы носят односторонний характер.

Во многих случаях оказываются полезными интерполяционные формулы, содержащие как последующие, так и предшествующие значения функции по отношению к ее начальному значению. Наиболее употребительными из них являются те, которые содержат разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы разностей данной функции, соответствующей начальным значениям  $x_0$  и  $y_0$ , или в строках, непосредственно примыкающих к ней. Эти разности  $\Delta y_{-1}$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta^2 y_{-1}$ , ... называются центральными разностями, где  $x_i = x_0 + i \cdot h$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $y_i = f(x_i)$ ,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$  и т. д. Их удобно записывать в таблицу.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
$x_{-4}$	$y_{-4}$	$\Delta y_{-4}$							
$x_{-3}$	$y_{-3}$	$\Delta y_{-3}$	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$					
$x_{-2}$	$y_{-2}$	$\Delta y_{-2}$	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-4}$	$\Delta^5 y_{-4}$			
$x_{-1}$	$y_{-1}$	$\Delta y_{-1}$	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$	$\Delta^6 y_{-4}$	$\Delta^7 y_{-4}$	
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$	$\Delta^6 y_{-3}$	$\Delta^7 y_{-3}$	$\Delta^8 y_{-4}$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\Delta^5 y_{-1}$	$\Delta^6 y_{-2}$		
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$				
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$						
$x_4$	$y_4$								

Соответствующие интерполяционные формулы носят название *интерполяционных формул с центральными разностями*. К их числу относятся формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя.

Существуют определенные рекомендации по применению этих формул. Так, формулу Гаусса и Бесселя целесообразно применять в случае, когда  $0,25 \leq |t| \leq 0,75$ , а формулу Стирлинга, если  $|t| \leq 0,25$ ,

где  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

*Интерполяционные формулы Гаусса.* Пусть имеется  $2n + 1$  равноотстоящих узлов интерполирования:  $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  и для искомой функции  $y = f(x)$  известны ее значения в этих узлах  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Требуется подобрать многочлен  $L_{2n}(x)$  степени не выше  $2n$  такой, что  $L_{2n}(x_i) = y_i$ .

Будем искать этот многочлен в виде

$$L_{2n}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)}) \cdot \dots \cdot x_0 \cdot \dots \cdot (x - x_{(n-1)}) + a_{2n}(x - x_{-n}) \cdot \dots \cdot x_0 \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

где  $a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)! \cdot h^{2n}}$ .

Введя переменную  $t = \frac{x - x_0}{h}$  и понятие обобщенных степеней  $t^{[m]} = t(t-1)(t-2) \dots (t - (m-1))$ , получим *первую интерполяционную формулу Гаусса*:

$$L_{2n}(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t^{[2]}}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[3]}}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[4]}}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1)^{[2n]}}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (4.16)$$

Первая интерполяционная формула Гаусса содержит центральные разности  $\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$ .

Аналогично можно получить *вторую интерполяционную формулу Гаусса*, содержащую центральные разности

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса имеет вид

$$L_{2n}(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_{-1} + \frac{(t+1)^{[2]}}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[3]}}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)^{[4]}}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_n + \frac{(t+n)^{[2n]}}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (4.17)$$

**Пример.** Подобрать интерполяционный полином Гаусса для функции, заданной таблицей.

x	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
y	1,552	1,67188	1,783	1,88463	1,976	2,05638	2,125

Найти значение интерполяционного многочлена в точке  $x = 0,31$ .

*Решение.* Составляем таблицу конечных разностей, приняв  $x_0 = 0,35$ ,  $y_0 = 1,8847$ . Так как разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле Гаусса можно ограничиться конечными разностями третьего порядка. На основании этого можно сделать предположение, что исходная функция является многочленом третьей степени.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,2	1,552	0,119875			
0,25	1,67188	0,111125	-0,00875	-0,00075	
0,3	1,783	0,101625	-0,0095	-0,00075	
0,35	1,88463	0,091375	-0,01025	-0,00075	
0,4	1,976	0,080375	-0,011	-0,00075	
0,45	2,05638	0,068625	-0,01175		
0,5	2,125				

Применяя первую интерполяционную формулу Гаусса, будем иметь интерполяционный многочлен

$$L(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t \cdot (t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1) \cdot t \cdot (t-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1}.$$

Для рассматриваемого примера определим  $t = \frac{0,31 - 0,35}{0,05} = -0,8$ .

Подставив в данную формулу значение переменной  $t = -0,8$ , получим  $L(x) = 1,804109$ .

*Интерполяционная формула Стирлинга.* Взяв среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса (4.17) и (4.18), получим *формулу Стирлинга*

$$\begin{aligned} L_{2n}(x) = & y_0 + t \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{t \cdot (t^2 - 1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\ & + \frac{t \cdot (t^2 - 1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{t \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\ & + \frac{t \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 - 2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \dots + \\ & + \frac{t \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 - 2^2) \cdot (t^2 + 3^2) \cdot \dots \cdot [t^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n} + \\ & + \frac{t \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 - 2^2) \cdot (t^2 + 3^2) \cdot \dots \cdot [t^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

**Пример.** Решить предыдущую задачу с помощью интерполяционной формулы Стирлинга.

*Решение.* Для решения данной задачи можем воспользоваться таблицей конечных разностей, просчитанной в предыдущем примере. Тогда, реализова формулу (4.19), в нашем случае интерполяционный многочлен Стирлинга примет вид

$$L(x) = 1,88463 + t \cdot (0,101625 + 0,091375) / 2 + t^2 \cdot (-0,01025) / 2 + t \cdot (t^2 - 1) \cdot (-0,00075 - 0,00075) / 12.$$

Подставив в данную формулу значение переменной  $t = -0,8$ , соответствующее значению переменной  $x = 0,31$ , получим  $L(x) = 1,804109$ .

#### 4.8. Понятие конечных разностей.

##### Общий вид интерполяционной формулы Ньютона

Для получения интерполяционной формулы Ньютона более общего вида введем следующие обозначения:

– *разностные отношения 1-го порядка:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \Delta(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \dots \\ \Delta(x_{n-1}, x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{array} \right.$$

– *разностные отношения 2-го порядка:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta(x_1, x_2) - \Delta(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\ \Delta(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta(x_2, x_3) - \Delta(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\ \dots \\ \Delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta(x_{n-1}, x_n) - \Delta(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \end{array} \right.$$

и т. д.

$$\Delta(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta(x_1, x_2, \dots, x_k) - \Delta(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0} \text{ разностные отношения } k\text{-го порядка.}$$

Вычисление разностных отношений, как и конечных разностей, сводится в таблицу.

$n$	$x_i$	$y_i$	$\Delta(x_i, x_{i+1})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$\Delta(x_i, \dots, x_{i+4})$
1	$x_0$	$y_0$				
2	$x_1$	$y_1$	$\Delta(x_0, x_1)$			
3	$x_2$	$y_2$	$\Delta(x_1, x_2)$	$\Delta(x_0, x_1, x_2)$		
4	$x_3$	$y_3$	$\Delta(x_2, x_3)$	$\Delta(x_1, x_2, x_3)$	$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
5	$x_4$	$y_4$	$\Delta(x_3, x_4)$	$\Delta(x_2, x_3, x_4)$	$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

На основании этой таблицы можно составить интерполяционный многочлен Ньютона, который представляется в виде

$$L_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot \Delta(x_0, \dots, x_i) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta(x_0, x_1) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \Delta(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Фактически для составления интерполяционного многочлена разностные отношения этого многочлена необходимо списать из верхней строки таблицы.

**Пример.** Функция  $y = f(x)$  задана таблично.

$x$	0,4	0,55	0,65	0,8	0,9	1,05
$y$	0,41075	0,57815	0,69675	0,88811	1,02652	1,25380

Построить интерполяционный многочлен Ньютона и найти его значение в точке  $x_0 = 0,596$ .

*Решение.*

$x$	$y$	$\Delta(x_i, x_{i+1})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$\Delta(x_i, \dots, x_{i+4})$
0,4	0,4108				
0,55	0,5782	1,116			
0,65	0,6968	1,186	0,28		
0,8	0,8881	1,2757	0,3589	0,1973	
0,9	1,0265	1,3841	0,4335	0,213	0,034
1,05	1,2538	1,5152	0,5244	0,2273	0,034

Из таблицы видно, что разностные отношения четвертого порядка постоянны. Поэтому будем интерполировать функцию многочленом Ньютона четвертого порядка.

$$L_4(x) = 0,41075 + (x - 0,4) \cdot 1,116 + (x - 0,4)(x - 0,55) \cdot 0,28 + (x - 0,4) \times \\ \times (x - 0,55)(x - 0,65) \cdot 0,197 + (x - 0,4)(x - 0,55)(x - 0,65)(x - 0,8) \cdot 0,034.$$

Подставив в полученный многочлен заданную точку, получим  $L_4(0,596) = 0,63192$ .

Замечание 1. Существует связь между разностными отношениями и конечными разностями при равноотстоящих узлах. Эта связь выражается формулой

$$\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^k y}{h^k \cdot k!}.$$

Замечание 2. Если интерполируемая функция является многочленом  $n$ -й степени, то разностные отношения  $n$ -го порядка будут постоянными величинами, а отношение  $(n + 1)$ -го порядка равно 0.

#### 4.9. Погрешность алгебраического интерполирования

Очевидно, что всякое интерполирование – это лишь приближенный подбор функции. Причем степень такого приближения может быть разной. Поэтому важной задачей является оценка погрешности интерполирования.

Исходя из основного интерполяционного тождества, можно заметить, что значения интерполируемой  $f(x)$  функции и интерполирующего полинома  $\varphi_n(x)$  совпадают только в узлах интерполяции  $(x_i; y_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Между узлами функция  $\varphi_n(x)$  может вести себя произвольным образом, сколь угодно далеко отклоняясь от зависимости  $f(x)$ . Определить погрешность приближения можно, используя выражение для абсолютной ошибки  $\varepsilon = \max|f(x) - \varphi_n(x)|$ . Однако такая оценка возможна только в том случае, когда исходная функция задана аналитически.

Аналитически погрешность алгебраической интерполяции можно вычислить по следующей формуле:

$$r_n(x) = \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!} M_{n+1} = \frac{|W(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad (4.19)$$

где  $M_{n+1} = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$  – максимальное значение  $(n + 1)$ -й производной функции  $f(x)$  по абсолютной величине на отрезке  $[a; b]$ .

Из формулы видно, что вклад в погрешность вносят три компонента: произведение разностей по абсолютной величине  $|W(x)|$ , максимальное значение  $(n + 1)$ -й производной  $M_{n+1}$  функции  $f(x)$  по абсолютной величине на отрезке  $[a; b]$  и величина факториала  $(n + 1)!$ . Причем факториал и произведение разностей с увеличением  $n$  уменьшаются, однако порядок производной при этом растет. Для многих функций величина  $M_{n+1}$  увеличивается быстрее, чем величина факториала в знаменателе. В результате полиномиальные интерполлянты редко сходятся к обычной непрерывной функции. Для большинства функций с повышением степени интерполирующего полинома погрешность возрастает. Поэтому на практике использование интерполянтов выше пятой степени считается нецелесообразным.

При равномерном разбиении исходного отрезка остаточный член интерполяции примет вид

$$r_n(x) = \left| h^{n+1} \cdot \frac{(t-1) \cdot (t-2) \cdot \dots \cdot (t-n)}{(n+1)!} \right| M_{n+1}. \quad (4.20)$$

Однако применение формул (4.19) и (4.20) затрудняется в сложности оценки величины  $M_{n+1}$ . При интерполировании по формуле Ньютона эта задача решается проще – остаточный член вычисляется следующим образом:

$$r_n(x) = \frac{\Delta^n y}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|, \quad (4.21)$$

где  $\Delta^n y$  можно считать как среднее арифметическое конечных разностей  $n$ -го порядка.

Точность приближения зависит не только от числа узлов интерполирования, но и от их расположения на выбранном отрезке  $[a; b]$ . В простейшем случае выбирается равномерное расположение точек  $(x_i; y_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  на интервале  $[a; b]$  с шагом  $h = (b - a)/(n - 1)$ . Однако такое расположение узлов не является оптимальным с точки зрения лучшего приближения  $\varphi(x)$  к зависимости  $f(x)$ . Оптимальным для интерполяции является расположение узлов на интервале  $[a; b]$  по формуле Чебышева

$$x_{i+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.22)$$

## Лекция 5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### 5.1. Встроенные возможности дифференцирования в MathCAD

Система MathCAD дает пользователю широкий спектр возможностей аналитического дифференцирования функций и нахождения значения производной в точке. Рассмотрим их:

1) *нахождение производной функции через меню* (рис. 5.1);

Чтобы найти первообразную функции в MathCAD необходимо:

– записать выражение функции и выделить в его любом месте аргумент (независимую переменную);

– войти в меню **Symbolics** → **Variable** → **Differentiate**.

Сделав эти действия, ниже записанного выражения функции появится ее производная (рис. 5.1).

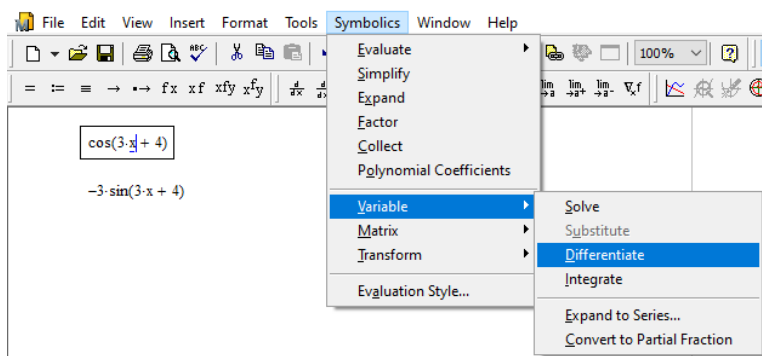


Рис. 5.1

В приведенном примере производной функции  $f(x) = \cos(3x + 4)$  является функция  $f'(x) = -3 \sin(3x + 4)$ ;

2) *нахождение производной функции через значок интегрирования* (рис. 5.2).

Тот же самый результат можно получить через встроенный в MathCAD значок аналитического дифференцирования функций. Для этого достаточно сформировать дифференциальную запись производной функции через соответствующий встроенный значок

$\frac{d}{dx} \cos(3x + 4)$  и, находясь внутри записи этого интеграла, нажать на

значок аналитического вычисления  $\rightarrow$ . Результат таких действий можно увидеть на рис. 5.2. Хочется отметить, что аналогичным образом в

MathCAD через значек  $\frac{d^n}{dx^n}$  можно найти производные более высокого порядка (в случае если они существуют) (рис. 5.2);

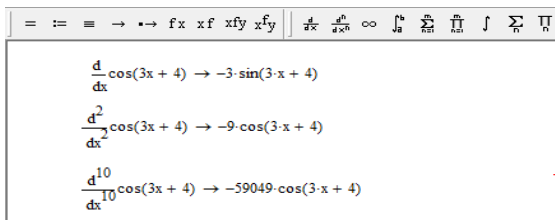


Рис. 5.2

### 3) нахождение значений производных в MathCAD.

Значение первой и пятой производной в MathCAD найдем на примере уже рассмотренной выше функции  $f(x) = \cos(3x + 4)$  в точках

$x_0 = -5\frac{1}{4}$ ;  $x_1 = \sqrt{3}$ ;  $x_2 = 0,759$ . Реализация этого задания показана на рис. 5.3.

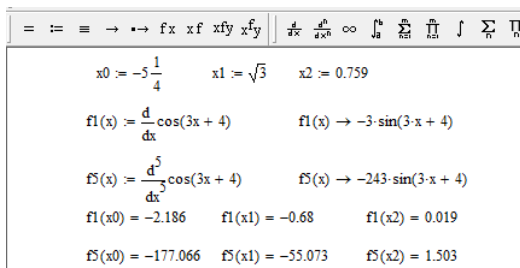


Рис. 5.3

## 5.2. Применение производной в прикладных задачах численных методов

Большинство задач оценки погрешностей применяемого численного метода сводится к нахождению наибольшего значения производных различного порядка на известном отрезке  $[a; b]$  от заданной функции, при условии того, что это задание функции аналитическое –  $y = f(x)$ .

Из курса математики такая задача решается по схеме нахождения наибольшего и наименьшего значения функции  $y = f(x)$  на заданном отрезке  $[a; b]$ , которая сводится к следующим действиям:

1) для функции находят точки подозрительные на экстремум. Для этого вычисляется первая производная от заданной функции, приравнивается к нулю и решается сформированное уравнение  $f'(x) = 0$ ;

2) из точек подозрительных на экстремум (найденных в п. 1), отбираются только те, которые принадлежат заданному отрезку  $[a; b]$ ;

3) в отобранных точках (п. 2) определяются значения функции  $y = f(x)$ ;

4) определяются значения функции  $y = f(x)$  на концах отрезка  $[a; b]$ :  $f(a)$  и  $f(b)$ ;

5) из найденных значений функции п. 3–4 отбираются наибольшее и наименьшее значения.

Рассмотрим, как может быть решена подобная задача изученными выше способами в MathCAD.

**Пример.** Найти в MathCAD наибольшее и наименьшее значения второй производной функции  $y = (2x - 4)^4$  на отрезке  $[-3; 5]$ .

*Решение.* Реализация поставленной задачи в MathCAD показана на рис. 5.4.

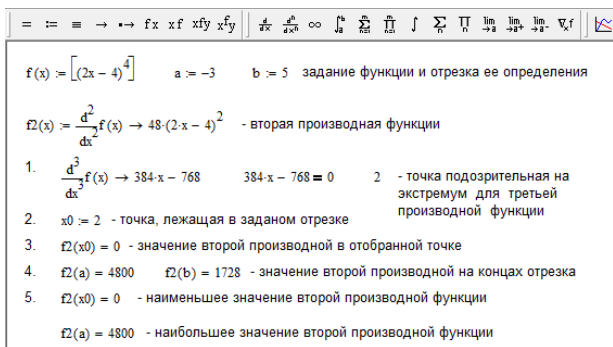


Рис. 5.4

Для функции  $y = (2x - 4)^4$  на отрезке  $[-3; 5]$  наибольшее значение второй производной достигается на левой границе заданного отрезка  $a = -3$  и равняется 4800, а наименьшее – в точке  $x_0 = 2$  и равняется 0.

### 5.3. Общая характеристика численного дифференцирования функций

Напомним, что производной функции в точке  $x_0$  называется предел отношения ее приращения к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0 и условии, что этот предел существует и конечен, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция задана таблично,

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

то приращение аргумента  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , как бы оно мало ни было, всегда конечно и его нельзя устремить к нулю. А значит, от таких функций ее производную традиционными методами найти нельзя. Кроме того, встречаются случаи, когда функция задана аналитически, но очень громоздкой формулой. В перечисленных случаях, как правило, пользуются численным дифференцированием. Идея численного дифференцирования следующая: вместо функции  $f(x)$  рассматривается некоторая «близкая» к ней функция  $g(x)$ , определяемая достаточно простой формулой, и поскольку  $f(x) \approx g(x)$ , постольку их производные, вероятно, близки  $f'(x_0) \approx g'(x_0)$ . А если обобщить данный принцип, то он должен действовать и для производных более высокого порядка.

Однако в действительности это, вообще говоря, не так: близость функции не предопределяет близость их производных. Это можно показать, опираясь на геометрический смысл производной  $f'(x_0)$ , выражающей тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  (рис. 5.5). Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  близки, так как координаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точку  $A$  рис. 5.5), различаются, а значит, не близки. На основании этого можно утверждать, что выдвинутая идея, вообще говоря, не работает.

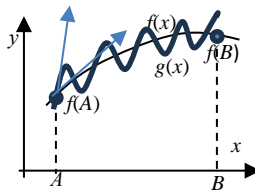


Рис. 5.5

Однако было доказано, что если в качестве приближающей функции  $g(x)$  использовать интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный в узлах, характеризующих динамику изменения исходной функции  $f(x)$ , то выдвинутая гипотеза работает и в этом случае, даже возможно оценить возникающую при этом погрешность вычислений.

#### 5.4. Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов

Имеются три узла  $x_0, x_1, x_2$ , удаленные друг от друга на расстояние  $h$ . Интерполяционный многочлен Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

Введем вспомогательную переменную  $t = (x-x_0)/h$ , тогда  $x = x_0 + ht$ , и получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)y_0 - t(t-2)y_1 + \frac{1}{2}t(t-1)y_2.$$

Тогда производную от этого приближения исходной функции можно найти по правилу дифференцирования сложной функции

$$(L_2(x))' = (L_2(x))'_t t'_x = \frac{1}{h}(L_2(x))'_t = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} y_0 (2t-3) - y_1 (2t-2) + \frac{1}{2} y_2 (2t-1) \right).$$

Аналогично для второй производной выражение будет иметь вид

$$f''(x) = (L_2(x))'' = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2).$$

Принимая во внимание, что  $x = x_0 + ht$  при  $t = \overline{0, 2}$  значения первой и второй производных в заданных узлах можно найти по формулам:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left( -\frac{3}{2} y_0 + 2y_1 - \frac{1}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{3} M_3;$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{6} M_3;$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} y_0 - 2y_1 + \frac{3}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{3} M_3;$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - hM_3;$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}M_4;$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hM_3,$$

где  $M_n = \max_{x \in [x_0; x_2]} f^{(n)}(x)$ .

### 5.5. Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов

Для четырех равноотстоящих узлов  $x_0, x_1, x_2, x_3$  первая производная в этих узлах будет вычисляться по формулам:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}M_4;$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}M_4;$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}M_4;$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}M_4,$$

где  $M_n = \max_{x \in [x_0; x_3]} f^{(n)}(x)$ .

Вторая производная в узлах вычисляется следующим образом:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{1}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12}h^2M_4,$$

где  $M_n = \max_{x \in [x_0; x_3]} f^{(n)}(x)$ .

Хочется отметить, с увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается и уменьшается с ростом порядка производной.

## 5.6. Встроенные возможности интегрирования в MathCAD

В MathCAD существуют широкие возможности как аналитического, так и численного интегрирования функций в автоматическом режиме. Продемонстрируем их:

1) *нахождение первообразной функции через меню (в случае, если она существует)* рис. 5.6.

Чтобы найти первообразную функции в MathCAD необходимо:

- записать выражение функции и выделить в его любом месте аргумент (независимую переменную);
- войти в меню **Symbolics** → **Variable** → **Integrate**.

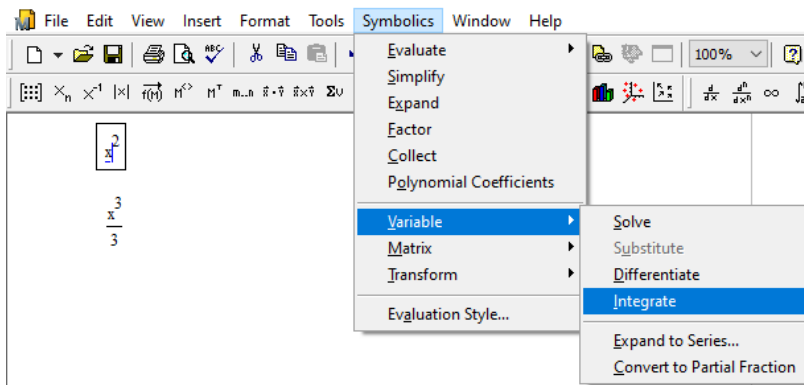


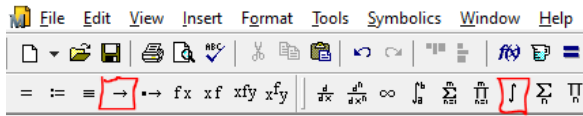
Рис. 5.6

Сделав эти действия, ниже записанного выражения функции появится ее первообразная (рис. 5.6). В приведенном примере первообразной функции  $f(x) = x^2$  является функция  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ ;

2) *нахождение первообразной функции через значок интегрирования (в случае, если она существует)* рис. 5.7.

Тот же самый результат можно получить через встроенный в MathCAD значок аналитического интегрирования функций. Для этого достаточно сформировать запись неопределенного интеграла через соответствующий встроенный значок  $\int x^2 dx$  и, находясь внутри запи-

си этого интеграла, нажать на значок аналитического вычисления  $\rightarrow$ . Результат таких действий можно увидеть на рис. 5.7;



$$\int x^2 dx \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

Рис. 5.7

3) *нахождение определенного интеграла через встроенную функцию MathCAD.*

Интегрирование в MathCAD реализовано в виде вычислительного оператора, допускающего нахождение интегралов не только от функций одной переменной, но и функций нескольких переменных при последовательном вычислении кратных интегралов. При этом пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными, а значит, речь идет о вычислении как определенных, так и несобственных интегралов. А результат такого интегрирования может быть приведен как на множестве действительных, так и на множестве комплексных чисел.

Для удобства пользователя вычисление интеграла в MathCAD выполняется с помощью значка определенного интеграла, реализуя принцип «как пишется, так и вводится».

Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства или символического равенства. В первом случае интегрирование будет проведено численным методом, во втором – в случае успеха будет найдено точное значение интеграла с помощью символического процессора MathCAD.

Например, следующие записи в MathCAD необходимо интерпретировать следующим образом:

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = 1,494$$

– интеграл посчитан численно с помощью встроен-

ных численных методик;

$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \rightarrow \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)$  – интеграл посчитан точно с помощью встро-

енного символьного процессора, при этом  $\operatorname{erf}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx$ .

Результаты численного и символьного вычисления интеграла  $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$  в MathCAD показаны на рис. 5.8.

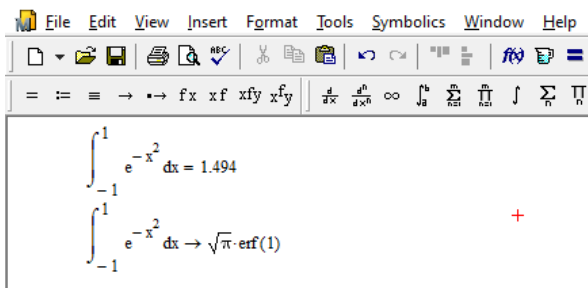


Рис. 5.8

Хочется отметить, что символьное интегрирование возможно только для сравнительно небольшого круга несложных подынтегральных функций. В случае, когда интегрирование функций завершается знаком равенства « $\Rightarrow$ », могут быть использованы следующие алгоритмы численного вычисления:

- метод Ромберга – для большинства функций, не содержащих особенностей;
- адаптивный метод – для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования;
- для несобственных интегралов с бесконечными пределами;
- модифицированный метод Ромберга для функций, не определенных на одном или обоих концах интервала интегрирования.

По умолчанию выбор метода численного интегрирования остается за системой MathCAD.

### 5.7. Общая характеристика методов численного интегрирования функций

Известно, что определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако класс интегрируемых функций довольно узкий.

Например, интегралы  $\int \frac{x}{\sin(x)} dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$ . В данном случае подын-

тегральные функции этих интегралов не интегрируемы в элементарных функциях, а сами интегралы считаются не берущимися.

Кроме этого случая, часто приходится интегрировать функции, заданные таблично или графически. В таких ситуациях первообразная  $F(x)$  подынтегральной функции не известна. Как правило, для ее отыскания используется интерполяция функций, заданных таблично или графически, с последующим интегрированием результата интерполирования. Такой способ численного интегрирования дает достаточно точные результаты только при условии, что исходная функция заведомо гладкая.

Бывают случаи, когда подынтегральная функция задана аналитически и интеграл берущийся, но первообразная сложна и слишком громоздка для дальнейшего ее использования.

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенных интегралов, заменяя подынтегральную функцию  $f(x)$  на «близкую» к ней, которая легко интегрируется.

### **5.8. Понятие квадратурной формулы. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса**

Пусть приближенно требуется вычислить значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . При этом не исключаются случаи, когда подынтегральная функция  $f(x)$  на отрезке интегрирования  $[a; b]$  может иметь некоторые особенности. Так, например, могут существовать точки, в которых функция имеет резко изменяющиеся или разрывные производные внутри промежутка интегрирования. В таких ситуациях мы должны заранее освободиться от таких особенностей. Делается это путем разложения подынтегральной функции на 2 сомножителя, т. е. представление интеграла в виде

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx,$$

где  $[a; b]$  – любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси;  
 $p(x)$  – весовая функция (интегрируемая положительная на отрезке  $[a; b]$  функция), учитывающая особенности поведения подынтегральной функции;  
 $f(x)$  – гладкая функция (или сеточная (таблично заданная) функция).  
 Такой интеграл можно приближенно оценить по формуле

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k),$$

где  $C_k$  – квадратурные коэффициенты;  
 $x_k$  – квадратурные узлы отрезка  $[a; b]$ .

Сама формула называется *квадратурной формулой вычисления интеграла*, а сумма, характеризующая правую часть этого приближенного равенства, – *квадратурной суммой*.

Можно заметить, что квадратурная сумма однозначно определяется  $2n + 1$  параметром:  $n$  значений квадратурных коэффициентов  $C_k$ ,  $n$  значений квадратурных узлов  $x_k$  и сам параметр  $n$ , который характеризует число точек (узлов сетки) разбиения отрезка  $[a; b]$ . Так как точность вычисления интеграла зависит от числа разбиений  $n$ , то значение  $n$  должно быть достаточно велико. Остальные же параметры должны быть подобраны так, чтобы сеточные значения функция при интегрировании давали наилучшее приближение функций  $f(x)$ . Если функция  $f(x)$  известна или задана таблицей значений  $f(x_k)$  в некоторой системе узлов  $x_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) и на выбор коэффициентов не налагаются дополнительные ограничения, то используют интерполяционные квадратурные формулы. Основой для таких формул служит полином Лагранжа.

1. По узловым точкам строится интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{W_k^n(x)}{W_k^n(x_k)} \cdot f(x_k) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \cdot \dots \cdot (x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)} f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \cdot \dots \cdot (x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3) \cdot \dots \cdot (x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_3) + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_3) + \dots + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)(x_{n-1}-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} f(x_{n-1}) + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} f(x_n),
\end{aligned}$$

где  $W_k^n(x) = \frac{W_n(x)}{x-x_k}$ ;

$$W_n = \prod_{k=0}^n (x-x_k).$$

2. Считая  $f(x) = L_n(x)$ , получаем

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k),$$

где  $C_k = \frac{1}{W_k^n(x_k)} \int_a^b W_k^n(x) \cdot p(x) dx$  – интеграл от интерполяционного

многочлена Лагранжа.

Квадратурные формулы, у которых коэффициенты  $C_k$  определяются данным способом, называются квадратурными формулами Ньютона – Котеса (Котеса) порядка  $n$  в честь выдающихся ученых Исаака Ньютона и Роджера Котеса. Эти квадратурные формулы позволяют производить численное интегрирование функций в одинаково отстоящих друг от друга точках (узлах сетки).

**Пример 1.** Вычислить коэффициенты Котеса  $C_1(x_0)$  и  $C_1(x_1)$  на отрезке  $[a; b]$  для дифференцируемой подынтегральной функции  $f(x)$ . Записать квадратурную формулу Ньютона – Котеса 1-го порядка для

численного вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Сформулировать геометрический

смысл полученной формулы.

*Решение.* Условие задачи предполагает, что подынтегральная функция  $f(x)$  гладкая и непрерывная, а значит, не имеет особенностей

на отрезке интегрирования  $[a; b]$ . При этом значения функции  $f(x)$  определены в двух узлах  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$ , а  $p(x) \equiv 1$ .

Вычислим коэффициенты Котеса  $C_1(x_0)$  и  $C_1(x_1)$  на отрезке  $[a; b]$ .

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= \frac{1}{W_0^1(x_0)} \int_a^b W_0^1(x) dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \int_a^b (x - x_1) dx = \left. \frac{x - x_1}{2} \right|_a^b = \\ &= \frac{1}{a - b} \int_a^b (x - b) dx = \frac{\left( \frac{x^2}{2} - bx \right) \Big|_a^b}{a - b} = \frac{\left( \frac{b^2}{2} - b^2 + \frac{a^2}{2} - ba \right)}{a - b} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b - a)} = \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b - a)} = \frac{(b - a)^2}{2(b - a)} = \frac{b - a}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(x_1) &= \frac{1}{W_1^1(x_1)} \int_a^b W_1^1(x) dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_a^b (x - x_0) dx = \left. \frac{x - x_0}{2} \right|_a^b = \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b (x - a) dx = \frac{\left( \frac{x^2}{2} - ax \right) \Big|_a^b}{b - a} = \frac{\left( \frac{b^2}{2} - ba - \frac{a^2}{2} + a^2 \right)}{b - a} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b - a)} = \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b - a)} = \frac{(b - a)^2}{2(b - a)} = \frac{b - a}{2}. \end{aligned}$$

Запишем квадратурную формулу Ньютона – Котеса 1-го порядка для численного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{2} f(a) + \frac{b - a}{2} f(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2} \cdot (b - a).$$

Сформулируем геометрический смысл полученной формулы: определенный интеграл по отрезку  $[a; b]$  (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в первом приближении может быть подсчитан, как площадь прямоугольной трапеции с высотой, равной  $b - a$  и основаниями, равными соответственно  $f(a)$  и  $f(b)$  (рис. 5.9).

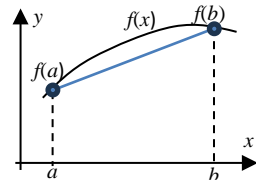


Рис. 5.9

*Квадратурные формулы Ньютона – Котеса для равноотстоящих узлов на заданном отрезке.*

Приведем более простую запись квадратурных формул, которые применяются для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

с постоянной весовой функцией ( $p(x) \equiv 1$ ) для равноотстоящих узлов:  $x_0 = a$ ;  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ , ...,  $x_{n-1} = a + (n-1)h$ ,  $x_n = a + nh = b$  на заданном конечном отрезке интегрирования  $[a; b]$ . Для этого случая квадратурная формула может быть переписана в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n \cdot f(a+k \cdot h),$$

где  $B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! (n-k)!} \cdot \int_0^n \prod_{t=0, t \neq k}^n (t-k) dt$ ;

$$h = \frac{b-a}{n};$$

$n$  – число точек разбиения отрезка  $[a; b]$ ;

$$k = \overline{0, n}.$$

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов  $B_k^n$  Котеса при  $n = \overline{1, 6}$ .

### Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

$n$	$B_k^n$
1	$B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2}$
2	$B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}$ ; $B_1^2 = \frac{2}{3}$
3	$B_0^3 = B_3^3 = \frac{1}{8}$ ; $B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8}$
4	$B_0^4 = B_4^4 = \frac{7}{90}$ ; $B_1^4 = B_3^4 = \frac{16}{45}$ ; $B_2^4 = \frac{2}{15}$
5	$B_0^5 = B_5^5 = \frac{19}{288}$ ; $B_1^5 = B_4^5 = \frac{25}{96}$ ; $B_2^5 = B_3^5 = \frac{25}{144}$
6	$B_0^6 = B_6^6 = \frac{41}{840}$ ; $B_1^6 = B_5^6 = \frac{9}{35}$ ; $B_2^6 = B_4^6 = \frac{9}{280}$ ; $B_3^6 = \frac{34}{105}$

Рассмотрим вариант применения этой таблицы для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  по трем равноотстоящим узловым значениям:  $a$ ,  $b$  и  $\frac{a+b}{2}$ . В этом случае можем записать

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left( \frac{1}{6} f(a) + \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right).$$

**Пример 2.** Используя квадратурную формулу Ньютона – Котеса 4-го порядка, в MathCAD вычислить определенный интеграл  $\int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx$ . Погрешность  $R_4$  применяемой формулы оценить как разность результата численного вычисления интеграла и его точного значения.

*Решение.* Решение приведенного примера в MathCAD показано на рис. 5.10.

$I_t := \int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx = 51.03727828$  - точное значение интеграла  
 Приближенное интегрирование с помощью квадратурной формулы Ньютона-Котеса  
 $a := 2.2$      $b := 3.74$      $n := 4$      $f(x) := (2x-4)^4$      $h := \frac{b-a}{n}$      $h = 0.385$   

$$B(n,k) := \frac{(-1)^{n-k}}{n! \cdot (n-k)!} \int_0^n \frac{\prod_{k=0}^n (t-k)}{t-k} dt$$

$$k := 0..n \quad x_k := a + k \cdot h$$

$$B(n,k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{90} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{7}{90} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 2.585 \\ 2.97 \\ 3.355 \\ 3.74 \end{pmatrix}$$

$$I_n := (b-a) \cdot \sum_{k=0}^n (B(n,k) \cdot f(x_k)) \quad I_n = 51.03727828$$
 - приближенное значение интеграла  
 $R_4 := I_n - I_t = 3 \times 10^{-14}$  - погрешность приближенного вычисления

Рис. 5.10. Реализация квадратурной формулы Ньютона – Котеса 4-го порядка для численного вычисления определенного интеграла

Анализ такого решения показывает, что до 13-го разряда после пятой точное значение совпадает с приближенным. При этом погрешность такого численного вычисления интеграла  $\int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx$  не превысит  $3 \cdot 10^{-14}$ .

Погрешность  $R$  формулы Ньютона–Котеса может быть оценена по следующей формуле

$$R_n \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+1)!},$$

где  $M_{n+1} = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона – Котеса можно достичь двояко: увеличением порядка  $n$  применяемой формулы и (или) сужением отрезка интегрирования. Но первый путь малопривлекателен: формула Ньютона – Котеса при большом  $n$  становится громоздкой и неудобной для использования.

Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона – Котеса небольшого порядка  $n$  обеспечит достаточную точность. Таким путем мы придем к известным формулам численного интегрирования – формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

### **5.9. Формулы прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла**

Суть методов прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  заключается в том, что на каждом из частичных отрезков  $[x_{k-1}; x_k]$  отрезка интегрирования  $[a; b]$  площадь криволинейной трапеции, ограниченная графиком функции  $f(x)$ , заменяется площадью прямоугольника со сторонами  $h$  и  $f(t_k)$ . При этом различают формулы левых и правых прямоугольников.

Для формулы *левых* *прямоугольников* в качестве  $t_k$  принимают  $x_k = x_0 + kh$ , где  $k = \overline{0, n-1}$ . Тогда формула левых прямоугольников численного интегрирования функций на отрезке  $[a; b]$  записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) = h(f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f(x_0 + (n-1)h)) = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0 + kh).$$

Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников показана на рис. 5.11.

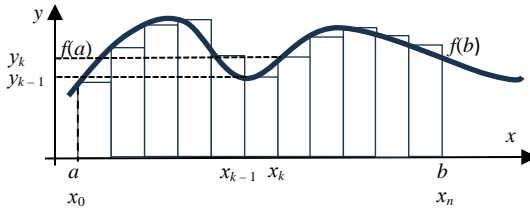


Рис. 5.11

Для формулы *правых прямоугольников* в качестве  $t_k$  принимают  $x_k = x_0 + kh$ , где  $k = \overline{1, n}$ . Тогда формула правых прямоугольников численного интегрирования функций на отрезке  $[a; b]$  записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = h(f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + \dots + f(x_0 + nh)) = h \cdot \sum_{k=0}^n f(x_0 + kh).$$

Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников показана на рис. 5.12.

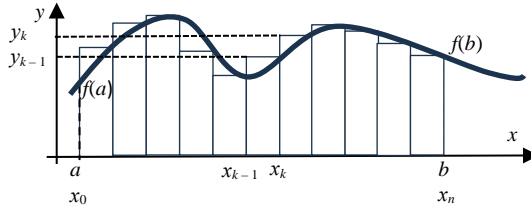


Рис. 5.12

**Пример.** Применяя формулы левых и правых прямоугольников, в Excel и MathCAD при  $n = 6$  приближенно вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos(x)} dx. \text{ Сравнить полученные результаты.}$$

*Решение.* Рассмотрим реализацию методов прямоугольников в Excel:

а) сформируем в Excel макет-таблицу метода левых прямоугольников (рис. 5.12).

Тогда результаты вычислений будут иметь вид, показанный на рис. 5.13;

	A	B	C	D	E
	<b>Вычисление определенного интеграла методом левых прямоугольников</b>				
1					
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	=C3	=КОРЕНЬ(3+COS(A3))	0	=ПИ()	=(D3-C3)/6
4	=A3+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A4))			
5	=A4+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A5))			
6	=A5+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A6))			
7	=A6+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A7))			
8	=A7+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A8))			
9					
10	Результат	=E3*СУММ(B3:B8)			

Рис. 5.12

	A	B	C	D	E
	<b>Вычисление определенного интеграла методом левых прямоугольников</b>				
1					
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	0		2	0	3,1416
4	0,5236	1,96622			
5	1,0472	1,87083			
6	1,5708	1,73205			
7	2,0944	1,58114			
8	2,6180	1,46081			
9					
10	Результат	5,55593			

Рис. 5.13

б) сформируем в Excel макет-таблицу метода правых прямоугольников рис. 5.14 с результатами вычислений, показанными на рис. 5.15;

	H	I	J	K	L
	<b>Вычисление определенного интеграла методом правых прямоугольников</b>				
1					
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	=J3	=КОРЕНЬ(3+COS(H3))	0	=ПИ()	=(K3-J3)/6
4	=H3+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H4))			
5	=H4+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H5))			
6	=H5+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H6))			
7	=H6+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H7))			
8	=H7+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H8))			
9	=H8+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H9))			
10	Результат	=L3*СУММ(I4:I9)			

Рис. 5.14

	H	I	J	K	L
	<b>Вычисление определенного интеграла методом правых прямоугольников</b>				
1					
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	0		2	0	3,1416
4	0,5236	1,96622			
5	1,0472	1,87083			
6	1,5708	1,73205			
7	2,0944	1,58114			
8	2,6180	1,46081			
9	3,1416	1,41421			
10	Результат	5,24922			

Рис. 5.15

в) покажем реализацию этих же формул в MathCAD (рис. 5.16).

**Метод левых прямоугольников**

$$a := 0 \quad b := \pi \quad h := \frac{b - a}{6} = 0.5236 \quad k := 0..5 \quad x_k := a + k \cdot h$$

$$f(x) := \sqrt{3 + \cos(x)}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.524 \\ 1.047 \\ 1.571 \\ 2.094 \\ 2.618 \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.966 \\ 1.871 \\ 1.732 \\ 1.581 \\ 1.461 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ипр} := h \cdot \sum_{k=0}^5 f(x_k) = 5.55593 \text{ - результат}$$

**Метод правых прямоугольников**

$$a1 := 0 \quad b1 := \pi \quad h1 := \frac{b1 - a1}{6} = 0.5236 \quad k1 := 1..6 \quad x_{k1} := a1 + k1 \cdot h1$$

$$f1(x) := \sqrt{3 + \cos(x)}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.524 \\ 1.047 \\ 1.571 \\ 2.094 \\ 2.618 \\ 3.142 \end{pmatrix} \quad f1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.966 \\ 1.871 \\ 1.732 \\ 1.581 \\ 1.461 \\ 1.414 \end{pmatrix}$$

$$\text{Плев} := h1 \cdot \sum_{k1=1}^6 f1(x_{k1}) = 5.24922 \text{ - результат}$$

Рис. 5.16

Таким образом, приближенные результаты вычисления интеграла

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos(x)} dx \text{ при числе разбиений отрезка интегрирования } n = 6$$

составили соответственно 5,55593 по формуле левых прямоугольников и 5,24922 по формуле правых прямоугольников. Точное значение этого интеграла составляет 5,40258, что фактически равняется среднему арифметическому значению полученных результатов

$$\frac{5,55593 + 5,24922}{2} = 5,40258.$$

### 5.10. Формула трапеций приближенного вычисления определенных интегралов

Рассмотрим квадратурную формулу Ньютона – Котеса 1-го порядка для всего отрезка интегрирования  $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2} \cdot [f(a) + f(b)].$$

Очевидно, что применение этой формулы для всего отрезка интегрирования приведет к заведомо большой погрешности. Поэтому для ее уменьшения предварительно разбивают отрезок  $[a; b]$  на достаточно большое число интервалов точками  $x_k = a + kh$ , где  $k = \overline{0, n-1}$ , и к каждому из них применяют приведенную выше формулу, суммируя результаты по всем частичным отрезкам. Это позволяет получить общую формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)) = h \cdot \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right],$$

где  $h = (b-a)/n$ ;

$n$  – число разбиений;

$x_0 = a; x_k = a + hk, k = \overline{1, n-1}; x_n = b$ .

С геометрической точки зрения это означает, что криволинейная трапеция (при  $f(x) > 0$ ), площадь которой численно равна определенному интегралу  $\int_a^b f(x)dx$ , приближенно заменяется фигурой, ограниченной сверху ломаной, соединяющей точки ее разбиения отрезками прямых (рис. 5.17).

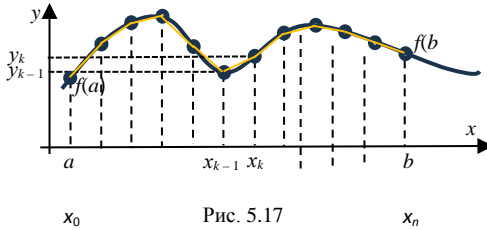


Рис. 5.17

Если подынтегральная функция дважды дифференцируемая, то погрешность формулы трапеций можно оценить следующим образом

$$R_n = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2,$$

где  $M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|$ .

Оценка  $M_2$  в вышеприведенной формуле вносит определенную сложность в практическое ее применение, поэтому на практике при приближенном вычислении интегралов по формулам прямоугольников и трапеций их погрешность оценивают как абсолютную величину разности результатов интегрирования при  $n$  и  $2n$  разбиениях промежутка интегрирования, т. е.

$$R_n = |I_{2n} - I_n|.$$

**Пример.** По формуле трапеций в Excel и MathCAD при  $n = 12$  при-

ближенно вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{7} \sin^2(x)} dx$ . Оце-

нить погрешность вычислений как абсолютную величину разности результатов интегрирования при  $n$  и  $2n$  разбиениях промежутка интегрирования.

*Решение:*

а) сформируем в Excel макет-таблицу метода трапеций при числе разбиений  $n = 12$  (рис. 5.18). Результаты вычислений по данной таблице приведем на рис. 5.19.

	A	B	C	D	E
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом трапеций при <math>n = 12</math></b>				
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	=C3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A3)^2)	0	=ПИ()/2	=(D3-C3)/12
4	=A3+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A4)^2)			
5	=A4+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A5)^2)			
6	=A5+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A6)^2)			
7	=A6+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A7)^2)			
8	=A7+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A8)^2)			
9	=A8+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A9)^2)			
10	=A9+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A10)^2)			
11	=A10+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A11)^2)			
12	=A11+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A12)^2)			
13	=A12+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A13)^2)			
14	=A13+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A14)^2)			
15	=A14+ $\$E\$3$	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A15)^2)			
16					
17	Результат	=E3*((B3+B15)/2+СУММ(B4:B14))			
18	$R_n$	=ABS(B17-I29)			

Рис. 5.18

	A	B	C	D	E
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом трапеций при <math>n = 12</math></b>				
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	0	1,0000	0	1,5708	0,1309
4	0,1309	0,9988			
5	0,2618	0,9952			
6	0,3927	0,9895			
7	0,5236	0,9820			
8	0,6545	0,9732			
9	0,7854	0,9636			
10	0,9163	0,9540			
11	1,0472	0,9449			
12	1,1781	0,9371			
13	1,3090	0,9310			
14	1,4399	0,9271			
15	1,5708	0,9258			
16					
17	Результат	1,51310			
18	$R_n$	2,22E-16			
19					

Рис. 5.19

По аналогии получим результат вычисления интеграла при числе разбиений  $n = 24$  (рис. 5.20).

	H	I	J	K	L
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом трапеций при <math>n = 24</math></b>				
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	J3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H3)^2)	0	=ПИ()/2	=(K3-J3)/24
4	=H3+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H4)^2)			
5	=H4+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H5)^2)			
6	=H5+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H6)^2)			
7	=H6+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H7)^2)			
8	=H7+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H8)^2)			
9	=H8+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H9)^2)			
10	=H9+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H10)^2)			
11	=H10+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H11)^2)			
12	=H11+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H12)^2)			
13	=H12+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H13)^2)			
14	=H13+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H14)^2)			
15	=H14+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H15)^2)			
16	=H15+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H16)^2)			
17	=H16+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H17)^2)			
18	=H17+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H18)^2)			
19	=H18+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H19)^2)			
20	=H19+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H20)^2)			
21	=H20+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H21)^2)			
22	=H21+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H22)^2)			
23	=H22+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H23)^2)			
24	=H23+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H24)^2)			
25	=H24+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H25)^2)			
26	=H25+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H26)^2)			
27	=H26+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H27)^2)			
28					
29	Результат	=L3*((I3+I27)/2+СУММ(I4:I26))			

	H	I	J	K	L
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом трапеций при <math>n = 24</math></b>				
2	$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$
3	0	1,0000	0	1,5708	0,0654
4	0,0654	0,9997			
5	0,1309	0,9988			
6	0,1963	0,9973			
7	0,2618	0,9952			
8	0,3272	0,9926			
9	0,3927	0,9895			
10	0,4581	0,9859			
11	0,5236	0,9820			
12	0,5890	0,9777			
13	0,6545	0,9732			
14	0,7199	0,9684			
15	0,7854	0,9636			
16	0,8508	0,9588			
17	0,9163	0,9540			
18	0,9817	0,9493			
19	1,0472	0,9449			
20	1,1126	0,9408			
21	1,1781	0,9371			
22	1,2435	0,9338			
23	1,3090	0,9310			
24	1,3744	0,9288			
25	1,4399	0,9271			
26	1,5053	0,9262			
27	1,5708	0,9258			
28					
29	Результат	1,51310			

Рис. 5.20

Погрешность приближенного вычисления интеграла составит

$$R_n = |I_{2n} - I_n| = 2,22 \cdot 10^{-16};$$

б) приведем пример решения задачи в MathCAD (рис. 5.21).

Метод трапеций при  $n = 12$   $f(x) := \sqrt{1 - \frac{1}{7} \cdot \sin(x)^2}$

$a := 0$   $b := \frac{\pi}{2}$   $n := 12$   $h := \frac{b-a}{n} = 0.1309$   $k := 0..12$   $x_k := a + k \cdot h$

$I_{\text{пр}12} := h \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) = 1.5131$  - результат

Метод трапеций при  $n = 24$

$n1 := 24$   $h1 := \frac{b-a}{n1} = 0.0654$   $k1 := 0..24$   $x_{k1} := a + k1 \cdot h1$

$I_{\text{пр}24} := h1 \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k1=1}^{n1-1} f(x_{k1}) \right) = 1.5131$  - результат

$R_n := |I_{\text{пр}12} - I_{\text{пр}24}| = 2.220446049250313 \times 10^{-16}$  погрешность вычисления

Рис. 5.21

### 5.11. Формула парабол (Симпсона) приближенного вычисления определенных интегралов

Рассмотрим квадратурную формулу Ньютона – Котеса 2-го порядка для всего отрезка интегрирования  $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Поступая аналогично с формулой трапеций для каждого удвоенного частичного отрезка  $[a; a + 2h]$ ,  $[a + 2h; a + 4h]$  и т. д., получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{3n} \left( f(a) + 2[f(a+2h) + f(a+4h) + \dots + f(a+(2n-2)h)] + \right. \\ &\quad \left. + 4[f(a+h) + f(a+3h) + \dots + f(a+(2n-1)h)] + f(b) \right) = \\ &= \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=2}^n f(a+(2k-2)h) + 4 \sum_{k=1}^n f(a+(2k-1)h) \right], \end{aligned}$$

где  $h = (b-a) / 2n$ ;

$n$  – число разбиений;

$k = \overline{1, n}$ .

Данную приближенную формулу называют общей формулой Симпсона или формулой парабол, поскольку в основе ее образования лежит замена графика функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_{2k-2}; x_{2k}]$  параболой, построенной по значениям  $f(x_{2k-2})$ ,  $f(x_{2k-1})$  и  $f(x_{2k})$  (рис. 5.22).

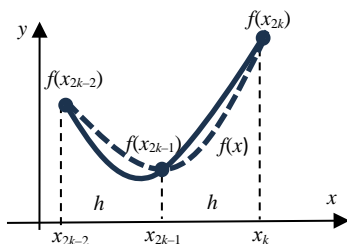


Рис. 5.22

Если подынтегральная функция трижды дифференцируемая, то погрешность формулы Симпсона можно оценить следующим образом

$$R_n \leq \frac{h^4}{12} \frac{n}{2} M_3 = \frac{(b-a)h^3}{192} M_3,$$

где  $M_3 = \max_{x \in [a; b]} |f'''(x)|$ .

Однако на практике для оценки погрешности формулы Симпсона пользуются методикой двойного пересчета значения интеграла

$$R_n = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15}.$$

**Пример.** С помощью формулы Симпсона вычислить определенный интеграл  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$  в Excel и MathCAD.

*Решение:*

а) реализуем формулу парабол для интеграла  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  при числе разбиений  $n = 4$ . Для этого протабулируем подынтегральную функцию

с шагом  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$ . Макет такой расчетной таблицы и результаты вычислений в Excel приведены на рис. 5.23.

	A	B	C	D	E
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом Симпсона при n = 4</b>				
2	x	f(x)	a	b	h
3	=C3	=EXP(A3^2)	0	1	=(D3-C3)/4
4	=A3+\$E\$3	=EXP(A4^2)			
5	=A4+\$E\$3	=EXP(A5^2)			
6	=A5+\$E\$3	=EXP(A6^2)			
7	=A6+\$E\$3	=EXP(A7^2)			
8					
9	Результат	=E3/3*((B3+B7)+2*СУММ(B5)+4*СУММ(B4;B6))			
10					

	A	B	C	D	E
1	<b>Вычисление определенного интеграла методом Симпсона при n = 4</b>				
2	x	f(x)	a	b	h
3	0	1,0000	0	1,0000	0,2500
4	0,2500	1,0645			
5	0,5000	1,2840			
6	0,7500	1,7551			
7	1,0000	2,7183			
8					
9	Результат	1,46371			

Рис. 5.23

Тогда значение определенного интеграла при 4 разбиениях отрезка интегрирования будет равно

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0,25}{3} \cdot [f(0) + f(1) + 2 \cdot f(0,5) + 4 \cdot (f(0,25) + f(0,75))] =$$

$$= \frac{0,25}{3} \cdot [1 + 2,7183 + 2 \cdot 1,284 + 4 \cdot (1,0645 + 1,7551)] = 1,46371.$$

Аналогично реализуем формулу парабол для интеграла  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  при числе разбиений  $2n = 8$ . Для этого протабулируем подынтегральную функцию с шагом  $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{8} = 0,125$ . Макет такой расчетной таблицы в Excel и результаты вычислений приведены на рис. 5.24.

Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 8$					
$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$	
=I3	=EXP(G3^2)	0	1	=(I3-I3)/8	
=G3+\$K\$3	=EXP(G4^2)				
=G4+\$K\$3	=EXP(G5^2)				
=G5+\$K\$3	=EXP(G6^2)				
=G6+\$K\$3	=EXP(G7^2)				
=G7+\$K\$3	=EXP(G8^2)				
=G8+\$K\$3	=EXP(G9^2)				
=G9+\$K\$3	=EXP(G10^2)				
=G10+\$K\$3	=EXP(G11^2)				
Результат	=K3/3*(H3+H11+2*СУММ(H5:H7;H9)+4*СУММ(H4;H6;H8;H10))				
$R_n$	=ABS(B9-H13)/15				

Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 8$					
$x$	$f(x)$	$a$	$b$	$h$	
0	1,0000	0	1,0000	0,1250	
0,1250	1,0157				
0,2500	1,0645				
0,3750	1,1510				
0,5000	1,2840				
0,6250	1,4779				
0,7500	1,7551				
0,8750	2,1503				
1,0000	2,7183				
Результат	1,46272				
$R_n$	0,00007				

Рис. 5.24

Тогда значение определенного интеграла при 8 разбиениях отрезка интегрирования будет равно

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0,125}{3} \cdot [f(0) + f(1) + 2 \cdot (f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)) + 4 \cdot (f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875))] = \frac{0,125}{3} \cdot [1 + 2,7183 + 2 \cdot (1,0645 + 1,284 + 1,7551) + 4 \cdot (1,0157 + 1,151 + 1,4779 + 1,7551)] = 1,46272.$$

Оценку погрешности приближенного вычисления заданного интеграла с одной значащей цифрой после запятой произведем по формуле

$$R_n = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15} = \frac{|1,46272 - 1,46371|}{15} = 0,00007.$$

Так как  $\varepsilon > R_n$ , то необходимая точность приближенного вычисления значения интеграла достигнута;

б) решение поставленной задачи в MathCAD показано на рис. 5.25.

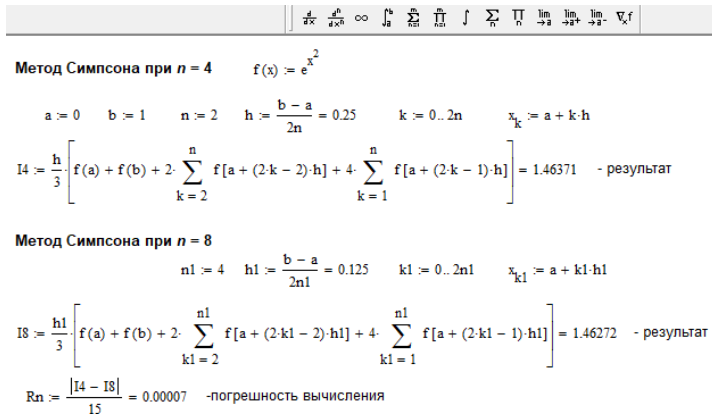


Рис. 5.25

## 5.12. Формула Гаусса

Пусть необходимо вычислить определенный интеграл вида:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

где  $f(x)$  – имеет высокую степень гладкости на интервале  $[-1; 1]$ .

Данную задачу можно решить с помощью квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k).$$

Гауссом было доказано, что для достижения наивысшей точности результата интегрирования необходимо в качестве узлов квадратурной формулы взять корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Коэффициенты  $C_k$  при этом вычисляются по формулам

$$C_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) \cdot (P_n'(x_k))^2}.$$

Рассмотрим применение этих формул.

При  $n = 1$  имеем одну узловую точку внутри отрезка  $[-1; 1]$ , которая определяется из уравнения

$$\frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = 0.$$

Так как  $(x^2 - 1)' = 2x$ , то узловую точку находим из уравнения

$$x = 0. \text{ Отсюда } x_1 = 0, \quad P_n'(x_1) = 1, \text{ то } C_1 = \frac{2}{(1 - x_1^2)} = 2.$$

При  $n = 2$  получаем две узловые точки внутри отрезка  $[-1; 1]$ , которые определяются из уравнения

$$\frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{d^2(x^2 - 1)^2}{dx^2} = 0.$$

Преобразовав его, получаем

$$\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Его решение  $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$ , а так как  $((x^2 - 1)^2)''' = 3 \cdot x^2$ , то общая формула для вычисления квадратурных коэффициентов приобретает вид  $C_k = \frac{2}{9 \cdot x_k^2 \cdot (1 - x_k^2)}$ .

Подставляя узловые точки, получаем:

$$\text{– при } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; C_1 = \frac{2}{9 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = 1;$$

$$\text{– при } C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; A_1 = \frac{2}{9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = 1.$$

Для  $n = 3, 5$  приведем таблицу узлов  $x_k$  и квадратурных коэффициентов  $C_k$  Гаусса без их вывода:

$$\text{– при } n = 3, x_2 = 0, x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}, A_2 = \frac{8}{9}, A_1 = A_3 = \frac{5}{9};$$

$$\text{– при } n = 4, x_3 = -x_2 = \frac{1}{35} \cdot \sqrt{15 - 2 \cdot \sqrt{15 \cdot \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{35}, A_2 = A_3 \approx 0,652,$$

$$x_4 = -x_1 = \frac{1}{35} \cdot \sqrt{15 + 2 \cdot \sqrt{15 \cdot \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{35}, A_1 = A_4 \approx 0,348;$$

$$\text{– при } n = 5, x_3 = 0, x_4 = -x_2 = \frac{1}{21} \sqrt{35 - 2 \cdot \sqrt{35 \cdot \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{7}, A_3 = 0,569,$$

$$A_2 = A_4 = 0,479;$$

$$x_5 = -x_1 = \frac{1}{21} \sqrt{35 + 2 \cdot \sqrt{35 \cdot \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{7}, A_1 = A_5 \approx 0,24.$$

В случае произвольного интервала интегрирования  $[a; b]$  (когда он не совпадает с отрезком  $[-1; 1]$ ) предварительно делают замену переменной

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2};$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left. \begin{array}{l} t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2} \\ dt = \frac{b-a}{2} \cdot dx \\ x_1 = -1; x_2 = 1 \end{array} \right| = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

А уже к преобразованному интегралу можно применить формулу Гаусса. Получим

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(t_k) + R_n(f),$$

где  $t_k = \frac{b-a}{2} \cdot x_k + \frac{a+b}{2};$

$x_k$  – узлы квадратурной формулы Гаусса;

$C_k$  – соответствующие коэффициенты;

$R_n(f)$  – остаток квадратуры.

Остаток квадратурной формулы Гаусса определяется по формуле

$$R_n(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \cdot M_n,$$

где  $M_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(2n)}(x)|.$

**Пример.** По формуле Гаусса в MathCAD вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \text{ при } n = 4. \text{ Определить погрешность применяемой методики как}$$

абсолютную разность полученного результата интеграла и его значения, посчитанного в автоматическом режиме.

*Решение.*

Так как интервал интегрирования не совпадает с отрезком  $[-1; 1]$ , применим замену

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1-0}{2} \cdot x + \frac{1+0}{2}; \quad t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ dt = \frac{1-0}{2} \cdot dx; \quad dt = \frac{1}{2} \cdot dx \\ x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^1 \frac{dx}{4 + (x+1)^2}.$$

Применим формулу Гаусса в MathCAD при числе разбиения  $n = 4$  отрезка интегрирования  $[-1; 1]$ . Применение методики вычисления определенного интеграла в MathCAD показано на рис. 5.26.

The screenshot displays the MathCAD interface for calculating the integral  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$  using the Gaussian quadrature method with  $n=4$  points. The steps shown are:

- Function Definition:**  $n := 4$ ,  $P(x, n) := \frac{1}{2^n n!} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]$
- Polynomial Expansion:**  $P(x, n) \rightarrow 3 \cdot x^2 (x^2 - 1) + \frac{3(x^2 - 1)^2}{8} + x^4$
- Weight Function:**  $G(x) := \frac{2}{(1-x^2) \left( \frac{d}{dx} P(x, n) \right)^2} \rightarrow \frac{2}{\left[ 10x^3 + \frac{15x(x^2 - 1)}{2} \right]^2 (x^2 - 1)}$
- Nodes:**  $k = 0, 1, n-1$ . The nodes  $X_k$  are calculated as:
 
$$X_k \rightarrow \frac{\frac{\left( \frac{2\sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right) \left[ \frac{15 \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \left( \frac{2\sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right)}{2} + 10 \left( \frac{2\sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7} \right) \right]^2}{2}}{\frac{\left( \frac{2\sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right) \left[ \frac{15 \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \left( \frac{2\sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right)}{2} + 10 \left( \frac{2\sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7} \right) \right]^2}{2}}$$
- Integration:**  $a := -1$ ,  $b := 1$ ,  $f(x) := \frac{1}{4 + (x+1)^2}$ . The result is:
 
$$\int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (C(X_k) f(X_k)) = 0.785$$
- Automatic Mode:**  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 0.785$  - результат в автоматическом режиме. The error is shown as  $|\ln - 1| = 0.0000001$ .

Рис. 5.26

## Лекция 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 6.1. Основные определения и понятия дифференциального уравнения

С помощью дифференциальных уравнений описываются сложные процессы и явления реального мира. Без использования аппарата дифференциальных уравнений невозможно изучение динамики движения тел, потоков жидкости и газа, различных переходных процессов и т. д. Практически любое явление, изменяющееся во времени, можно описать с помощью дифференциального уравнения.

Напомним, что *дифференциальными называются уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные*

$$F(x; y; y'; y''; y'''; y^{(4)}; \dots y^{(n)}) = 0.$$

*Порядок дифференциального уравнения (ДУ) определяется порядком старшей производной, входящей в него.* Поэтому вышеприведенное ДУ – это дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.

*Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Различают общее и частное решения.*

*Общим называется решение, которое содержит столько произвольных постоянных, каков порядок дифференциального уравнения.*

*Частное решение – это решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.*

Для нахождения произвольных постоянных задаются дополнительные условия. Их называют *начальными условиями*.

Нахождение частного решения дифференциального уравнения с заданными начальными называется решением задачи Коши.

На практике не существует общих методов решения дифференциальных уравнений. Только для небольшого класса ДУ разработаны точные методы, т. е. для таких уравнений можно аналитически решить уравнение, а значит найти искомую функцию.

В прикладных науках дифференциальные уравнения, решаемые аналитически, встречаются очень редко. Поэтому особое значение приобретают численные, т. е. приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Если ДУ имеет точное решение, то это решение может быть представлено в явном виде  $y = \varphi(x)$  или неявном –  $\varphi(x; y) = 0$ .

В приближенных методах решения получают не функцию, а таблицу, в которой указаны некоторые изолированные значения аргумента и соответствующие им значения неизвестной функции, т. е. функцию, заданную таблично.

## 6.2. Постановка задач, решаемых численными методами

Постановку задач, решаемых численными методами, рассмотрим на примере обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Такое ДУ может быть записано в следующих видах:  $y' = f(x; y)$  или  $F(x; y; y') = 0$ . Этот класс уравнений характеризуется тем, что содержит независимую переменную  $x$ , некоторую неизвестную функцию одной переменной  $y$  и первую производную этой функции  $y'$ .

Как уже отмечалось ранее, общим решением уравнения является функция  $y(x; C)$ , которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество и представляет фундаментальную систему решений, отличающихся друг от друга на постоянную величину  $C$ .

Чтобы получить единственное решение, которое называется частным решением ДУ, задают некоторые дополнительные условия. В зависимости от вида дополнительных условий различают задачу Коши и краевую задачу при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в них указывается начальное значение аргумента и соответствующие ему значения функции и производных этой функции, то в совокупности с ДУ данная постановка задачи называется задачей Коши. Например, для ДУ 1-го порядка начальное условие запишется в виде  $y(x_0) = y_0$ , а для ДУ 2-го порядка –  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$  и т. д.

*Задача Коши формулируется следующим образом:* дано дифференциальное уравнение  $y' = f(x; y)$  и начальное условие  $y(x_0) = y_0$ . Требуется найти функцию  $y(x)$  (частное решение ДУ), удовлетворяющую этому ДУ и заданному начальному условию.

Дополнительные условия называются *краевыми*, если значения функции и ее производных указываются в граничных точках некоторого отрезка изменения аргумента, а в совокупности с ДУ данная постановка задачи называется краевой задачей.

В отличие от задачи Коши, *краевая задача* ставится для дифференциальных уравнений более высоких порядков. В частности, для уравнения второго порядка  $y'' = f(x; y; y')$  краевая задача имеет следующую формулировку: дано дифференциальное уравнение  $y'' = f(x; y; y')$  и краевые условия  $y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1$ , где  $x_0$  и  $x_1$  – граничные значения независимой переменной отрезка  $[x_0; x_1]$ . В пределах

рассматриваемого отрезка  $[x_0; x_1]$  найти функцию  $y(x)$  (частное решение ДУ), удовлетворяющую этому ДУ и заданным краевым условиям.

Аналитическое решение задачи Коши или краевой задачи заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). К сожалению, круг задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ.

Краевые задачи нередко сводятся к задаче Коши, поэтому остановимся на рассмотрении методов численного решения задачи Коши.

Решить задачу Коши численно – значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов)  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и числа  $y_0$  (значения искомой функции в начальном узле  $x_0$ ), не находя самого решения  $y = f(x)$ , приближенно вычислить значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позволяет вместо отыскания точного решения  $y = f(x)$  в виде формулы получить таблицу значений этой функции.

Рассмотрим три основных численных метода, относящихся к классу так называемых одношаговых методов. Одношаговые методы характерны тем, что для получения очередной точки кривой  $y(x)$  требуется информация лишь о предыдущей точке.

### 6.3. Метод Эйлера

Метод Эйлера обеспечивает невысокую точность решения дифференциальных уравнений. Но он весьма прост по содержанию и по реализации в электронных таблицах и математических пакетах. Кроме того, метод является основой для других, более точных методов.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x; y); y(x_0) = y_0.$$

Для перехода от уже известной точки  $(x_0; y_0)$  решения ДУ к точке  $(x_1; y_1)$ , где  $x_1 = x_0 + h$ , в методе Эйлера применяется следующий алгоритм. Разложим искомую функцию  $y(x)$  в ряд Тейлора в достаточно малой  $h$ -окрестности точки  $x_0$ :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x_0) + \dots$$

Поскольку  $h$  мало, элементами ряда, содержащими  $h^2, h^3, \dots$ , можно пренебречь. Тогда из равенства получаем следующую точку решения ДУ

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0).$$

Так как  $y' = f(x; y)$ , то вышеприведенное равенство можем переписать в виде

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot f(x_0; y_0),$$

получив тем самым следующую точку  $(x_1; y_1)$  функции  $y(x)$ .

Обобщив результаты, можем сделать вывод, что любая точка интегральной кривой  $y(x)$  выражается через предыдущую по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Такой метод численного решения дифференциального уравнения называется *методом Эйлера*.

Геометрически метод Эйлера означает, что на каждом шаге мы аппроксимируем решение отрезком касательной, проведенной к графику решения в начале интервала.

Точность метода невелика и имеет порядок шага разбиения  $h$ . Говорят, что метод Эйлера – метод первого порядка, т. е. его точность растет линейно с уменьшением шага  $h$ .

**Пример.** Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

в Excel и MathCAD с шагом  $h = 0,1$  на отрезке  $[0; 1,7]$ . Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического

решения этого ДУ  $y' - y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$ .

*Решение:* а) рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении методом Эйлера для заданного ДУ, который показан на рис. 6.1.

	A	B	C	D
1				
2	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>yт</b>	<b>h</b>
3	0	0,5	=1/(2-SIN(A3))	0,1
4	=A3+\$D\$3	=B3+\$D\$3*B3^2*COS(A3)	=1/(2-SIN(A4))	
20	=A19+\$D\$3	=B19+\$D\$3*B19^2*COS(A19)	=1/(2-SIN(A20))	

Рис. 6.1

При этом результаты вычислений приведены на рис. 6.2.

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений  $|y_T - y|$  заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0; 2) 0,00127; 3) 0,00272; 4) 0,004355; 5) 0,006163; 6) 0,008109;  
 7) 0,010129; 8) 0,012116; 9) 0,013921; 10) 0,015345; 11) 0,016156;  
 12) 0,016112; 13) 0,015005; 14) 0,01272; 15) 0,009289; 16) 0,004929;  
 17) 3,27E-05; 18) 0,00489.

	A	B	C	D
1				
2	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>yt</b>	<b>h</b>
3	0	0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,525	0,52627	
5	0,2	0,55242	0,55515	
6	0,3	0,58233	0,58669	
7	0,4	0,61473	0,62089	
8	0,5	0,64954	0,65765	
9	0,6	0,68656	0,69669	
10	0,7	0,72547	0,73758	
11	0,8	0,76572	0,77964	
12	0,9	0,80657	0,82191	
13	1	0,84701	0,86316	
14	1,1	0,88577	0,90188	
15	1,2	0,92136	0,93636	
16	1,3	0,95212	0,96484	
17	1,4	0,97637	0,98566	
18	1,5	0,99257	0,9975	
19	1,6	0,99954	0,99957	
20	1,7	0,99662	0,99173	

Рис. 6.2

Таким образом, начиная со второго шага значения искомой функции, полученные по методу Эйлера, являются приближенными. Причем на каждом последующем шаге применения данной формулы ошибка вычислений может увеличиваться из-за систематического накопления;

б) реализацию задачи в MathCAD представим на рис. 6.3, а результаты вычислений – на рис. 6.4.

$$\begin{aligned}
 & a := 0 \quad b := 1.7 \quad h := 0.1 \quad n := \frac{b-a}{h} = 17 \quad i := 0..n-1 \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 0.5 \\
 & x_{i+1} := x_i + h \quad f(x,y) := y^2 \cdot \cos(x) \quad y_{i+1} := y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \quad g(x,y) = \frac{1}{2 - \sin(x)}
 \end{aligned}$$

Рис. 6.3

$\frac{d}{dx}$   $\frac{d^2}{dx^2}$   $\infty$   $\int_a^b$   $\sum_{k=1}^n$   $\prod_{k=1}^n$   $\int$   $\sum$   $\prod$   $\lim_{x \rightarrow a}$   $\lim_{x \rightarrow \infty}$   $\nabla_x f$

$$a := 0 \quad b := 1.7 \quad h := 0.1 \quad n := \frac{b-a}{h} = 17 \quad i := 0, 1, \dots, n-1 \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 0.5$$

$$x_{i+1} := x_i + h \quad f(x, y) := y^2 \cdot \cos(x) \quad y_{i+1} := y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \quad g(x, y) := \frac{1}{2 - \sin(x)}$$

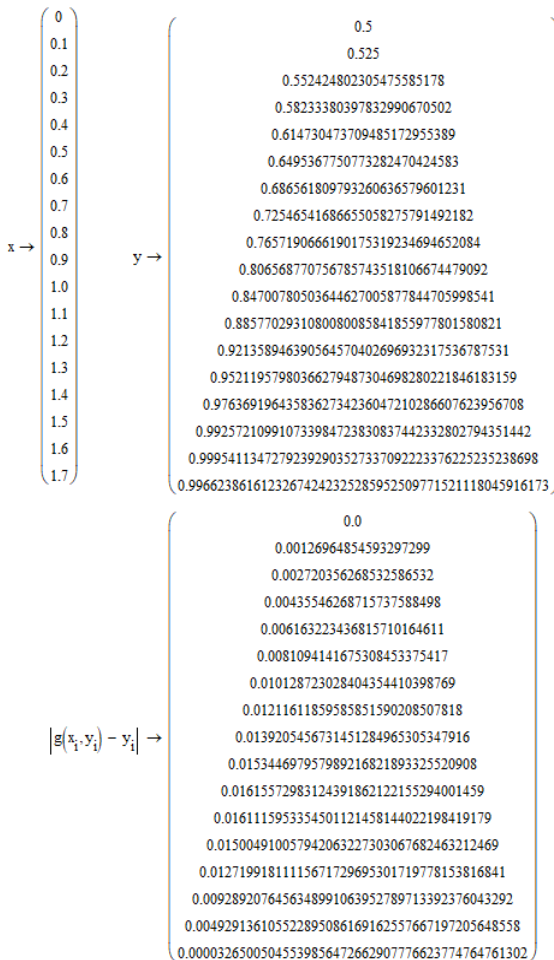


Рис. 6.4

Если построить графическое решение данного ДУ и сравнить его с точным (рис. 6.5), то можно заметить, что уже при небольших значениях  $i$  ошибка  $y_i$  существенная. Поэтому метод Эйлера на практике применяют очень редко.

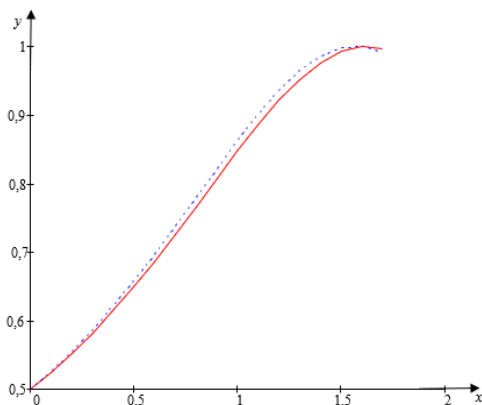


Рис. 6.5

Таким образом, по методу Эйлера можно сделать следующие выводы:

1) метод Эйлера – представитель одношаговых приближенных методов, в которых решение в  $i + 1$ -м узле получается на основе решения только в одном предыдущем  $i$ -м узле. Тем самым информация о более ранних уже вычисленных значениях игнорируется. В этом смысле одношаговые методы не самые экономичные и рациональные методы приближенного решения ДУ;

2) как и в любом одношаговом методе, начиная со второго шага исходное значение является приближенным, т. е. погрешность на каждом последующем шаге может систематически возрастать;

3) оценка погрешности метода затруднительна. Часто пользуются эмпирическим правилом двойного пересчета (половинного шага): дважды проходят заданный отрезок интегрирования ДУ с шагами  $h$  и  $h/2$ . Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных результатах дает основание считать эти знаки верными;

4) уменьшение шага  $h$  повышает точность вычислений, но резко увеличивает их объем. В целом метод Эйлера применим только для грубой оценки результатов решения ДУ.

## 6.4. Модифицированный метод Эйлера

Значительная погрешность при решении задачи Коши методом Эйлера обусловлена тем, что в разложении искомой функции  $y(x)$  удерживаются лишь два первых слагаемых. Очевидно, что, чем больше слагаемых будет удержано, тем точнее получится решение задачи Коши. Однако, чтобы сделать это, надо знать вторую и производные более высоких порядков функции  $y(x)$ . Приблизительно вычислить вторую производную можно способом конечных разностей:

$$y''(x_0) = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}.$$

Тогда, подставляя это выражение вместо второй производной в разложение функции  $y(x)$  в ряд Тейлора в достаточно малой  $h$ -окрестности точки  $x_0$  и отбрасывая члены, содержащие  $h^3$ ,  $h^4$  и т. д., получим:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}$$

или

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{2} \cdot (y'(x_0 + h) + y'(x_0)).$$

В вышеприведенном равенстве неизвестной величиной является значение первой производной в узле, следующем за начальным, т. е.  $y'(x_0 + h)$ . В качестве приближенной оценки первой производной в этом узле можно принять величину  $y^*(x_0 + h)$ , вычисленную по методу Эйлера. Тогда значение искомой функции в узле  $x_0 + h$  можно определить по формуле

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y(x_0) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0; y_0) + f(x_1; y_0 + h \cdot f(x_0; y_0))) = \\ &= y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0; y_0) + f(x_1; y_1^*)). \end{aligned}$$

Обобщив эту формулу, получим алгоритм модифицированного метода Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1}^*)), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

**Пример.** Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

модифицированным методом Эйлера в Excel и MathCAD с шагом  $h = 0,1$  на отрезке  $[0; 1,7]$ . Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ –

$$y = \frac{1}{2 - \sin(x)}.$$

*Решение:* а) рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении ДУ модифицированным методом Эйлера, который представлен на рис. 6.6.

	A	B	C	D	E
1					
2	<b>x</b>	<b>y1</b>	<b>y</b>	<b>yг</b>	<b>h</b>
3	0	0,5	0,5	=1/(2-SIN(A3))	0,1
4	=A3+\$E\$3	=C3+E\$3*C3^2*COS(A3)	=C3+\$E\$3/2*(B4^2*	=1/(2-SIN(A4))	
20	=A19+\$E\$3	=C19+E\$3*C19^2*COS(A19)	=C19+\$E\$3/2*(B20^*	=1/(2-SIN(A20))	

Рис. 6.6

При этом результаты вычислений приведены на рис. 6.7.

	A	B	C	D	E
1					
2	<b>x</b>	<b>y1</b>	<b>y</b>	<b>yг</b>	<b>h</b>
3	0	0,5	0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,525	0,52621	0,52627	
5	0,2	0,55376	0,55502	0,555145	
6	0,3	0,58521	0,58647	0,586689	
7	0,4	0,61933	0,62056	0,620894	
8	0,5	0,65603	0,65718	0,657646	
9	0,6	0,69508	0,69607	0,696691	
10	0,7	0,73606	0,73678	0,737582	
11	0,8	0,7783	0,77865	0,77964	
12	0,9	0,82089	0,82071	0,821913	
13	1	0,86258	0,86174	0,863164	
14	1,1	0,90187	0,90025	0,901882	
15	1,2	0,93701	0,93454	0,936364	
16	1,3	0,96619	0,96285	0,964839	
17	1,4	0,98765	0,98354	0,985658	
18	1,5	0,99998	0,9953	0,997501	
19	1,6	1,0023	0,99733	0,999574	
20	1,7	0,99443	0,98951	0,991734	

Рис. 6.7

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений  $|y_T - y|$  заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0; 2) 5,72E-05; 3) 0,000129855; 4) 0,00022; 5) 0,000331; 6) 0,000464; 7) 0,00062; 8) 0,000798; 9) 0,000994; 10) 0,001204; 11) 0,001419; 12) 0,001629; 13) 0,001823; 14) 0,001989; 15) 0,002118; 16) 0,002204; 17) 0,002239; 18) 0,002222.

Если сравнить их с соответствующими абсолютными погрешностями метода Эйлера, то можно сделать вывод, что модифицированный метод дает гораздо более точный результат решения ДУ;

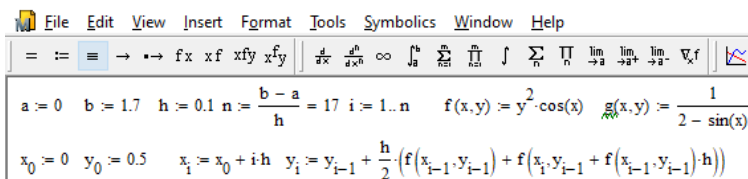


Рис. 6.8

б) реализацию задачи в MathCAD представим на рис. 6.8, результаты вычислений – на рис. 6.9, а погрешности вычислений – на рис. 6.10.

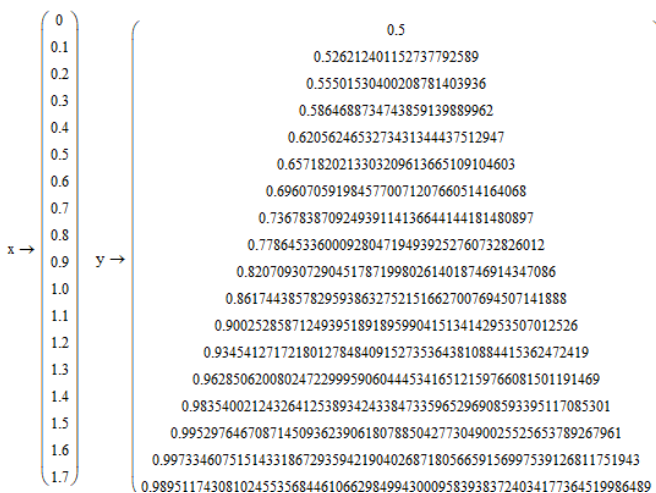


Рис. 6.9

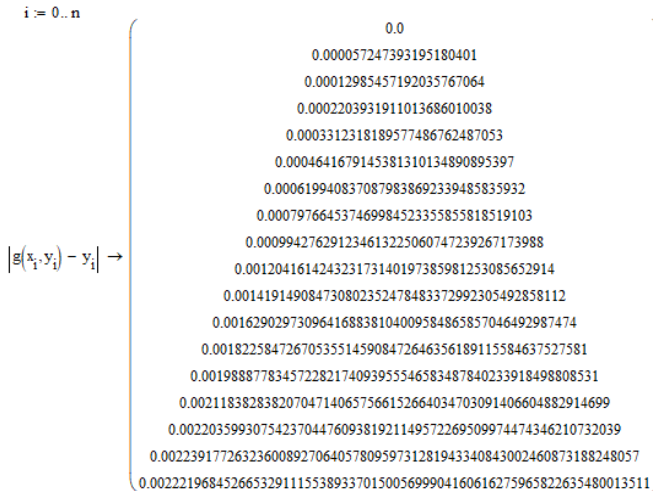


Рис. 6.10

Таким образом, по модифицированному методу Эйлера можно сделать следующий вывод:

если сравнивать результат решения задачи, полученный модифицированным методом Эйлера, с вычислениями по методу Эйлера, то вполне очевидно преимущество модифицированного метода. Однако погрешность метода все же достаточно велика и об этом можно судить, сравнивая полученное решение с точным.

### 6.5. Методы Рунге – Кутты

Методы Рунге – Кутты решения дифференциальных уравнений, как и методы Эйлера, принадлежат к классу одношаговых методов. Они являются своеобразным обобщением этого класса методик решения ДУ и обладают рядом достоинств:

- 1) обладают достаточно высокой точностью;
- 2) допускают использование переменного шага, что дает возможность уменьшить его там, где значения функции быстро изменяются, и увеличить его в противном случае;
- 3) являются легко применимыми, так как для начала расчета достаточно выбрать сетку  $x_n$  и задать значение  $y_0 = f(x_0)$ .

На практике метод Рунге – Кутты уже четвертого порядка позволяет получить приемлемый результат с точки зрения его точности вычислительного процесса.

Рассмотрим данную методику.

Приведем расчетные формулы метода для решения задач:

$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6.$$

Для оценки значения производной в этом методе используется четыре вспомогательных шага, на которых предварительно вычисляются величины

$$\begin{aligned} K_1 &= h \cdot f(x_i; y_i); \\ K_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1}{2}\right); \\ K_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2}{2}\right); \\ K_4 &= h \cdot f(x_i + h; y_i + K_3); \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

В данном методе погрешность на шаге вычислений соизмерима  $h^4$ .

**Пример.** Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

методом Рунге – Кутты четвертого порядка в Excel и MathCAD с шагом  $h = 0,1$  на отрезке  $[0; 1,7]$ . Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ –

$$y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$$

и расчетами, полученными методами Эйлера.

*Решение:* а) рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении ДУ модифицированным методом Рунге – Кутты четвертого порядка в Excel (рис. 6.11).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	x	K1	K2	K3	K4	y	гр	h
3	0					0,5		=1/(2-0,1)
4	=A3+\$H\$3-\$H\$3*F3^2*COS(A3)	=\$H\$3*(F3+B4/2)^2*C	=\$H\$3*(F3+C4/2)^2*C	=\$H\$3*(F3+D4)^2*COS(A3+\$H\$3)	=F3+(B4+2*C4+2*D4+E4)/6	=1/(2-		
19	=A18+\$H\$3-\$H\$3*F18^2*COS(A1	=\$H\$3*(F18+B19/2)^2*	=\$H\$3*(F18+C19/2)^2*	=\$H\$3*(F18+D19)^2*COS(A18+\$H	=F18+(B19+2*C19+2*D19+E1	=1/(2-		
20	=A19+\$H\$3-\$H\$3*F19^2*COS(A1	=\$H\$3*(F19+B20/2)^2*	=\$H\$3*(F19+C20/2)^2*	=\$H\$3*(F19+D20)^2*COS(A19+\$H	=F19+(B20+2*C20+2*D20+E1	=1/(2-		

Рис. 6.11

При этом результаты вычислений приведены на рис. 6.12.

1	A	B	C	D	E	F	G	H
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yt	h
3	0					0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,025	0,02623	0,0263	0,02756	0,52627	0,52627	
5	0,2	0,02756	0,02884	0,02891	0,03021	0,5515	0,5515	
6	0,3	0,0302	0,03151	0,03158	0,03289	0,58669	0,58669	
7	0,4	0,03288	0,03417	0,03424	0,03551	0,62089	0,62089	
8	0,5	0,03551	0,03673	0,0368	0,03796	0,65765	0,65765	
9	0,6	0,03796	0,03903	0,03909	0,04007	0,69669	0,69669	
10	0,7	0,04006	0,04089	0,04094	0,04162	0,73758	0,73758	
11	0,8	0,04161	0,04208	0,04211	0,04235	0,77964	0,77964	
12	0,9	0,04235	0,04232	0,04232	0,042	0,82191	0,82191	
13	1	0,04199	0,04133	0,0413	0,04026	0,86316	0,86316	
14	1,1	0,04026	0,03882	0,03876	0,0369	0,90188	0,90188	
15	1,2	0,0369	0,0346	0,03451	0,03177	0,93636	0,93636	
16	1,3	0,03177	0,02859	0,0285	0,0249	0,96484	0,96484	
17	1,4	0,0249	0,02092	0,02083	0,01651	0,98566	0,98566	
18	1,5	0,01651	0,0119	0,01185	0,00704	0,9975	0,99750	
19	1,6	0,00704	0,00208	0,00207	-0,00292	0,99957	0,99957	
20	1,7	-0,00292	-0,00788	-0,00784	-0,01267	0,99173	0,99173	
21								

Рис. 6.12

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений  $|y_T - y|$  заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0; 2) 0,000000008; 3) 0,000000021; 4) 0,000000040; 5) 0,000000066;
- 6) 0,000000099; 7) 0,000000139; 8) 0,000000183; 9) 0,000000228;
- 10) 0,000000269; 11) 0,000000301; 12) 0,000000318; 13) 0,000000320;
- 14) 0,000000308; 15) 0,000000290; 16) 0,000000275; 17) 0,000000271;
- 18) 0,000000284.

Если сравнить их с соответствующими абсолютными погрешностями метода Эйлера и модифицированного метода, то можно сделать вывод, что метод Рунге – Кутты четвертого порядка дает очень хороший результат с точки зрения близости к точному решению ДУ;

б) реализацию задачи в MathCAD представим на рис. 6.13, результаты вычислений – на рис. 6.14, а погрешности вычислений – на рис. 6.15.

Рис. 6.13

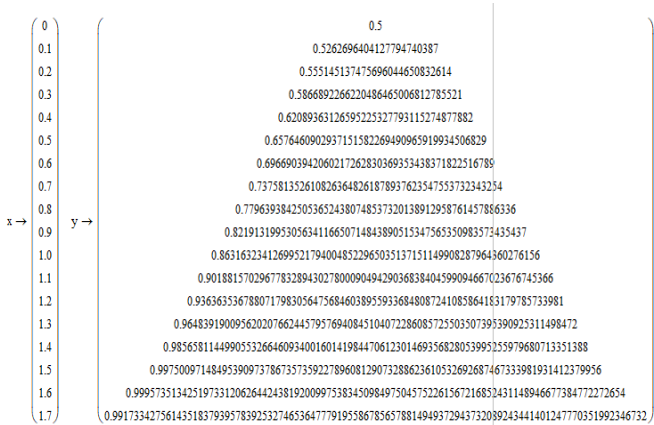


Рис. 6.14

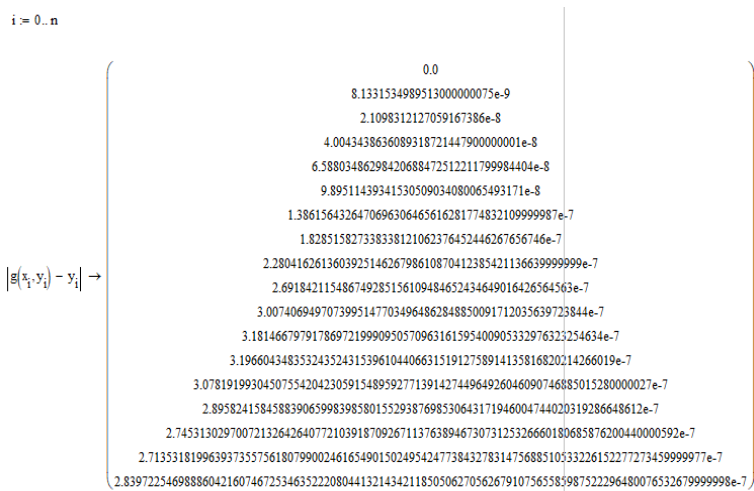


Рис. 6.15

Поскольку большинство систем ДУ и ДУ высших порядков могут быть сведены к ДУ первого порядка, рассмотренные методы можно применять для их решения.

## 6.6. Погрешность схем Рунге – Кутты

Эффективная оценка погрешности метода Рунге – Кутты затруднительна. Одним из наиболее простых, широко применяемых и достаточно эффективных методов оценки погрешности и уточнения полученных результатов в приближенных вычислениях с использованием сеток является правило (или принцип) Рунге.

Пусть известно, что на каждом шаге допущена погрешность, приблизительно пропорциональная  $h^{p+1}$  ( $p \geq 1$  – порядок применяемого метода), и  $2n$  представляет собой общее число шагов вычисления.

В таком случае, предполагая, что погрешность на каждом шаге одинакова и та же, разность между точными и приближенными значениями искомой функции при шаге разбиения  $h$  в точке  $x_{2n}$  будет составлять

$$y(x_{2n}) - \hat{y}(x_{2n}; h) = 2Anh^{p+1},$$

где  $y(x_{2n})$  – точное значение искомой функции в некоторой точке  $x_{2n}$ ;

$\hat{y}(x_{2n}; h)$  – приближенное значение искомой функции в точке  $x_{2n}$ ;

$x_{2n} = x_0 + 2nh$  – точка, в которой оценивается погрешность решения;

$A$  – коэффициент пропорциональности.

Согласно Рунге, производим тем же методом вторичный пересчет искомого решения  $y$  с двойным шагом  $H = 2h$ . Тогда в силу нашего предположения будет допущена погрешность для исследуемого значения сеточной функции

$$y(x_n) - \hat{y}(x_n; 2h) = An(2h)^{p+1},$$

где  $y(x_{2n})$  – точное значение искомой функции в точке, совпадающей по значению с  $x_{2n}$ ;

$\hat{y}(x_n; h)$  – приближенное значение искомой функции в точке  $x_{2n}$ ;

$x_n = x_0 + nH$  – точка, в которой оценивается погрешность решения.

Исключив из вышеприведенных формул точное решение и выразив из образованного уравнения коэффициент пропорциональности  $A$ , получим

$$A = \frac{|\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)|}{2n(2^p - 1)h^{p+1}}.$$

Тогда погрешность решения ДУ в совпадающих узлах сеток для применяемого метода можно оценить по формуле

$$\varepsilon_{2n} = \frac{|\widehat{y}(x_n; 2h) - \widehat{y}(x_{2n}; h)|}{2^p - 1},$$

а точное решение –

$$y(x_{2n}) = \widehat{y}(x_{2n}; h) - \frac{\widehat{y}(x_n; 2h) - \widehat{y}(x_{2n}; h)}{2^p - 1}.$$

В частности, при применении метода Рунге – Кутты четвертого порядка можно использовать следующие формулы оценки погрешности вычисления и точного решения соответственно:

$$\varepsilon_{2n} = \frac{|\widehat{y}(x_n; 2h) - \widehat{y}(x_{2n}; h)|}{15},$$

$$y(x_{2n}) = \widehat{y}(x_{2n}; h) - \frac{\widehat{y}(x_n; 2h) - \widehat{y}(x_{2n}; h)}{15}.$$

Поэтому для определения правильности выбора шага  $h$  на практике обычно на каждом этапе из двух шагов применяют двойной пересчет (принцип Рунге). А именно, исходя из начального верного значения искомой функции  $y(x_0)$ , вычисляют величину  $y(x_0 + 2h)$  двумя способами: один раз с шагом  $h$ , а второй раз с двойным шагом  $2h$ . Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то выбор шага  $h$  считают обоснованным. В противном случае шаг уменьшают в два раза и повторяют указанную процедуру для нового шага.

**Пример.** Методом Рунге – Кутты четвертого порядка в Excel численно решить задачу Коши  $\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x$ ,  $y(0) = 0,5$  на отрезке  $[0; 1,7]$  сначала с шагом  $h = 0,05$ , а затем – с шагом  $h = 0,1$ . Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ –  $y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$ . В совпадающих узлах по прави-

лу Рунге оценить погрешности  $\varepsilon$  вычисления решения ДУ.

*Решение.* Результаты расчетов с шагом  $h = 0,05$  показаны на рис. 6.16, а с шагом  $h = 0,1$  – на рис. 6.17.

Методика реализации принципа Рунге для данного примера показана на рис. 6.18.

Анализ представленных результатов показывает, что оценка точного решения, полученного по правилу Рунге, практически идеально совпадает с результатами аналитического решения в рассматриваемых совпадающих узлах решения ДУ.

I	A	B	C	D	E	F	G	H
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yr	h
3	0					0,5	0,5	0,05
4	0,1	0,0125	0,01281	0,01282	0,01313	0,51282	0,51282	
5	0,1	0,01313	0,01345	0,01346	0,01378	0,52627	0,52627	
6	0,2	0,01378	0,0141	0,01411	0,01444	0,54038	0,54038	
7	0,2	0,01444	0,01476	0,01477	0,0151	0,55515	0,55515	
8	0,3	0,0151	0,01543	0,01544	0,01577	0,57058	0,57058	
9	0,3	0,01577	0,0161	0,01611	0,01644	0,58669	0,58669	
10	0,4	0,01644	0,01677	0,01678	0,0171	0,60346	0,60346	
11	0,4	0,0171	0,01743	0,01744	0,01775	0,62089	0,62089	
12	0,5	0,01775	0,01807	0,01808	0,01838	0,63896	0,63896	
13	0,5	0,01838	0,01868	0,01869	0,01898	0,65765	0,65765	
14	0,6	0,01898	0,01926	0,01926	0,01953	0,6769	0,67690	
15	0,6	0,01953	0,01978	0,01979	0,02003	0,69669	0,69669	
16	0,7	0,02003	0,02025	0,02026	0,02046	0,71694	0,71694	
17	0,7	0,02046	0,02064	0,02065	0,02081	0,73758	0,73758	
18	0,8	0,0208	0,02094	0,02094	0,02105	0,75852	0,75852	
19	0,8	0,02105	0,02113	0,02113	0,02117	0,77964	0,77964	
20	0,9	0,02117	0,02119	0,02119	0,02116	0,80082	0,80082	
21	0,9	0,02116	0,0211	0,0211	0,021	0,82191	0,82191	
22	1	0,021	0,02085	0,02085	0,02066	0,84275	0,84275	
23	1	0,02066	0,02042	0,02041	0,02013	0,86316	0,86316	
24	1,1	0,02013	0,01979	0,01978	0,0194	0,88294	0,88294	
25	1,1	0,0194	0,01895	0,01894	0,01845	0,90188	0,90188	
26	1,2	0,01845	0,0179	0,01789	0,01728	0,91976	0,91976	
27	1,2	0,01728	0,01662	0,0166	0,01589	0,93636	0,93636	
28	1,3	0,01589	0,01511	0,0151	0,01427	0,95146	0,95146	
29	1,3	0,01427	0,01339	0,01338	0,01245	0,96484	0,96484	
30	1,4	0,01339	0,01247	0,01246	0,0115	0,9769	0,9769	
31	1,4	0,0115	0,01064	0,01064	0,01004	0,98566	0,98566	
32	1,5	0,01064	0,00975	0,00975	0,00917	0,99173	0,99173	
33	1,5	0,00917	0,00826	0,00826	0,0077	0,9957	0,9957	
34	1,6	0,00826	0,00737	0,00737	0,0068	0,99957	0,99957	
35	1,6	0,0068	0,00594	0,00594	0,0054	1,00004	1,00004	
36	1,7	0,0054	0,00497	0,00497	0,0045	1,0001	1,0001	
37	1,7	0,0045	0,0041	0,0041	0,0037	1,00009	1,00009	
38	1,8	0,0037	0,0033	0,0033	0,0029	1,00004	1,00004	
39	1,8	0,0029	0,0026	0,0026	0,0022	1,00001	1,00001	
40	1,9	0,0022	0,0019	0,0019	0,0016	1,00001	1,00001	
41	1,9	0,0016	0,0013	0,0013	0,001	1,00001	1,00001	
42	2,0	0,001	0,0008	0,0008	0,0006	1,00001	1,00001	
43	2,0	0,0006	0,0004	0,0004	0,0003	1,00001	1,00001	
44	2,1	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	1,00001	1,00001	
45	2,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
46	2,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
47	2,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
48	2,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
49	2,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
50	2,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
51	2,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
52	2,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
53	2,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
54	2,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
55	2,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
56	2,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
57	2,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
58	2,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
59	2,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
60	2,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
61	2,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
62	3,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
63	3,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
64	3,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
65	3,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
66	3,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
67	3,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
68	3,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
69	3,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
70	3,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
71	3,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
72	3,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
73	3,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
74	3,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
75	3,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
76	3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
77	3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
78	3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
79	3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
80	3,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
81	3,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
82	4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
83	4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
84	4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
85	4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
86	4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
87	4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
88	4,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
89	4,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
90	4,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
91	4,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
92	4,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
93	4,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
94	4,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
95	4,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
96	4,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
97	4,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
98	4,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
99	4,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
100	4,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
101	4,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
102	5,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
103	5,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
104	5,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
105	5,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
106	5,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
107	5,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
108	5,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
109	5,3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
110	5,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
111	5,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
112	5,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
113	5,5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
114	5,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
115	5,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
116	5,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
117	5,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
118	5,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
119	5,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1,00001	
120	5,9	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1,00001	1	

	O	P	Q	R	S
1					
2					
3	<b>y</b>	<b>yt</b>	<b>yi(h)-yi(2h)</b>	<b>ε</b>	<b>yt*</b>
2	0,5	=1/(2-SIN(J3))			
4	=O3+(K4+2*L4+2*M4+N4)/6	=1/(2-SIN(J4))	=(O4-F5)/15	=ABS(Q4)	=O4-Q4
20	=O19+(K20+2*L20+2*M20+N20)/6	=1/(2-SIN(J20))	=(O20-F37)/15	=ABS(Q20)	=O20-Q20

Рис. 6.18

### 6.7. Многошаговые методы Адамса

Если дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет в правой части сложное аналитическое выражение, значение которого быстро изменяется при незначительном изменении аргумента, то рассмотренные выше одношаговые методы не дают желаемую точность вычислений. В таких случаях применяют многошаговые методы решения ДУ. К таким методам относятся *экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса*.

*Экстраполяционный метод Адамса.* Пусть для дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  заданы начальные условия  $x = x_0, y = y_0$ , а также известны или определены с помощью одношаговых методов еще  $m$  точек искомой функции  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Требуется найти решение уравнения  $y' = f(x, y)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Разобьем отрезок  $[a, b]$  равномерно на  $n$  частей точками  $x_i = x_0 + hi, i = 0, 1, \dots, n, h = (b - a)/n$ . Выберем произвольно элементарный отрезок, на котором проинтегрируем дифференциальное уравнение

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx \quad \text{или} \quad y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx.$$

Если обозначить

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx,$$

то рекуррентная формула метода примет вид

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона. С учетом  $t = (x - x_i)/h$  получим:

$$y' = y'_i + t \cdot \Delta y'_{i-1} + \frac{t \cdot (t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t \cdot (t+1) \cdot (t+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3} + \dots$$

Подставим полученное выражение для  $y'$  в интегральное уравнение и, учитывая, что  $dx = hdt$ , имеем

$$\Delta y_i = h \cdot \int_0^1 (y'_i + t \Delta y'_{i-1} + \frac{t^2 + t}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3 + 3t^2 + 2t}{6} \Delta^3 y'_{i-3} + \dots) dt =$$

$$h y'_i + \frac{1}{2} \Delta (h \cdot y'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2 (h \cdot y'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3 (h \cdot y'_{i-3}) + \dots + C_m \Delta^3 (h \cdot y'_{i-m}) + \dots ,$$

где  $C_m = \int_0^1 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+m-1)}{m!} dt$ .

Обозначим через  $q_i = y'_i h = f(x_i, y_i)h$ , где  $i \in \overline{0, N}$ , тогда для любой разности  $\Delta^m q_i = \Delta^m (y'_i h)$ , будет иметь место выражение

$$\Delta y_i = q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta q_{i-3} + \dots + C_m \Delta^m q_{i-m} + \dots ,$$

используемое для получения решения ДУ

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i .$$

Две последние формулы являются основными в экстраполяционном методе Адамса.

Погрешность экстраполяционного метода Адамса можно оценить по формуле

$$|R_m| \leq h^{m+2} C_{m+1} M_{m+2} ,$$

где  $M_{m+2} = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(m+2)}(x)|$ .

Для метода Адамса характерно убывание абсолютных величин конечных разностей. Этим обстоятельством обусловлен выбор  $m$  и  $h$ . Чем меньше  $h$ , тем ниже будет  $m$  – порядок конечных разностей. Однако это приводит к увеличению узловых точек, а значит, и применению укороченных формул, что в свою очередь связано с ростом погрешности вычислений. Обычно  $m$  и  $h$  стараются подобрать так, чтобы последняя конечная разность, участвующая в вычислениях, была практически постоянной. Обрывать формулу на практически постоянной разности удобно еще из тех соображений, что это обстоятельство может быть использовано для текущего контроля вычислений.

Чаще всего применяется экстраполяционный метод Адамса, ограниченный тремя конечными разностями.

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2\Delta q_{i-1} + 5/12\Delta^2 q_{i-2} + 3/8\Delta^3 q_{i-3}.$$

В этом случае для начала процесса вычисления нужны четыре начальных значения  $y_0, y_1, y_2$  и  $y_3$ , которые можно определить любым известным методом. Далее, зная  $y_0, y_1, y_2$  и  $y_3$ , находят  $q_0 = hy_0' = hf(x_0, y_0)$ ;  $q_2 = hy_2' = hf(x_2, y_2)$ ;  $q_3 = hy_3' = hf(x_3, y_3)$  и составляют таблицу конечных разностей величин  $q$  (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Конечных разностей

№ п/п	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$y_i' = f(x; y)$	$q_i = hy_i'$	Конечные разности		
0	$x_0$	$y_0$		$f(x_0; y_0)$	$q_0$	$\Delta q_0$	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	$x_1$	$y_1$		$f(x_1; y_1)$	$q_1$	$\Delta q_1$	$\Delta^2 q_1$	...
2	$x_2$	$y_2$		$f(x_2; y_2)$	$q_2$	$\Delta q_2$	...	...
3	$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$f(x_3; y_3)$	$q_3$	...	...	...
4	$x_4$	$y_4$	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...	...	...

Метод Адамса заключается в продолжении данной таблицы разностей с помощью формулы для  $\Delta y_i$ . Используя уже вычисленные  $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1$  и  $\Delta^3 q_0$ , расположенные в таблице диагонально, по формуле для  $\Delta y_i$ , полагая  $n = 3$ , получим

$$\Delta y_3 = q_3 + 0,5 \cdot \Delta q_2 + 5/12 \cdot \Delta^2 q_1 + 3/8 \cdot \Delta^3 q_0$$

и  $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ . Затем, используя  $x_4$  и  $y_4$ , находят  $f(x_4; y_4), q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2$  и  $\Delta^3 q_1$ , т. е. новую диагональ. По этим данным определяют значение  $\Delta y_4$ , которое тут же вносят в таблицу, и находят  $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ .

Таблицу продолжают по описанному алгоритму до ее заполнения. Для того чтобы избежать грубых ошибок при реализации данной методики, достаточно просто следить за  $\Delta^3 q_i$ , чтобы они практически не изменялись, т. е. были постоянными. Этого можно добиться, подбирая  $h$  каждый раз такой, чтобы выражение для оценки погрешности было  $|\Delta^3 q_{i-1} - \Delta^3 q_i| < \varepsilon$ . На практике же шаг  $h$  выбирают постоянным, руководствуясь неравенством  $h^4 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность решения.

*Интерполяционный метод Адамса (уточняющая формула).* Алгоритм интерполяционного метода Адамса можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + q_{i+1} - C_1 \cdot \Delta q_i - C_2 \cdot \Delta^2 q_{i-1} - \dots - C_m \cdot \Delta^m q_{i-m+1} + \dots,$$

где  $q_i = h \cdot f(x_i, y_i)$ ;

$$C_m = \int_{-1}^0 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+m-1)}{m!} dt.$$

Для применения интерполяционной формулы Адамса на начальном этапе необходимо знать приближенное значение функции в точке  $x_{i+1}$ . Для этого можно использовать экстраполяционную формулу Адамса. Тогда интерполяционная формула Адамса служит как уточняющая в методе Адамса.

На практике поступают следующим образом:

1) по экстраполяционной формуле Адамса вычисляют  $y_{n+1}$ ;

2) затем это значение уточняют с помощью интерполяционной формулы  $\hat{y}_{n+1}$ ;

3) если  $|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}| < \varepsilon$ , то в качестве уточненного решения принимается  $\hat{y}_{n+1}$ , иначе производится уточнение для  $\hat{y}_{n+1}$  по интерполяционной формуле Адамса.

**Пример.** Экстраполяционным методом Адамса 3-го порядка в Excel с точностью до 0,00001 численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5 \quad \text{на отрезке } [0; 1,7].$$

*Решение.* Шаг разбиения заданного отрезка  $[0; 1,7]$  выберем из условия  $h^4 < \varepsilon$ , решив неравенство  $h^4 < 0,00001$ . Получим, что  $0 < h < 0,056$ . В качестве шага разбиения отрезка  $[0; 1,7]$  возьмем  $h = 0,05$ . Первые три значения искомой функции вычислим с использованием метода Рунге – Кутты 4-го порядка, а для всех последующих применим алгоритм экстраполяционного метода Адамса.

Макет-таблицу применения экстраполяционного метода Адамса покажем на рис. 6.19, а результаты расчетов – на рис. 6.20.

	A	F	G	H	I	J	K	L	M
1									
2	x	y	$\Delta y_i$	$y_i' = f(x; y)$	$q_i = h y_i'$	Конечные разности			h
3	0	0,5		=F3^2*COS(A3)	=SM3*H3	=I4-I3	=J4-J3	=K4-K3	0,05
4	=A3+SM3	=F3+(B4+2*C4+2*D4+E4)/6		=F4^2*COS(A4)	=SM3*H4	=I5-I4	=J5-J4	=K5-K4	
5	=A4+SM3	=F4+(B5+2*C5+2*D5+E5)/6		=F5^2*COS(A5)	=SM3*H5	=I6-I5	=J6-J5	=K6-K5	
6	=A5+SM3	=F5+(B6+2*C6+2*D6+E6)/6	=I6+1/2*J5+5/12*K4+3/8*L3	=F6^2*COS(A6)	=SM3*H6	=I7-I6	=J7-J6	=K7-K6	
37	=A36+SM3	=F36+G36	=I37+1/2*J36+5/12*K35+3/8*L3	=F37^2*COS(A3)	=SM3*H37				

Рис. 6.19

	A	F	G	H	I	J	K	L	M
2	x	y	$\Delta y_i$	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = h y'_i$	Конечные разности			h
3	0	0,5		0,25	0,0125	0,00063253	1,3744E-05	-2,436E-06	0,05
4	0,05	0,512815		0,262650604	0,01313253	0,00064627	1,1308E-05	-3,119E-06	
5	0,1	0,526270		0,275576097	0,0137788	0,00065758	8,1894E-06	-3,943E-06	
6	0,15	0,540376	0,01477	0,288727756	0,01443639	0,00066577	4,2469E-06	-4,849E-06	
7	0,2	0,555145	0,01544	0,302043203	0,01510216	0,00067002	-6,02E-07	-5,877E-06	
8	0,25	0,570583	0,01611	0,315443588	0,01577218	0,00066942	-6,479E-06	-7,025E-06	
9	0,3	0,586690	0,01677	0,328831933	0,0164416	0,00066294	-1,35E-05	-8,283E-06	
10	0,35	0,603464	0,01743	0,34209069	0,01710453	0,00064943	-2,179E-05	-9,639E-06	
11	0,4	0,620896	0,01807	0,355079353	0,01775397	0,00062764	-3,143E-05	-1,107E-05	
12	0,45	0,638966	0,01868	0,367632251	0,01838161	0,00059622	-4,25E-05	-1,254E-05	
13	0,5	0,657649	0,01926	0,379556598	0,01897783	0,00055372	-5,504E-05	-1,4E-05	
14	0,55	0,676908	0,01979	0,390630989	0,01953155	0,00049868	-6,904E-05	-1,539E-05	
15	0,6	0,696695	0,02025	0,400604588	0,02003023	0,00042964	-8,444E-05	-1,663E-05	
16	0,65	0,716947	0,02064	0,409197295	0,02045986	0,0003452	-0,0001011	-1,76E-05	
17	0,7	0,737588	0,02094	0,416101221	0,02080506	0,00024413	-0,0001187	-1,821E-05	
18	0,75	0,758524	0,02112	0,420983808	0,02104919	0,00012546	-0,0001369	-1,831E-05	
19	0,8	0,779647	0,02118	0,423492963	0,02117465	-1,142E-05	-0,0001552	-1,777E-05	
20	0,85	0,800828	0,02109	0,423264531	0,02116323	-0,0001666	-0,0001173	-1,646E-05	
21	0,9	0,821922	0,02084	0,419932352	0,02099662	-0,0003396	-0,0001894	-1,428E-05	
22	0,95	0,842764	0,02041	0,413141022	0,02065705	-0,000529	-0,0002037	-1,113E-05	
23	1	0,863172	0,01978	0,402561264	0,02012806	-0,0007327	-0,0002148	-6,987E-06	
24	1,05	0,882951	0,01894	0,387907565	0,01939538	-0,0009475	-0,0002218	-1,898E-06	
25	1,1	0,901890	0,01788	0,368957407	0,01844787	-0,0011693	-0,0002237	4,0188E-06	
26	1,15	0,919770	0,01666	0,345571058	0,01727855	-0,001393	-0,0002197	1,0552E-05	
27	1,2	0,936369	0,0151	0,317710559	0,01588553	-0,0016127	-0,0002091	1,7406E-05	
28	1,25	0,951464	0,01338	0,285456286	0,01427281	-0,0018218	-0,0001917	2,4209E-05	
29	1,3	0,964841	0,01146	0,249019287	0,01245096	-0,0020136	-0,0001675	3,0547E-05	
30	1,35	0,976297	0,00936	0,208747678	0,01043738	-0,0021811	-0,000137	3,5994E-05	
31	1,4	0,985655	0,00711	0,165125643	0,00825628	-0,0023181	-0,000101	4,0159E-05	
32	1,45	0,992760	0,00473	0,118764123	0,00593821	-0,0024191	-6,082E-05	4,2726E-05	
33	1,5	0,997493	0,00228	0,070382999	0,00351915	-0,0024799	-1,81E-05	4,3498E-05	
34	1,55	0,999774	-0,0002	0,02078544	0,00103927	-0,002498	2,5403E-05	4,2413E-05	
35	1,6	0,999563	-0,0027	-0,029174025	-0,0014587	-0,0024726	6,7815E-05		
36	1,65	0,996864	-0,0051	-0,078625436	-0,0039313	-0,0024048			
37	1,7	0,991723	-0,0075	-0,126720541	-0,006336				

Рис. 6.20

## 6.8. Метод последовательного дифференцирования при решении дифференциальных уравнений

Пусть поставлена задача Коши для ДУ второго порядка, т. е. требуется решить дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x; y, y')$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1.$$

Решение ДУ  $y = y(x)$  будем искать в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

В данном разложении два первых коэффициента  $y(x_0)$  и  $y'(x_0)$  можно взять из начальных условий  $y(x_0) = y_0$ ;  $y'(x_0) = y_1$ ,  $y''(x_0)$  находим подстановкой  $x_0, y_0, y_1$  в исходное ДУ, а неизвестные значения производных  $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0), \dots$  получаем путем последовательного дифференцирования приведенного уравнения, считая в нем  $y_0$  функцией, заданной неявно, с учетом значений производных более низкого порядка в точке  $x_0$ .

Хочется отметить то, что представленный выше ряд является частным решением уравнения только для тех значений  $x$ , при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением исходного ДУ.

Рассмотренный способ применим для построения решения уравнения любого порядка.

**Пример.** Методом последовательного дифференцирования записать решение ДУ в виде разложения его в ряд Тейлора с пятью не нулевыми членами

$$y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Решение ДУ  $y = y(x)$  будем искать в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!} \cdot (x+1) + \frac{y''(-1)}{2!} \cdot (x+1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(-1)}{n!} \cdot (x+1)^n + \dots$$

В нашем случае  $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$ . Подставляя  $x = -1$  и  $y(-1) = 2$  в исходное ДУ, получим  $y'(x_0) = (-1)^2 + 2^2 = 5$ .

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное ДУ

$$y''' = 2x + 2yy'; \quad y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'';$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y''' + 2yy'' = 6y'y'' + 2yy''.$$

При  $x = -1$

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0; \quad y^{(4)}(-1) = 22,5; \quad y^{(5)}(-1) = 15.$$

Тогда получаем

$$y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (x+1) + \frac{5}{2} \cdot (x+1)^2 + \frac{15}{16} \cdot (x+1)^4 + \dots + \frac{1}{8} \cdot (x+1)^5 + \dots$$

## 6.9. Решение дифференциальных уравнений и систем в прикладной программе MathCAD

MathCAD имеет ряд встроенных функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате решения получается матрица, содержащая значения функции, вычисленные на некотором множестве точек (на некоторой сетке значений).

Каждая из встроенных функций, предназначенных для решения ОДУ, требует, чтобы было задано следующее:

- начальные условия;
- множество точек, в которых необходимо найти решение;
- само дифференциальное уравнение.

На практике наибольшее применение для решения ДУ получила функция *rkfixed()*, которая использует для поиска решения метод Рунге – Кутты четвертого порядка. В результате решения получается матрица, имеющая два столбца. Первый столбец – точки, в которых ищется решение ДУ. Второй – это столбец значений найденного решения в соответствующих точках. Функция *rkfixed* (*y*, *x*<sub>1</sub>, *x*<sub>2</sub>, *Npoints*, *D*) имеет следующие аргументы:

*y* – вектор начальных условий размерности *n*, где *n* – порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе. Для уравнения первого порядка этот вектор вырождается в точку;

*x*<sub>1</sub>, *x*<sub>2</sub> – граничные точки интервала, на котором ищется решение;

*Npoints* – число точек (не считая начальной), в которых ищется приближенное решение. Число строк в возвращаемой матрице решения определяется как (**1** + *Npoints*);

*D*(*x*, *y*) – функция, которая возвращает значение в виде вектора из *n* элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

*Решение дифференциальных уравнений первого порядка.*

Рассмотрим на примере, как решаются дифференциальные уравнения первого порядка.

**Пример 1.** Решить уравнение  $y' = 2y/x + x$  с начальным условием  $y(1) = 0$  на отрезке  $[1; 1,5]$ .

*Решение.* Решение заданного дифференциального уравнения с помощью функции **rkfixed()** показано на рис. 6.21. Для ее реализации были сделаны следующие предварительные действия:

- 1)  $y_0 = 0$  – задаем начальное условие;
- 2)  $D(x, y) := x + \frac{2 \cdot y_0}{x}$  – определяем функцию, задающую производную;
- 3) применяем функцию **rkfixed()**.

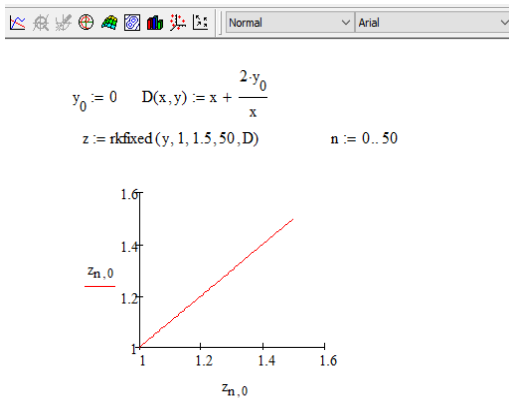


Рис. 6.21

Решение найдено в 50 точках отрезка  $[1; 1,5]$ .

*Решение дифференциальных уравнений второго порядка.*

Для решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо задать:

- вектор начальных условий, состоящий из двух элементов: значений функции и ее первой производной в начальной точке;
- вектор – функцию  $D(x, y)$ , имеющую вид:

$$D(x, y) = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix};$$

- применить функцию **rkfixed()**.

Матрица решения содержит три столбца: первый – значения переменной  $x$ , во втором находятся значения искомой функции  $y(x)$ , а в третьем – значения ее первой производной  $y'(x)$ .

**Пример 2.** Решить дифференциальное уравнение второго порядка  $y'' = -y' + 2y$  со следующими начальными условиями  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$  на отрезке  $[0; 0,5]$ .

*Решение.* Решение заданного дифференциального уравнения с помощью функции **rkfixed()** показано на рис. 6.22.

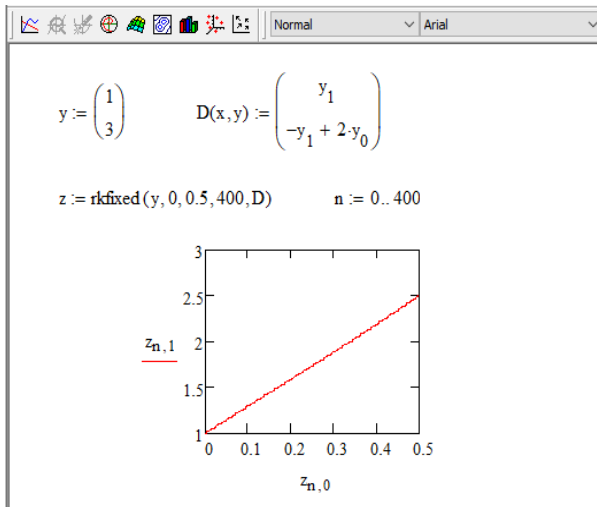


Рис. 6.22

Решение найдено в 400 точках отрезка  $[0; 0,5]$ .

*Системы дифференциальных уравнений.*

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка необходимо:

- определить вектор, содержащий начальные значения для каждой неизвестной функции;
- определить функцию, которая возвращает значение в виде вектора из  $n$  элементов, содержащих первые производные каждой из неизвестных функций;
- выбрать точки для поиска приближенного решения;
- применить функцию **rkfixed()**.

При этом функция **rkfixed()** вернет матрицу, первый столбец которой содержит значения аргумента, а остальные столбцы будут содержать значения найденных приближенных решений в соответствующих точках разбиения.

**Пример 3.** Решить систему двух ДУ

$$\begin{cases} x'_0(t) = \mu \cdot x_0(t) - x_1(t) - \left[ [x_0(t)]^2 + [x_1(t)]^2 \right] \cdot x_0(t) \\ x'_1(t) = \mu \cdot x_1(t) - x_0(t) - \left[ [x_0(t)]^2 + [x_1(t)]^2 \right] \cdot x_1(t) \end{cases}$$

с начальными условиями  $x_0(0) = 0, x_1(0) = 1$ .

*Решение.* Решение заданного дифференциального уравнения с помощью функции **rkfixed()** показано на рис. 6.23.

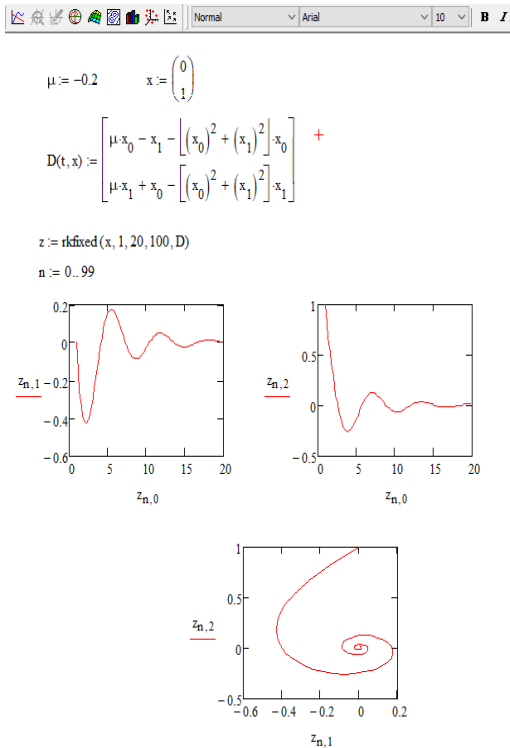


Рис. 6.23

Решение найдено в 100 точках отрезка [1; 20].

Хочется отметить, что в MathCAD имеется еще две встроенные функции для решения задачи Коши. Это функции **Rkadapt()** и **Bulstoer()**. Эти функции имеют те же самые аргументы и возвращают решения в такой же форме, что и функция **rkfixed()**. Первая из этих функций использует метод Рунге – Кутты с переменным шагом, что позволяет повысить точность вычислений и сократить их объем в случае, когда искомое решение имеет области, где ее значения резко изменяются. Функция **Rkadapt()** будет варьировать величину шага в зависимости от скорости изменения решения.

Функция **Bulstoer()** реализует иной численный метод – метод Булирша – Штёра. Ее следует применять, если известно, что решение является гладкой функцией.

*Решение краевой задачи для дифференциального уравнения.*

Пусть имеется дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x; y; y').$$

Решение уравнения требуется найти на интервале [0; 1], причем известно, что  $y(0) = y_0$ ,  $y(1) = y_1$ . Понятно, что произвольный интервал

$[a; b]$  заменой переменных  $t = \frac{x-a}{b-a}$  может быть сведен к единичному.

Для решения краевой задачи обычно применяют *метод стрельб*, позволяющий свести решение краевой задачи к задаче Коши.

Пусть  $k$  некоторый параметр, такой что  $y'(0) = k$ . Для некоторого пробного значения  $k$  может быть решена задача Коши, например, методом Рунге – Кутты. Мы хотим найти такое значение параметра, чтобы выполнялось условие  $y(1; k) = y_1$ . Фактически мы свели исходную задачу к задаче решения трансцендентного уравнения с таблично заданной функцией. Если найдены такие значения параметра  $k_1$  и  $k_2$ , что  $y(1; k_1) > y_1$  и  $y(1; k_2) < y_1$ , то дальнейшее уточнение значения параметра можно проводить методом деления отрезка пополам.

Для решения краевой задачи в MathCAD имеется встроенная функция **sbsval()**, которая реализует метод стрельб и позволяет свести краевую задачу к задаче Коши. Она имеет следующие параметры:

$\mathbf{v}$  – вектор, содержащий начальные приближения для недостающих начальных условий;

$\mathbf{x}_{\min}$ ,  $\mathbf{x}_{\max}$  – границы интервала, на котором ищется решение;

$\mathbf{D}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  – вектор-функция, содержащий правые части системы диф-

ференциальных уравнений первого порядка, эквивалентной исходному уравнению. Размерность вектора  $n$  должна совпадать со степенью старшей производной дифференциального уравнения;

$load(x_{\min}, v)$  – вектор-функция, элементы которой соответствуют  $n$  значениям функций на левой границе интервала. Часть этих значений известна, а для части заданы начальные приближения в векторе  $v$ . Их уточненные значения будут найдены в процессе вычисления;

$score(x_{\max}, y)$  – вектор-функция, имеющая то же число элементов, что и  $v$ . Этот вектор показывает, на сколько близко найденное решение к истинному.

**Пример 4.** Средствами MathCAD найти решение дифференциального уравнения  $y'' + 0,2y' + y = 0$  при условиях  $y(0) = 1$  и  $y(5\pi) = 0$ .

*Решение.* Задача сводится к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}y' &= z; \\z' &= -2z - y.\end{aligned}$$

Поэтому функция  $D$  имеет вид  $D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -0.2y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ .

Задаем граничные условия:  $x_{\min} := 0, : x_{\max} := 5\pi$ .

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка содержит два начальных условия. Нам известно только одно. Начальное приближение для недостающего значения задаем в векторе  $v$ , который в нашем случае состоит только из одного элемента. Несмотря на это, индекс 0 должен быть обязательно указан, чтобы подчеркнуть векторный характер этой величины:  $v_0 := 0.1$ . На левой границе интервала нам известно значение искомой функции  $y(0) = 1$  и задано начальное приближение для ее производной  $y' = 0,1$ . Это значение записано в  $v_0$ . Неизвестное начальное условие, которое будем искать через функцию  $sbval()$ , задаем вектор-функцией  $load()$ . Ее нулевой элемент – начальное значение для  $y_0$ , первый элемент – для  $y_1$ :

$$load(x_{\min}, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Разницу между вычисленными и заданными значениями искомой функции и ее производными задаем функцией  $score()$ :

$$score(x_{\max}, y) = y_0 - 0.$$

Поиск недостающего начального условия осуществляем с помощью функции **sbval()**:

$$S := sbval(v, x_{\min}, x_{\max}, D, load, score) = 12,511.$$

После того, как нам стало известно недостающее начальное условие в задаче Коши, для ее решения можно воспользоваться, например, функцией **rkfixed()**. Реализация поставленной задачи в MathCAD показана на рис. 6.24.

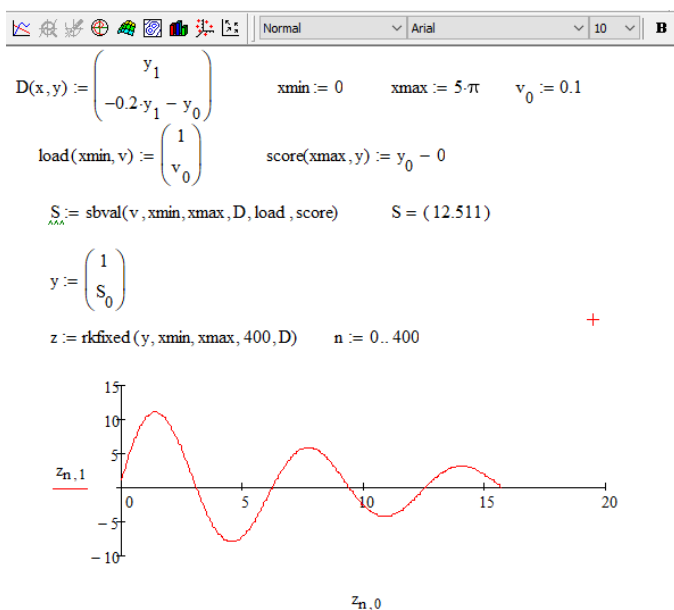


Рис. 6.24

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	3
Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ.....	3
1.1. Источники и классификация погрешностей.....	3
1.2. Абсолютная и относительная погрешности. Форма записи данных.....	6
1.3. Представление чисел в ЭВМ. Погрешность округления.....	9
1.4. Взаимосвязь числа верных цифр в записи числа и относительной погрешности.....	11
1.5. Основные арифметические действия над приближенными величинами.....	13
1.6. Приближенные вычисления без учета погрешностей.....	15
1.7. Прямая задача теории погрешности. Погрешность вычисления значения функции одной переменной.....	16
1.8. Обратная задача теории погрешности.....	19
Лекция 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	21
2.1. Основные понятия численного решения уравнения.....	21
2.2. Уточнение корня по методу половинного деления (бисекции).....	23
2.3. Уточнение корня по методу хорд.....	27
2.4. Уточнение корня по методу касательных (методу Ньютона).....	32
2.5. Уточнение корня методом простой итерации (последовательных приближений).....	36
2.6. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений средствами Excel и MathCAD.....	38
Лекция 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	44
3.1. Общая характеристика методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).....	44
3.2. Матричный метод решения СЛАУ.....	45
3.3. Решение СЛАУ методом Гаусса.....	48
3.4. Метод квадратного корня (метод Холецкого).....	54
3.5. Метод прогонки.....	59
3.6. Особенность итерационных методов решения СЛАУ.....	63
3.7. Метод простой итерации.....	66
3.8. Метод Якоби.....	68
3.9. Метод Зейделя.....	70
3.10. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.....	72
3.11. Решение систем уравнений средствами Excel и MathCAD.....	76
Лекция 4. МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ.....	80
4.1. Основные понятия и постановка задачи интерполяции функции.....	80
4.2. Алгебраическое интерполирование.....	82
4.3. Определение параметров алгебраического интерполирования с помощью составления системы линейных уравнений.....	83
4.4. Алгебраическое интерполирование с помощью формулы Лагранжа.....	86
4.5. Понятие конечных разностей. Связь между конечными разностями и узловыми значениями.....	90
4.6. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.....	91
4.7. Интерполяционные формулы с центральными разностями.....	96

4.8. Понятие конечных разностей. Общий вид интерполяционной формулы Ньютона.....	99
4.9. Погрешность алгебраического интерполирования.....	101
<b>Лекция 5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ</b> .....	<b>103</b>
5.1. Встроенные возможности дифференцирования в MathCAD.....	103
5.2. Применение производной в прикладных задачах численных методов.....	104
5.3. Общая характеристика численного дифференцирования функций.....	106
5.4. Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов ...	107
5.5. Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов.....	108
5.6. Встроенные возможности интегрирования в MathCAD .....	109
5.7. Общая характеристика методов численного интегрирования функций.....	111
5.8. Понятие квадратурной формулы. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса .....	112
5.9. Формулы прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла .....	118
5.10. Формула трапеций приближенного вычисления определенных интегралов .....	122
5.11. Формула парабол (Симпсона) приближенного вычисления определенных интегралов .....	126
5.12. Формула Гаусса.....	131
<b>Лекция 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b> .....	<b>135</b>
6.1. Основные определения и понятия дифференциального уравнения.....	135
6.2. Постановка задач, решаемых численными методами .....	136
6.3. Метод Эйлера.....	137
6.4. Модифицированный метод Эйлера .....	142
6.5. Методы Рунге – Кутты .....	145
6.6. Погрешность схем Рунге – Кутты .....	149
6.7. Многошаговые методы Адамса .....	152
6.8. Метод последовательного дифференцирования при решении дифференциальных уравнений .....	156
6.9. Решение дифференциальных уравнений и систем в прикладной программе MathCAD .....	158

Учебное издание

**Курзенков** Сергей Владимирович

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Курс лекций

Редактор *С. Н. Кириленко*

Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 27.09.2024. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 9,76. Уч.-изд. л. 8,43.

Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».

Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.

Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».

Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.