МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Е. Н. Крючков

# МАТЕМАТИКА

В 2 частях

Часть 2

*Практикум*
*для студентов, обучающихся по специальностям*
*общего высшего образования*
*6-05-0812-02 Техническое обеспечение хранения и переработки*
*сельскохозяйственной продукции,*
*6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе*

Горки
БГСХА
2024

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К93

*Одобрено методической комиссией факультета механизации сельского хозяйства 27.03.2023 (протокол № 7) и Научно-методическим советом БГСХА 27.04.2023 (протокол № 8)*

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат технических наук, доцент *Е. Н. Крючков*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*;
кандидат физико-математических наук *С. В. Бахнович*

**Курзенков, С. В.**
К93 Математика. Практикум: в 2 ч. Ч. 2 / С. В. Курзенков, Е. Н. Крючков. – Горки : БГСХА, 2024. – 163 с.
ISBN 978-985-882-464-8.

Изложены теоретические сведения, необходимые для решения заданий семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине «Математика», приведены разработки практических и домашних работ по дисциплине, а также примеры индивидуальных и модульных работ.

Для студентов, обучающихся по специальностям общего высшего образования 6-05-0812-01 Техническое обеспечение производства сельскохозяйственной продукции и 6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе.

**УДК 51(075.8)**
**ББК 22.1я73**

**ISBN 978-985-882-464-8 (ч. 2)**
**ISBN 978-985-882-337-5**

# ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в выработке у обучающихся прочных навыков в решении практических заданий по дисциплине «Математика».

Данное издание представляет собой практикум дисциплины «Математика» по темам: «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Функция нескольких переменных», «Двойные и криволинейные интегралы», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды» и «Теория вероятностей». В нем собраны краткие теоретические сведения к семинарским занятиям, подборка заданий для аудиторной и домашней работы по ним, тематические индивидуальные задания и типовые примеры модульных заданий.

Данная разработка является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Гусак, А. Н. Высшая математика: в 2 т. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Т. 2. – 448 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991. – Ч. 2. – 352 с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991. – Ч. 3. – 288 с.
4. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко. – 2-е изд., испр. – Минск: Выш. шк., 2007. – Ч. 4. – 336 с.
5. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: Высш. шк., 1987.
6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

# 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## Занятие 1. Непосредственное интегрирование функций

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*. Переменная $x$ называется *переменной интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Неопределенный интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е. $\int d\,F(x) = F(x) + C$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

6. Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то при замене переменной интегрирования $x$ на $t$ $\int f(t)\,dt = F(t) + C$. Такое свойство называется *инвариантностью формулы интегрирования*.

7. Если известно, что $\int f(t)\,dt = F(t) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Правила интегрирования основных элементарных функций задаются основной таблицей неопределенных интегралов:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int dx = x + C;$ | 2. | $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ |
| 3. | $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C;$ | 4. | $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C;$ |
| 5. | $\int e^x dx = e^x + C;$ | 6. | $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C;$ |
| 7. | $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C;$ | 8. | $\int \dfrac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C;$ |
| 9. | $\int \dfrac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C;$ | 10. | $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C;$ |
| 11. | $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$ | | |

Метод непосредственного интегрирования состоит в том, чтобы заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств свести к одному из табличных интегралов.

**Пример 1.** Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x^6 dx$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right) dx;$

в) $\int \left( x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \dfrac{1}{\cos^2(x)} \right) dx$;

г) $\int \left( 3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{1+x^2} \right) dx$;

д) $\int \sin\left(3x-4\right) dx.$

Решения:

а) $\int x^6 dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} + C = \dfrac{x^7}{7} + C$;

б) $\int\left(2x^3-4x^2+5\right)dx = 2\int x^3dx-4\int x^2dx+5\int dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^3}{3}+$

$+5\cdot x+C = \frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+5x+C$;

в) $\int\left(x^2-\frac{1}{x}+e^x-4\sin(x)+\frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx = \int x^2dx-\int\frac{1}{x}dx+\int e^xdx-$

$-4\int\sin(x)dx+\int\frac{1}{\cos^2(x)}dx = \frac{x^3}{3}-\ln|x|+e^x-4\cdot(-\cos(x))+\operatorname{tg}(x)+C =$

$=\frac{x^3}{3}-\ln|x|+e^x+4\cos(x)+\operatorname{tg}(x)+C$;

г) $\int\left(3\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = 3\int x^{\frac{3}{4}}dx-2\int\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx =$

$=3\int x^{\frac{3}{4}}dx-2\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}-2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\operatorname{arctg}(x)+C =$

$=3\cdot\frac{4\cdot x^{\frac{7}{4}}}{7}-2\cdot\frac{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}{2}+\operatorname{arctg}(x)+C = \frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7}-3\sqrt[3]{x^2}+\operatorname{arctg}(x)+C$;

д) $\int\sin\left(3x-4\right)dx = \left|\begin{array}{l}\text{см. свойство 7,}\\ \text{формула (6) табл.}\end{array}\right| = -\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C.$

### *Задания к аудиторному занятию 1*

1. Вычислить интегралы:

а) $\int x^3dx$; б) $\int\frac{x^{15}}{3}dx$; в) $\int x^{106}dx$; г) $\int 2x^{99}dx$;

д) $\int\frac{16}{x^5}dx$; е) $\int\frac{2}{3x^{15}}dx$; ж) $\int\frac{2}{x^{203}}dx$; з) $\int\frac{49}{x^{99}}dx$;

и) $\int\sqrt[3]{x^5}dx$; к) $\int\frac{3}{4\sqrt{x^3}}dx$; л) $\int 4\sqrt[7]{x^2}dx$; м) $\int\frac{7}{2\sqrt[7]{x^3}}dx$.

2. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\left(2x-4\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$;

в) $\int\left(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{5}{x^6}\right)dx$; г) $\int\left(x^2+\frac{3}{x^4}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$;

д) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; е) $\int\left(4x^3+8\sqrt[5]{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx$;

ж) $\int\left(3x-4\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$; з) $\int\left(4-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}-7\sqrt[6]{x}\right)dx$;

и) $\int\left(3^x-\frac{2}{x}+4\sin(x)\right)dx$; к) $\int\left(e^x-\frac{3}{2\cos^2(x)}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

л) $\int\left(\frac{8}{1+x^2}-\frac{2}{\cos^2(x)}+\frac{\cos(x)}{7}\right)dx$; м) $\int\left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}}+\frac{6}{\sin^2(x)}+\frac{2}{x\ln(3)}-1\right)dx$.

3. Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

а) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{x}-1+x\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x^3}}dx$;

в) $\int\frac{\cos^3 x-8\sqrt[5]{x^3}\cdot\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$; г) $\int\frac{5x^2-2\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

д) $\int\sin(7x+4)\,dx$; е) $\int\cos(\frac{x}{7}+12)\,dx$;

ж) $\int\left(\frac{2}{3}x+5\right)^5dx$; з) $\int\frac{6}{(4x+5)^3}dx$;

и) $\int\frac{5}{\cos^2(2-3x)}dx$; к) $\int\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}dx$;

л) $\int\frac{11}{\sin^2(5+9x)}dx$; м) $\int\frac{3}{1+9x^2}dx$.

### *Домашнее задание к занятию 1*

Вычислить интегралы:

а) $\int\left(4x^3+5\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^4}-2\right)dx$; б) $\int\left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{x^5}\right)dx$;

в) $\int\frac{(1-x)^2-x^2\cos(x)}{x^2}dx$; г) $\int\frac{\cos^2(x)-\sin(x)\cos^2(x)+1}{\cos^2(x)}dx$;

д) $\int\sin(8-7x)\,dx$; е) $\int\cos(4x+1)\,dx$;

ж) $\int(7x+5)^4dx$; з) $\int\frac{1}{(9x-3)}dx$;

и) $\int\frac{3}{\cos^2(4-5x)}dx$; к) $\int\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx$;

л) $\int\frac{7}{\sin^2(2+3x)}dx$; м) $\int\frac{8}{1+6x^2}dx$.

## **Занятие 2. Замена переменной и формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле**

### ***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

Метод *замены переменной* (*подстановки*) помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если обозначить $x=s(t)$, $dx=s'(t)dt$ и сделать соответствующие преобразования в заданном подынтегральном выражении, полученный интеграл при удачном выборе функции $s(t)$ может оказаться более простым или даже табличным. Тогда справедлива формула замены в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)\,dx=\int f(s(t))s'(t)\,dt.$$

**Пример 1.** Найти интегралы:

а) $\int\sqrt[5]{3x-4}dx$; б) $\int xe^{x^2}dx$; в) $\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+5}dx$.

Решения:

а) $\int \sqrt[5]{3x-4}dx = |t = 3x-4,\ dt = 3\mathrm{d}x,\ dx = \dfrac{dt}{3}| = \int \sqrt[5]{t}\dfrac{dt}{3} = \dfrac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x-4)^6} + C;$$

б) $\int xe^{x^2}\,dx = |\ t = x^2,\ dt = 2x\,dx,\ x\,dx = \dfrac{dt}{2}\ | = \int e^t\dfrac{dt}{2} = \dfrac{1}{2}\int e^t dt = \dfrac{1}{2}e^t +$

$$+\mathrm{C} = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathrm{C};$$

в) $\int \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+5}dx = |\ t = x^3-3x+5,\ dt = \left(3x^2-3\right)dx = 3\left(x^2-1\right)dx$,

$$\left(x^2-1\right)dx = \frac{dt}{3}| = \int\frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-3x+5\right| + C.$$

При вычислении неопределенных интегралов довольно-таки распространен случай, когда подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя. В этом случае такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т. е. $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C$.

**Пример 2.** Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{x\cdot\ln(x)}$.

Решение. $\int\dfrac{dx}{x\cdot\ln(x)} = \int\dfrac{\left(\ln(x)\right)'}{\ln(x)}dx = \ln(\ln(x)) + C$.

Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле имеет следующий вид $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Если в результате применения этой формулы окажется, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то ее применение считается оправданным. В ходе использования данного метода интегрирования удобно руководствоваться следующими рекомендациями:

• в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin(x)dx$, $\int P(x)\cos(x)dx$ имеет смысл положить $u = P(x)$, а в качестве $dv$ взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

• в интегралах вида $\int P(x)\arcsin(x)dx$, $\int P(x)\arccos(x)dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}(x)dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}(x)dx$, $\int P(x)\ln(x)dx$ следует положить $dv = P(x)\,dx$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через $u$;

**Пример 3.** Найти интегралы:

а) $\int x\cos(x)dx$; б) $\int(2x+1)e^{3x}dx$; в) $\int\ln(x)dx$.

Решение. а) $\int x\cos(x)dx = |\, u = x,\ du = dx,\ dv = \cos(x)dx,$

$\int dv = \int\cos(x)dx,\ v = \sin(x)\,| = x\sin(x) - \int\sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$;

б) $\int(2x+1)e^{3x}dx = |\, u = 2x+1,\ du = 2dx,\ dv = e^{3x}dx,\ \int dv = \int e^{3x}dx,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}\,| = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x + \frac{1}{3}\right) + C;$$

в) $\int\ln(x)dx = |\, u = \ln(x),\ du = \dfrac{1}{x}dx,\ dv = dx,\ \int dv = \int dx,\ v = x\,| =$

$$= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C.$$

### *Задания к аудиторному занятию 2*

1. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$; б) $\displaystyle\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}$; г) $\int\cos^3(x)\cdot\sin(x)\,dx$;

д) $\int 3e^{-x^3} x^2 dx$;  е) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$;  з) $\int \frac{\sin x}{\cos^4(x)} dx$;

и) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx$;  к) $\int \frac{e^{2x} dx}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$;

л) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$;  м) $\int \mathrm{e}^{\sin(3x)} \cdot \cos(3x)\,dx$.

2. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (3x-4)\cos(x)\,dx$;  б) $\int (2x+5)e^{6x-2}\,dx$;

в) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$;  г) $\int x\,\mathrm{arctg}\,(x)\,dx$;

д) $\int e^x \sin(x)\,d\mathrm{x}$;  е) $\int e^{2x}\cos(x)dx$;

ж) $\int (x^2+2)\cdot \mathrm{e}^{-x} dx$;  з) $\int x\sin(4x)dx$;

и) $\int \frac{\ln(x)}{x^3} dx$;  к) $\int \arcsin(x)dx$.

### *Домашнее задание к занятию 2*

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)} dx$;  б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$;

в) $\int e^{\sin(3x)} \cdot \cos(3x)\,dx$;  г) $\int \frac{\mathrm{arctg}^2(2x)}{1+4x^2} dx$;

д) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;  е) $\int e^{x^4+6} x^3 dx$;

ж) $\int x\cos(3x-4)\,dx$;  з) $\int (5x-8)\sin\left(\frac{x}{4}\right) dx$;

и) $\int \sqrt[3]{x^3}\ln(x)\,dx$;  к) $\int \arccos(x)\,dx$.

## З а н я т и е 3. Интегрирование простейших рациональных дробей

***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

Функция вида $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной дробью*, если ее числитель и знаменатель являются многочленами. Рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если же степень числителя больше либо равна степени знаменателя, то рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *неправильной*.

Из теории многочленов известно, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения многочленов первой или второй степени. В соответствии с этим любую рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого количества выражений следующих видов: $\dfrac{A}{\left(x-c\right)^m}$, $\dfrac{Bx+c}{\left(x^2+px+q\right)^s}$, $A,B,C\in R$, $m,\ s\in N$, где $x^2+px+q$ – трехчлен с действительными коэффициентами, который не имеет действительных корней. Такие рациональные дроби будем называть *простейшими*. Интегрирование простейших рациональных дробей рассмотрим в общем виде.

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln\left|x-a\right|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=$

$\displaystyle=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$.

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}dx=\left|\begin{array}{l}\text{преобразуем знаменатель таким образом,}\\ \text{чтобы коэффициент при } x^2 \textit{ равнялся } 1\end{array}\right|=$

$$=\frac{1}{p}\int\frac{Ax+B}{x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}}dx=\left|\text{выделим полный квадрат в знаменателе}\right|=$$

$$\frac{1}{p}\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{q}{2p})^2-(\frac{q}{2p})^2+\frac{r}{p}}dx=\frac{1}{p}\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{q}{2p})^2+(\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2)}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} t=x+\frac{q}{2p} \\ dt=dx \\ x=t-\frac{q}{2p}\end{vmatrix}=\frac{1}{p}\int\frac{A(t-\frac{q}{2p})+B}{t^2+(\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2)}dt=\begin{vmatrix}\text{приведем подобные в числителе} \\ \text{и представим в виде суммы} \\ \text{интегралов}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{A}{p}\int\frac{t}{t^2+(\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2)}dt+\frac{\left(B-\frac{Aq}{2p}\right)}{p}\int\frac{1}{t^2+(\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2)}dt=$$

$$=\begin{vmatrix}\text{первый интеграл вычислим методом замены переменной,} \\ \text{второй – с помощью дополнительной таблицы интегралов}\end{vmatrix}=$$

Выпишем отдельно и вычилим первый интеграл:

$$\frac{A}{p}\int\frac{t}{t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}dt=\begin{vmatrix} z=t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2 \\ dz=2t\,dt \\ t\,dt=\frac{dz}{2}\end{vmatrix}=\frac{A}{p}\int\frac{1}{z}\frac{dz}{2}=\frac{A}{2p}\int\frac{1}{z}dz=$$

$$=\frac{A}{2p}\ln|z|+C=\left|z=t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2\right|=\frac{A}{2p}\ln\left|t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2\right|+C.$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся дополнительной таблицей:

1. $\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)+C$;  2. $\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$ .

$$\frac{\left(B-\frac{Aq}{2p}\right)}{p}\int\frac{1}{t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{l}\text{воспользуемся 1-й формулой}\\ \text{дополнительной таблицы}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\left(B-\frac{Aq}{2p}\right)}{p\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\right)+C.$$

С учетом полученных результатов можем записать

$$=\frac{A}{2p}\ln\left|t^2+\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2\right|+\frac{\left(B-\frac{Aq}{2p}\right)}{p\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\right)+C=$$

$$=\frac{A}{2p}\ln\left|x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right|+\frac{\left(B-\frac{Aq}{2p}\right)}{p\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-(\frac{q}{2p})^2}}\right)+C.$$

**Пример 1.** Найти интегралы:

а) $\int\frac{2x-5}{(3x+5)^2}dx$ ; б) $\int\frac{6x-4}{3x^2-7x+5}dx$ .

Решения:

а) $$\int\frac{2x-5}{(3x+5)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{(3x-\frac{15}{2})}{(3x+5)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3x+5-5-\frac{15}{2}}{(3x+5)^2}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{(3x+5)-\frac{25}{2}}{(3x+5)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{1}{3x+5}dx-\frac{25}{3}\int\frac{1}{(3x+5)^2}dx=\frac{2}{9}\ln|3x+5|-$$

$$-\frac{25}{9}\int(3x+5)^{-2}d(3x+5)=\frac{2}{9}\ln|3x+5|-\frac{25}{9}\cdot\frac{(3x+5)^{-1}}{-1}+C=\frac{2}{9}\ln|3x+5|+$$

$$+\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{3x+5}+C\,;$$

б) $\int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x-4}{x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x-4}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}+\frac{5}{3}}dx =$

$$= \int \frac{6x-4}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{60-49}{36}}dx = \int \frac{6x-4}{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}dx = \left| \begin{matrix} t = x-\frac{7}{6} \\ dt = dx \\ x = t+\frac{7}{6} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6\left(t+\frac{7}{6}\right)-4}{t^2+\frac{11}{36}}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{6t+7-4}{t^2+\frac{11}{36}}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{6t+3}{t^2+\frac{11}{36}}\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{t^2+\frac{11}{36}}\mathrm{d}t +$$

$$+\int \frac{1}{t^2+\frac{11}{36}}\mathrm{d}t = \ln\left|t^2+\frac{11}{36}\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{36}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{11}{36}}}\right) + C = \ln\left|x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}\right| +$$

$$+\frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6\left(x-\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{11}}\right) + C = \ln\left|x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}\right| + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-7}{\sqrt{11}}\right) + C.$$

### *Задание к аудиторному занятию 3*

Найти неопределенные интегралы от простейших рациональных дробей:

а) $\int \frac{2}{x-4}dx$; б) $\int \frac{3}{5-x}dx$; в) $\int \frac{1}{(x+3)^4}dx$;

г) $\int \frac{5}{(x-3)^5}dx$; д) $\int \frac{8}{(7-x)^9}dx$; е) $\int \frac{4}{(x+6)^5}dx$;

ж) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$; з) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$; и) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

к) $\int \frac{(x+1)\,dx}{2x^2+x+1}$; л) $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$; м) $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx$.

### *Домашнее задание к занятию 3*

Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей:

а) $\int \frac{7}{(2x+3)^4}dx$;  б) $\int \frac{4}{(2-5x)^4}dx$;

в) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;  г) $\int \frac{3-4x}{3x^2-3x+1}dx$.

## Занятие 4. Интегрирование дробно-рациональных выражений

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Справедливо утверждение: *всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

**Пример 1.** Представить неправильную дробь $\frac{2x^2-3x+2}{x-2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим под угол числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2-4x} & 2x+1 \\ x+2 & \\ \underline{x-2} & \\ 4 & \end{array}$$

Это означает, что $\frac{2x^2-3x+2}{x-2} = 2x+1+\frac{4}{x-2}$.

Справедливо утверждение: *всякую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.*

При этом рассуждают следующим образом. Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей: $P(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$ , то она разлагается на простейшие дроби по схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots +$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu},$$

где $A_i$, $B_i$, $M_i$, $N_i$, $R_i$, $S_i$ – некоторые постоянные величины.

Для нахождения величин $A_i$, $B_i$, $M_i$, $N_i$, $R_i$, $S_i$ применяют *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$.

Применение этого метода рассмотрим на следующих примерах.

**Пример 2.** Разложить правильную дробь $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$ на простейшие.

Решение. Для разложения дроби на простейшие используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}.$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители: $2x-3=(A+B)x-3A+B$. Решив систему уравнений $\begin{cases} A+B=2, \\ -3A+B=-3 \end{cases}$, найдем: $A=\dfrac{5}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$.

Тогда разложение дроби на простейшие имеет вид: $\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}=$

$=\frac{5}{4}\frac{A}{x+1}+\frac{3}{4}\frac{B}{x-3}$.

**Пример 3.** Найти интеграл $\int\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби, предварительно разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+3 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x^2-3x} & x-4 \\ \quad -4x^2+3x+3 & \\ \quad \underline{-4x^2-8x+12} & \\ \qquad\quad 11x-9 & \end{array}$$

получим $\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}=x-4+\frac{11x-9}{x^2+2x-3}$.

Разложим полученную правильную рациональную дробь на простейшие. Для этого вначале знаменатель разложим на множители: $x^2+2x-3=0$, $x_1=-3$, $x_2=1$, $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$. Тогда

$$\frac{11x-9}{x^2+2x-3}=\frac{11x-9}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}.$$

Начальная дробь равна конечной, и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители:

$$11x-9=A(x-1)+B(x+3).$$

Для определения $A$ и $B$ подберем значения переменной $x$ таким образом, чтобы выражения, стоящие в правой части уравнения в скобках, обнулились, и подставим их в данное уравнение.

Рассмотрим $x = 1 \Rightarrow$, получаем уравнение $4B = 2$ или $B=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим $x = –3 \Rightarrow$, получаем уравнение $–4A = –42$ или $A=\frac{21}{2}$.

Тогда $\dfrac{11x-9}{x^2+2x-3}=\dfrac{11x-9}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{21}{2(x+3)}+\dfrac{1}{2(x-1)}$.

Подставим в подынтегральную функцию:

$$\int\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-3}dx=\int\left(x-4+\frac{11x-9}{(x+3)(x-1)}\right)dx=$$

$$=\int\left(x-4+\frac{21}{2(x+3)}+\frac{1}{2(x-1)}\right)dx=\int x\,dx-4\int dx+\frac{21}{2}\int\frac{dx}{(x+3)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{21}{2}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

**Пример 4.** Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$.

Решение. Так как $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=$$

$=9x^3-30x^2+28x-88$; или $(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+$
$+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=9x^3-30x^2+28x-88.$

$$\begin{cases}A+B+C=9;\\-4A-2B-6C+D=-30;\\4A+4B+8C-6D=28;\\-16A-8B+8D=-88.\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B;\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B;\\2A+2B+4C-3D=14;\\2A+B-D=11.\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14;\\2A+B-24+2A+4B=11.\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B;\\D=24-2A-4B;\\4A+10B=50;\\4A+5B=35.\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 4A + 10B = 50; \\ 50 - 10B + 5B = 35. \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B; \\ D = 24 - 2A - 4B; \\ 4A + 10B = 50; \\ B = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5; \\ B = 3; \\ C = 1; \\ D = 2. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x+2}{x^2+4}$, а результат интегрирования будет выглядеть:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx +$$

$$+\int \frac{2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

### *Задание к аудиторному занятию 4*

Найти неопределенные интегралы от дробно-рациональных выражений:

а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$; е) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x}dx$; з) $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 1}$;

и) $\displaystyle\int \frac{5dx}{x^3 + 2x^2 + 5x}$; к) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$;

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 1}$; м) $\displaystyle\int \frac{9x}{(x-5)(x^2+2x+10)}dx$;

н) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x^3 + 3x^2 + 4x}$; о) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+3)}$.

### *Домашнее задание к занятию 4*

Найти неопределенные интегралы от дробно-рациональных выражений:

а) $\int \frac{(x+4)dx}{(x+2)(x-3)}$;  б) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;

в) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$;  г) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$;

д) $\int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+9)}dx$;  е) $\int \frac{dx}{x^3-x}$.

## Занятие 5. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Интегрирование иррациональных функций.* Если подынтегральная функция иррациональна, то с помощью замены переменной во многих случаях можно привести ее к рациональному виду или к такой функции, интеграл от которой является табличным. Интегрирование с помощью замены переменной, которая приводит подынтегральное выражение к рациональному виду, называется *интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения*.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}})\,dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x = t^k$, где $k$ – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_s$.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b})\,dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

**Пример 1.** Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$.

Решение. Показателями степеней корней являются числа 3 и 2. Их наименьшее общее кратное равно 6. Поэтому применим подстановку $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$, $\sqrt{x} = t^3$.

В результате $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = \int \frac{t^2}{t^4-t^3}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)}dt = 6\int \frac{t^4}{t-1}dt$.

В подынтегральной функции выделим целую часть:

$$\frac{t^4}{t-1}=\frac{t^4-1+1}{t-1}=\frac{t^4-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}=\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t-1}+\frac{1}{t-1}=$$

$$=\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t-1}+\frac{1}{t-1}=(t+1)(t^2+1)+\frac{1}{t-1}=t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}.$$

Тогда $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx=6\int\frac{t^4}{t-1}dt=6\int\left(t_3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$

$$=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|+C=\mid t=\sqrt[6]{x}\mid=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x^4}}{4}+\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3}+\frac{\sqrt[6]{x^2}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

*Интегрирование тригонометрических функций.* При нахождении интегралов

$$\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)dx,\ \int\cos(ax)\cdot\cos(bx)dx,\ \int\sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$$

подынтегральные функции из произведений преобразовываются в суммы с помощью приведенных ниже формул:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}\big(\sin((a-b)x)+\sin((a+b)x)\big);$$

$$\cos(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}\big(\cos((a-b)x)+\cos((a+b)x)\big);$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}\big(\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)\big).$$

Если требуется найти интеграл вида $\int\cos^n(x)\sin^m(x)\,dx$, то при этом обычно используют следующие приемы:

1) подстановку $\sin(x)=t$, если $n$ – целое положительное нечетное число;

2) подстановку $\cos(x)=t$, если $m$ – целое положительное нечетное число;

3) пользуются формулами понижения порядка:

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2},\quad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2},\quad \sin(x)\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2},$$

если $n$ и $m$ – целые неотрицательные четные числа;

4) подстановку $\operatorname{tg}(x) = t$, $\sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, если $n + m$ – есть четное отрицательное целое число.

**Пример 2.** Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x)\cdot\cos(5x)dx$; б) $\int \cos^3(x)\,dx$; в) $\int \cos^2(x)\cdot\sin^5(x)\,dx$;

г) $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx$; д) $\int \dfrac{dx}{\sin^3(x)\cdot\cos(x)}$.

Решения.

а) Так как $\sin(3x)\cdot\cos(5x) = \frac{1}{2}\left(\sin((3-5)x) + \sin((3+5)x)\right) =$ $= \frac{1}{2}(-\sin(2x) + \sin(8x))$, то $\int \sin(3x)\cos(5x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin(2x)dx +$ $+\frac{1}{2}\int \sin(8x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(8x)}{8}\right) + C = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16} + C$;

б) $\int \cos^3(x)\,dx = \int \cos^2(x)\cos(x)\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos(x)\,dx = | t = \sin(x),$ $dt = \cos(x)\,dx\,| = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$;

в) $\int \cos^2(x)\sin^5(x)\,dx = \int \cos^2(x)\sin^4(x)\sin(x)\,dx =$

$= \int \cos^2(x)\cdot(\sin^2(x))^2\cdot\sin(x)\,dx = \int \cos^2(x)\cdot(1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)\,dx =$

$= | t = \cos(x),\ dt = -\sin(x)\,dx, \sin(x)dx = -dt\,| = \int t^2(1-t^2)^2(-dt) =$

$= -\int t^2(1-2t^2+t^4)\,dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)\,dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right) + C =$

$= \frac{2\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^7(x)}{7} + C$;

г) $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx = \int \sin^2(x)\sin^2(x)\cos^2(x)\,dx =$

$= \int (\sin(x)\cos(x))^2\sin^2(x)\,dx = \int \frac{1}{4}\sin^2(2x)\frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx =$

$= \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)dx - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos(4x))dx -$

$-\frac{1}{16}\int \sin^2(2x)\,d\sin(2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C$;

д) $\int \frac{dx}{\sin^3(x)\cos(x)} = \int \sin^{-3}(x)\cos^{-1}(x)\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m+n=-3-1=-4, \\ t=\mathrm{tg}\,(x),\ x=\mathrm{arctg}\,(t), \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2},\ \sin(x)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int t^{-3}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2(x) + \ln|\mathrm{tg}\,(x)| + C.$$

### *Задания к аудиторному занятию 5*

1. Найдите неопределенные интегралы, содержащие иррациональности под знаком интеграла:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

д) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$;

ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$;

з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;

к) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

л) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}$;

м) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

н) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx$;

о) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.

2. Найдите неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx$;  б) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$;

в) $\int \mathrm{tg}^2(x)\,dx$;  г) $\int \mathrm{ctg}^2(3x)\,dx$;

д) $\int 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$;  е) $\int \frac{dx}{\cos(2x)+\sin^2(x)}$;

ж) $\int \frac{1+\cos^2(x)}{1+\cos(2x)}\,dx$;  з) $\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)\cdot\sin^2(x)}\,dx$;

и) $\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$;  к) $\int \frac{dx}{4-5\cos(x)}$;

л) $\int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)}$;  м) $\int \frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)-3}$.

### *Домашнее задание к занятию 5*

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;  б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$;  г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$;

д) $\int \cos^3(x)\sin(2x)\,dx$;  е) $\int \cos(2x)\cos(3x)\,dx$;

ж) $\int \mathrm{ctg}^2(x)\,dx$;  з) $\int \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)dx$.

## **Занятие 6. Определенный интеграл, его свойства и непосредственное вычисление**

### ***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;\,b]$, ни от выбора точек $c_i\in[x_{i-1};\,x_i]$, то он называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \ .$$

Числа $a$ и $b$ называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*, $x$ – *переменной интегрирования*, $[a;\, b]$ – *отрезком интегрирования*.

*Свойства определенного интеграла.*

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b \big( f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак на противоположный, т. е. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$

4. Если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю, т. е. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

5. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \ldots$

6. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит на две части $[a;c]$ и $[c;\, b]$ и если существуют интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$ , то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,$$

где $F(x)$ – любая первообразная функция для $f(x)$.

*Непосредственное интегрирование* предполагает преобразование подынтегральной функции к табличной с последующим применении к ней формулы Ньютона – Лейбница.

**Пример 1.** Вычислить интегралы: а) $\int_1^2 x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$;

в) $\int_0^1 e^x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$; д) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^4}dx$.

Решения:

а) $\int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

б) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$;

в) $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{3}$;

д) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^4}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x^{-4}dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\left.\frac{1}{3x^3}\right|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{3\cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right) = 2\frac{5}{8}$.

### ***Задание к аудиторному занятию 6***

Произвести непосредственное интегрирование в определенных интегралах:

а) $\int\limits_0^1 (4x^3+4\sqrt[3]{x}+2)dx$;  б) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}+x^2}{x^2}dx$;

в) $\int\limits_1^8 \left(3x^2-\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{2}-\sqrt[3]{x^2}-1\right)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x-\frac{1}{2}\cos(x)+3\sin(x)-\frac{x}{3}\right)dx$;

д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^2}{2}-3\cos(x)-\frac{1}{\sin^2(x)}\right)dx$; е) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2}-3e^x-\frac{x-3}{2}-1\frac{2}{3}\right)dx$;

ж) $\int\limits_0^4 \sqrt{3x+4}\,dx$;  з) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$;

и) $\int\limits_2^3 \frac{1}{(2x-3)^3}dx$;  к) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$;

л) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\sin^2(x)\,dx$;  м) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}dx$.

### *Домашнее задание к занятию 6*

Произвести непосредственное интегрирование в определенных интегралах:

а) $\int\limits_{-8}^0 \left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-2x+3x^2+1\right)dx$;  б) $\int\limits_0^{\pi} \left(6x-\frac{2}{\cos^2(x)}+\frac{1}{\pi}\right)dx$;

в) $\int\limits_{-3}^4 \sin(5x-2)dx$;  г) $\int\limits_{-7}^0 e^{3x-6}dx$.

## Занятие 7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Метод ***замены переменной*** в определенном интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

• функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;

• функция $x=\varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha;\beta]$ и имеет на нем непрерывную производную;

• $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной, и при этом справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

**Пример 1.** Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}dx$; б) $\int\limits_{-2}^0 \sqrt{1-4x}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$.

Решения:

а) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\left|\begin{array}{l} t=x+1 \\ dt=dx \\ t_1=1;\ t_2=2 \end{array}\right|=\int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt=\ln|t|\,\Big|_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2);$

б) $\int\limits_{-2}^0 \sqrt{1-4x}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=1-4x \\ dt=-4dx \\ dx=\dfrac{dt}{-4} \\ t_1=9;\ t_2=1 \end{array}\right|=\int\limits_9^1 \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{4}\right)=-\frac{1}{4}\int\limits_9^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt=-\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^1=$

$=-\frac{1}{6}\sqrt{t^3}\Big|_9^1=-\frac{1}{6}\sqrt{1^3}-\left(-\frac{1}{6}\sqrt{9^3}\right)=-\frac{1}{6}(1-27)=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3};$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)dx \\ t_1=0;\ t_2=1 \end{array}\right|=\int\limits_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда для определенного интеграла справедлива формула ***интегрирования по частям*** $\int\limits_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du.$

**Пример 2.** Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos(x)\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x^5}dx$.

Решения:

а) $$\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos(x)\,dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos(x); & v = \sin(x) \end{vmatrix} = x\sin(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx =$$

$$= 2\pi\sin(2\pi) - \pi\sin(\pi) + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2;$$

б) $$\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x^5}dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x); & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x^5}dx; & v = -\frac{1}{4x^4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4x^4}\ln(x)\Big|_{1}^{2} - \int\limits_{1}^{2}\left(-\frac{1}{4x^4}\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{1}{4\cdot 2^4}\ln(2) + \frac{1}{4\cdot 1^4}\ln(1) + \frac{1}{4}\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^5}dx = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{x^{-4}}{-16}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x^4}\right)\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= \frac{\ln(2)}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) = \frac{\ln(2)}{64} + \frac{15}{256}.$$

### *Задания к аудиторному занятию 7*

1. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

а) $\int\limits_{0}^{4}\sqrt{3x+4}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{dx}{1+4x^2}$;

в) $\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{(2x-3)^3}dx$; г) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

д) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\sin^2(x)\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{arctg}(x)}{1+x^2}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x)\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} xe^x\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$;  г) $\int\limits_1^3 \ln(x)\,dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\sin(x)\,dx$;  е) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx$.

### *Домашнее задание к занятию 7*

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\,dx$;  б) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$;

в) $\int\limits_1^e x\ln(x)\,dx$;  г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$.

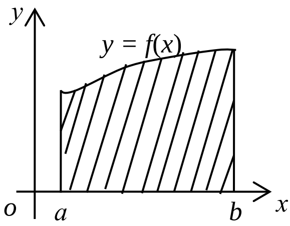
## **Занятие 8. Применение определенных интегралов для вычисления площадей плоских фигур**

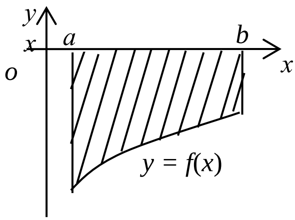
### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью $Ox$, сбоку прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

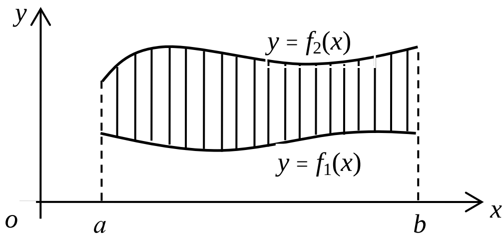
*Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции*. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*, который применяется при вычислении площадей плоских фигур.

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определенному интегралу от функции $f(x)$: $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если фигура расположена ниже оси абсцисс, то ее площадь вычисляется по формуле $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



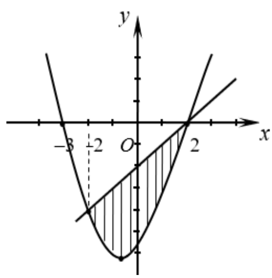

Пусть фигура ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.




Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_a^b \left( f_2(x) - f_1(x) \right) dx$ .

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$ , $y - x + 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью $Ox$ $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и вычислим площадь заштрихованной фигуры.



Найдем абсциссы точек пересечения линий: $x^2-4=0,\ x_1=-2,$ $x_2=2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$\int_{-2}^{2}(x-2-(x^2+x-6))\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=10\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.).}$$

### *Задание к аудиторному занятию 8*

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y=6x-x^2,\quad y=0$; б) $y=x^2-4,\ \ x=4,\ \ y=0$;

в) $y=x^2,\ \ y=8-x^2$; г) $y=-x^2,\ x\ +y+2=0$;

д) $y=x,\ y=(x-2)^2,\ y=0$; е) $y=\sqrt{x}\ ,\ y=\sqrt[3]{x}$ .

### *Домашнее задание к занятию 8*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $xy=6,\ \ y=7-x$; б) $4y=8x-x^2,\ \ 4y=x+6$.

## 2. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К ПЕРВОМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int(3x^2-\frac{1}{3\sqrt{x}}-\frac{3}{x^4})\,dx;$ б) $\int\frac{dx}{(2-3\cdot x)^{10}};$

в) $\int x^6\cdot\ln(x)dx;$ г) $\int\frac{2x+3}{x(x-3)(x+4)}dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{-2}^{3}(6x^2-4x-1)dx;$ б) $\int_{0}^{\pi}\sin(\frac{x}{2})\,dx;$ в) $\int_{0}^{1}x^3\cdot\sqrt{5+4x^4}\,dx.$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2-6x+1$, $y=-x-2$.

# 3. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## Занятие 1. Функция двух переменных, ее область определения

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Переменная величина $z$ называется *функцией двух переменных* величин $x$ и $y$ на множестве $D$ и записывается $z = f(x; y)$, если каждой паре значений $(x; y) \in D$ соответствует единственное значение величины $z$.

Множество пар значений переменных $(x; y)$, для которых функция $z = f(x; y)$ определена, называют *областью определения* этой функции и обозначают $D(f)$, а всевозможные значения зависимой переменной $z$, которые она принимает на $D(f)$, – *областью значений функции* и обозначают $E(f)$.

В общем случае область определения функции двух переменных задается одним или несколькими неравенствами, зависящими от двух переменных. В отличие от области определения функции одной переменной, эту область можно лишь описать словестно или показать графически. При этом можно выделить следующие основные случаи, когда область определения не совпадает с плоскостью $xOy$:

1) $z = \dfrac{Q(x;y)}{f(x;y)} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) \neq 0;$

2) $z = \sqrt{f(x;y)} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) \geq 0;$

3) $z = \dfrac{Q(x;y)}{\sqrt{f(x;y)}} \Rightarrow D(z):\ f(x;y) > 0;$

4) $z = \log_a(f(x;y)),$ где $a > 0$ и $a \neq 1 \Rightarrow D(z):\ f(x;y) > 0;$

5) $z = \log_{f(x;y)}(b),$ где $b > 0 \Rightarrow D(z):\ \begin{cases} f(x;y) > 0, \\ f(x;y) \neq 1; \end{cases}$

6) $z = \arccos(f(x;y)) \Rightarrow D(z):\ |f(x;y)| \leq 1;$

7) $z = \arcsin(f(x;y)) \Rightarrow D(z):\ |f(x;y)| \leq 1.$

Для того чтобы показать область определения функции двух переменных, необходимо:

1) задать эту область неравенством или системой неравенств;

2) рассмотреть и показать графически границы этой области. Договоримся, что границы области определения при строгом нера-

венстве показывать пунктирной линией, а при нестрогом неравенстве – непрерывной линией. В результате вся координатная плоскость $xOy$ разобьется границей на части;

3) чтобы определить ту ее часть, которая будет относиться к $D(z)$, необходимо выбрать произвольную испытуемую точку, не лежащую на границе, и подставить ее координаты в каждую математическую зависимость п. 1. При этом если образуется истинное неравенство, то от соответствующей границы показать стрелки по направлению к испытуемой точке, если иначе, то стрелки от границы направить в противоположную сторону;

4) на основании проведенных исследований сделать вывод, в котором описательно охарактеризовать $D(z)$.

Разберем эту схему исследований на примерах.

**Пример 1.** Найти области определения заданных функций:

а) $z=\dfrac{3x^2-4y+5}{2x-y+1}$.

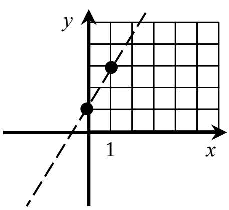
Решение.

1. $D(z)$: $2x-y+1\neq 0$.

Границу этой области будет определять уравнение прямой линии $2x-y+1=0$.

2. Для построения этой границы достаточно знать две точки. Определим их и выполним построение:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 |




Так как в п. 1 неравенство строгое, то соответствующую его границу показываем пунктирной линией.

3. Исходное неравенство определяет знак «≠», а это значит, что из всех точек координатной плоскости следует исключить только точки, лежащие на границе.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости $xOy$, не лежащих на прямой $2x-y+1=0$.

б) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

Решение.

1. $D(z)$: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Границу этой области будет определять уравнение линии $9 - x^2 - y^2 = 0$. Для того чтобы понять, что это за линия, выполним преобразование ее уравнения $x^2 + y^2 = 9$. Это уравнение окружности с центром в начале координат $O(0;\ 0)$ и радиуса $R = 3$.

2. Построим эту окружность. Так как в п. 1 неравенство нестрогое, то соответствующую его границу показываем непрерывной линией.

3. Исходное неравенство определяет знак «$\geq$», а это значит, что к искомой нами области могут относиться точки, лежащие либо внутри, либо снаружи границы, включая саму границу. Чтобы определиться с этим, выберем произвольную испытуемую точку, не лежащую на окружности. В качестве такой точки можно взять, например, точку $O(0;\ 0)$. Подставим ее координаты в исходное неравенство. При этом получим $9 - 0^2 - 0^2 = 9$, т. е. $9 \geq 0$, а это *истинное* неравенство. Это означает, что в данном случае для обозначения области определения заданной функции стрелки следует направить от границы к испытуемой точке *O*.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости *xOy*, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 9$, включая точки самой окружности.

в) $z = \log_3(y - x^2 + 4x - 1)$.

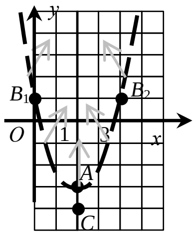
Решение.

1. $D(z)$: $y - x^2 + 4x - 1 > 0$.

Границу этой области будет определять уравнение линии $y - x^2 + 4x - 1 = 0$. Данное уравнение можно нв

Две другие точки параболы выберем так, чтобы их абсциссы были симметричны относительно $x_в$ и одна из них совпадала с нулем. В качестве таких значений возьмем $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. В этом случае ординаты этих точек совпадут и будут равны $y_1 = y_2 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$. Определились еще две точки $B_1(0;\ 1)$ и $B_2(4;\ 1)$.

Так как в п. 1 неравенство строгое, то соответствующую его границу показываем пунктирной линией.




3. Исходное неравенство определяет знак «>», а это значит, что к искомой нами области могут относиться точки, лежащие либо внутри, либо снаружи границы. Сама граница в эту область включаться не будет, так как знак неравенства строгий.

Чтобы определиться с выбором, возьмем произвольную испытуемую точку, не лежащую на параболе. В качестве такой точки можно взять, например, точку $C(2;\ -4)$.

Подставим ее координаты в исходное неравенство, при этом получим $-4-2^2+4\cdot 2-1=-1$, т. е. $-1 > 0$, а это *ложное* неравенство. Это означает, что для обозначения области определения заданной функции стрелки следует направить от границы в сторону, противоположную испытуемой точке $C$.

4. Вывод: областью определения данной функции является множество точек плоскости $xOy$, лежащих внутри параболы $y = x^2 - 4x + 1$, исключая точки самой параболы.

### *Задание к аудиторному занятию 1*

Найти область определения функций:

1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.
2. $z=\dfrac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
3. $z=\ln(2x-3y+6)$.
4. $z=\dfrac{2}{7x-3y}$.
5. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.
6. $z=\arcsin(x^2+y^2-1)$.
7. $z=\ln(y-x^2+5)$.
8. $z=\ln(2x+y)+\ln(2x-y)$.
9. $z=\arccos(x+2y)$.
10. $z=\ln(2x+3y)+\sqrt{3y-2x}$.

11. $z=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{x-y^2}$ .     12. $z=\dfrac{x^2+4xy-5}{x-y+2}$ .

13. $z=\sqrt{x^2+y^2-81}$ .     14. $z=\dfrac{\sqrt{x+y-1}}{x}$ .

15. $z=\dfrac{\ln(y^2-4x+8)}{3y}$ .     16. $z=\arcsin(2x-y)$ .

### *Домашнее задание к занятию 1*

Найти область определения функций:

17. $z=\arccos(9-x^2-y^2)$ .     18. $z=\ln(1-xy)+\dfrac{1}{x-y}$ .

19. $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$ .     20. $z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$ .

## **Занятие 2. Частные производные первого и второго порядка функции двух переменных**

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Пусть $z=f(x;y)$ – функция двух переменных.

Придадим независимой переменной $x$ приращение $\Delta x$, оставляя при этом переменную $y$ неизменной. Тогда $z$ получит приращение

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x;y)-f(x;y),$$

которое называется *частным приращением z по x*.

Аналогично, если независимой переменной $y$ придадим приращение $\Delta y$, оставляя при этом неизменной переменную $x$, то $z$ получит приращение $\Delta_y z=f(x;y+\Delta y)-f(x;y)$, называемое *частным приращением z по y*.

*Частной производной* по $x$ от функции $z$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению $\Delta x$ при стремлении $\Delta x$ к нулю.

Таким образом, по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}.$$

Эта производная обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x(x;y)\ .$$

Аналогично определяется частная производная от функции $z=f(x;y)$ по переменной $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}\,.$$

Она обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f'_y(x;y)\ .$$

**Пример 1.** Найти значения частных производных первого порядка функции $z=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$ в точке $M_0(-1;\ 2)$ .

Решение. Считая $y$ постоянной и дифференцируя $z$ как функцию переменной $x$, находим частную производную по $x$:

$$z'_x=(2x^3)'_x+(3x^2y)'_x+(6xy)'_x-(y^3)'_x=6x^2+6xy+6y-0=$$
$$=6x^2+6xy+6y\ .$$

Вычислим значение этой производной в точке $M_0$:

$$z'_x(-1;2)=6(-1)^2+6\cdot(-1)\cdot 2+6\cdot 2=6\ .$$

Считая $x$ постоянной и дифференцируя $z$ как функцию $y$, находим частную производную по $y$:

$$z'_y=(2x^3)'_y+(3x^2y)'_y+(6xy)'_y-(y^3)'_y=0+3x^2+6x-3y^2=$$
$$=3x^2+6x-3y^2\ .$$

Вычислим значение производной в точке $M_0$:

$$z'_y(-1;\ 2)=3(-1)^2+6(-1)-3\cdot 2^2=-15\,.$$

*Частными производными второго порядка* от функции $f(x;y)$ называются соответствующие частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Для функции $z = f(x; y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f_x'(x; y)\right)_x' = f_{xx}''(x; y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f_y'(x; y)\right)_y' = f_{yy}''(x; y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f_x'(x; y)\right)_y' = f_{xy}''(x; y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f_y'(x; y)\right)_x' = f_{yx}''(x; y).$$

Частные производные второго порядка, взятые по одной переменной, называются *повторными*, а по различным переменным – *смешанными*.

Справедливо утверждение, что если функция $z = f(x; y)$ и ее смешанные производные $f_{xy}''$, $f_{yx}''$ определены в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ и непрерывны в этой точке, то смешанные производные второго порядка этой функции равны:

$$f_{xy}''(x; y) = f_{yx}''(x; y).$$

Дифференцируя частные производные второго порядка как по *x*, так и по *y*, получают частные производные третьего порядка и т. д.

**Пример 2.** Найти частные производные второго порядка функций

а) $z = x^3 + 2x^2 y - 8xy^2 + y^3$; б) $z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)$.

Решения:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy - 8y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 16xy + 3y^2$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2 + 4xy - 8y^2\right]_x' = 6x + 4y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]_y' = -16x + 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 + 4xy - 8y^2\right]_y' = 4x - 16y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]'_x = 4x - 16y \ .$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y\cos(xy+1);\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x\cos(xy+1);$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_x = 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_y = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^3 y + x\cos(xy+1)\right]'_x = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left[2x^3 y + x\cos(xy+1)\right]'_y = 2x^3 - x^2\sin(xy+1).$$

## *Задание к аудиторному занятию 2*

Найти частные производные первого и второго порядка:

1. $z = x^4 - 2x - y^3 + y^5 + 1$ .
2. $z = x^3 + xy^2 - x^2 y - 6y + 5x$ .
3. $z = 7x^4 y^2 - 6xy + 3y^3 - 2x^2 + 5$ .
4. $z = xy^3 - 2y^2 + 6x^3 y - 7x - 2$ .
5. $z = x^3 + y^3 - 3x^2 y + 6xy^3 - 8$ .
6. $z = 8 - 7xy + 6x^2 y^3 - 9y - 8x$ .
7. $z = 2y + e^{x^2 - y} + 1$ .
8. $z = \ln(x^2 + y^2)$ .
9. $z = e^{x^3 + y^2}$ .
10. $z = e^{x^2 \cdot y^2}$ .
11. $z = e^x(\sin y + \cos x)$ .
12. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ .

## *Домашнее задание к занятию 3*

Найти частные производные первого и второго порядка:

1. $z = 5x^2 + 3yx^4 - 7x - 8xy + 4$ .
2. $z = 2y^3 x - 4x^5 y + 11x + 9y + 5$ .
3. $z = 9 - 3xy - 4y - 8x + x^3 y^4$ .
4. $z = 2x^4 y^4 - 8xy^2 - 14xy + 5x$ .
5. $z = \cos(x^2 y^2 - 2)$ .
6. $z = \sin(x^2 y)$ .
7. $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$ .
8. $z = \sqrt{3xy - 7}$ .

## Занятие 3. Производная функции по направлению и ее градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Производная функции* z = *f*(*x*; *y*) в *направлении вектора* $\vec{l} = (l_x; l_y)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos(\beta),$$

где $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}, \quad \cos(\beta) = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}.$$

Если частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей, то производная в направлении вектора $\vec{l}$ определяет скорость изменения функции в указанном вектором $\vec{l}$ направлении.

*Градиентом* функции z = *f*(*x*; *y*) называется вектор

$$\overrightarrow{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

*Касательная плоскость и нормаль к поверхности.*

Пусть задана некоторая поверхность уравнением $F(x; y; z) = 0$.

*Касательной плоскостью* к поверхности в точке $M_0$ $(x_0; y_0; z_0)$ называется плоскость, содержащая множество всех касательных, проведенных в этой точке.

Касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0;\, y_0;\, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;\, y_0;\, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0;\, y_0;\, z_0)(z - z_0) = 0.$$

*Нормалью* к поверхности в точке $M_0$ называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в данной точке $M_0$.

Уравнение нормали к поверхности в точке $M_0$ будет иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{z-z_0}{f_z'(x_0;\ y_0;\ z_0)}.$$

**Пример 1.** Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y$$

в точке $M(1;\ 1)$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $F(x;\ y;\ z) = 0$:

$$z-x^2+2xy-y^2+x-2y=0.$$

Определим аппликату точки касания, проекцией которой в плоскости $xOy$ является точка $M(1;\ 1)$:

$$z=1^2-2\cdot1\cdot1+1^2-1+2\cdot1=1.$$

Значит, точка касания имеет координаты $M'(1;\ 1;\ 1)$.

Вычислим частные производные первого порядка функции $F(x;\ y;\ z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+2y+1;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2x-2y-2;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

и их значения в точке $M'(1;\ 1;\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M'}=1;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M'}=-2;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M'}=1.$$

Тогда уравнение касательной плоскости будет иметь вид:

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0 \text{ или } x-2y+z=0,$$

а уравнение нормали соответственно запишем в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

### *Задания к аудиторному занятию 3*

1. Найти величину вектора градиента от заданной функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$:

а) $z = x^2y + y - 2x + 4$, $M_0(0; -1)$; б) $z = 2xy^2 - y^3 + 2x$, $M_0(1; -1)$;

в) $z = e^{3x} - y^2$, $M_0(0; 2)$; г) $z = \sin(3xy)$, $M_0(0; \frac{\pi}{2})$;

д) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $M_0(-2; 2)$; е) $z = \cos(x^2 + y^2 + 1)$, $M_0(-2; -2)$.

2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;\ y;\ z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $z - x^2 + 4y - 2x + 4 = 0$, $M_0(0; -1; 0)$;

б) $z - 2xy^2 - y^3 + 2x = 0$, $M_0(1; -1; 5)$;

в) $z^2 - 2x + 3y^3 - 20 = 0$, $M_0(1; -1; 5)$;

г) $z = e^{-x} - y^3$, если $M'_0(0; 2)$ проекция $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в плоскости $xOy$;

д) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, если $M'_0(-2; -2)$ проекция $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в плоскости $xOy$.

### *Домашнее задание к занятию 3*

1. Найти величину вектора градиента от заданной функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

а) $z = xy + 3y - x + 1$, $M_0(0; -1)$;

б) $z = 2^x - y^2$, $M_0(1; 2)$.

2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;\ y;\ z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $z - 3x^2 + y + 5 = 0$, $M_0(1; -1; -1)$;

б) $z = 2xy^2 - y^3 + 2x$, если $M'_0(1; 0)$ проекция $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в плоскости $xOy$.

## **Занятие 4. Экстремум функции двух переменных**

### ***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

*Максимумом* (*минимумом*) функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0; y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x; y)$, достаточно близких к точке $M_0$ и отличных от нее.

Точки максимума и минимума называют точками *экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными.*

*Необходимые условия экстремума*. Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т. е.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x;y)$.

*Достаточные условия экстремума.* Пусть $M_0(x_0;y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x;y)$ и пусть

$$z''_{xx}(M_0) = A, \; z''_{xy}(M_0) = B, \; z''_{yy}(M_0) = C, \; \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

– если $\Delta < 0$, то в стационарной точке $M_0$ нет экстремума;

– если $\Delta > 0$, то в точке $M_0$ есть экстремум, причем максимум, если $A < 0$, минимум, если $A > 0$;

– если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

**Пример 1.** Исследовать функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Решение. Найдем частные производные $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$, $z'_y = 2xy + 2y$ и решим систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения $2y(x + 1) = 0$, $y = 0$, $x = -1$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение: $6x^2 + 10x = 0$, $2x(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$. Таким образом, найдены две критические точки $M_1(0;\, 0)$, $M_2\left(-\frac{5}{3};\, 0\right)$. Теперь в первое уравнение подставим $x = -1$:

$6 + y^2 - 10 = 0$, $y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$. Следовательно, стали известны еще две критические точки $M_3(-1; -2)$, $M_4(-1;\ 2)$. Найдем частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 12x + 10$, $z''_{xy} = 2y$, $z''_{yy} = 2x + 2$.

Проверим достаточное условие экстремума для стационарных точек:

$\underline{M_1(0;\ 0):}$

$$A = z''_{xx}(0;\ 0) = 12 \cdot 0 + 10 = 10,\ B = z''_{xy}(0;\ 0) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$C = z''_{yy}(0;\ 0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2,\ AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 10.$$

Следовательно, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет экстремум. Так как $A > 0$, то это минимум. При этом $z_{\min} = 2 \cdot 0^3 - 0 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 0^2 = 0$.

$\underline{M_2\left(-\frac{5}{3};\ 0\right):}$

$$A = z''_{xx}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 12 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = -10,\ B = z''_{xy}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$C = z''_{yy}\left(-\frac{5}{3};\ 0\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 2 = -\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$AC - B^2 = -10 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3}.$$

Следовательно, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет экстремум. Так как $A < 0$, то это максимум. При этом

$$z_{\max} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2 = 4\frac{17}{27}.$$

$\underline{M_3(-1; -2):}$

$$A = z''_{xx}(-1; -2) = 12 \cdot (-1) + 10 = -2,\ B = z''_{xy}(-1; -2) = 2 \cdot (-2) = -4,$$

$$C = z''_{yy}(-1; -2) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0,\ AC - B^2 = -2 \cdot 0 - (-4)^2 = -16.$$

Следовательно, в точке $M_3(-1; -2)$ экстремума нет.

$\underline{M_4(-1;\ 2):}$

$$A = z''_{xx}(-1;\ 2) = 12\cdot(-1)+10 = -2\,,\ B = z''_{xy}(-1;\ 2) = 2\cdot(2) = 4\,,$$

$$C = z''_{yy}(-1;\ 2) = 2\cdot(-1)+2 = 0\,,\ AC - B^2 = -2\cdot 0 - 4^2 = -16\,.$$

Следовательно, в точке $M_4(-1;2)$ экстремума нет.

### *Задание к аудиторному занятию 3*

Исследовать на экстремум заданные функции:

а) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x - 6y + 1$; б) $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$;

в) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; г) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

д) $z = 8x^3 + y^3 - 24xy - 7$; е) $z = x^2y + 2xy^2 - 18xy$;

ж) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

### *Домашнее задание к занятию 3*

Исследовать на экстремум заданные функции:

1) $z = 8x^3 + y^3 - 24xy - 7$; 2) $z = \dfrac{1}{4}x^4 + x^2y - y^2 - x^2$.

## 4. ДВОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Занятие 1. Двойной интеграл и его свойства. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм $I_n$ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей $s_i$, не зависящий ни от способа разбиения области $D$, ни от выбора точек $M_i$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области $D$ и обозначается $\iint\limits_D f(x,\ y)ds$.

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D$, то она интегрируема по этой области.

*Свойства двойного интеграла.*

1. $\iint\limits_D cf(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds,\ c = \text{const}.$

2. $\iint\limits_D (f_1(x,y)+f_2(x,y))ds = \iint\limits_D f_1(x,y)ds + \iint\limits_D f_2(x,y)ds.$

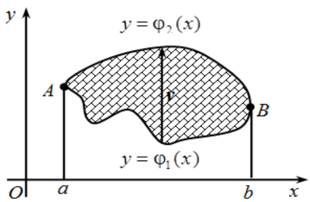
3. Если область интегрирования $D$ разбить на две области $D_1$ и $D_2$ без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds.$$

В прямоугольной системе координат элемент площади $ds$ можно записать в виде произведения $dxdy$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Область $D$ называется *правильной (простой) в направлении оси* $Ox$ (или $Oy$), если любая прямая, проходящая параллельно этой оси, пересекает границу области $D$ не более чем в двух точках.




Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла следующим образом.

1. Пусть область $D$ является правильной в направлении оси $Oy$ и ограничена линиями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $y = b$, причем $a < b$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy.$

Правая часть формулы называется *повторным интегралом.*

Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению повторного (двух определенных интегралов) интеграла вида

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy\right]dx.$$

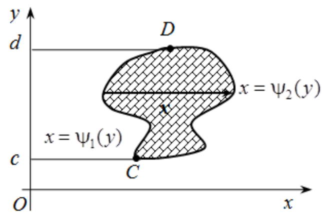
При вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в квадратных скобках) $x$ считается постоянной величиной.

2. Аналогичная формула вычисления двойного интеграла справедлива в случае, когда область $D$ является правильной в направлении оси $Ox$ и ограничена линиями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем $c < d$, $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx.$

При вычислении «внутреннего интеграла» $y$ считается постоянной величиной.

Формулы перехода от двойного интеграла к повторному показывают, что в двойном интеграле можно изменять порядок интегрирования:

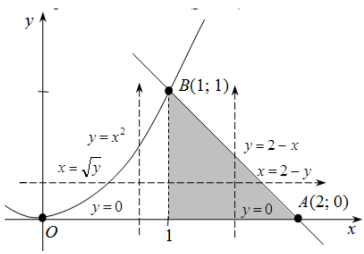



$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y\right)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx.$$

Если область интегрирования является неправильной, то ее можно представить как объединение правильных областей. Тогда двойной интеграл равен сумме двойных интегралов по этим областям.

**Пример 1.** В двойном интеграле $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область $D$ ограничена линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$.

Решение. Построим область $D$.



Найдем точки пересечения линий $y = x^2$, $x + y = 2$, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad x + x^2 = 2, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad D = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,\,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2.$$

Например, из первого уравнения системы находим: $y_1 = (x_1)^2 = 1$, $y_2 = (x_2)^2 = 4$. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (1; 1) и (–2; 4), одна из которых $B(1;\ 1)$ принадлежит границе области $D$.

*Внешнее интегрирование по переменной y.*

Область интегрирования $D$ расположена между прямыми $y = 0$, $y = 1$, а переменная $x$ изменяется в данной области при каждом фиксированном значении $y$ от точек параболы $x = \sqrt{y}$ до точек прямой $x = 2 - y$.

Следовательно, $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$

*Внешнее интегрирование по переменной x.*

Так как верхний участок границы $OBA$ области $D$ задан двумя линиями $OB$ и $BA$, то прямая $x = 1$ разбивает область $D$ на области $D_1$: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ и $D_2$: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. В результате получаем сумму двух повторных интегралов:

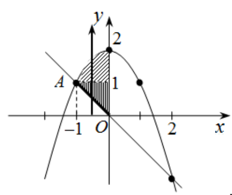
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)dy.$$

**Пример 2.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $x = 0$, $y = -x$, $y = 2 - x^2$.

Решение. Построим область $D$. Найдем точки пересечения линий из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \quad -x = 2 - x^2, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,\,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1.$$




Таким образом, $A(-1;\ 1)$ – точка пересечения линий в рассматриваемой области.

Область интегрирования $D$ расположена между прямыми $x = -1$, $x = 0$, снизу ограничена прямой $y = -x$, сверху – параболой $y = 2 - x^2$.

Следовательно,

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{2-x^2} xdy = \int_{-1}^{0} xy\Big|_{-x}^{2-x^2} dx = \int_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 - (-x)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 + x\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(2x - x^3 + x^2\right)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\left(1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{7}{12}\right) = -\frac{5}{12}.$$

Если проводить внешнее интегрирование по переменной $y$, то область $D$ необходимо разбивать на две области прямой $y = 1$ и считать не один, а сумму двух повторных интегралов.

### *Задания к аудиторному занятию 1*

1. Изменить порядок интегрирования, здесь $f = f(x, y)$:

а) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} fdx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} fdx$;

б) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{0} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} fdy$;

в) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{\sqrt{2+y}}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} fdx$;

г) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} fdy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} fdy$;

д) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} fdy$;

е) $\int_{-2}^{0} dy \int_{y^2-4}^{0} fdx$;

ж) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} fdy$;

з) $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} fdx$.

2. Вычислить двойной интеграл:

а) $\iint_D 4xydxdy, \quad D: \ x = 1, \ x = 4, \ y = 0, \ y = 2;$

б) $\iint_D (9x^2 - y^2)dxdy, \quad D: \ x = -1, \ x = 1, \ y = -2, \ y = 1;$

в) $\iint\limits_D x\cos(2y)dxdy,\quad D\colon\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2;$

г) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy,\quad D\colon\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2};$

д) $\iint\limits_D xe^y dxdy,\quad D\colon\ x=0,\ y=2,\ y=x;$

е) $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}dxdy,\ D\colon\ x=2,\ x=4,\ y=x,\ y=2x;$

ж) $\iint\limits_D e^x dxdy,\ D\colon\ y=1,\ y=2,\ x=0,\ x=\ln y;$

з) $\iint\limits_D 2xydxdy,\quad D\colon\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

### *Домашнее задание к занятию 1*

1. Изменить порядок интегрирования, здесь $f = f(x, y)$:

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx.$$

2. Вычислить двойной интеграл по заданным контурам:

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy.$$

а) $D\colon\ x=0,\ x=3,\ y=-2,\ y=1;$ б) $D\colon\ y=x,\ y=x^3.$

## Занятие 2. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии и механики

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

1. *Площадь плоской фигуры,* занимающей область $D$, вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy.$$

2. *Объем $V$ тела,* ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси $Oz$, можно найти по формуле

$$V=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy.$$

3. *Площадь поверхности* $z=f(x, y)$, которая проектируется на область $D$ плоскости $Oxy$, вычисляется по формуле

$$Q=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

4. *Масса пластинки* с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x, y)$, занимающей область $D$ плоскости $Oxy$, вычисляется по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho(x,\ y)\,dxdy.$$

5. *Статические моменты относительно осей* $Ox$ и $Oy$ плоской пластинки $D$ с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x, y)$ вычисляются по формулам

$$M_x=\iint\limits_D y\rho\left(x,\ y\right)dxdy,\qquad M_y=\iint\limits_D x\rho\left(x,\ y\right)dxdy.$$

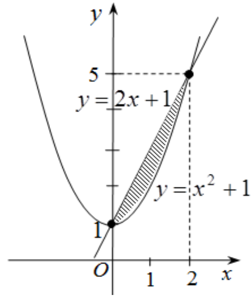
6. *Координаты центра масс плоской* пластинки $D$ с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x, y)$ вычисляются по формулам

$$x_{\text{c}}=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\rho\left(x,\ y\right)dxdy}{m},\quad y_{\text{c}}=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\rho\left(x,\ y\right)dxdy}{m},$$

где $M_x, M_y$ – статические моменты пластинки относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно;

$m$ – масса пластинки.

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=2x+1$ и параболой $y=x^2+1$.




Решение. Найдем точки пересечения линий из системы уравнений $\begin{cases} y=2x+1, \\ y=x^2+1, \end{cases}$

$x(2-x)=0 \Rightarrow\ x_1=0, x_2=2.$

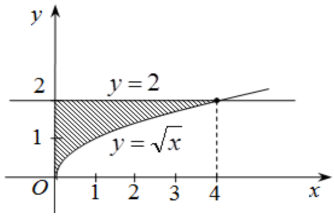
Построим область интегрирования $D$.

Тогда

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2+1}^{2x+1}dy=\int\limits_0^2 dx[y]\Big|_{x^2+1}^{2x+1}=\int\limits_0^2\left(2x+1-x^2-1\right)dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

**Пример 2.** Найти массу плоской пластинки $D$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2y$, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.




Решение. Построим область интегрирования. Массу пластинки найдем по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D 2ydxdy.$$

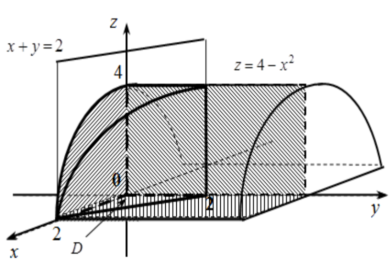
Область $D$ задается неравенствами: $0\le x\le 4,\ \sqrt{x}\le y\le 2.$ Следовательно,

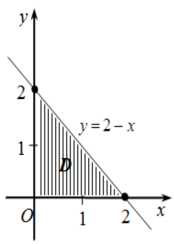
$$m=\iint\limits_D 2y\,dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^2 2ydy=\int\limits_0^4 dx\ y^2\Big|_{\sqrt{x}}^2=\int\limits_0^4 dx\left(4-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)=$$

$$=\int\limits_0^4(4-x)dx=\int\limits_0^4 4dx-\int\limits_0^4 xdx=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=16-8=8.$$

**Пример 3.** Вычислить объем $V$ тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Данное тело ограничено параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси $Oy$, и плоскостями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



Проекцией тела на плоскости $Oxy$ является треугольник. Область интегрирования $D$ задается неравенствами: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x$. Тогда

$$V = \iint_D z dxdy = \iint_D \left(4 - x^2\right) dxdy = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \int_0^{2-x} dy = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx [y]\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2\right)(2 - x) dx = \int_0^2 \left(8 - 2x^2 - 4x + x^3\right) dx =$$

$$= \left(8x - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 16 - 2 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$$

### *Задания к аудиторному занятию 2*

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

а) $y^2 = \dfrac{25}{3}x,\ x^2 = \dfrac{9}{5}y;$ б) $x + 2y - 4 = 0,\ y^2 = 4 - x;$

в) $y^2 - 2y - x = 0,\ x + y = 0;$ г) $y = 4x - x^2,\ y = 2x^2 - 5;$

д) $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0;$ е) $y - x^2 \ge 0,\ y - \sqrt{x} \le 0;$

ж) $y^2 = -8(x - 2),\ y^2 = 24(x + 2);$ з) $y = x^2,\ y = \dfrac{x^3}{3}.$

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z = 1 + x + y,\ z = 0,\ x - y = 1,\ x = 0,\ y = 0;$

б) $x + y + z = 2,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

в) $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0;$

г) $z = x^2 + y^2 + 1,\ z = 0,\ x = 4,\ x = 0,\ y = 4,\ y = 0;$

д) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

е) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2},\ \ z = 0,\ x = 2, y = 4,\ y = 0;$

ж) $x + y + z = 6,\ z = 0,\ 3x + y - 6 = 0,\ 3x + 2y - 12 = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

з) $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ x + y - 1 = 0,\ x = 0,\ y = 0.$

3. Найти координаты центра масс плоской пластины $D$ плотности $\rho(x, y)$, ограниченной заданными линиями:

а) $y^2 = 2x,\ x = 2,\ y \geq 0,\ \rho(x, y) = xy$;

б) $y = x^2,\ x = 4,\ y = 0,\ \rho(x, y) = y$;

в) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2},\ \rho(x, y) = 1$;

г) $y = x^2,\ y = x,\ \rho(x, y) = \sqrt{x}$;

д) $x^2 + y^2 = 1,\ y = 0,\ \rho(x, y) = 1$;

е) $y^2 = 4x,\ x = 1,\ y \geq 0,\ \rho(x, y) = y^2$;

ж) $y = x^2,\ \ y = 1,\ \rho(x, y) = x + y$;

з) $y = 2 - x^2,\ 2x - y - 1 = 0,\ \rho(x, y) = -x$.

### *Домашнее задание к занятию 2*

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3,\ \ y = 6 - 4x,\ \ y = 0.$$

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$y = \sqrt{x},\ \ y = 2\sqrt{x},\ \ z = 0,\ \ x + z - 6 = 0.$$

3. Найти координаты центра масс плоской пластины $D$ плотности $\rho(x, y)$, ограниченной заданными линиями:

$$y = x^2,\ y = 1,\ \mu(x, y) = x^2 y.$$

## **Занятие 3. Криволинейные интегралы, их вычисление**

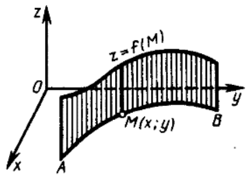
### ***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

Если интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i$ при $\Delta l_i^{\max} \to 0$ имеет предел, равный $I$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x, y)$ по кривой $AB$ и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \int_{AB} f(M)dl = \int_{AB} f(x,y)dl.$$

Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой $AB$, кривая $AB$ – *контуром интегрирования*, $A$ – начальной, а $B$ – конечной *точками интегрирования*.

Криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл за исключением того, что определенный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ при перестановке пределов интегрирования меняет знак, а криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, какую точку кривой $AB$ считать начальной, а какую – конечной, т. е. $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$




Криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(M)dl$ при $f(M) \geq 0$ численно равен площади куска цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости $Oxy$, восставленных в точках $M(x, y)$ кривой $AB$ и имеющих переменную длину $f(M)$.

Если положить $f(M) \equiv 1$, то получим криволинейный интеграл $\int_{AB} dl,$ который определяет длину дуги кривой $AB$.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая $AB$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывные функции и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, а $f(x, y)$ – функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке $A$ соответствует значение $t = \alpha$, а точке $B$ – значение $t = \beta$. Тогда для любой точки $M(\varphi(t); \psi(t))$ кривой $AB$ длину $l$ дуги $AM$ можно вычислять по формуле

$$l = l(t) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Тогда $dl=\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$ а $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_0^L f\left(x(l),\ y(l)\right)dl=$

$$=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t),\ \psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Если кривая $AB$ задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, т. е. имеющая непрерывную производную, то, принимая $x$ за параметр ($t = x$), получим:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

**Пример 1.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2dl,$ где $AB$ – часть окружности $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$

Решение. Так как

$$y^2=a^2\sin^2 t,\ \ dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=adt,\ \text{то}\ \int\limits_{AB} y^2dl=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\,adt=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3\pi}{4}.$$

**Пример 2.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} ydl,$ где $AB$ – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

Решение. Так как $y=\sqrt{2x},\ \ y'=\frac{1}{\sqrt{2x}},\ \ dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx,$

то $\int\limits_{AB} ydl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$

Рассмотрим на плоскости $Oxy$ ориентированную гладкую дугу $L$ (т. е. на дуге $L$ указано направление и в каждой точке существует касательная). Пусть на $L$ определена и непрерывна вектор-функция

$$\overline{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,\ y)\vec{j}.$$

Разобьем дугу $L$ на $n$ элементарных дуг $l_1$, $l_2$, …, $l_n$ и построим векторы $\Delta\vec{l}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, направленные из начала в конец дуги $l_k$. На каждой элементарной дуге $l_k$ выберем произвольную точку $M_k(x_k;\ y_k)$ и составим сумму скалярных произведений $\vec{a}(x_k,\ y_k)\Delta\vec{l}_k$, которая называется *n-й интегральной суммой*.

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k,\ y_k)\Delta\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{n} (P(x_k,\ y_k)\Delta x_k + Q(x_k,\ y_k)\Delta y_k).$$

Предел последовательности интегральных сумм $I_n$ при условии, что $\max|\Delta\vec{l}_k| \to 0$, называется *криволинейным интегралом по координатам* (*второго рода*) и обозначается $\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла от вектор-функции $\vec{a}(x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)\vec{i} + Q(x,\ y,\ z)\vec{j} + R(x,\ y,\ z)\vec{k}$ по пространственной дуге $L$:

$$\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P\left(x,\ y,\ z\right)dx + Q\left(x,\ y,\ z\right)dy + R\left(x,\ y,\ z\right)dz = \lim_{\max|\Delta\vec{l}_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}\left(x_k,\ y_k,\ z_k\right)\Delta\vec{l}_k.$$

Свойства криволинейного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл меняет знак.

**Пример 3.** Вычислить $\int\limits_L xydx + (x^2 + y)dy$, если $L$:

1) дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, расположенная между точками $A(0;\ 1)$ и $B(2;\ 3)$;

2) отрезок прямой $AB$.

Решение.

1. Сведем вычисление криволинейного интеграла к определенному, полагая, что $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, $dy = \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)' dx = xdx$, $0 \le x \le 2$.

Тогда $\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_0^2\left[x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx+\left(x^2+\frac{x^2}{2}+1\right)xdx\right]=$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{x^3}{2}+x+\frac{3}{2}x^3+x\right)dx=\int\limits_0^2\left(2x^3+2x\right)dx=\left(2\frac{x^4}{4}+x^2\right)\Bigg|_0^2=8+4=12.$$

2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $B$:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{3-1};\ \ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2};\ \ y=x+1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L xydx+(x^2+y)dy=\left|y=x+1,dy=dx,0\le x\le 2\right|=\int\limits_0^2[x(x+1)dx+$$

$$+\left(x^2+x+1\right)dx]=\int\limits_0^2\left(2x^2+2x+1\right)dx=\left(2\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}+4+2=\frac{34}{3}.$$

### *Задания к аудиторному занятию 3*

1. Вычислить криволинейный интеграл по координатам:

а) $\int\limits_L\left(x^2-2xy\right)dx+y^2dy,\ L\colon\ y=x^2,$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$;

б) $\int\limits_L\left(x-y\right)^2dx,\ L$: ломаная $OAB$: $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $B(2;\,1)$;

в) $\int\limits_L 2xydx,\ \ L\colon\ x=t,\ \ y=t^2,\ 0\le t\le 1;$

г) $\int\limits_L\left(x+y\right)^2dx,\ L$: ломаная $OAB$: $O(0;\,0)$, $A(1;\,2)$, В$(0;\,1)$;

д) $\int\limits_L y^2dx+xydy,\ L\colon\ y^2=x$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,-1)$;

е) $\int\limits_L\left(x-y\right)ydy,\ L\colon\ y^2=x$ от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(1;\,-1)$;

ж) $\int\limits_L x\left(y-2\right)dx+ydy,\ L$: ломаная $OAB$: $O(0;\,0)$, $A(2;-2)$, $B(0;\,1)$;

з) $L\colon\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le\pi.$

2. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги:

а) $\oint\limits_L (x+y)\,ds$, $L$: контур треугольника с вершинами $O(0;\,0)$, $A(1;\,0)$, В(0; 1);

б) $\int\limits_L xyds$, $L$: контур треугольника, образованного линиями $x=0$; $y=0$; $x+y=1$;

в) $\int\limits_L yds$, $L$: $y^2=2x$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(2;\,2)$;

г) $\int\limits_L (x-y)\,ds$, $L$: отрезок прямой от точки $O(0;\,0)$ до точки $B(1;\,2)$;

д) $\int\limits_L \dfrac{yds}{\sqrt{x}}$, $L$: $y^2=x^3$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$;

е) $\int\limits_L xds$, $L$: $x=t,\ y=t^2,\ 0\le t\le 1$;

ж) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $L$: $x^2+y^2=x$;

з) $\int\limits_L \left(3x-2\sqrt[3]{y}\right)ds$, $L$: $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$.

## *Домашнее задание к занятию 3*

1. Вычислить криволинейный интеграл по координатам:

а) $\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)dx+y^2dy$, $L$: $y=x^2$, от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$;

б) $\int\limits_L 2xydx$, $L$: $x=t,\ y=t^2,\ 0\le t\le 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги:

а) $\int\limits_L xyds$, $L$: прямоугольник, ограниченный линиями $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=2$;

б) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, $L$: $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$.

## **З а н я т и е 4. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования**

### ***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой области $D$ с границей $L$, то справедлива следующая *формула Грина*:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy,$$

где замкнутый контур $L$ обходится против часовой стрелки.

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области $D$. Для того чтобы криволинейный интеграл $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависел от пути интегрирования, целиком лежащем в области $D$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось равенство $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Если выполняется это условие, то выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ представляет собой *полный дифференциал* некоторой функции $u$, т. е.

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

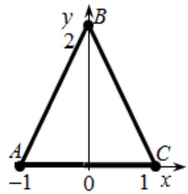
Эту функцию $u(x, y)$ можно найти по следующей формуле:

$$u(x,y) = \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C; \\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C, \end{cases}$$

где $C$ – произвольная постоянная.

Начальную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были определены в этой точке.

**Пример 1.** Вычислить $\oint\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2 dy,$




где $L$ – контур треугольника $ABC$ с вершинами в точках $A(-1;\,0)$, $B(0;\,2)$, $C(1;\,0)$.

Решение. Поскольку контур является замкнутым, применим формулу Грина с учетом того, что

$$P(x,y) = 2xy - y,\ Q(x,y) = x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2 dy = \iint\limits_\Delta (2x - 2x + 1)dxdy =$$

$$= \iint\limits_\Delta dxdy = S_\Delta = \frac{1}{2} AC\,OB = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2.$$

**Пример 2.** Найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу:

$$du(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y\right)dx + \frac{x}{y}dy.$$

Решение. Выберем за начальную точку $M_0(1;\,1)$. Получим

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y_0\right)dx + \int\limits_{y_0}^{y}\frac{x}{y}dy + C = \left|x_0 = 1,\ y_0 = 1\right| =$$

$$= \int\limits_1^x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln(1)\right)dx + \int\limits_1^y \frac{x}{y}dy + C = (\mathrm{arctg}(x) - \ln(x))\Big|_1^x + x\ln(y)\Big|_1^y + C =$$

$$= \mathrm{arctg}(x) - \ln(x) - \mathrm{arctg}(1) + x\ln(y) + C.$$

Поскольку $C - \mathrm{arctg}(1)$ также является постоянной, то окончательный ответ можно записать в виде

$$u(x,y) = \mathrm{arctg}(x) - \ln(x) + x\ln(y) + C.$$

### *Задания к аудиторному занятию 4*

1. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу:

а) $du = (x^4 + 4xy^3) + (6x^2 - 5y^2)y^2 dy;$

б) $du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy;$

в) $du = \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2} + y^2}$;

г) $du = \left( \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x} + \ln y \right) dx + \dfrac{x}{y} dy$;

д) $du = (3x^2 + y)dx + (2x - 3)dy$;

е) $du = (3x^2 y - 4xy^2)dx + (x3 - 4x^2 y + 12y^3)dy$;

ж) $du = (x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy$;

з) $du = (1 - e^{x-y} + \cos x)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy$.

2. Вычислить криволинейный интеграл по различным путям и объяснить совпадение результатов:

а) $\int\limits_L (x^3 - 2xy)dx - x^2 dy$:

1) по отрезку прямой $OC$, где $O(0;\ 0)$, $A(4;\ 0)$, $C(2;\ 8)$;

2) по ломаной $OAC$;

3) по дуге $OC$ параболы $y = x^3$;

б) $\int\limits_L 2xydx + x^2 dy$:

$L$: 1) $y = x$;

2) $y^2 = x$;

3) $x^2 = y$;

от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$;

в) $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$:

$L$: 1) $y = x$;

2) $y = x + \sin x$;

от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(\pi;\ \pi)$;

г) $\int\limits_L (4xy + 3)dx + \left( 2x^2 - \dfrac{3}{2} y^2 \right) dy$:

$L$: 1) ломаная $OAC$;

2) ломаная $OBC$;

3) по дуге $OC$ $y = \dfrac{x^2}{2}$,

где $O(0;\ 0)$, $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 8)$, $C(4;\ 8)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл от полных дифференциалов:

а) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,2)} 2xydx + x^2dy;$

б) $\int\limits_{(-1;\,-1)}^{(1;\,0)} (x^3+4y^3)xdx + (6x^2-5y^2)y^2dy;$

в) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,\frac{\pi}{2})} e^x \cos ydy - e^x \sin ydy;$

г) $\int\limits_{(1;\,\frac{\pi}{6})}^{(2;\,\frac{\pi}{4})} \operatorname{tg} y\,dx + \dfrac{x}{\cos^2 y}dy;$

д) $\int\limits_{(0;\,-1)}^{(1;\,0)} \dfrac{xdx - ydy}{(x-y)^2};$

е) $\int\limits_{(1;\,1)}^{(3;\,2)} \dfrac{ydx - xdy}{y^2};$

ж) $\int\limits_{(0;\,1)}^{(2;\,2)} \dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy;$

з) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(\pi;\,\pi)} \cos 2ydx - 2x\sin 2ydy.$

4. Применяя формулу Грина, преобразовать криволинейный интеграл к двойному интегралу:

а) $\oint\limits_L e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)dy;$

б) $\oint\limits_L (x-2)y^2dx + x^2(1+y)dy;$

в) $\oint\limits_L (1-x)ydx + (1+y)dy;$

г) $\oint\limits_L xe^{xy}dx + ye^{-xy}dy;$

д) $\oint\limits_L (x^2+y^2)dx + \ln(x^2+y^2)dy;$

е) $\oint\limits_L \left( y - \dfrac{1}{1+x^2} \right) dx + (x + 2e^{2y}) dy;$

ж) $\oint\limits_L \left( \dfrac{2x}{y} + 3\cos 3x \right) dx + \left( 2 - \dfrac{x^2}{y^2} \right) dy;$

з) $\oint\limits_L \left( e^{xy} + 2x \cos y \right) dx + x^2 y dy.$

5. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру:

а) $\oint\limits_L (1 - x^2) y dx + x(1 + y^2) dy,\ L\colon\ x^2 + y^2 = 1;$

б) $\oint\limits_L y(\cos x - 4x^2 y^2) dx - (y^2 - 2x^2) dy,\ L\colon\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

## *Домашнее задание к занятию 4*

1. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу:

$$du = (3x^2 + e^{2y}) dx + (\sin y + 2xe^{2y}) dy.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (4 - xy^2) dx + (x^2 - 3y) y dy$ по различным путям и объяснить совпадение результатов:

1) по отрезку $OB$ прямой $y = 2x$;

2) по дуге $OB$ параболы $y = x^2$;

3) по ломаной $OAB$,

где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл от полных дифференциалов:

а) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 0)}^{(6;\ 8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$ б) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ \pi)}^{(2;\ \pi)} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy.$

4. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint\limits_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,\ L\colon\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1.$$

## *Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по темам «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Функция нескольких переменных», «Двойные и криволинейные интегралы»*

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы $N$ необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы $G$ – номер группы.

**Задание 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = (-1)^G\, G\, x^2 + 2\,(G - N/15)\,x + N \text{ и } y=(G-4)\,x + N.$$

**Задание 2.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x}{G} + \frac{y}{N} + z = 1,\ \ x = 0, y = 0,\ z = 0.$$

**Задание 3.** Найти координаты центра тяжести тонкой пластины, ограниченной линиями: $y = -2x^2 - N$, $y = x - N$, $x = 1$, если плотность пластины имеет вид $\rho(x,\ y) = N$. На координатной плоскости изобразить контур заданной пластины и отметить центр ее тяжести.

**Задание 4.** Вычислить данный криволинейный интеграл

$$\int\limits_L ((G-5)\,x + (N-25)\,y)dx - ((Ny - (N-25)x))dy$$

по следующим контурам:

а) по сторонам треугольника $OAB$ (объяснить полученный ответ);

б) по замкнутому контуру $OAB$, применяя формулу Остроградского – Грина;

в) по ломаной $ABO$, где $O(0;\,0)$, $A(3;\,1)$, $B(0;\,4)$;

г) по отрезку $AO$;

д) в случае если подынтегральная функция выражает полный дифференциал некоторой функции $U(x;\,y)$, восстановить ее и вычислить значение криволинейного интеграла по контуру $AO$. Дать объяснения в случае совпадения результатов в пунктах «в», «г», «д».

# 5. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ КО ВТОРОМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ», «ДВОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 1}}$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка от функции $Z = 7 - 5x^2 - y^2 - 4x^9y^{17} - 4x - 2y$.

3. Найти экстремум функции $z = 4xy - 6x^2 - 2y^2 - x + 5$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{7} + \frac{z}{9} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

5. Дан криволинейный интеграл $\int\limits_L (3x - 2y)dx - (2x + y)dy$. Доказать, что он не зависит от пути интегрирования. Вычислить данный интеграл от точки $O(0;\,0)$ до точки $C(4,\,8)$:

1) по ломанной $OAC$, если $A(4;\,0)$;

2) по дуге $OC$ параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$;

3) через полный дифференциал функции $U(x,\,y)$.

# 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## Занятие 1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка, их решение

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ДУ). *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок высшей производной, входящей в это уравнение.

Например, ДУ $n$-го порядка представляется в следующем виде:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где $x$ – независимая переменная;

$y$ – искомая функция;

$y', y'', ..., y^{(n)}$ – производные искомой функции до $n$-го порядка включительно.

Рассмотрим ДУ $F(x, y, y') = 0.$ Его можно охарактеризовать как *дифференциальное уравнение первого порядка*, так как в него входит независимая переменная $x$, искомая функция $y(x)$ и производная только первого порядка $y'$ от искомой функции. Если в этом уравнении можно выразить производную искомой функции и записать его в виде

$$y' = f(x, y),$$

то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*.

Решением ДУ называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает это уравнение в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \text{ или } \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения – *интегральной кривой* этого уравнения. Если решение дифференциального уравнения получено в виде $\Phi(x, y) = 0,$ то оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения.

*Общим решением* ДУ называется семейство функций вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n, ...)$, каждая из которых является решением ДУ при любом допустимом значении произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, …, $C_n$, а количество этих произвольных постоянных соответствует порядку ДУ. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при подстановке в нее конкретных значений произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, …, $C_n$.

Чтобы из этого множества решений ДУ выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения при заданных условиях называется *задачей Коши*.

*Простейшим ДУ первого порядка* является дифференциальное уравнение, не содержащее искомой функции $y' = f(x)$. Его решение производится путем однократного интегрирования левой и правой частей:

$$\int y'dy = \int f(x)\,dx, \text{ или } y = \int f(x)\,dx.$$

**Пример 1.** Найти общее решение ДУ $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$ .

Решение. Проинтегрируем левую и правую части этого ДУ:

$$\int y'dy = \int (3x^2 - \sqrt[4]{x})dx,\ y = 3\int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{4}}dx,\ \ y = \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C,$$

$y = x^3 - \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$ – общее решение ДУ.

*Дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными* называются уравнения следующих видов (или сводящиеся к ним):

1) $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ (дифференциальная форма записи ДУ);

2) $P_1(x)Q_1(y)y' + P_2(x)Q_2(y) = 0$ (запись ДУ через производную искомой функции).

Связь между данными формами записи ДУ первого порядка с разделяющимися переменными осуществляется через дифференциальную запись производной искомой функции $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Чтобы решить ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, необходимо выполнить следующие действия:

1. Разделить в уравнении переменные, т. е. преобразовать уравнение таким образом, чтобы выражения с разноименными переменными оказались в различных его частях, при этом дифференциалы этих переменных были в числителях преобразованных частей.

Для ДУ в дифференциальной форме данное действие будет выглядеть следующим образом:

$$P_2(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)Q_1(y)dx,\ \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx,$$

а для ДУ, записанного через производную, –

$$P_1(x)Q_1(y)\frac{dy}{dx} = -P_2(x)Q_2(y),\ \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = -\frac{P_2(x)}{P_1(x)}dx.$$

Разделение переменных в ДУ можно представить как деление обеих частей уравнения на произведение некоторых функций, одна из которых зависит только от $x$, а другая – только от $y$: $P(x)Q(y)$. Поэтому следует помнить, что при почленном делении частей ДУ на переменные величины могут быть потеряны *особые* его решения, которые не могут быть получены из общего решения уравнения. Особые решения ДУ следует искать из уравнения $P(x)Q(y) = 0$.

2. Проинтегрировать левую и правую части преобразованного уравнения по соответствующим переменным. В результате интегрирования частей образуется равенство, которое будем воспринимать как общее решение заданного ДУ, записанное в неявном виде. Если из него выразить искомую функцию, то общее решение примет явный вид.

**Пример 2.** Решить ДУ $y' = y^2$.

Решение. Уравнение $y' = y^2$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменив в нем производную искомой функции $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим дифференциальную форму записи ДУ: $\dfrac{dy}{dx} = y^2$.

1. Разделим в нем переменные: $\dfrac{dy}{y^2} = dx$.

2. Проинтегрируем части этого равенства: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int dx.$ В результате получим: $-\dfrac{1}{y} = x + C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде. Выразим из данного равенства искомую функцию:

$$y = -\frac{1}{x+C}$$ – явный вид общего решения ДУ.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на $y$ (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$

имело вид $y = 0$). Очевидно, что $y = 0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

**Пример 3.** Решить ДУ $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0.$

Решение. Уравнение $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное в дифференциальной форме.

1. Слагаемое, содержащее дифференциал искомой функции, оставим в левой части уравнения, а первое слагаемое перенесем в его правую часть, вынесем за скобки в образованных частях общие множители и разделим переменные:

$$(x^2-x^2y)dy=-(xy^2+y^2)dx,\ x^2(1-y)dy=-y^2(x+1)dx,$$

$$\frac{(1-y)}{y^2}dy=-\frac{(x+1)}{x^2}dx.$$

Упростим полученное уравнение:

$$\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Получим: $-\frac{1}{y}-\ln|y|=\frac{1}{x}-\ln|x|+C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде. Так как из равенства выразить искомую функцию $y$ нельзя, то записать явный вид данного решения не представляется возможным.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на $x^2y^2$ (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $x^2y^2 = 0$). Очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

Если в процессе интегрирования частей ДУ с разделенными переменными результаты записываются в виде натуральных логарифмов, то целесообразно и произвольную константу представлять в виде натурального логарифма. Это позволит упростить запись общего решения ДУ. Рассмотрим это на примере.

**Пример 4.** Решить ДУ $\operatorname{tg}(x)yy' - 2y^2 + 1 = 0$.

Решение. Уравнение $\operatorname{tg}(x)yy' - 2y^2 + 1 = 0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменим в ДУ производную искомой функции $y' = \frac{dy}{dx}$, а второе и третье слагаемые перенесем в его правую часть. В результате получим: $\operatorname{tg}(x)y\frac{dy}{dx} = 2y^2 - 1$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\frac{y}{2y^2-1}dy = \operatorname{ctg}(x)dx.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int \frac{y}{2y^2-1}dy = \int \operatorname{ctg}(x)dx.$$

Выпишем результат интегрирования левой части:

$$\int \frac{y}{2y^2-1}dy = \left| \begin{array}{l} t = 2y^2 - 1 \\ dt = 4ydy \\ ydy = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln\left|2y^2 - 1\right| + C.$$

Выпишем результат интегрирования правой части:

$$\int \operatorname{ctg}(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\sin(x)| + C.$$

Тогда общим решением ДУ, записанным в неявном виде, будет:

$$\frac{1}{4}\ln\left|2y^2 - 1\right| = \ln|\sin(x)| + \ln|C|,\ \ln\left|2y^2 - 1\right|^{\frac{1}{4}} = \ln|C\sin(x)|,$$

$$\text{или}\ \sqrt[4]{2y^2 - 1} = C\sin(x).$$

В явном виде общее решение этого ДУ запишется как

$$y = \pm\sqrt{C_1\sin^4(x) + \frac{1}{2}},$$

где $C_1 = \frac{C^4}{2}$.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на $\operatorname{tg}(x)(2y^2-1)$ (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $\operatorname{tg}(x)(2y^2-1) = 0$). Но решение $x = \pi n$, $n \in Z$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ входит в общее решение данного ДУ, поэтому оно не будет являться особым.

### *Задания к аудиторному занятию 1*

1. Найти общее решение ДУ:

1) $y' = x^3 - 4x^2 + 7x - 9$;  2) $y' = 2x^4 - \frac{3}{x^3} + 7\sqrt[4]{x^5} - 12$;

3) $y' = 4\sin(2x) - 4e^{x^2} + 7\operatorname{tg}(3x) - 15$;  4) $y' = \ln(x) - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} + \arcsin(7x)$;

5) $y' = (4x - 6x^7 + 3)^9$;  6) $y' = \operatorname{arctg}^5(x^{25} - 6x^8 + 13)$.

2. Найти частное решение ДУ:

1) $y' = 5x^2 - 2x^3 + 4x - 1$, если $y(-1) = 16$;

2) $y' = x^4 - \frac{3}{x^6} + 7\sqrt[3]{x^2} - 2$, если $y(1) = -2$;

3) $y' = 6\cos(3x) - \frac{6}{\pi}$, если $y(\frac{\pi}{6}) = -12$;

4) $y' = \ln(4x) + \frac{2}{e}$, если $y(\frac{e}{4}) = 9$;

5) $y' = (2x^2 - 7x + 1)^3$, если $y(0) = 106$;

6) $y' = \arcsin^2(x - 6x^2 + 22)$, если $y(2) = -4$.

3. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $\operatorname{tg}(y)dx - x\ln(x)dy = 0, \quad y(e) = \frac{\pi}{2}$;

2) $x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}$;

3) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0, \quad y(0) = \sqrt{6}$;

4) $\sqrt{3 + y^2}\,dx = (y + x^2 y)dy, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 1$;

5) $y(e^x+4)dy-e^x dx=0,\ \ y(0)=5;$

6) $y'=(2y-1)\mathrm{ctg}(x),\ \ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=5.$

4. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти зависимость температуры $T$ тела от времени $t$, если за $a$ минут температура тела снизилась от $T_1$ до $T_2$, а температура воздуха была постоянной и равнялась $C$.

1) $a = 20$, $T_1 = 120\ ^{o}$C, $T_2 = 40\ ^{o}$C, $C = 18\ ^{o}$C;
2) $a = 15$, $T_1 = 80\ ^{o}$C, $T_2 = 30\ ^{o}$C, $C = 12\ ^{o}$C;
3) $a = 10$, $T_1 = 90\ ^{o}$C, $T_2 = 70\ ^{o}$C, $C = 16\ ^{o}$C;
4) $a = 30$, $T_1 = 100\ ^{o}$C, $T_2 = 50\ ^{o}$C, $C = 10\ ^{o}$C.

### *Домашнее задание к занятию 1*

1. Найти частное решение ДУ:

1) $2y(x^2+1)y'-\sqrt{y^2+2}=0,\ \ y(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2};$

2) $(1+x^2)dy=2x(y+3)dx,\ \ y(0)=-2;$

3) $(e^x+8)dy-ye^x dx=0,\ \ y(0)=7;$

4) $(1+x^2)y'-2xy=0,\ \ y(0)=1.$

2. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти зависимость температуры $T$ тела от времени $t$, если за 10 минут температура тела снизилась от 100 до 60 $^{o}$C, а температура воздуха была постоянной и равнялась 20 $^{o}$C.

## **Занятие 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка**

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Уравнение $y'+p(x)y=q(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в это уравнение линейно, а функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале $(a;\, b)$.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0$ – *линейным неоднородным*.

В линейном однородном уравнении $y' + p(x)y = 0$ переменные разделяются: $\dfrac{dy}{y} = -p\left(x\right) dx,$ и поэтому его интегрирование сводится к вычислению интегралов от обеих частей равенства:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p\left(x\right) dx + C.$$

Для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения обычно используют *метод подстановки* (*Бернулли*), суть которого заключается в следующем.

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые непрерывные в интервале $(a;\, b)$ функции.

Подставим $y = uv$ и производную $y' = u'v + uv'$ в уравнение:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{ или } u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Функцию $v$ будем подбирать таким образом, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Тогда $u'v = q(x)$.

В результате решения этих простейших дифференциальных уравнений получим:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0\,,\ \frac{dv}{dx} = -p(x)dx\,,\ \int \frac{dv}{dx} = -\int p(x)dx\,,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|\,,\ v = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

В качестве функции $v(x)$ можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т. е. при $C = 1$ $v = e^{-\int p(x)dx}$. Подставим во второе уравнение:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \text{ или } u' = e^{\int p(x)dx} q(x).$$

Тогда $u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C.$ Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right).$$

**Пример 1.** Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin(x)}{x}$.

Решение. Данное ДУ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение будем искать в виде $y(x) = u(x)v(x).$ Тогда производная этой функции может быть найдена по правилу дифференцирования произведения двух функций $y' = u'v + uv'.$ Выполним подстановку этих выражений в заданное ДУ:

$$u'v + v'u + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию $u$ вынесем за скобки. В результате получим:

$$u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Ввиду произвольности выбора функций $u$ и $v$ функцию $v$ можно выбрать таким образом, чтобы выражение в скобках левой части уравнения обнулялось. Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' + \frac{1}{x}v = 0; \qquad 2)\ u'v = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Из первого ДУ найдем функцию $v$:

$$v' + \frac{1}{x}v = 0,\ v' = -\frac{1}{x}v,\ \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v,\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,\ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ v = \frac{1}{x}.$$

Подставим выражение функции $v$ во второе ДУ и найдем из него функцию $u$:

$$u'v=\frac{\sin(x)}{x},\ \ u'\frac{1}{x}=\frac{\sin(x)}{x},\ u'=\sin(x),\ \frac{du}{dx}=\sin(x),\ du=\sin(x)dx,$$

$$\int du=\int\sin(x)dx,\ \ u=-\cos(x)+C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь следующий вид:

$$y(x) = (C-\cos(x))\frac{1}{x}\ .$$

**Пример 2.** Решить задачу Коши:

$$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}\ ,\ \ y(0)=-5.$$

Решение. Положим, $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$.

Подставим $y$ и $y'$ в данное уравнение, сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию $u$ вынесем за скобки:

$$u'v+u\ (v'+2xv)=2x^2e^{-x^2}.$$

Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v'+2xv=0; \qquad 2)\ u'v=2x^2e^{-x^2}.$$

Из первого ДУ найдем функцию $v$:

$$v'+2xv=0,\ \ \frac{dv}{dx}=-2xv,\ \ \int\frac{dv}{v}=-2\int xdx,\ \ln|v|=-x^2,\ \ v=e^{-x^2}.$$

Подставим выражение функции $v$ во второе ДУ и найдем из него функцию $u$:

$$u'v=2x^2e^{-x^2},\ u'e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2},\ \frac{du}{dx}=2x^2,\ du=2x^2dx,\ \int du=\int 2x^2dx,$$

$$u=\frac{2}{3}x^3+C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь вид

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right).$$

Найдем частное решение ДУ при условии, что $y(0)=-5$:

$$-5y = e^{0}\left(\frac{2}{3}\cdot 0 + C\right),\ C = -5.$$

Тогда решением поставленной задачи Коши будет функция

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 - 5\right).$$

### *Задание к аудиторному занятию 2*

Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{2}{x^2},\quad y(1) = 1;$

2) $y' + y\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x),\quad y(0) = 0;$

3) $y' - y\mathrm{ctg}(x) = 2x\sin(x),\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

4) $y' + y\mathrm{tg}(x) = \cos^2(x),\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$

5) $y' - \dfrac{1}{x+2}y = x^2 + 2x,\quad y(-1) = \dfrac{3}{2};$

6) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin(x)}{x},\quad y(\pi) = 0;$

7) $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^{x}(x+1),\quad y(0) = 1.$

### *Домашнее задание к занятию* **2**

Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2},\quad y(0) = 1;$ 2) $xy' + 2y = x^3,\quad y(-1) = 1;$

3) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin(x),\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

## З а н я т и е 3. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Суть метода *понижения порядка* состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, методика решения которого известна.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x).$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, предположив, что $y' = p(x)$.

Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения.

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$, решаемое уравнение можно записать в виде $dy' = f(x)dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)dx$ или $y' = \varphi_1(x) + C_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по $x$, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + C_1)dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$ – общее решение данного уравнения.

**Пример 1.** Решить ДУ $y'' = \cos(3x)$.

Р е ш е н и е. Дважды проинтегрируем данное уравнение и получим общее решение этого ДУ:

$$y' = \int \cos(3x)dx,\ \ y' = \frac{1}{3}\sin(3x) + C_1,\ \ y = \int\left(\frac{1}{3}\sin(3x) + C_1\right)dx,$$

$$y = -\frac{1}{9}\cos(3x) + C_1 x + C_2.$$

2. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x;\ y'),$$

не содержащее явно искомой функции $y$.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и рассматриваемое уравнение принимает вид $p' = f(x;\ p)$. Пусть $p = p(x;\ C_1)$ – общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию $p$ на $y'$, получаем ДУ $y' = \varphi(x;\ C_1)$. Для отыскания $y$ достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения будет иметь вид $y = \int (\varphi(x;\ C_1)dx + C_2$.

Частным случаем уравнения является уравнение

$$y'' = f(y'),$$

не содержащее также и независимую переменную $x$. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

**Пример 2.** Решить ДУ $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Р е ш е н и е. Пусть $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$. Получаем однородное ДУ первого порядка $p' = \dfrac{p}{x}$. Заменим $\dfrac{p}{x}$ на $U$, а $p'$ на $U + U'x$. В результате ДУ перепишется в виде $U + U'x = U$, или $U'x = 0$, $U' = 0$, $U = C_1$, $\dfrac{p}{x} = C_1$, $p = C_1 x$, $y' = C_1 x$, $y = \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2$ – общее решение ДУ.

3. Рассмотрим ДУ

$$y'' = f(y;\ y'),$$

которое не содержит явно переменную $x$.

Для понижения порядка уравнения введем следующие замены:

$$y' = p,\ p = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dy}p.$$

Тогда рассматриваемое уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dy}p = f(y; p).$$

Предположим, что записанное ДУ первого порядка имеет общее решение $p = \varphi(y;\ C_1)$. Тогда, делая обратную замену $p = \varphi(y;\ C_1)$, получим ДУ первого порядка с разделяющимися переменными $y' = \varphi(y;\ C_1)$. Интегрируя его, находим общее решение рассматриваемого ДУ:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2.$$

**Пример 3.** Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' - (y')^2 = y'(1-y); \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как заданное ДУ явно не содержит переменную $x$, то выполним следующие замены: $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy}p.$ Получим:

$$\frac{dp}{dy}p - (p)^2 = p(1-y),\ p' - p = (1-y).$$

Полученное уравнение является линейным ДУ первого порядка, а значит, сделаем замены в нем: $p = uv$, $p' = u'v + v'u$. В результате будем иметь равенство $u'v + v'u - uv = 1 - y$. Сделав в нем преобразование $u'v + u(v' - v) = 1 - y,$ решение исходного ДУ сведем к решению двух ДУ с разделяющимися переменными:

$$v' - v = 0,\ u'v = 1 - y.$$

Первое ДУ будет иметь решение $v = e^y$. Тогда после преобразований второе равенство примет вид $u' = (1-y)e^{-y}$. Интегрируя его, находим, что $u = (y-1)e^{-y} + e^{-y} + C_1$. Следовательно,

$$p = uv = = \left((y-1)e^{-y} + e^{-y} + C_1\right)e^y = y + C_1e^y.$$

Заменяя $p$ на $y'$, получаем $y' = y + C_1e^y$. Воспользуемся вторым начальным условием и найдем $C_1$: $1 = 1 + C_1e^1$, $C_1 = 0$. Получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными $y' = y$, с решением $y = C_2 e^x$. Используя первое начальное условие $y(0) = 1$, получим $1 = C_2 e^0$ или $C_2 = 1$. Это означает, что поставленная задача Коши имеет решение $y = e^x$.

### *Задание к аудиторному занятию 3*

Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений вида $F(y, y', y'') = 0$, допускающих понижение порядка:

1) $y'' - e^y y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
2) $y'y'' = 2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
3) $yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
4) $y^3 y'' = 3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;
5) $y'' - 12y^2 = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = 1$;
6) $2y'' = e^{4y}$, $y(0) = 0$, $2x + y + 3z - 7 = 0$;
7) $(y-2)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;
8) $2yy'' = 3 + (y')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;
9) $(y+1)^2 y'' = (y')^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
10) $y'' + 2\cos^3 y \sin y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

### *Домашнее задание к занятию 3*

Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений вида $F(y, y', y'') = 0$, допускающих понижение порядка:

1) $y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$;
2) $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$;
3) $y''\ y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$;
4) $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.

## **Занятие 4.** Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

***Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач***

*Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где $a$, $b$ и $c$ – некоторые числа, одновременно не обращающиеся в ноль.

Запись общего решения линейных однородных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами производится на основании корней соответствующего им характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$, представляющего собой квадратное уравнение. При этом возможны три случая.

*Случай 1.* Если корни характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$ действительные и различные ($D = b^2 - 4ac > 0$), то общее решение рассматриваемого ДУ будет иметь вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

*Случай 2.* Если корни характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$ действительные и совпадающие: $k = k_1 = k_2$ ($D = 0$), то общее решение рассматриваемого ДУ запишется как

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

*Случай 3.* Если корни характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$ комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_1 = \alpha - \beta i$ ($D < 0$), то общее решение ДУ примет следующий вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)).$$

**Пример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' - 7y = 0$.

Решение. ДУ $y'' - 6y' - 7y = 0$ является линейным однородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующим ему характеристическим уравнением является $k^2 - 6k - 7 = 0$. Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64 = 8^2 > 0$, $k_1 = \dfrac{6-8}{2} = -1$, $k_2 = \dfrac{6+8}{2} = 7$. Согласно первому случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{7x}$.

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид $k^2 - 8k + 16 = 0$. Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$, $k = k_1 = k_2 = \dfrac{8}{2} = 4$. Тогда согласно второму случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

**Пример 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид $k^2 - 4k + 5 = 0$. Найдем его решение: $D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$, $k_1 = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$, $k_2 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$. Согласно найденным корням характеристического уравнения определяем действительную их часть $\alpha = 2$ и мнимую часть по абсолютной величине $\beta = 1$. Тогда согласно третьему случаю выписываем общее решение рассматриваемого ДУ: $y = e^{2x}(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x))$.

### *Задание к аудиторному занятию 4*

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 2) $y'' + 4y = 0$;

3) $y'' - y' + 2y = 0$; 4) $y'' - 2y' = 0$;

5) $y'' - 2y' + y = 0$; 6) $y'' - 4y = 0$;

7) $y'' + y' = 0$; 8) $y'' - y' - 6y = 0$;

9) $y'' - 3y' = 0$; 10) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

11) $y'' + y' - 2y = 0$; 12) $y'' - 4y = 0$;

13) $y'' + y = 0$; 14) $y'' - 5y' = 0$;

15) $y'' + y' - 2y = 0$; 16) $y'' + 9y = 0$;
17) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 18) $y'' - 16y = 0$;
19) $y'' + 2y' + 9y = 0$; 20) $y'' + 2y' + y = 0$;
21) $y'' + 4y = 0$; 22) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

### *Домашнее задание к занятию 4*

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' - y' + y = 0$; 2) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
3) $y'' - 16y = 0$; 4) $y'' - 7y' = 0$;
5) $y'' + 6y' + 9y = 0$; 6) $y'' + 3y' = 0$;
7) $y'' - 9y' + 8y = 0$; 8) $y'' + 36y = 0$.

## Занятие 5. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

где $a$, $b$ и $c$ – некоторые числа, одновременно не обращающиеся в ноль;

$f(x)$ – некоторая заданная функция переменной $x$.

Рассмотрим решение такого ДУ в случае, когда его правая часть имеет так называемый специальный вид $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$, т. е. представляется в виде произведения многочлена $n$-й степени и экспоненциального выражения.

Установлено, что общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде суммы любого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения $y_о(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения: $y(x) = \tilde{y}(x) + y_о(x)$.

Нахождение общего решения $y_о(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения было рассмотрено в п. 1.7. Частное решение неоднородного уравнения формируется по следующим принципам:

1) сравнивается эталонная правая часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью. Исходя из этого сравнения определяется степень многочлена $n$ и числовой коэффициент экспоненциального выражения $\lambda$;

2) записывается ожидаемая форма частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В общем случае она представляет собой произведение трех сомножителей:

$$\tilde{y}(x) = P_n(x; A; B; \ ...) \cdot e^{\lambda x} \cdot x^p,$$

где $P_n(x; A; B; \ ...)$ – это многочлен $n$-й степени с неопределенными коэффициентами $A$, $B$, …;

$e^{\lambda x}$ – экспоненциальное выражение, присутствующее в фактически заданной правой части;

$x^p$ – степенное выражение, целая степень которого $p$ определяется количеством совпадения $\lambda$ с корнями соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка $k_1$ и $k_2$;

3) определяются неизвестные коэффициенты $A$, $B$, … путем подстановки сформированного частного решения в рассматриваемое дифференциальное уравнение.

**Пример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$.

Решение. ДУ $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$ является неоднородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его решение будем искать в виде $y(x) = \tilde{y} + y_o$.

1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_o: \ k^2 - 3k - 4 = 0, \ D = 9 + 16 = 25 = 5^2, \ k_1 = -1, \ k_2 = 4.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $3x - 2$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 1$, а $\lambda = 0$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = (Ax+B)\cdot e^{0x}\cdot x^0 = Ax+B.$

3. Найдем неизвестные параметры $A$ и $B$. Для того чтобы подставить сформированное решение в ДУ, найдем его производные первого и второго порядка:

$$\tilde{y}'(x) = A,\ \tilde{y}''(x) = 0.$$

Подставим эти выражения в ДУ: $-3A - 4(Ax+B) = 3x-2$, приведем подобные величины левой части $-4Ax + (-4B-3A) = 3x-2$ и уравняем коэффициенты при степенях переменной $x$:

$x$: $-4A = 3$, откуда $A = -\dfrac{3}{4}$;

1: $-4B-3A = -2,\ \ -4B-3\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -2,\ -4B+\dfrac{9}{4} = -2, -4B = -2-\dfrac{9}{4},$

$-4B = -\dfrac{17}{4},\ B = \dfrac{17}{16}.$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{16}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{16}.$

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$.

Решение.

1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_\text{o}:\ k^2 + 3k + 2 = 0,\ D = 9-8 = 1 = 1^2,\ k_1 = -1,\ k_2 = -2.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_\text{o} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $e^{3x}$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 0$, а $\lambda = 3$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = A\cdot e^{3x}\cdot x^0 = Ae^{3x}$.

3. Найдем неизвестный параметр $A$. Для этого найдем производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = 3Ae^{3x},\ \tilde{y}''(x) = 9Ae^{3x}.$$

Подставим эти выражения в ДУ: $9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = Ae^{3x}$, сократим левую и правую части полученного равенства на $e^{3x}$, приведем подобные величины и выразим $A$:

$$20A = 1,\ A = \frac{1}{20}.$$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{20}e^{3x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \dfrac{1}{20}e^{3x}$.

**Пример 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_о:\ k^2 - 4k + 4 = 0,\ D = 16 - 16 = 0,\ k_{1,2} = 2.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_о = e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $e^{2x}$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 1$, а $\lambda = 2$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в следующем виде: $\tilde{y}(x) = A \cdot e^{2x} \cdot x^2 = Ax^2 e^{2x}$.

3. Найдем неизвестный параметр $A$. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x},$$

$$\tilde{y}''(x) = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}.$$

Подставим эти выражения в ДУ: $2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} -$ $- 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}$, сократим левую и правую части полученного равенства на $e^{2x}$, приведем подобные величины и выразим $A$:

$$2A + 8Ax + 4Ax^2 - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 1,\ 2A = 1,\ A = \frac{1}{2}.$$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом: $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

**Пример 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 5y = x^2 - 1$.

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_{\text{о}}:\ k^2 - 6k + 5 = 0,\ D = 36 - 20 = 16 = 4^2,\ k_1 = \frac{6-4}{2} = 1,\ k_2 = 5.$$

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_{\text{о}} = C_1e^x + C_2e^{5x}.$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $x^2 - 1$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n$ = 2, а $\lambda$ = 0. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x) = (Ax^2 + Bx + C)x^0 = Ax^2 + Bx + C$ .

3. Найдем неизвестные параметры $A$, $B$, $C$. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B,\ \tilde{y}''(x) = (2Ax + B)' = 2A.$$

Подставим эти выражения в ДУ:

$$2A - 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные величины по степеням переменной $x$:

$$2A - 12Ax - 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = x^2 - 1,$$

$$5Ax^2 + x(-12A + 5B) + 1(2A + 5C - 6B) = x^2 - 1.$$

Приравняем коэффициенты при степенях $x$ левой и правой частей уравнения:

$x^2$: $5A = 1,\ A = \frac{1}{5};$

$x$: $-12A + 5B = 0,\ -\frac{12}{5} + 5B = 0,\ 5B = \frac{12}{5},\ B = \frac{12}{25};$

1: $2A + 5C - 6B = -1,\ \ 2\cdot\frac{1}{5} + 5C - 6\cdot\frac{12}{25} = -1,\ 5C = -1 + \frac{72}{25} - \frac{2}{5},$

$5C = \frac{-25 + 72 - 10}{25},\ \ 5C = \frac{37}{25},\ C = \frac{37}{125}.$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{37}{125}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом:

$$y = C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{37}{125}.$$

**Пример 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = (2x + 7)e^{-x}.$

Решение. 1. Найдем общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

$$y_{\text{о}}:\ k^2-2k+5=0,\ D=4-20=-16=(\pm 4i)^2,\ k_1=\frac{2-4i}{2}=1-2i,$$

$$k_2=\frac{2+4i}{2}=1+2i.$$

В данном случае действительная часть полученных комплексных корней $\alpha = 1$, а абсолютная величина их мнимой части $\beta = 2$.

Тогда общее решение соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка имеет вид

$$y_{\text{о}}=e^x(C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x)).$$

2. Сформируем и найдем частное решение неоднородного ДУ второго порядка:

$\tilde{y}$: сравним эталонную правую часть $P_n(x)e^{\lambda x}$ с фактически заданной правой частью $(2x+7)e^{-x}$ уравнения. Определяем, что в нашем случае $n = 1$, а $\lambda = -1$. Значит, частное решение неоднородного ДУ можем записать в виде $\tilde{y}(x)=(Ax+B)\cdot e^{-x}\cdot x^0=(Ax+B)e^{-x}$.

3. Найдем неизвестные параметры $A$ и $B$. Для этого определим производные первого и второго порядка от $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x)=((Ax+B)e^{-x})'=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x},$$

$$\tilde{y}''(x)=-Ae^{-x}-Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}=-2Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}.$$

Подставим эти выражения в ДУ:

$$-2Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}-2(Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x})+5(Ax+B)e^{-x}=(2x+7)e^{-x}.$$

Сократим левую и правую части полученного равенства на $e^{-x}$, приведем подобные величины и выразим искомые параметры:

$$-2A+(Ax+B)-2A+2(Ax+B)+5(Ax+B)=2x+7,$$
$$-4A+Ax+B+2Ax+2B+5Ax+5B=2x+7,$$
$$8Ax-4A+8B=2x+7.$$

Приравняем коэффициенты при степенях $x$ левой и правой частей уравнения:

$x$: $8A = 2$, $A=\frac{1}{4}$;

1: $-4A+8B=7,\ -4\cdot\frac{1}{4}+8B=7,\ 8B=8,\ B=1.$

Тогда частное решение неоднородного ДУ второго порядка примет вид $\tilde{y}(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{-x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения запишется следующим образом:

$$y=e^{x}(C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))+(\frac{1}{2}x+1)e^{-x}.$$

### *Задание к аудиторному занятию 5*

Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y''-2y'+8y=6x+1;$ 2) $y''-2y'=6x^2-6x-2;$

3) $y''-2y'=2x+1;$ 4) $y''+2y'+9y=2e^{3x};$

5) $y''+16y'=(x+4)e^{-x};$ 6) $y''-4y'+4y=3e^{2x}.$

### *Домашнее задание к занятию 5*

Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y''-y'-2y=3e^{2x};$ 2) $y''-4y=7e^{5x};$

3) $y''+y=xe^{-3x};$ 4) $y''-3y'=2-6x.$

## 7. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К ТРЕТЬЕМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. Найти частное решение ДУ $y'y^2=\frac{2x}{y},\ y(-1)=9.$

2. Найти частное решение ДУ $y'+\frac{y}{3x}=4\sqrt[3]{x},\ y(8)=-6.$

3. Найти частное решение ДУ $y''=32\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=4.$

4. Найти общее решение ДУ $y''-4y'+3y=(7x+4)e^{6x}.$

# 8. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

## Занятие 1. Числовые ряды

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, … .

*Числовым рядом* называется сумма этих чисел

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Числа $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ называются членами ряда, $a_n$ – общим или $n$-м членом ряда. Конечная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется $n$-й частичной суммой ряда.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, ряд называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Если ряд сходится, число $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ называется суммой ряда, а разность $r_n = S - S_n = a_{n+1} + {} + a_{n+2} + \ldots$ называется остатком ряда.

**Пример 1.** По заданному общему члену $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ записать ряд и найти его сумму.

Решение. Если $n$ принимает значения 1, 2, 3, …, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ ... \ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда найдем предел при $n \to \infty$ $n$-й частичной суммы: $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Учитывая, что $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}), \quad \text{т. е.} \quad S_n = 1-\frac{1}{n+1},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1.$ Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

*Необходимое условие* сходимости числового ряда: если числовой ряд сходится, то его общий член ряда $a_n$ при неограниченном увеличении его номера $n$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ (Это необходимый, но не достаточный признак сходимости числового ряда.)

**Пример 2.** Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\ldots;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1} = 1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ldots.$

Решение. Найдем предел общего члена каждого ряда при $n\to\infty$:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = 0.$$

Необходимый признак сходимости для первого ряда не выполняется. Поэтому этот ряд расходится. Для второго ряда необходимый признак выполняется. Вопрос о его сходимости может быть решен после дополнительных исследований.

***Достаточные признаки сходимости числовых рядов.***

*Предельный признак сравнения*. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A,\ 0 < A < \infty$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5n}\right).$

Решение. Применим предельный признак сравнения для данного и гармонического рядов.

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5n} : \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{5}$ – конечное число, то исходный ряд расходится, как и гармонический ряд.

При использовании данного признака исследуемый ряд иногда сравнивают с эталонными рядами, к которым относятся:

1) ряд бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots q^n + \dots = \sum_n q^n,\ q > 0,$$

который при $q < 1$ сходится, а при $q \geq 1$ расходится;

2) расходящийся гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

3) обобщенный гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

который при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится.

*Признак Даламбера.* Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$ тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

*Радикальный признак Коши.* Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$ В случае, когда $\rho < 1$, ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}.$

Решение. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$, то применим радикальный признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$ сходится, а следовательно, сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

*Интегральный признак Коши.* Пусть дан ряд

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(n)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1;\infty)$. Тогда, если $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, если же этот интеграл расходится, то исследуемый ряд также расходится.

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Решение. Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=t,\ \frac{1}{x}dx=dt\\ \text{если } x=2,\ t=\ln 2\\ \text{если } x=b,\ t=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^3}dt=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{t^2}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(\ln b)^2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}\right)=\frac{1}{2(\ln 2)^2}\ -$$

конечное число.

$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ – сходящийся, а следовательно, и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$ – сходящийся.

### *Задания к аудиторному занятию 1*

1. С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^2}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{3n+1}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{(n^2+2) \cdot 2^n}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \sqrt{n}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n(n+1)}}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$.

3. С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(n+1)}{n^n}$. 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+4}\right)^n$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на сходимость ряды с помощью интегрального признака Коши.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

### *Домашнее задание к занятию 1*

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^3}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^{2n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-2)(3n+1)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{n^n}$. 9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. 11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

## Занятие 2. Знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

***Знакочередующимися*** рядами называют ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки. Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots,$$

где $a_n > 0$.

*Признак Лейбница* (достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда монотонно убывают $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю ( $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ), то ряд сходится.

Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Рассмотрим ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где числа $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольно. Такой ряд называют ***знакопеременным*** рядом.

Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то сходится и знакопеременный ряд:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Например, ряд $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$ сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$ .

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница.

Ряд же, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (как гармонический ряд).

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$ – абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

также сходится. (Оба ряда – геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.)

Например, ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ – условно сходящийся, так как сам ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ расходится (легко проверить с помощью интегрального признака).

Для абсолютно сходящихся рядов сумма ряда равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда. Для условно сходящихся рядов это свойство не выполняется.

### *Задание к аудиторному занятию 2*

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot 3^{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}.$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{n(2^n+1)}.$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(3n+2)^2}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n^2+5}}.$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 3^n}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{\sqrt{n(n+1)}}.$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{5^n}.$

### *Домашнее задание к занятию 2*

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5^n}{n!}.$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n^2}{(n+1)!}.$ 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}1}{n\ln n}.$

## **Занятие 3. Степенные ряды**

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ называется *степенным рядом*. Числа $a_0$, $a_1$, …, $a_n$, … называются коэффициентами степенного ряда.

Придавая $x$ различные числовые значения, получают различные числовые ряды, которые могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Множество всех тех значений $x$, при которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда. Очевидно, что при $x=0$ любой степенной ряд сходится.

*Теорема Абеля.* Если степенной ряд сходится при $x=x_0$, $x_0\neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x|<|x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x|>|x_1|$.

Если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0,$ то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$

**Пример 1.** Найдите интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}.$

Решение. Так как $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1},$ а радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1,$ то данный ряд сходится на интервале (–1; 1). Вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т. е. в точках $x = \pm 1$, исследуется дополнительно.

При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n},$ который расходится, а при $x = -1$ – знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n},$ сходящийся на основании признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится на полуинтервале [–1; 1).

### *Задание к аудиторному занятию 3*

Исследовать сходимость степенного ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}.$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{5^n\sqrt{n}}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{4^n\sqrt[5]{n}}.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n \ln n}.$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n.$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}.$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n x^n}{4^n\sqrt{n}}.$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{4^n\sqrt[3]{n}}.$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{\sqrt{(5n-2)\cdot 3^n}}.$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n x^n}{5^n\sqrt{n}}.$

### *Домашнее задание к занятию 3*

Исследовать сходимость степенного ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.  2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{3^n \sqrt[4]{n}}$.  3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}}$.

## Занятие 4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена, их применение

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

***Рядом Тейлора*** для функции $f(x)$ в окрестности точки $a$ называется степенной ряд относительно двучлена $x - a$ вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

При $a = 0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной $x$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

который называют ***рядом Маклорена***.

Разложение в ряд Маклорена функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad \left(|x| < \infty\right);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad \left(|x| < \infty\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad \left(|x| < \infty\right);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \left(|x| < 1\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad (-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad (-1 \le x \le 1);$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

$$\left(|x| \le 1\right).$$

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу умножения многочленов. При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Эти правила применяют, в частности, для приближенных вычислений значений функций и интегралов.

**Пример 1.** Используя разложение функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$ в ряд Маклорена и правила умножения и сложения степенных рядов, запишите разложения в ряд по степеням $x$ для следующих функций:

1) $(1+x)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$; 4) $e^x \sin x$; 5) $\ln\left(1+3x+2x^2\right)$.

Р е ш е н и е: 1) умножим почленно $1 + x$ на ряд Маклорена для функции $e^x$, который сходится на всей числовой оси, получим ряд

$$(1+x)e^x = (1+x)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n+1}{n!}x^n + \ldots,$$

сходящийся при всех значениях $x$;

2) разложение в ряд Маклорена $\sin^2 x$ можно получить следующим образом:

$$\sin^2 x = \sin x \sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \right) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \;.$$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех значениях $x$.

Такой же результат можно получить, используя формулу

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos\,2x)$$

и заменяя $x$ на $2x$ в разложении $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots;$$

3) так как $\dfrac{x-3}{(x+1)^2} = (x-3)(x+1)^{-2}$, а

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \ldots,$$

то, умножая почленно этот ряд на $x - 3$, получим

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = -3 + 7x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(1-4n)\,x^{n-1} + \ldots .$$

Этот ряд сходится на интервале (–1; 1), так как на этом интервале сходится $(1+x)^{-2}$;

4) разложение в ряд функции $e^{-x}\sin x$ найдем почленным умножением ряда для $e^{-x}$, получаемого из ряда Маклорена для $e^x$ заменой $x$ на $-x$, на ряд Маклорена для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots .$$

Полученный ряд сходится к функции $e^{-x}\sin x$ на всей числовой оси;

5) функцию $\ln(1 + 3x + 2x^2)$ можно представить в виде

$$\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln((1 + x)(1 + 2x)) = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x).$$

Так как $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},\ (-1 < x \le 1),$ заменяя в этом разложении $x$ на $2x$, получим

$$\ln\ (1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\ \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right).$$

Тогда $\ln(1+x)+\ln(1+2x)=\ln(1+3x+2x^2)=$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n},\ \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right).$$

**Пример 2.** Вычислить с точностью до 0,0001: 1) ln 1,1; 2) $\sqrt[4]{17}$.

Решение: 1) так как

$$\ln\ (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...,\quad (-1<x\le 1),$$

то, полагая, что $x = 0{,}1$, получим ряд для вычисления ln 1,1 с любой точностью:

$$\ln 1{,}1=0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\dots .$$

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления приближенного значения ln 1,1 с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1\approx 0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}001}{3}\approx 0{,}0953;$$

2) так как $\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$, то для вычисления $\sqrt[4]{17}$ воспользуемся разложением:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+$$
$$+\frac{m(m-1)\ ...\ (m-n+1)}{n!}x^n+...,\ \left(|x|<1\right),$$

полагая в разложении функции $(1+x)^m$ $x=\frac{1}{16},\ m=\frac{1}{4}.$

Тогда $2\cdot(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}=2\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^2}-...\right).$

Для достижения требуемой точности $\sqrt[4]{17}$ достаточно ограничиться суммой трех первых членов ряда.

$$\sqrt[4]{17}\approx 2\cdot(1+0{,}01562-0{,}00037)\approx 2{,}0305.$$

**Пример 3.** Выписать первообразную подынтегральной функции, разлагая ее в ряд Маклорена: 1) $\int\sin x^2dx$; 2) $\int\sqrt{x}e^x dx$; 3) $\int\sqrt{1-x^3}dx.$

Решение: 1) пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ и заменяя в нем $x$ на $x^2$, получим

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Тогда

$$\int \sin x^2 dx = \sin x^2 = \int\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \frac{x^{15}}{7!\cdot 15} + \ldots + C, \quad \left(|x| < \infty\right);$$

2) заменим функцию $e^x$ рядом Маклорена.

Тогда получим $\int \sqrt{x}e^x dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots)dx =$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} + \ldots + \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + \ldots)dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1!\cdot 5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{2!\cdot 7}x^{\frac{7}{2}} + \ldots + \frac{2}{n!\cdot(2n+3)}x^{\frac{2n+3}{2}} + \ldots + C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x \geq 0$;

3) так как $\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}}$, то

$$\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - \ldots .$$

Тогда

$$\int \sqrt{1-x^3}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - \ldots\right)dx =$$

$$= x - \frac{x^4}{1!\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^7}{2!\cdot 2^2\cdot 7} - \frac{1\cdot 3x^{10}}{3!\cdot 2^3\cdot 10} - \ldots + C,$$

ряд, который сходится при $|x| < 1$.

**Пример 4.** Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 значения следующих интегралов:

1) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 2) $I_2 = \int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$; 3) $I_3 = \int\limits_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx.$

Решение: 1) так как $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + \ldots \ \left(|x|<1\right).$$

Тогда $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = t - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{13}}{13} + \ldots \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}} + \ldots .$$

Для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда $I_1 \approx 0{,}4969$;

2) пользуясь разложением $\cos x$ в ряд Маклорена, получим

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \ldots \ (x \ge 0).$$

Тогда

$$I_2 = \int_0^1 \cos\sqrt{x}dx = x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \frac{x^5}{8!\cdot 5} - \ldots\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 2} + \frac{1}{4!\cdot 3} - \frac{1}{6!\cdot 4} + \frac{1}{8!\cdot 5} - \ldots .$$

Для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно взять сумму четырех первых членов ряда:

$$I_2 \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0{,}7635;$$

3) пользуясь разложением $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^3\cdot 3} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5} + \frac{x^7}{4^7\cdot 7} + \ldots \left(|x| \le 4\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} + \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \ldots \left(|x| \le 4\right).$$

$$I_3=\int_1^{1,5}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx=\int_1^{1,5}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4^3\cdot 3}+\frac{x^4}{4^5\cdot 5}+\frac{x^6}{4^7\cdot 7}+\ldots\right)dx=\left(\frac{x}{4}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^3}{4^3\cdot 3}+\frac{x^5}{4^5\cdot 5}+\frac{x^7}{4^7\cdot 7}+\ldots\right)\Bigg|_1^{1,5}=\frac{1,5-1}{4}-\frac{1,5^3-1}{4^3\cdot 3}+\frac{1,5^5-1}{4^5\cdot 5}-\frac{1,5^7-1}{4^7\cdot 7}+\ldots .$$

Получили знакочередующийся сходящийся ряд. Для достижения требуемой точности достаточно взять сумму трех первых членов полученного ряда $I_3 \approx 0,1211$.

### *Задание к аудиторному занятию 4*

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1. $\int_0^1 \cos x^2 dx.$
2. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$
3. $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$
4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$
5. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\cos 2x dx.$
6. $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-x^3} dx.$
7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$
8. $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx.$
9. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}.$
10. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx.$

### *Домашнее задание к занятию 4*

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx.$
2. $\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}\, dx.$
3. $\int_0^1 x^2 \sin\sqrt[3]{x}\, dx.$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt[4]{1+x^3}}.$

## *Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Числовые и функциональные ряды»*

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы $N$ необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы $G$ – номер группы.

**Задание 1.** Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{Nn^G+G}{n^G+N}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{Nn+4}}{((G+2)n+N)^G}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+N)^{G+1}}{(2G-1)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{Gn^3+3n-4}{Nn^3+6n^2+1}\right)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[G+5]{(2n+5)^N}}$.

**Задание 2.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{Nn}{(4-G)^n(2n-1)}$.

**Задание 3.** Определить интервал сходимости данных степенных рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(4-G)^n}{(20-N)n+G}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-N)^n}{(N+G)!}$.

**Задание 4.** Приближенно вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}}10Nx\cos\,((G+1)x)\,dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

# 9. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## Занятие 1. Основные понятия теории вероятностей. Формулы комбинаторики

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Исходными понятиями в теории вероятностей являются понятия испытания и события. Под испытанием (опытом) будем понимать всякое действие, результат которого фиксируется. Результат испытания будем называть событием. События, как правило, обозначаются большими латинскими буквами $A$, $B$, … . Результатом одинаковых испытаний могут быть разные события.

Например, подбрасываем монету – это испытание. Результатом этого испытания могут быть два события: $A_1$ – выпал «герб», $A_2$ – выпала «решка». Конечно, монета может стать и на ребро, но это событие, если и появляется, то настолько редко, что его можно считать практически невозможным событием.

Проведем испытание: на $k$ делянках одинаковой площади с близкими почвенными и климатическими характеристиками посеян один и тот же сорт некоторой культуры. Результатом этого испытания будет совокупность событий $A_1$, $A_2$, …, $A_k$, представляющих собой урожайность с каждой делянки. Причем значения $A_1$, $A_2$, …, $A_k$ будут различными. Подобных примеров можно привести сколь угодно много.

Рассматриваемые события можно разделить на *достоверные, невозможные и случайные*.

Событие, которое в данном испытании обязательно происходит, называется *достоверным событием.*

Событие, которое в данном испытании не может произойти, называется *невозможным событием.*

Событие, которое в данном испытании может произойти, может и не произойти, называется *случайным событием.*

Например, в испытании с монетой событие $A$ – монета испарится – невозможное, событие $B$ – монета упадет на землю – достоверное, событие $A_1$ – выпадет «герб» и $A_2$ – выпадет «решка» – случайные.

Случайные события в свою очередь делятся на: *несовместные, равновозможные и единственно возможные события.*

*События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.*

*События называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из событий не является более возможным, чем другие.*

*События называются единственно возможными, если в результате испытания хотя бы одного из них есть достоверное событие.*

*Совокупность единственно возможных и несовместных событий испытания образуют полную группу событий.*

Часто при решении задач по теории вероятностей бывает удобно пользоваться понятиями *перестановки, размещения, сочетания*.

*Перестановками из n элементов называются всевозможные упорядоченные множества, содержащие все данные n элементов.*

Например, перестановкам из трех элементов $a$, $b$, $c$ будут следующие множества: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$, $\{b, c, a\}$, $\{b, a, c\}$.

Ясно, что перестановки отличаются друг от друга только порядком следования в них элементов. Число всевозможных перестановок из $n$ элементов обозначают $P_\text{n}$. Легко показать, что

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n! \text{ (! – факториал).}$$

*Размещениями из n элементов по m элементов (m < n) называются всевозможные упорядоченные множества по m элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся друг от друга либо хотя бы одним элементом, либо порядком следования элементов в этих множествах.*

Например, размещениями из трех элементов $a$, $b$, $c$ по два элемента будут следующие множества: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$.

Число всех размещений из $n$ элементов по $m$ элементов обозначают $A_n^m$ и вычисляют по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},\quad A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)).$$

Очевидно, что при $m = n$ размещения совпадают с перестановками $A_n^m = P_n$.

*Сочетаниями из n элементов по m элементов называются всевозможные множества по m элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.*

Сочетаниями из трех элементов $a$, $b$, $c$ по два элемента будут множества: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

Число всех сочетаний из $n$ элементов по $m$ обозначают $C_n^m$. Очевидно, что

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}.$$

Иногда удобно пользоваться следующими свойствами сочетаний:

1) $C_n^n = C_n^0 = 1$; 2) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 3) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Разницу между перестановками, размещениями и сочетаниями рассмотрим на следующих примерах.

1. Пять студентов приобрели 5 билетов в театр. Сколькими способами студенты могут разместиться на приобретенных местах?

Очевидно, число способов размещения студентов в театре равно числу перестановок из 5 элементов: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из 5 цифр: 1; 2; 3; 4; 5, если каждая цифра входит в число по одному разу?

Число трехзначных чисел из 5 цифр равно числу размещений из 5 элементов по три: $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$

3. Пять студентов приобрели три билета в театр. Сколькими способами можно выбрать делегацию студентов в театр?

Число всевозможных способов выбора делегации в театр из пяти человек на три места равно числу сочетаний из пяти элементов по три:

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{60}{3!} = 10 .$$

### *Задания к аудиторному занятию 1*

1. Рассыльному поручено разнести 6 телеграмм по шести различным адресам. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

2. Студенты данного курса изучают 7 учебных предметов. В расписание занятий можно поставить 3 различных предмета в день. Сколько существует способов составления расписания на этот день?

3. Каждая из букв П, О, Л, А, К, Н написана на одной из шести карточек, которые перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Сколькими способами можно их разложить?

4. Сколько различных делегаций по четыре человека можно составить из группы в 15 человек?

5. В хозяйстве 4 бригады. Сколькими способами можно распределить по бригадам 4 бригадиров?

6. Студент пришел на экзамен, зная лишь 35 из 40 вопросов программы. Сколько существует способов задать студенту 3 вопроса, которых он не знает?

7. Из 20 человек нужно выделить 7 для полевых работ. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

9. В спортклубе 10 лыжников и 8 лыжниц. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 лыжников и 3 лыжниц?

10. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 7 различных цветов?

11. Сколькими способами можно расположить на книжной полке 8 различных книг?

12. Дано 20 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

13. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 16 дней. Сколькими способами можно составить расписание сессии?

14. В партии имеется 8 изделий обычного качества и 4 высшего. Сколькими способами из партии можно выбрать 6 изделий так, чтобы 3 из них были высшего качества?

15. Для производственной практики студентов предоставлено 10 мест в Минскую область, 5 – в Гомельскую, 8 – в Витебскую, 9 – в Могилевскую, 7 – в Брестскую и 11 – в Гродненскую. Сколько имеется случаев, что три определенных студента попадут на практику в одну область?

16. На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных треугольников с вершинами в данных точках можно построить?

17. Сколькими способами можно разместить 6 больных в шестиместной палате?

18. Встретились 10 выпускников и обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано всего рукопожатий?

19. Агрохимик проверяет 6 видов минеральных удобрений. Ему нужно провести несколько опытов по изучению совместного влияния любой тройки удобрений. Для каждого опыта берется участок 0,25 га. На какой площади проводится все исследование?

20. Сколькими способами можно распределить первые три премии на конкурсе, в котором принимает участие 23 человека?

### *Домашнее задание к занятию 1*

1. Сколькими способами студент может выбрать в библиотеке три книги из пяти ему предложенных?

2. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. На кафедре 8 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 8 дней, если каждый преподаватель дает консультацию один раз?

4. В коробке находятся 15 семян ржи и 10 семян пшеницы. Наудачу берут 2 зерна. Сколько существует способов взять: а) только семена ржи; б) только семена пшеницы; в) одно зерно ржи, одно – пшеницы?

5. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков – русского, английского, французского, немецкого, испанского – на любой другой из этих пяти языков?

6. 9 студентов решили обменяться фотографиями друг с другом. Сколько фотографий надо было для этого напечатать?

7. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди них таких чисел, которые начинаются цифрой 4?

## Занятие 2. Вероятность события и ее свойства. Статистическая вероятность случайного события

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

События, которые являются несовместными и единственно возможными, называются «*элементарными исходами*» в рассматриваемом испытании.

*Вероятностью события А называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих появлению события А, к общему числу всевозможных элементарных исходов испытания*:

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

где $k$ – число исходов, благоприятствующих появлению события $A$;

$n$ – число всевозможных элементарных исходов испытания, в результате которых событие $A$ наступит или не наступит.

Это определение называется классическим определением вероятности.

Из определения вероятности следует, что:

1) вероятность достоверного события равна 1;

2) вероятность невозможного события равна 0;

3) вероятность случайного события находится в интервале (0; 1).

**Пример 1.** Пусть на машинном дворе стоят 17 грузовых машин, семь из которых имеют грузоподъемность 1,5 т, шесть – 3 т и четыре – 5 т. За некоторым грузом отправляются две наугад взятые машины. Какова вероятность того, что отправленные машины заберут весь груз, если его 6,5 т?

Решение. Введем событие $A$ – отправленные машины заберут весь груз и найдем число всевозможных исходов испытания $n$ и число исходов $k$, благоприятствующих событию $A$. Очевидно, число способов, которыми можно отправить две машины из имеющихся 17, равно $C_{17}^2$, значит $n = C_{17}^2 = 136$.

Но не каждая пара может забрать 6,5 т груза. Груз будет весь взят, если будут отправлены: или одна полуторатонная и одна пятитонная машины (таких способов $7 \cdot 4 = 28$); или одна трехтонная и одна пятитонная машины (таких способов $6 \cdot 4 = 24$); или две пятитонные машины (таких способов $C^2 = 6$). Итак, $k = 28 + 24 + 6 = 58$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{58}{136} = \dfrac{29}{68}$.

Проведем серию из $n$ одинаковых испытаний, в каждом из которых событие $A$ может появиться, может не появиться, и допустим, что событие $A$ появилось в $k$ испытаниях из проведенных $n$.

*Частотой или статистической вероятностью $p^*$ случайного события $A$ называется отношение числа испытаний, в которых случайное событие $A$ появилось, к общему числу проведенных испытаний, т. е.*

$$P^* = \frac{k}{n}.$$

Экспериментально установлено, что с ростом числа испытаний, проводимых в одинаковых условиях, частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа $p$, которое естественно принять за объективную меру возможности появления этого события, т. е. за его вероятность.

Вероятность случайного события $A$ обозначает $P(A)$. Таким образом, $P(A) = p = \lim\limits_{n\to\infty} p^* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{n}$.

### *Задания к аудиторному занятию 2*

1. Определить вероятность того, что во взятом наугад трехзначном числе все цифры окажутся одинаковыми.

2. Из тщательно перемешанных 28 косточек домино наугад берется одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней будет не менее девяти?

3. В урне четыре белых и пять черных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) оба шара черные; в) один белый.

4. Из букв разрезной азбуки составлено слово «бухгалтер». Перемешаем карточки, затем, вытаскивая их наугад, кладем в порядке вытаскивания три из них. Какова вероятность того, что при этом получится слово «луг»?

5. В студенческой группе 12 дружинников, среди них 5 девушек. Путем жеребьевки должны быть избраны 4 человека на дежурство. Чему равна вероятность того, что среди них окажутся все юноши?

6. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков: а) не больше пяти; б) не меньше 9?

7. В ящике 30 яблок. Из них 5 поражены болезнью в скрытой форме. Наугад берут 3 яблока. Вычислить вероятности событий:

а) 3 яблока поражены болезнью; б) только одно яблоко поражено болезнью.

8. В группе из 30 студентов на контрольной работе получили: оценку «отлично» – 8 студентов, оценку «хорошо» – 10 студентов, оценку «удовлетворительно» – 9 студентов, оценку «неудовлетворительно» – 3 студента. Какова вероятность того, что три студента, вызванные к доске, справились с контрольной работой?

9. В хозяйстве имеется 6 гусеничных и 4 колесных трактора. Для выполнения некоторой работы произвольно выбираются два трактора. Найти вероятность того, что это будут: а) гусеничные тракторы; б) колесные тракторы; в) один гусеничный, один колесный трактор.

10. Из разрезной азбуки, в которой имеется 33 карточки с различными буквами алфавита, вынимаются 5 карточек. Какова вероятность того, что 5 букв, расположенные в порядке появления, составят слово «рынок»?

11. В мастерскую для ремонта поступило 10 механических часов. Известно, что 6 из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся двое часов. Найти вероятность того, что взятые часы не нуждается в общей чистке механизма.

12. В хозяйстве 5 участков земли, которые необходимо занять под 5 культур. Какова вероятность того, что произвольное закрепление культур за участками совпадает с запланированным?

13. На тепловой электростанции 14 сменных инженеров, из них три – женщины. В смену занято три человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажутся: а) все мужчины; б) все женщины.

14. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Карточки перемешиваются, а затем наугад берутся две из них. Найти вероятность того, что дробь, образованная из двух взятых чисел, будет сократимой.

15. В партии, состоящей из 10 изделий, 4 бракованных. Для контроля берутся 3 изделия. Найти вероятность того, что: а) оба они бракованные; б) среди них одно бракованное.

16. На экзамене студенту предлагается билет, состоящий из 3 вопросов. Из 60 вопросов программы студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять: а) из известных ему вопросов; б) из невыученных вопросов.

17. Среди 10 студентов, сидящих в первом ряду, трое не подготовлены к занятиям. Найти вероятность того, что среди 7 опрошенных студентов двое не готовы к занятиям.

18. Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем пять книг стоят по 4 тыс. руб. каждая, три книги – по 1 тыс. руб. и две книги – по 3 тыс. руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 5 тыс. руб.

19. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Могилевскую область, 8 – в Гомельскую и 7 – в Витебскую. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут в одну область?

20. На десяти карточках напечатаны цифры от 1 до 9. Найти вероятность того, что три наугад взятые и поставленные в ряд карточки составят число 197.

### *Домашнее задание к занятию 2*

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани?

2. Из букв разрезной азбуки составлено слово «бухгалтер». Перемешаем карточки, затем, вытаскивая их наугад, кладем в порядке

вытаскивания три из них. Какова вероятность того, что при этом получится слово «луг»?

3. В студенческой группе 12 дружинников, среди них 5 девушек. Путем жеребьевки должны быть избраны 4 человека на дежурство. Чему равна вероятность того, что среди них окажутся все юноши?

4. Преподаватель вызвал через старосту на обязательную консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наугад трех отстающих студентов. Какова вероятность, что посланы вызванные студенты?

5. В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один мастер спорта.

6. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг, хотя бы одна художественная.

7. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 5 пар сапог. Найти вероятность того, что все выбранные сапоги черного цвета.

## Занятие 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Суммой $A + B$ двух событий $A$ и $B$ называют событие, состоящее в появлении события $A$, или события $B$, или обоих этих событий.*

Т. е. событие $A + B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий $A$, $B$.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий $A$ или $B$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема справедлива и для нескольких попарно несовместных событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...P(A_n)=1,$$

где $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ образуют полную группу событий.

***Противоположными*** называют два единственно возможных, несовместных события, образующих полную группу. Эти события обозначают $A$ и $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через $p$, то вероятность другого события обозначают через $q$, тогда $p + q = 1$.

**Пример 1.** В куче картофеля 20 % клубней, пораженных болезнью. Найти вероятность того, что клубень, взятый случайным образом из этой кучи, не поражен болезнью.

Решение. Введем элементарные события. Событие $A$ – взятый клубень поражен болезнью, тогда противоположное событие $\overline{A}$ – клубень не поражен болезнью.

Имеем $P(A)=p=0,2.$ Тогда найдем $P(\overline{A})=q=1-p=1-0,2=0,8.$

*Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.*

Два события называют *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло другое или нет.

**Теорема умножения вероятностей независимых событий.**

*Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(B)=P(A)\cdot P(B).$$

Формула совмещения $n$ независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)...P(A_n).$$

**Пример 2.** В поле работают 3 комбайна. Вероятность того, что в течение смены первый комбайн не потребует ремонта, равна 0,9, второй – 0,6, третий – 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены не потребует ремонта: 1) два комбайна; 2) хотя бы один комбайн.

Решение. Введем события: $A_i$ – в течение смены $i$-й комбайн не потребует ремонта, $\overline{A}_i$ – в течение смены $i$-й комбайн потребует ремонта, где $i=\overline{1,3}$.

Тогда $P(A_1)=0,9$; $P(A_2)=0,6$; $P(A_3)=0,7$; $P(\overline{A}_1)=1-0,9=0,1$; $P(\overline{A}_2)=1-0,6=0,4$; $P(\overline{A}_3)=1-0,7=0,3$.

1. Обозначим событие $B$ – в течение смены два комбайна не потребуют ремонта. Тогда событие $B$ можно представить в виде

$$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3 .$$

Написанные слагаемые представляют собой несовместные события, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем: $P(B)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+PA_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$.

Поскольку события $A_1, A_2, A_3, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ независимые, то, применяя теорему умножения вероятностей независимых событий, имеем:

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)=$$
$$=0,7\cdot 0,6\cdot 0,3+0,9\cdot 0,4\cdot 0,7+0,1\cdot 0,6\cdot 0,7=0,456 .$$

2. Обозначим событие $C$ – в течение смены хотя бы один комбайн не потребует ремонта.

Если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых в совокупности событий $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$

$$P(C)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n).$$

Следовательно,

$$P(C)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)1-0,1\cdot 0,4\cdot 0,3=0,988 .$$

Пусть событие $A$ и $B$ зависимые. Это значит, что вероятность одного из событий зависит от появления или непоявления другого.

*Условной вероятностью* $P_A(B)$ *называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A произошло.*

**Теорема умножения вероятностей зависимых событий.**

*Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

**Пример 3.** Многолетними наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Определить вероятность того, что первые 3 дня не будут дождливыми.

Решение. Обозначим события: $A_1$ – 1 сентября не будет дождливым днем; $A_2$ – 2 сентября не будет дождливым днем; $A_3$ – 3 сентября не будет дождливым днем; $B$ – первые 3 дня не будут дождливыми. Тогда

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

События $A_1, A_2, A_3$ являются зависимыми, так как проходит один день и изменяется общее количество недождливых дней.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = \frac{57}{203} \approx 0{,}28 .$$

Если появление события $A$ не исключает появления события $B$, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

## *Задания к аудиторному занятию 3*

1. В двух отсеках зернохранилища находится посевной материал (пшеница). Семена первого отсека имеют всхожесть 80 %, второго – 85 %. Отбирается по одному зерну из каждого отсека. Найти вероятность того, что: а) оба зерна дадут всходы; б) одно зерно взойдет; в) хотя бы одно зерно взойдет.

2. В урне 10 красных, 7 синих и 3 белых шара. Найти вероятность того, что два наугад извлеченных шара одного цвета.

3. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наугад взял два учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них в переплете.

4. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8 и на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что нужного материала не окажется: а) на двух базах; б) хотя бы на одной базе.

5. В ящике 30 яблок. Из них 3 поражены болезнью в скрытой форме. Из ящика извлекают 2 плода. Вычислить вероятность того, что поражены болезнью: а) два плода; б) один плод; в) хотя бы один плод.

6. Один стрелок дает 80 % попаданий в цель, а другой – 70 %. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка делают по одному выстрелу. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

7. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя на два вопроса билета.

8. Три спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норму, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,7. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена: а) двумя спортсменами; б) хотя бы двумя спортсменами.

9. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3, третий вызов – 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что данный вызов будет, независимы. Найти вероятность того, что: 1) будет принят только один вызов; 2) корреспондент вообще услышит вызов.

10. Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9, второе – 0,95, третье – 0,8 и четвертое – 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно не менее двух испытаний.

11. На некотором предприятии 96 % изделий признаются пригодными. Из каждой сотни годных изделий в среднем 75 оказываются первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

12. Деталь проходит три операции обработки. Вероятность того, что она окажется бракованной после первой операции, равна 0,02, после второй – 0,03, после третьей – 0,15. Найти вероятность того, что деталь будет: а) небракованной после трех операций; б) бракованной после трех операций, предполагая, что появление брака на отдельных операциях – независимые события.

13. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наугад 3 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

14. В поле работают 4 комбайна. Вероятность того, что в течение смены не будет поломки в первом комбайне, равна 0,9, во втором – 0,6, в третьем – 0,7, в четвертом – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены поломка произойдет: 1) только в одном комбайне; 2) хотя бы в одном комбайне.

15. Достаточным условием сдачи студентом коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

16. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди наугад извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная?

17. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Совхоз должен в течение первых пяти дней сентября выполнить определенную работу. Определить вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым.

18. Процесс обработки рыбы состоит из трех последовательных операций, на каждой из которых вероятность получения бракованной продукции равна 0,02. Определить вероятность: 1) получения бракованной продукции в результате обработки рыбы; 2) неполучения бракованной продукции.

19. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится: а) один раз; б) хотя бы один раз.

20. На переэкзаменовку пришли 7 студентов агрофака, 9 – зоофака, 6 – гидрофака и 4 студента мехфака. Какова вероятность того, что 3 первых студента, взявшие билеты, окажутся студентами мехфака?

### *Домашнее задание к занятию 3*

1. В коробке имеется 30 косынок, из них 17 светлых, остальные темные. Продавец наугад извлекает одну за другой две косынки. Какова вероятность того, что: а) одна из косынок оказалась темной, б) обе косынки светлые?

2. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность обнаружения корабля при одном цикле: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) хотя бы одной станцией.

3. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,9, третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) все экзамены; б) хотя бы 2 экзамена.

5. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) хотя бы одна камера.

6. На железобетонном заводе изготовляют панели, 90 % из которых высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) не более одной панели?

## Занятие 4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

**Формула полной вероятности.** Пусть $H_1$, $H_2$, …, $H_n$ – совокупность единственно возможных и попарно несовместных событий некоторого испытания, т. е. образуют полную группу событий, а случайное событие $A$ наступает только с одним из этих событий и, следовательно, представимо в виде $A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$. Тогда вероятность события $A$ определяется по формуле

$$P(A) = P(H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A) =$$

$$= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_1}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События $H_1$, $H_2$, …, $H_n$ называются гипотезами.

**Формула Байеса.** Если известно, что в результате испытания наступило некоторое событие $A$, то вероятность того, что событие произошло с гипотезой $H_i$, определяется по формулам Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Здесь $P(A)$ определяется по вышенаписанной формуле.

**Пример 1.** На откорм поставлено 100 бычков, из которых 30 – породы $a$, 25 – породы $b$ и 45 – породы $c$. Вероятность того, что бычок породы $a$ даст суточный привес более 500 г, равна 0,7, для пород $b$ и $c$ она равна 0,6 и 0,5 соответственно. Для контрольного взвешивания наугад взят один бычок. Какова вероятность того, что его привес будет более 500 г?

Решение. Введем события: $H_1$ – взят бычок породы $a$; $H_2$ – взят бычок породы $b$; $H_3$ – взят бычок породы $c$.

События $H_1$, $H_2$, $H_3$ – попарно несовместные, так как взят только один бычок, и единственно возможные, так как пород, отличных от $a$, $b$, $c$, во взятой совокупности бычков нет. Интересующее нас событие – привес взятого бычка более 500 г – обозначим через $A$. Тогда

$$A = H_1 A + H_2 A + H_3 A,$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A),$$

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0{,}30, \quad P(H_2) = \frac{25}{100} = 0{,}25, \quad P(H_3) \frac{45}{100} = 0{,}45.$$

Вероятности $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, $P_{H_3}(A)$ даны в условии задачи. Остается вычислить искомую вероятность:

$$P(A) = 0{,}30 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 + 0{,}45 \cdot 0{,}5 = 0{,}585.$$

**Пример 2.** На откорме стоят те же бычки. Для контроля взвешен один наугад взятый бычок. Какова вероятность, что этот бычок: породы $a$; породы $b$; породы $c$, если его привес более 500 г?

Решение. Здесь нужно найти $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$, $P_A(H_3)$. Воспользуемся формулами Байеса, причем $P(A)$ мы нашли выше.

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,7}{0,585} = 0,36,$$

Аналогично $P_A(H_2) = \dfrac{0,25 \cdot 0,6}{0,585} = 0,26$, $P_A(H_3) = \dfrac{0,45 \cdot 0,5}{0,585} = 0,38$.

### *Задания к аудиторному занятию 4*

1. В трех корзинах находится картофель. В первой – 10 % поврежденных клубней, во второй – 15 %, в третьей – 10 %. Из наугад выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность того, что клубень не поврежден?

2. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта соответственно равны: для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Наугад взятый студент выполнил норму мастера спорта. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

3. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя.

4. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

5. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,8, второго – 0,9, третьего – 0,95 и четвертого – 0,85. Цель обнаружена наугад включенным локатором. Найти вероятность того, что цель обнаружена вторым локатором.

6. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1 и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартная, равна 0,7, а завода № 2 – 0,9. Сборщик наугад извлекает деталь из наугад взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена нестандартная деталь.

7. Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45 % общего количества электроламп, второй – 40 %, третий – 15 %. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных ламп, второго – 80 %, третьего – 81 %. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Купленная в магазине электролампа оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем заводе.

8. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равна 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Взятый наугад кинескоп выдержал гарантийный срок. Что вероятнее, был взят второй или четвертый кинескоп?

9. В двух корзинах находятся яблоки. В первой – 20 шт., из них 5 поврежденных, во второй – 30 шт., из них 6 поврежденных. Из наугад выбранной корзины взято одно яблоко, которое оказалось неповрежденным. Найти вероятность того, что яблоко взято из первой корзины.

10. Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2, причем из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность того, что удобрение первого пункта удовлетворяет стандарту, равна 0,9, второго – 0,7. Взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту. Найти вероятность того, что удобрение, взятое для пробы, поступило из пункта 2.

11. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

12. Партия состоит из вентиляторов рижского и московского завода. В партии 70 % вентиляторов московского завода, для которых вероятность безотказной работы за время $t$ равна 0,95, рижского – 0,92. Прибор испытывался в течение времени $t$ и работал безотказно. Найти вероятность того, что это вентилятор рижского завода.

13. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наугад выбирают ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

14. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит квалификационную норму.

15. Имеются электролампочки четырех партий, количество которых находится в отношении 3: 4: 1: 2. Вероятность того, что взятая лампочка может гореть положенное число часов для этих партий соответственно равна: 0,22; 0,15; 0,46; 0,38. Найти вероятность того, что взятая лампочка сможет гореть положенное число часов.

16. Имеются три урны. В первой находятся 5 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных, в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

17. Качество изготовленных деталей проверяется двумя контролерами, из которых первый проверяет 60 % деталей, второй – 40 %. Вероятность считать деталь качественной для первого контролера равна 0,94, а для второго – 0,98. Готовая деталь признана качественной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

18. В лаборатории имеется 6 измерительных приборов I типа и 4 – II типа. Вероятность того, что во время опыта прибор I типа не выйдет из строя, равна 0,95, для прибора II типа эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что наугад взятый измерительный прибор не выйдет из строя до окончания опыта.

19. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наугад взятого ящика стандартная.

20. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

### *Домашнее задание к занятию 4*

1. На распределительной базе находятся электролампочки, произведенные двумя заводами. Среди них 70 % изготовлены первым заводом и 30 % – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, произведенных вторым заводом, стандарту удовлетворяют 80. Определить вероятность того, что взятая наугад с базы лампочка будет удовлетворять требованиям стандарта.

2. На сборку поступило 3000 деталей, изготовленных на первом станке, и 2000 – на втором. Первый станок дает 0,2 % брака, а второй – 0,3 %. Взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

3. В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют 40, 10, 30, и 20 % исходящих бумаг. Вероятность неверной адресации бумаг секретаршами равна 0,01; 0,04; 0,06 и 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

4. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка составляет 0,03, а для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем первый станок обрабатывает вдвое больше деталей, чем второй. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь не будет бракованной.

5. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата в два раза больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

6. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежит 96 %, ко второй – 2 %, к третьей – 1 % и к четвертой 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для второй группы – 0,2, для третьей – 0,18 и для четвертой – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

## Занятие 5. Повторные независимые испытания

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Пусть производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления одного и того же события $A$ постоянна и равна $p$. Такие испытания *называются последовательностью независимых испытаний*.

**Формула Бернулли.** *Вероятность* $P_n(m)$ *того, что из* $n$ *испытаний событие* $A$ *наступит* $m$ *раз, вычисляется по формуле Бернулли:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где $C_n^m$ – число сочетаний из $n$ элементов по $m$;

$p$ – вероятность появления одного и того же события $A$ в каждом из $n$ испытаний;

$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события $A$;

$m$ – число появления события $A$, $0 \le m \le n$;

$P_n(m)$ – вероятность того, что из $n$ испытаний событие $A$ наступит $m$ раз.

**Пример 1.** Предположим, что в случае распространения некоторой эпидемии корова породы *а* заболеет с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что из десяти коров этой породы заболеют не более четырех, если указанная эпидемия распространяется.

Решение. Для решения задачи представим интересующее нас событие $A$ (заболеют не более четырех коров) в виде суммы несовместных событий $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ ($A_i$ – заболеет ровно $i$ коров из десяти, $i = \overline{0,4}$). Тогда $A = A_0 + A_1 + A_3 + A_4$, а вероятность этого события можно найти по формуле

$$P(A) = P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_0 + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Вероятности $P(A_i) = P_{10}(i)$ определяются по формуле Бернулли. Окончательно записываем

$$P(A) = C_{10}^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{10} + C_{10}^1 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 + C_{10}^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 + \\ + C_{10}^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 + C_{10}^4 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 = 0,850 .$$

Вычисления рекомендуем проводить с использованием микрокалькулятора.

Если число испытаний $n$ велико, использование формулы Бернулли затруднительно. В этих случаях ее заменяют асимптотическими приближениями, рассматриваемыми ниже.

**Формула Пуассона.** Если число испытаний $n$ велико ($n > 100$), а вероятность $p$ появления случайного события $A$ в единичном испытании мала ($p < 0{,}1$), то вероятность того, что событие $A$ появится $m$ раз в $n$ независимых испытаниях определяется по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$ называют средним числом появления события в $n$ независимых испытаниях.

**Формулы Муавра – Лапласа.** Если число независимых испытаний велико, а вероятность $p$ появления случайного события $A$ в единичном испытании близка к 0,5, то для определения вероятности появления события $A$ $m$ раз в $n$ испытаниях целесообразно пользоваться локальной формулой Муавра – Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений ее аргумента $x$ даны в приложениях к любому учебному пособию (в данном методическом пособии см. прил. 1). При отрицательных значениях $x$ используется та же таблица, так как функция $\varphi(x)$ – четная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Если нужно вычислить вероятность появления события $A$ от $k_1$ до $k_2$ раз, следует использовать интегральную формулу Муавра – Лапласа:

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$

$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\Phi(x)$ также следует искать в приложениях к учебным пособиям (здесь это прил. 2), учитывая нечетность функции ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

**Пример 2.** Некоторое хозяйство на зимний период поставило 1000 овец. Известно, что падеж овец за зимний период составляет 2 %. Найти вероятность того, что за зимний период погибнет: а) ровно 15 овец; б) от 10 до 30 овец.

Решение.

а) воспользуемся формулой Пуассона при $\lambda = 1000\cdot 0,02 = 20$:

$$P_{1000}(15)\approx\frac{20^{15}}{15!}\cdot e^{-20}=0,052.$$

Можно было бы воспользоваться формулой Муавра – Лапласа:

$$P_{1000}(15)\approx\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\cdot\varphi\left(\frac{15-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,098}}\right)=0,048.$$

Разность полученных результатов объясняется тем, что использовались формулы приближенного вычисления вероятностей;

б) здесь будем использовать интегральную формулу Муавра – Лапласа:

$$P_{1000}(10\le m\le 30)\approx\Phi\left(\frac{30-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)-\Phi\left(\frac{10-1000\cdot 0,02}{\sqrt{1000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)=$$

$=\Phi(2,26)-\Phi(-2,26)=2\Phi(2,26)=0,9762$.

### *Задания к аудиторному занятию 5*

1. Всхожесть семян ржи составляет 90 %. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут: а) не менее пяти; б) хотя бы одно.

2. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что

среди 6 заготовок, взятых для контроля, не удовлетворяют требованиям стандарта: а) не менее четырех; б) не более пяти.

3. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов оценивается в 70 %. Найти вероятность успешной сдачи: а) не менее двух экзаменов; б) хотя бы одного экзамена.

4. В телеателье имеется 7 телевизоров. Из них включены в данный момент 60 %. Найти вероятность того, что в данный момент включено: а) не менее трех телевизоров; б) не более двух телевизоров.

5. Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) не более семи; б) хотя бы два.

6. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней окажутся недождливыми: а) не менее 5 дней; б) хотя бы один день.

7. У шести животных имеется заболевание, причем выздоровление наступает в 98 % случаев. Найти вероятность выздоровления: а) не менее 5 животных; б) хотя бы 2 животных.

8. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

9. В мастерской имеется 8 моторов. При существующем режиме работы в данный момент с полной нагрузкой работают 70 % моторов. Найти вероятность того, что в данный момент с полной нагрузкой работают: а) не менее 6 моторов; б) хотя бы 3 мотора.

10. В 75 % расход электроэнергии в течение одних суток не превышает установленной нормы. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 сут расход электроэнергии не превысит нормы: а) в течение не менее 4 сут; б) в течение не более 2 сут.

11. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока составляет 10 %. Вычислить вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров более 18 выдержат гарантийный срок.

12. Установлено, что 75 % саженцев данной культуры приживаются. Вычислить вероятность того, что из 48 высаженных саженцев приживутся 30.

13. На склад поступило 30 ящиков стеклянных изделий. Анализ поставок показывает, что с неразбитыми изделиями поступает 90 % ящиков. Определить вероятность того, что на склад поступит не более 10 ящиков с разбитыми изделиями.

14. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

15. На заводе 20 % деталей не проходят проверку ОТК. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажется 70 деталей.

16. Вероятность пройти через некоторый заболоченный участок, не промочив ноги, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 220 человек, проходивших через заболоченный участок, не промочат ноги от 120 до 133 человек? (Предполагается, что прохожие не используют опыт друг друга).

17. В ОТК поступила партия изделий, среди которых стандартные составляют 90 %. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий стандартных окажется 84.

18. Найти вероятность того, что переключение передач наступит 80 раз на 300-километровой трассе, если на каждом километре этой трассы вероятность переключения передач равна 0,25.

19. Вероятность выхода из строя за некоторое время одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за некоторое время из 100 конденсаторов выйдут из строя не менее 20.

20. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если изделия высшего сорта составляют 62 %.

21. Монета была подброшена 40 раз. Найти вероятность того, что герб выпадает в 25 случаях.

22. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность безостановочной работы для каждой машины равна 0,8.

23. При штамповке клемм 98 % соответствуют стандарту. Найти вероятность того, что в партии из 200 клемм не соответствуют стандарту от 70 до 80 клемм.

24. Изделия высшего сорта составляют 50 %. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта.

25. Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 900 высаженных семян не более 100 не взойдут.

26. Среди семян пшеницы 0,6 % сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 1000 семян окажется не более 6 семян сорняков?

27. В течение года град приносит значительный ущерб примерно одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 400 хозяйств пострадает не более 6.

28. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Обрыв нити на одном веретене в течение одной минуты составляет 0,4 %. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв нити будет не менее чем в 5 веретенах.

29. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. В пути повреждается 0,02 % изделий. Найти вероятность того, что на базу поступит не более трех негодных изделий.

30. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность того, что при 5000 выстрелов будет хотя бы два попадания в цель.

### *Домашнее задание к занятию 5*

1. Приняв вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди 7 новорожденных будет: а) не более 4 девочек; б) хотя бы 2 девочки.

2. Детали высшего сорта, изготовленные на данном станке, составляют 40 %. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

3. Известно, что выпуск сверл повышенной хрупкости (брак) составляет 2 %. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке число годных сверл окажется не менее 80?

4. На каждую тысячу семян некоторой культуры приходится в среднем 8 семян сорняков. Какова вероятность того, что среди взятых 200 семян окажется не менее трех семян сорняков?

## Занятие 6. Дискретная случайная величина, ее способы задания и числовые характеристики

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает только одно из возможных значений, заранее неизвестное и зависящее от ряда причин.*

Случайные величины бывают *дискретными и непрерывными*.

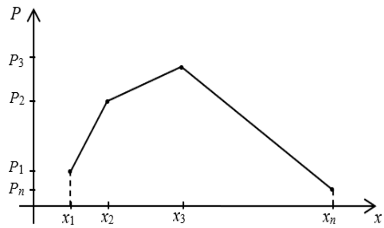
*Дискретной случайной величиной* (*ДСВ*) называется случайная величина, которая может принимать конечное число изолированных друг от друга значений, т. е. если возможные значения этой величины можно пересчитать.

Дискретная случайная величина характеризуется значениями, которые она может принимать, и вероятностями, с которыми эти значения принимаются. Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями называется *законом распределения дискретной случайной величины.*

Если известны все возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины $X$ и вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ появления этих значений, то считают, что закон распределения ДСВ $X$ известен и он может быть записан в виде таблицы:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\sum p_i = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i) = p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | | $p_i$ | | $p_n$ | |

Закон распределения ДСВ можно изобразить графически, если в прямоугольной системе координат изобразить точки ($x_1$; $p_1$), ($x_2$; $p_2$), …, ($x_n$; $p_n$) и соединить их отрезками прямых линий. Полученная фигура называется многоугольником распределения.




**Пример 1.** В зерне, предназначенном для очистки, содержится 10 % сорняков. Наугад отобраны 4 зерна. Обозначим случайную величину $X$ = {число сорняков среди четырех отобранных}. Построить закон распределения ДСВ $X$ и многоугольник распределения.

Решение. По условию примера $n = 4,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9$ . Тогда

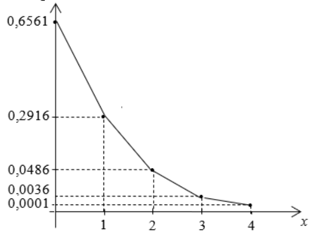
$$p_1 = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}6561;$$

$$p_2 = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = 0{,}2916;$$

$$p_3 = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 0{,}0486;$$

$$p_4 = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}0036;$$

$$p_5 = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}0001.$$



Запишем закон распределения ДСВ $X$ в виде таблицы и построим многоугольник распределения:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,6561 | 0,2916 | 0,0486 | 0,0036 | 0,0001 |

ДСВ может быть задана ее функцией распределения. Рассмотрим событие, состоящее в том, что случайная величина $X$ примет какое-нибудь значение, меньшее произвольного числа $x$, т. е. $X < x$. Это событие имеет определенную вероятность.

*Функцией распределения случайной величины $X$ называется функция $F(x)$, выражающая для каждого $x$ вероятность того, что случайная величина $X$ примет какое-нибудь значение, меньшее $x$.*

Через функцию $F(x)$ легко выражаются следующие вероятности:

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$;

$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

Функция распределения обладает свойствами:

1) $F(x) \in [0;\, 1]$;

2) если $x_1 < x_2$, где $x_1,\, x_2 \in R$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(X < x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(X < x) = 1$;

50 $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

**Пример 2.** Анализируется группа из десяти коров. Известно, что в этой группе есть четыре рекордсменки. Из группы наугад отбирают пять коров. Записать закон распределения случайной величины $X$ – числа рекордсменок среди отобранных коров. Получить ее функцию распределения $F(x)$ и построить ее. Вычислить вероятность события, что среди отобранных будет не менее 3 рекордсменок.

Решение. Число рекордсменок, попавших в группу отбора, может быть 0, 1, 2, 3, 4. Составим закон распределения случайной величины $X$. Для этого каждому из ее значений поставим в соответствие вероятность их появления. Заметим, что рассматриваемые события попарно несовместные, поэтому найдем вероятности, руководствуясь классическим определением вероятности:

$$P(X=0) = C_6^5 : C_{10}^5 = \frac{6!}{5!1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{1}{42};\;\; P(X=1) = (C_4^1 \cdot C_6^4) : C_{10}^5 = \frac{10}{42};$$

$P(X=2)=(C_4^2\cdot C_6^3):C_{10}^5=\dfrac{20}{42}$; $P(X=3)=(C_4^3\cdot C_6^2):C_{10}^5=\dfrac{10}{42}$;

$P(X=4)=(C_4^{24}\cdot C_6^1):C_{10}^5=\dfrac{1}{42}$.

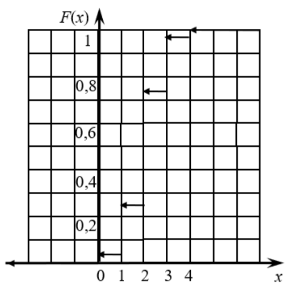
Для формирования функции распределения случайной величины $X$ ее закон распределения целесообразно дополнить строкой накопленных вероятностей:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{10}{42}$ | $\frac{20}{42}$ | $\frac{10}{42}$ | $\frac{1}{42}$ |
| $p$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{11}{42}$ | $\frac{31}{42}$ | $\frac{41}{42}$ | 1 |

Тогда функция распределения случайной величины $X$ будет иметь вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0; \\ \dfrac{1}{42}, & \text{если } 0<x\le 1; \\ \dfrac{11}{42}, & \text{если } 1<x\le 2; \\ \dfrac{31}{42}, & \text{если } 1<x\le 3; \\ \dfrac{41}{42}, & \text{если } 3<x\le 4; \\ 1, & \text{если } x>4. \end{cases}$$

Построим функцию распределения случайной величины.



Вероятность того, что среди отобранных будет не менее трех рекордсменок, найдем, воспользовавшись равенством

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Тогда $P(3 \le X \le \infty) = F(\infty) - F(3) = 1 - \frac{31}{42} = \frac{11}{42}$.

Наиболее важные свойства дискретной случайной величины описываются ее характеристиками. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание* случайной величины.

Пусть известен закон распределения ДСВ $X$. *Математическим ожиданием* ДСВ $X$ называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математическое ожидание случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений. Поэтому в практических задачах часто за математическое ожидание принимают среднее значение этой случайной величины.

**Пример 3.** Стрелок выбивает 4, 8, 9 и 10 очков с вероятностями 0,1; 0,45; 0,3 и 0,15. Найти математическое ожидание числа очков при одном выстреле.

Решение. Обозначим случайную величину $X$ = {число выбитых очков}. Тогда $M(X) = 4 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}45 + 9 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}15 = 8{,}2$. Таким образом, ожидаемое среднее значение числа выбитых очков при одном выстреле равно 8,2, а при 10 выстрелах – 82.

Математическое ожидание имеет следующие основные свойства:

1) $M(C) = C$;

2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

3) $a \le M(X) \le b$, где $a = \min(x_i)$, $b = \max(x_i)$;

4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

5) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где $X$ и $Y$ – независимые случайные величины.

Разность $X - M(X)$ называется ***отклонением*** случайной величины $X$ от ее математического ожидания. Эта разность является случайной величиной и ее математическое ожидание равно нулю, т. е. $M(X - M(X)) = 0$.

Для характеристики случайной величины, кроме математического ожидания, используется и дисперсия, которая дает возможность оценить рассеяние (разброс) значений случайной величины около ее математического ожидания. При сравнении двух однородных случайных величин с равными математическими ожиданиями «лучшей» считается та величина, которая имеет меньший разброс, т. е. меньшую дисперсию.

*Дисперсией* случайной величины $X$ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M\left((X - M(X))^2\right)$.

В практических задачах для вычисления дисперсии используют равносильную формулу $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$.

Дисперсия имеет следующие основные свойства:

1) $D(C) = 0$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

3) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$,

где $X$ и $Y$ – независимые случайные величины.

Дисперсия характеризует разброс случайной величины около ее математического ожидания и, как видно из формулы, измеряется в квадратных единицах по сравнению с единицами самой случайной величины. Поэтому для согласования единиц измерения разброса случайной величины с единицами измерения самой величины вводится *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

**Пример 4.** Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ $X$, заданной законом распределения:

| $X$ | –5 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Решение. Дисперсия ДСВ $X$ вычисляется по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2.$$

Найдем математическое ожидание данной случайной величины:

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Запишем закон распределения для случайной величины $X^2$:

| $X^2$ | 25 | 4 | 9 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Тогда

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3;$$

$$D(X) = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21, \quad \sigma(X) = \sqrt{15,21} \approx 3,9.$$

### *Задания к аудиторному занятию 6*

1. В зерне, предназначенном для чистки, 10 % сорняков. Наугад отобраны 5 зерен. Написать закон распределения СВ $X$ – числа сорняков среди 5 отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

2. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 руб., два выигрыша – по 10 руб. и 10 выигрышей – по 1 руб. Составить закон распределения СВ $X$ – возможного выигрыша на один билет. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

3. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наугад отбирают 4 изделия. Составить закон распределения СВ $X$ – числа стандартных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

4. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения СВ $X$ – количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

5. Производится 4 независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события $A$ равна 0,6. Составить закон распределения СВ $X$ – числа появлений события $A$ в указанных испытаниях. Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

6. На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Составить закон распределения СВ $X$ – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки. Составить функ-

цию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

7. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения СВ $X$ – числа выпадений нечетного числа очков на двух игральных костях. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наугад отобраны три детали. Составить закон распределения СВ $X$ – числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

9. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наугад отобраны три детали. Составить закон распределения СВ $X$ – числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

10. В партии деталей 10 % нестандартных. Наугад отобраны 4 детали. Составить закон распределения СВ $X$ – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

### *Домашнее задание к занятию 6*

Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из пяти студентов равна 0,9. Составить закон распределения СВ $X$ – числа студентов, сдавших экзамен. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

## **Занятие 7. Непрерывная случайная величина, ее способы задания и числовые характеристики**

### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

*Непрерывной случайной величиной* (*НСВ*) называется случайная величина, все возможные значения которой сплошь заполняют некоторый числовой промежуток.

Непрерывную случайную величину можно задать только аналитическим способом. Функция распределения $F(x)$ этой случайной величины является непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией. Кроме интегральной функции распределения $F(x)$ непрерывную случайную величину можно задать также дифференциальной функцией распределения $f(x)$.

*Функцией плотности распределения вероятностей* $f(x)$ непрерывной случайной величины называется производная функции распределения: $f(x)=F'(x)$. Из определения следует, что функция распределения $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Свойства плотности вероятностей $f(x)$:

1. Плотность вероятностей $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \geq 0$.

2. Вероятность попадания в интервал для непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

3. Несобственный интеграл от функции плотности равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$$

**Пример 1.** Непрерывная случайная величина задана функцией плотности вероятностей $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ C(2x+1), & \text{если} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти значение постоянной $C$;

2) найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Плотность вероятностей должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$$

Поскольку вне отрезка $\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right]$ плотность нулевая, то получаем:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} C(2x+1)\,dx = 1 \Rightarrow C\cdot\int_0^{\frac{1}{3}}(2x+1)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\cdot\left(x^2+x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow\ C\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow C\ \cdot\frac{4}{9} = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{4}.$$

Таким образом, функция плотности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{9}{4}(2x+1), & \text{если}\ 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если} \quad x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения. При $x < 0$ плотность вероятностей нулевая и также $F(x) = 0$.

При $0 \le x \le \frac{1}{3}$ функция $f(x) = \frac{4}{9}(2x+1)$, поэтому

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{9}{4}(2t+1)\,dt = \frac{9}{4}\left(t^2+t\right)\Big|_0^x = \frac{9}{4}\left(x^2+x\right).$$

При $x > \frac{1}{3}$ функция $f(x) = 0,$ поэтому

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{4}(2t+1)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^{x} 0\mathrm{d}t = \frac{9}{4}\left(t^2+t\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9} = 1.$$

Итак, функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{9}{4}\left(x^2+x\right), & \text{если}\ 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если} \quad x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если вне отрезка $[a;\,b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то $M(X)=\int_a^b f(x)\,dx.$

Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,dx.$ Если вне отрезка $[a;\,b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то

$$D(X)=\int_a^b\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,dx.$$

Получим рабочую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X)=\int_a^b\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,dx=\int_a^b\left(x^2-2xM(X)+M^2(X)\right)f(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b x^2 f(x)dx-2M(x)\int_a^b xf(x)dx+M^2(x)\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-M^2(X)\,.$$

**Пример 1.** Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & \text{если} \quad 1\le x\le 4,\\ 1, & \text{если} \quad x>4.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

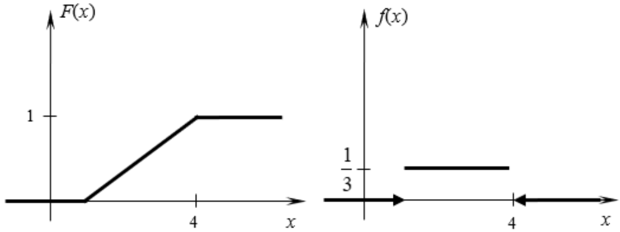
3) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины;

4) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2).

Решение. Плотность распределения вероятностей

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \left(\frac{1}{3}(x-1)\right)', & \text{если } 1\le x\le 4,\\ 0, & \text{если} \quad x>4\end{cases}=\begin{cases}0, \text{ если} & x<1,\\ \frac{1}{3}, \text{если } 1\le x\le 4,\\ 0, \text{ если} & x>4.\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.




Вычислим числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание равно

$$M(X)=\int_1^4 xf(x)dx=\int_1^4\frac{1}{3}xdx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4=\frac{16}{6}-\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=2,5.$$

Дисперсия равна

$$D(X)=\int_1^4 x^2 f(x)\mathrm{d}x-M^2(x)=\int_1^4\frac{1}{3}x^2\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-\frac{25}{4}=$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{1}{9}-\frac{25}{4}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,75}\approx 0,87.$$

Вероятность попадания в заданный интервал вычислим по формуле

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$

Получим $P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{3}\cdot(2-1)-\frac{1}{3}\cdot(1-1)=\frac{1}{3}.$

## *Задания к аудиторному занятию 7*

Случайная величина $X$ задана функцией распределения $F(x)$. Требуется:

а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

б) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

г) найти вероятность попадания СВ $X$ в интервал $(a; b)$.

1. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<\frac{3\pi}{4},\\ \cos 2x, & \text{если } \frac{3\pi}{4}\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если } x>\pi;\end{cases} \qquad a=\frac{3\pi}{4};\ b=\frac{5\pi}{6}.$$

2. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \frac{1}{24}(x^2+2x), & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4;\end{cases} \qquad a=0;\ b=1.$$

3. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<-1,\\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & \text{если } -1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2;\end{cases} \qquad a=1;\ b=2.$$

4. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \frac{x^2}{100}, & \text{если } 0\le x\le 10,\\ 1, & \text{если } x>10;\end{cases} \qquad a=5;\ b=10.$$

5. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1,\\ \frac{1}{2}(x-1), & \text{если } 1\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3;\end{cases} \qquad a=2;\ b=3.$$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1-\sin x, & \text{если} \quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi;\end{cases}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{2};\ b=\dfrac{3\pi}{4}.$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{если} \quad 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3;\end{cases}$ $\quad a=0;\ b=1.$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{33}(3x^2+2x), & \text{если} \quad 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3;\end{cases}$ $\quad a=0;\ b=2.$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{49}, & \text{если} \quad 0\le x\le 7,\\ 1, & \text{если} \quad x>7;\end{cases}$ $\quad a=6;\ b=7.$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<\dfrac{3\pi}{2},\\ \cos x, & \text{если} \quad \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi,\\ 1, & \text{если} \quad x>2\pi;\end{cases}$ $\quad a=\dfrac{3\pi}{2};\ b=\dfrac{7\pi}{4}.$

### *Домашнее задание к занятию 7*

Случайная величина $X$ задана функцией распределения $F(x)$. Требуется:

а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

б) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

г) найти вероятность попадания СВ $X$ в интервал $(a;\ b)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{3}, & \text{если } 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3;\end{cases} \qquad a=1;\ b=2.$$

## Занятие 8. Нормальный закон распределения случайной величины

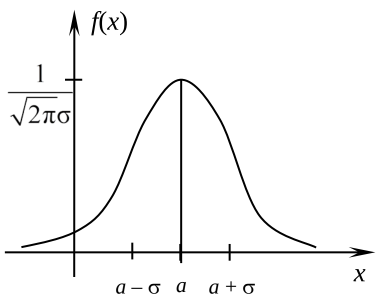
### *Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач*

Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону,* если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x\in(-\infty,+\infty).$$

Нормальный закон распределения характеризуется параметрами $a$ – математическим ожиданием СВ и $\sigma$ – средним квадратическим отклонением СВ.

График функции плотности вероятностей $f(x)$ называется *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса*, которая графически представляется в следующем виде.




Отметим влияние параметров $a$, $\sigma$ на нормальную кривую. Параметр $a$ не влияет на форму нормальной кривой, его изменения приводят только к сдвигу кривой вдоль оси $Ox$. Параметр $\sigma$ влияет на форму нормальной кривой, с увеличением $\sigma$ максимальная ордината графика уменьшается и кривая становится более пологой, с уменьшением $\sigma$ максимальная ордината графика увеличивается и кривая вытягивается вдоль оси $Oy$.

Найдем вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + a,\ dx = \sigma dt,$ с новыми пределами интегрирования от $\dfrac{\alpha - a}{\sigma}$ до $\dfrac{\beta - a}{\sigma}$.

Получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$ получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}\right).$$

Вероятность заданного отклонения $\delta$ нормальной случайной величины от ее математического ожидания $a$ вычисляется по формуле

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При отклонении $\delta = 3\sigma$ получим

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973 = 99,73\ \%.$$

Значит, вероятность отклонения значений нормальной случайной величины от ее математического ожидания более чем на $3\sigma$ равна 100 – 99,73 = 0,27 %. По принципу невозможности маловероятных событий это невозможное событие. Таким образом, практически все значения нормальной случайной величины отклоняются от ее математического ожидания не более чем на $3\sigma$, т. е. попадают в интервал $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. В этом заключается правило «трех сигм».

**Пример 1.** Станок изготавливает детали, размер которых распределен нормально. Математическое ожидание размера детали равно 240 мм, среднее квадратическое отклонение – 0,8 мм. Годными считаются детали размером от 238,5 до 242 мм. Вычислить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность станка снизится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.

Решение. Запишем кратко условие задачи: $a$ = 240; $\sigma_1$ = 0,8; $\sigma_2$ = 1; $\alpha$ = 238,5; $\beta$ = 242.

1. Вычислим вероятность попадания в заданный интервал (238,5; 242) по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

$$P(238,5 < X < 242) = \Phi\left(\frac{242-240}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{238,5-240}{0,8}\right) =$$

$$= \Phi(2,5) + \Phi(1,88) = 0,4938 + 0,4699 = 0,9637 = 96,37\ \%.$$

Итак, процент годных деталей при $\sigma_1 = 0,8$ составляет 96,37 %.

2. Вычислим вероятность попадания в тот же интервал при $\sigma_2 = 1$:

$$P(238,5 < X < 242) = \Phi\left(\frac{242-240}{1}\right) - \Phi\left(\frac{238,5-240}{1}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1,5) = 0,4772 + 0,4332 = 0,9104 = 91,04\ \%.$$

Таким образом, при снижении точности станка или при увеличении $\sigma$ процент годных деталей уменьшится. Процент брака при этом составит: $100 - 91,04 = 8,96$ %.

**Пример 2.** Расход семян на 1 га является случайной величиной, распределенной нормально. Норма высева на 1 га составляет 150 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода семян равно 10 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; 2) количество семян, обеспечивающих посев 100 га с вероятностью 0,99.

Решение. Вычислим параметры нормальной случайной величины – расхода семян на 100 га, которая равна сумме 100 независимых случайных величин $X_i$ – расхода семян на 1 га с параметрами $a_i = 150$ кг и $\sigma_i = 10$ кг, $i = \overline{1,100}.$ Используем свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 150 \cdot 100 = 15000 \text{ кг} = 15 \text{ т},$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2 = 100 \cdot 100 = 10000 \Rightarrow \sigma = 100 \text{ кг} = 0{,}1 \text{ т}.$$

1. Запишем кратко условие задачи: $a$ = 15 т; σ = 0,1 т; $\alpha = 0$ т; $\beta = 15{,}1$ т.

Вычислим вероятность попадания в заданный интервал по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(0 < X < 15{,}1) = \Phi\left(\frac{15{,}1 - 15}{0{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 15}{0{,}1}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(150) = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413.$$

Итак, вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т, равна 84,13 %.

2. Запишем кратко условие задачи: $a$ = 15 т; σ = 0,1 т; $P(0 < X < \beta) =$ $= 0{,}99$.

Решение. Запишем вероятность попадания в заданный интервал

$$P(0 < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 15}{0{,}1}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + \Phi(150) =$$

$= \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5.$ Из равенства $\Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5 = 0{,}99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) = 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49 \Rightarrow \frac{\beta - 15}{0{,}1} = 2{,}32 \Rightarrow \beta = 15{,}23 \text{ т}.$$

Итак, количество семян, обеспечивающих посев 100 га, в 99 % случаях, не превысит 15,23 т.

### *Задания к аудиторному занятию 8*

1. При изготовлении некоторого изделия его вес $X$ подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина $X$ распределена по нормальному закону. Найти: 1) вероятность того, что вес наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г; 2) величину, которую не превысит вес наугад взятого изделия с вероятностью 0,95.

2. На станке изготовляются втулки. Длина втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеющую среднее значение 20 см и дисперсию 0,04 см$^2$. Найти: 1) процент втулок, длина которых заключена между 19,7 и 20,3 см; 2) величину, которую не превысит длина наугад взятой втулки с вероятностью 0,95.

3. Из некоторого пункта ведется стрельба из орудия вдоль некоторой прямой по цели. Дальность полета снаряда имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 50 м. Найти: 1) процент снарядов, которые дадут перелет от 40 до 60 м; 2) процент снарядов, которые пролетят расстояние, меньшее средней дальности.

4. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали – 40 см, а среднее квадратическое отклонение – 0,4 см, найти: 1) процент деталей, длина которых заключена в промежутке (39,8; 40,2 см); 2) величину, которую не превысит длина наугад взятой детали с вероятностью 0,9.

5. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,15 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,03 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,10 г. Определить: 1) процент семян, которые дадут нормальные всходы; 2) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,99.

6. Норма высева на 1 га равна 150 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения; случайные значения нормы высева распределены нормально и характеризуются средним квадратическим отклонением 10 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; 2) вес семян, обеспечивающий посев 100 га с вероятностью 0,95.

7. Средняя глубина посева семян составляет 4 см; отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,6 см. Определить: 1) процент семян, посеянных на глубину более 5 см; 2) процент семян, посеянных на глубину менее 3 см.

8. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 260 мм, среднее квадратическое отклонение – 0,8 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 259 и 262 мм. Определить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.

9. Путем взятия проб установлено, что потери зерна при уборке в среднем составили 3 г на 1 м$^2$, среднее квадратическое отклонение потерь 1 г. Определить: 1) вероятность того, что на 1 га потери составят не менее 29,8 кг; 2) величину, которую не превзойдут потери на 1 га с вероятностью 0,99.

10. Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 30 см, среднее квадратическое отклонение – 5 см. Считая, что диаметр ствола есть случайная величина, распределенная нормально, определить: 1) процент стволов, имеющих диаметр свыше 25 см; 2) величину, которую не превысит диаметр ствола случайно отобранного дерева с вероятностью 0,95.

### *Домашнее задание к занятию 8*

1. Распределение хозяйств некоторого района по проценту выполнения плана продажи продукции государству подчинено нормальному закону распределения с математическим ожиданием 103,3 % и средним квадратическим отклонением 1,5 %. Определить: 1) процент хозяйств, не выполнивших план; 2) величину, которую не превзойдет процент выполнения плана наугад взятого хозяйства с вероятностью 0,95.

2. Диаметр валиков, обработанных на токарном станке, подчинен нормальному закону с математическим ожиданием 23 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Годными считаются те валики, диаметр которых заключен между 22 и 24 мм. Определите вероятность изготовления годного валика.

## 10. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

1. Сколько различных расписаний движения 15 автобусов можно составить в случае, если движение их осуществляется по 3 различным маршрутам?

2. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них шесть женщин. В смену занято пять человек. Найдите вероятность того, что в случайно выбранную смену окажутся 1 женщина и 4 мужчины.

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7, второй – 0,6, третий – 0,5, четвертый – 0,3. Вычислите вероятность того, что студент сдаст хотя бы 3 экзамена.

4. Сборщик получил 2 коробки деталей, изготовленных первым заводом и 3 коробки деталей, изготовленных вторым заводом. Вероятность того, что деталь первого завода стандартная, равна 0,85, а второго завода – 0,65. Сборщик наугад извлекает деталь из наугад взятой коробки. Найдите вероятность того, что извлечена нестандартная деталь.

5. На двух станках участка изготовляются шайбы. На первом станке производится 45 % всех шайб. В продукции каждого станка брак составляет соответственно 3 и 5 %. Найдите вероятность того, что случайно взятую дефектную шайбу изготовили на втором станке.

6. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения. Сформируйте функцию распределения СВ $F(x)$. Вычислите $P(X \leq 3)$ и числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

| $X$ | –3 | –1 | 2 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

7. На станке изготовляются втулки. Длина втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, с математическим ожиданием 25 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти: 1) процент втулок, длина которых заключена между 24,7 и 25,1 см; 2) величину, которую не превысит длина наугад взятой втулки с вероятностью 0,95.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

**Значения функции** $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2903 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2526 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1985 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0112 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

**Значения функции** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,39 | 0,1517 | 0,78 | 0,2823 | 1,17 | 0,3790 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,40 | 0,1554 | 0,79 | 0,2852 | 1,18 | 0,3810 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,41 | 0,1591 | 0,80 | 0,2881 | 1,19 | 0,3830 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,42 | 0,1628 | 0,81 | 0,2910 | 1,20 | 0,3849 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,43 | 0,1664 | 0,82 | 0,2939 | 1,21 | 0,3869 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,44 | 0,1700 | 0,83 | 0,2967 | 1,22 | 0,3883 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,45 | 0,1736 | 0,84 | 0,2995 | 1,23 | 0,3907 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,46 | 0,1772 | 0,85 | 0,3023 | 1,24 | 0,3925 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,47 | 0,1808 | 0,86 | 0,3051 | 1,25 | 0,3944 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,48 | 0,1884 | 0,87 | 0,3078 | 1,26 | 0,3962 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,49 | 0,1879 | 0,88 | 0,3106 | 1,27 | 0,3980 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,50 | 0,1915 | 0,89 | 0,3133 | 1,28 | 0,3839 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,51 | 0,1950 | 0,90 | 0,3159 | 1,29 | 0,4015 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,52 | 0,1985 | 0,91 | 0,3186 | 1,30 | 0,4032 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,53 | 0,2019 | 0,92 | 0,3212 | 1,31 | 0,4049 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,54 | 0,2954 | 0,93 | 0,3238 | 1,32 | 0,4066 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,55 | 0,2088 | 0,94 | 0,3264 | 1,33 | 0,4082 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,56 | 0,2123 | 0,95 | 0,3289 | 1,34 | 0,4099 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,57 | 0,2157 | 0,96 | 0,3315 | 1,35 | 0,4115 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,58 | 0,2190 | 0,97 | 0,3340 | 1,36 | 0,4131 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,59 | 0,2224 | 0,98 | 0,3365 | 1,37 | 0,4147 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,60 | 0,2257 | 0,99 | 0,3389 | 1,38 | 0,4162 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,61 | 0,2291 | 1,00 | 0,3413 | 1,39 | 0,4177 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,62 | 0,2324 | 1,01 | 0,3438 | 1,40 | 0,4192 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,63 | 0,2357 | 1,02 | 0,3461 | 1,41 | 0,4207 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,64 | 0,2389 | 1,03 | 0,3485 | 1,42 | 0,4222 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,65 | 0,2422 | 1,04 | 0,3508 | 1,43 | 0,4236 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,66 | 0,2454 | 1,05 | 0,3531 | 1,44 | 0,4251 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,67 | 0,2486 | 1,06 | 0,3554 | 1,45 | 0,4265 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,68 | 0,2517 | 1,07 | 0,3577 | 1,46 | 0,4279 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,69 | 0,2549 | 1,08 | 0,3599 | 1,47 | 0,4292 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,70 | 0,2580 | 1,09 | 0,3621 | 1,48 | 0,4306 |
| 0,32 | 0,1255 | 0,71 | 0,2611 | 1,10 | 0,3643 | 1,49 | 0,4313 |
| 0,33 | 0,1293 | 0,72 | 0,2642 | 1,11 | 0,3665 | 1,50 | 0,4332 |
| 0,34 | 0,1331 | 0,73 | 0,2673 | 1,12 | 0,3686 | 1,51 | 0,4335 |
| 0,35 | 0,1368 | 0,74 | 0,2703 | 1,13 | 0,3708 | 1,52 | 0,4357 |
| 0,36 | 0,1406 | 0,75 | 0,2734 | 1,14 | 0,3729 | 1,53 | 0,4370 |
| 0,37 | 0,1443 | 0,76 | 0,2764 | 1,15 | 0,3749 | 1,54 | 0,4382 |
| 0,38 | 0,1480 | 0,77 | 0,2794 | 1,16 | 0,3770 | 1,55 | 0,4394 |

Окончание прил. 2

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,56 | 0,4406 | 1,82 | 0,4656 | 2,16 | 0,4846 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,57 | 0,4418 | 1,83 | 0,4664 | 2,18 | 0,4854 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,58 | 0,4429 | 1,84 | 0,4671 | 2,20 | 0,4861 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,59 | 0,4441 | 1,85 | 0,4678 | 2,22 | 0,4868 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,60 | 0,4452 | 1,86 | 0,4686 | 2,24 | 0,4875 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,61 | 0,4463 | 1,87 | 0,4693 | 2,26 | 0,4881 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,62 | 0,4474 | 1,88 | 0,4699 | 2,28 | 0,4887 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,63 | 0,4484 | 1,89 | 0,4706 | 2,30 | 0,4893 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,64 | 0,4495 | 1,90 | 0,4713 | 2,32 | 0,4898 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,65 | 0,4505 | 1,91 | 0,4719 | 2,34 | 0,4904 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,66 | 0,4515 | 1,92 | 0,4726 | 2,36 | 0,4909 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,67 | 0,4525 | 1,93 | 0,4732 | 2,38 | 0,4913 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,68 | 0,4535 | 1,94 | 0,4738 | 2,40 | 0,4918 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,69 | 0,4545 | 1,95 | 0,4744 | 2,42 | 0,4922 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,70 | 0,4554 | 1,96 | 0,4750 | 2,44 | 0,4927 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,71 | 0,4564 | 1,97 | 0,4756 | 2,46 | 0,4931 | 2,98 | 0,4986 |
| 1,72 | 0,4573 | 1,98 | 0,4761 | 2,48 | 0,4934 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,73 | 0,4582 | 1,99 | 0,4767 | 2,50 | 0,4938 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,74 | 0,4591 | 2,00 | 0,4772 | 2,52 | 0,4941 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,75 | 0,4599 | 2,02 | 0,4783 | 2,54 | 0,4945 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,76 | 0,4608 | 2,04 | 0,4793 | 2,56 | 0,4948 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,77 | 0,4616 | 2,06 | 0,4803 | 2,58 | 0,4951 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,78 | 0,4625 | 2,08 | 0,4812 | 2,60 | 0,4953 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,79 | 0,4633 | 2,10 | 0,4821 | 2,62 | 0,4956 | 5,00 | 0,499999 |
| 1,80 | 0,4641 | 2,12 | 0,4830 | 2,64 | 0,4959 | | |
| 1,81 | 0,4649 | 2,14 | 0,4838 | 2,66 | 0,4961 | | |

Приложение 3

**Значения функции** $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

| $k$ | $\lambda$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 |
| 1 | 0,0905 | 0,1638 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 |
| 4 | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 |
| 5 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |

Продолжение прил. 3

| *k* | λ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1, 0 | 2,0 | 3,0 |
| 1 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 |
| 1 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 | 0,3679 | 0,2707 | 0,1494 |
| 2 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 | 0,1839 | 0,2707 | 0,2240 |
| 3 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 | 0,0613 | 0,1804 | 0,2240 |
| 4 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 | 0,0153 | 0,0902 | 0,1680 |
| 5 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 | 0,0031 | 0,0361 | 0,10008 |
| 6 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0120 | 0,0504 |
| 7 | | | | 0,0001 | 0,0034 | 0,0216 |
| 8 | | | | | 0,0009 | 0,0081 |
| 9 | | | | | 0,0002 | 0,0027 |
| 10 | | | | | | 0,0008 |
| 11 | | | | | | 0,0002 |
| 12 | | | | | | 0,0001 |

Окончание прил. 3

| *k* | λ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7, 0 | 8,0 | 9,0 |
| 1 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 0 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 |
| 1 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 |
| 2 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 |
| 3 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 |
| 4 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 |
| 5 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 |
| 6 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 |
| 7 | 0,0595 | 0,1044 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 |
| 8 | 0,0298 | 0,0653 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 |
| 9 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0688 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 |
| 10 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 |
| 11 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 |
| 12 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0113 | 0,0264 | 0,0481 | 0,0728 |
| 13 | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 |
| 14 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 |
| 15 | | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 |
| 16 | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0015 | 0,0045 | 0,0109 |
| 17 | | | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 |

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е  и з д а н и е

**Курзенков** Сергей Владимирович
**Крючков** Евгений Николаевич

МАТЕМАТИКА

В двух частях

Часть 2

ПРАКТИКУМ

Редактор *С. Н. Кириленко*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 06.02.2024. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 8,11.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.