

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ  
И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Е. В. Афанасенко, Д. Е. Афанасенко, Ю. Н. Дуброва

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
учреждений высшего образования по специальности  
«Сельское строительство и обустройство территорий»*

Горки  
БГСХА  
2021

УДК 624.04(075.8)

ББК 38.112я73

A94

**Авторы:**

кандидат технических наук, доцент *Е. В. Афанасенко*;

аспирант *Д. Е. Афанасенко*;

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *Ю. Н. Дуброва*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор *Э. И. Старовойтов*;

доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Яровая*;

кандидат технических наук, доцент *В. Н. Основин*

**Афанасенко, Е. В.**

A94      **Строительная механика : учебное пособие / Е. В. Афанасенко, Д. Е. Афанасенко, Ю. Н. Дуброва. – Горки : БГСХА, 2021. – 315 с.**

ISBN 978-985-882-128-9.

В учебном пособии, охватывающем все основные темы учебной программы дисциплины «Строительная механика», подробно рассматриваются методы расчетов элементов конструкций и сооружений на прочность и жесткость. Каждая тема содержит задачи с подробным решением, примеры для самостоятельного решения, контрольные вопросы.

Для студентов учреждений высшего образования по специальности «Сельское строительство и обустройство территорий».

УДК 624.04(075.8)

ББК 38.112я73

**ISBN 978-985-882-128-9**

© УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», 2021

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика является одной из основных общеобразовательных инженерных дисциплин и играет существенную роль в формировании знаний инженера любой специальности. Особенно большое значение дисциплина «Строительная механика» имеет для технических, машиностроительных и строительных инженерных специальностей.

Содержание учебного пособия обеспечивает мировоззренческую направленность курса, соответствует методическим требованиям преподавания дисциплины, а также дает возможность использования его для самостоятельной работы студентов с целью овладения теоретическими и практическими навыками в проведении расчетов элементов конструкций и сооружений.

В основу учебного пособия положен принцип непрерывности и последовательности материаловедческого образования. Изучение программного материала опирается на знания студентов по предметам образовательного цикла высшей школы (высшая математика, физика, теоретическая механика) и создает необходимую базу для усвоения ряда других предметов, прежде всего таких, как «Основы расчета строительных конструкций», «Железобетонные и инженерные конструкции» и др.

Введение в учебные программы высших учебных заведений новых дисциплин, отражающих современное состояние науки и техники, при ограниченных сроках обучения привело к существенному сокращению количества лекционных, практических и лабораторных часов по курсу строительной механики.

В связи с этим в последнее время наметилась тенденция к разработке и применению в учебном процессе пособий, в которых достаточно подробно изложены основные теоретические сведения и приведено значительное количество примеров решения задач различной сложности по разделу курса.

В настоящем пособии после каждой главы приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения, контрольные вопросы.

Поэтому целью данного учебного пособия, составленного на основе всестороннего анализа ранее разработанных и используемых в

настоящее время источников, является попытка расширить курс вопросов, рассматриваемых на практических занятиях в условиях дефицита учебного времени, привить студентам навыки самостоятельной подготовки и помочь усвоить методы решения задач, предлагаемых на зачетах и экзаменах.

Авторы надеются, что настоящее учебное издание не только будет полезно инженерам-конструкторам и производственникам всех специальностей, встречающимся в практической деятельности с расчетами на прочность и жесткость, но и с успехом будет использовано студентами, аспирантами, преподавателями и научными работниками, а также всеми желающими повысить уровень знаний в области инженерных расчетов элементов конструкций и сооружений.

При подготовке учебного пособия использовались материалы, изложенные в существующих учебниках и методических пособиях по строительной механике, а также учтен опыт преподавания данной дисциплины на кафедре.

## Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Задачи строительной механики в связи с развитием строительной индустрии. Связь строительной механики с другими дисциплинами учебного плана

Развитие строительства в Республике Беларусь требует дальнейшего совершенствования подготовки инженера-строителя. Высокий уровень подготовки инженера может быть обеспечен лишь разносторонней самостоятельной работой с использованием учебных пособий как для усвоения теории, так и для приобретения важных практических навыков в решении задач по расчету сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Содержание данного курса соответствует последней типовой программе по строительной механике. В пособии изложен материал, который необходим для изучения этого курса по специальности «Сельское строительство и обустройство территорий».

Курс содержит кинематический анализ сооружений, основы расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, теоремы строительной механики и теорию определения перемещений, расчет трехшарнирных и статически неопределимых арок, основы расчета подпорных сооружений. При этом в расчетах используется понятие о линейно-деформируемых системах, для которых справедлив принцип независимости действия сил: результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности.

Всякое сооружение должно быть прочным, жестким и устойчивым, т. е. оно не должно разрушаться от действия внешних сил и должно иметь необходимый запас прочности; в нем недопустимы перемещения, нарушающие нормальную эксплуатацию сооружения; кроме того, должна быть исключена возможность потери сооружением устойчивости заданной формы. Строительная механика занимается разработкой методов статических и динамических расчетов сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Статика сооружений изучает их работу при статическом действии нагрузки – медленном ее приложении в определенный конечный промежуток времени. При динамическом действии нагрузки, меняющейся во времени, учитываются динамические эффекты нагрузки и вводятся в рассмотрение силы инерции. Расчеты на динамическую нагрузку освещаются динамикой сооружений.

*Задачи строительной механики* состоят в разработке рациональных методов определения усилий в сооружениях и их перемещений; методов расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, а также в установлении наиболее выгодных форм сооружений, удовлетворяющих требованиям экономичности.

Строительная механика широко использует методы теоретической механики, изучающей равновесие и движение твердых тел с учетом их деформации, сопротивления материалов, основы физики и высшей математики.

В настоящее время в расчетах по строительной механике характерно использование матричного исчисления, теории вероятности, статистической механики, итерационных методов. Широко применяются *графоаналитические методы*, основанные на исходных аналитических зависимостях и на графических представлениях. Большое распространение получили новые конструктивные формы сооружений (*пластинки и оболочки, пластинчато-стержневые системы*).

## **1.2. Краткий исторический очерк развития строительной механики**

Основы строительной механики были созданы лишь в XIX в. в связи с появлением железных дорог и строительством мостов и крупных гидротехнических и промышленных сооружений.

Первые большие достижения отечественной строительной механики связаны с деятельностью русских инженеров-мостовиков, строителей первой железной дороги Петербург – Москва.

Необходимо указать на работы следующих русских ученых: профессора Д. И. Журавского (1821–1891), автора первой теории раскосных ферм; профессора Ф. С. Ясинского (1856–1899), предложившего первые решения по различным задачам устойчивости стержней и по теории пространственных ферм; Н. А. Белелюбского (1845–1922), создавшего полный курс строительной механики.

Важную роль в популяризации новых методов строительной механики сыграли работы В. Л. Кирпичева (1845–1916), в которых наиболее полно изложены графическая статика и анализ основных положений теории статически неопределимых систем. Значительное развитие теории шарнирно-стержневых ферм было достигнуто благодаря работам Л. Д. Проскурякова (1858–1926) и почетного академика В. Г. Шухова (1853–1939). Замечательный конструктор и изобретатель,

почетный член Академии наук СССР В. Г. Шухов предложил ряд новых решений металлических конструкций. Известна его сетчатая ферма со схемой в виде двух дисков, связанных тремя стержнями. Замечательны также гиперболические башни Шухова (маяк высотой 80 м, мачта радиостанции высотой 160 м, многочисленные водонапорные башни), использующие простое свойство совмещения на поверхности однополостного гиперboloида прямолинейных элементов.

Большой интерес представляли работы профессора С. И. Белзецкого (1856–1932) по расчету арок и труб: «Теория рациональных форм цилиндрических сводов» (1902), «Рациональные формы сплошных упругих арок в железнодорожных мостах и трубах» (1905) и «Типы каменных труб под насыпями» (1912).

Ценный вклад в развитие строительной механики корабля сделан профессором И. Г. Бубновым (1872–1919), которому принадлежит оригинальное исследование устойчивости равнопролетного стержня на упругих опорах (1912). К этому же периоду можно отнести капитальные исследования по устойчивости стержней переменного сечения академика А. Н. Динника (1876–1950) и многочисленные его решения по устойчивости арок.

Среди работ многих советских ученых можно указать на труды академика А. Н. Крылова (1863–1945) по строительной механике корабля, теории продольного изгиба, теории вынужденных колебаний и расчету балки на упругом основании; академика Б. Г. Галеркина (1871–1945), давшего ряд решений по плитам, собранных в его капитальном труде «Упругие тонкие плиты», а также разработавшего общие методы решения задач устойчивости и теории упругости; члена-корреспондента Академии наук СССР, профессора Н. С. Стрелецкого (1885–1967), внесшего большой вклад в строительную механику мостов и конструкций, теорию расчета сложных статически неопределимых систем и теорию надежности конструкций; профессора И. М. Рабиновича (1886–1977), создавшего теорию вантовых многопоясных систем и сделавшего много ценных обобщений и исследований по статике и динамике сооружений, опубликованных в его капитальном труде «Строительная механика стержневых систем» и в других работах; профессора В. З. Власова (1906–1958), предложившего новую строительную математическую теорию оболочек и тонкостенных стержней; профессора Н. В. Корнухова (1903–1958), разработавшего теорию устойчивости каркасных рам (в особенности метод перемещений); профессора А. А. Гвоздева (1897–1986), разработавшего смешанный

метод расчета рам и развившего теорию расчета сооружений по предельному состоянию; профессора К. С. Завриева (1891–1978), впервые предложившего метод расчета сжато-изогнутых стержней по предельным состояниям, и профессора А. Ф. Смирнова (1909–1956), разработавшего матричную форму решения различных задач статики, устойчивости и динамики сооружений. Большую роль в решении различных задач строительной механики сыграли также В. В. Новожилов, П. Ф. Папкович, Н. И. Безухов, В. В. Болотин, А. А. Уманский, А. П. Сеницын, Д. В. Вайнберг, В. А. Киселев, А. Р. Ржаницын, Г. К. Клейн, А. П. Филин и многие другие.

Из зарубежных ученых, внесших вклад в развитие строительной механики в XIX в., следует отметить Даламбера, Лагранжа, Кулона, Навье, Ламе, Сен-Венана, Эйлера, Максвелла, Мора и др.

### **1.3. Основные элементы сооружений. Способы соединения элементов в единую систему и прикрепления ее к основанию.**

#### **Понятие о расчетной схеме. Типы опор. Классификация сооружений**

Элементы инженерных конструкций имеют разнообразную форму. Поэтому при расчете их геометрическую форму приводят к простейшей схеме *стержня (бруса), оболочки, пластины и массива*, т. е. выполняется схематизация геометрии реального объекта.

*Стержень (брус)* – это тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим. В зависимости от формы геометрической оси бруска делятся на прямые и кривые (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Прямые и кривые элементы конструкций в виде бруса

Бруска могут иметь разные поперечные сечения: в виде квадрата, круга, прямоугольника, двутавра, швеллера и т. д. Они являются основными элементами конструкций и сооружений.

Под *оболочкой* понимается тело, ограниченное криволинейной поверхностью, одно измерение которого (толщина) мало по сравнению с двумя другими. Оболочки могут иметь цилиндрическую (рис. 1.2, *а*), коническую (рис. 1.2, *б*) или сферическую (рис. 1.2, *в*) форму.

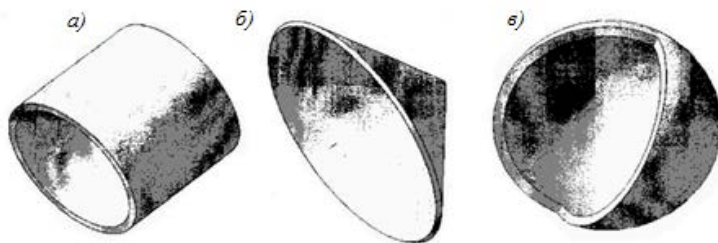


Рис. 1.2. Различные виды оболочек

*Пластина* – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость. Встречаются пластины прямоугольные и круглые (рис. 1.3). Примерами пластин могут служить обшивка корабля, самолета, мембраны, плоские днища и т. д.

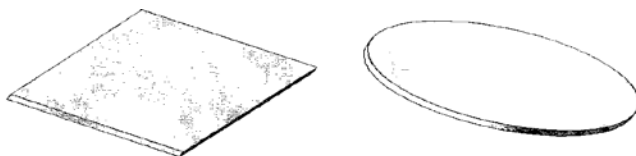


Рис. 1.3. Прямоугольные и круглые пластины

*Массивом* называется тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (рис. 1.4). Например, сплошная опора моста, фундамент здания, станина металлорежущего станка и т. д.

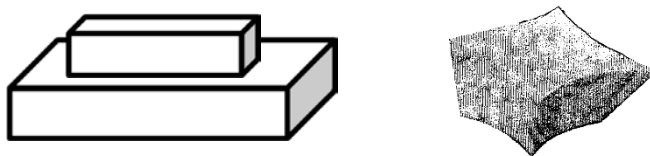


Рис. 1.4. Виды массивных элементов

В строительной механике рассматриваются *идеализированные расчетные схемы* сооружений, которые освобождены от несущественных особенностей и элементы которых приведены к типовым геометрическим формам.

Элементы конструкций должны занимать определенные положения в пространстве и располагаться на определенных расстояниях друг от друга. Для этого их положение фиксируется связями, которые могут быть упругими или жесткими. Упругие связи обладают деформациями, соизмеримыми с деформациями закрепляемого элемента. Деформациями жестких связей пренебрегают ввиду их незначительности.

Точки приложения связей называют опорными точками или просто опорами. В одной и той же опорной точке может быть наложено несколько связей. Опора представляет собой пространственную конструкцию, однако в рассматриваемых ниже системах (оси всех элементов и нагрузки лежат в одной плоскости) она рассматривается как часть плоской системы. Существует четыре основных типа опор (рис. 1.5–1.8).

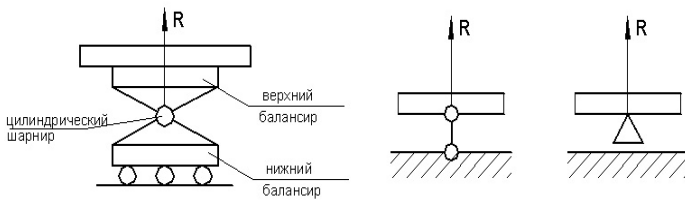


Рис. 1.5. Схемы подвижной опоры (ограничивает перемещение по вертикали, возникает одна опорная реакция)

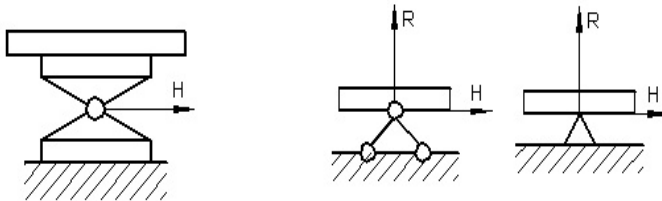


Рис. 1.6. Схемы неподвижной опоры (ограничивает перемещение по вертикали и горизонтали, возникает две опорные реакции)

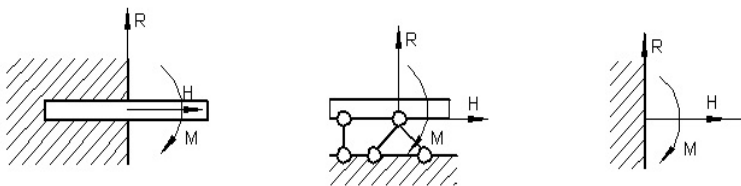


Рис. 1.7. Схемы жесткой заделки (ограничивает перемещение по горизонтали, вертикали, препятствует повороту относительно центра вращения, возникает две опорные реакции и реактивный момент)

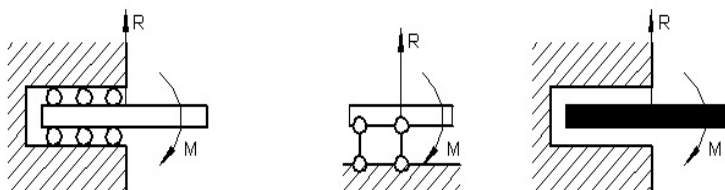


Рис. 1.8. Схемы подвижной заделки (ограничивает перемещение по вертикали, препятствует повороту относительно центра вращения, возникает одна опорная реакция и реактивный момент)

На рис. 1.9, *a* изображена расчетная схема моста, а на рис. 1.9, *б* – консольный стержень с подвешенным на конце грузом.

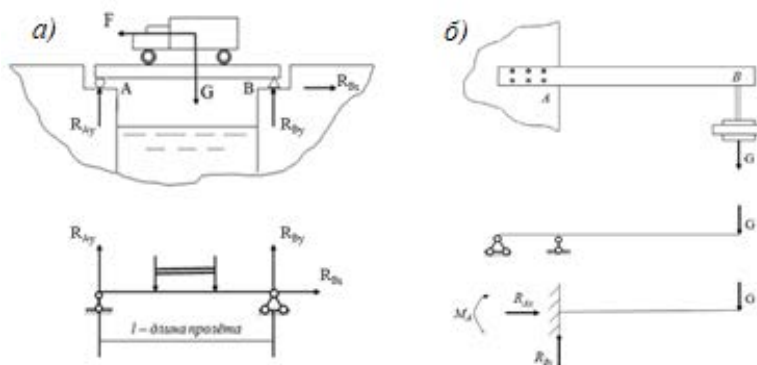


Рис. 1.9. Расчетная схема: *a* – моста; *б* – консольного стержня

Шарнирно-подвижная опора имеет одну элементарную связь (одиночный опорный стержень), шарнирно-неподвижная – две связи, а жесткая заделка – три связи. Каждой связи, приложенной в опоре, соответствует опорная реакция, направленная по направлению действия связи. Если элемент припаять (приварить) к массиву, то он теряет три степени свободы (рис. 1.10). Такая связь называется припайкой, в которой возникает реактивная сила любого направления и реактивный момент относительно центра вращения припайки.

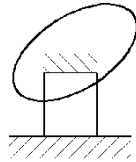


Рис. 1.10. Схема элемента, припаянного к массиву

Припайка эквивалентна трем стержням или шарниру и стержню, т. е. трем элементарным связям.

Различают сооружения плоские и пространственные, которые подразделяют по виду соединений в узлах; по геометрическому типу элементов, составляющих сооружение; по особенностям работы сооружения и т. д.

По геометрическому типу элементов сооружения могут быть стержневыми (рис. 1.11, *а*), пластинчатыми (рис. 1.11, *б*) и массивными (рис. 1.11, *в*).

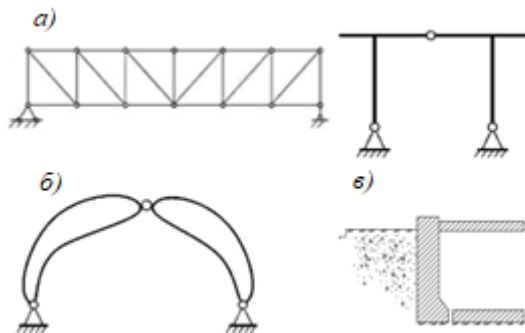


Рис. 1.11. Расчетная схема: *а* – шарнирной фермы и трехшарнирной рамы; *б* – трехшарнирной арки; *в* – подпорной стены

По виду соединений в узлах сооружения делятся на системы с шарнирными и с жесткими узлами. В качестве примера первой системы можно указать ферму с шарнирными узлами, в качестве примера второй – раму с жесткими узлами.

По особенностям работы сооружений различают балочные, рамные, арочные и висячие системы. Балка представляет собой прямолинейный брус, работающий на изгиб. Балка при наличии обычной горизонтально-подвижной опоры является безраспорной системой, в которой вертикальная нагрузка вызывает только вертикальные опорные реакции. В распорной системе с криволинейным или многоугольным очертанием оси (арка, рама) вертикальная нагрузка, помимо вертикальных, вызывает и горизонтальные составляющие реакций – распоры. При наличии идеально шарнирного соединения стержней во всех узлах систему называют шарнирно-стержневой фермой или просто фермой. Все стержни фермы при узловой нагрузке работают только на осевое действие сил.

Рамой называют стержневую систему, преимущественно с жесткими соединениями в узлах; стержни рамы работают одновременно на изгиб и осевое действие сил, причем изгибная деформация в раме преобладает.

Аркой называют криволинейный брус, закрепленный неподвижно двумя концами. Арка со сплошной стенкой работает на осевое сжатие и изгиб.

Часто применяют висячие системы, в которых цепи или тросы поддерживают балочную часть. В идеальной гибкой цепи или гибком тросе возникает только растяжение.

## Глава 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

### 2.1. Системы геометрически неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые, статически определимые и статически неопределимые

Кинематический анализ – это анализ геометрической структуры сооружения, выполняемый для того, чтобы не допустить возможности возникновения больших перемещений. Кинематический анализ проводится в два этапа:

1) определение числа степеней свободы и проверка необходимого аналитического условия геометрической неизменяемости системы, т. е.  $n \leq 0$ ;

2) структурный анализ расчетной схемы.

Расчетные схемы ряда сооружений могут быть представлены в виде геометрически неизменяемой системы плоских тел, расположенных в одной плоскости, соединенных между собой шарнирами и прикрепленных к земле при помощи опорных устройств. Эти шарниры и опоры называются *кинематическими связями* или просто *связями*.

*Геометрически неизменяемые* или просто *неизменяемые* системы – это системы соединенных между собой тел (*дисков*), которые не допускают относительного перемещения составных частей без их деформации (рис. 2.1, а). *Диск* (Д) – неизменяемая часть конструкции, представляющая собой жесткий неподвижный элемент.

*Геометрически изменяемые* или просто *изменяемые* системы – это системы соединенных между собой твердых тел, допускающие относительное перемещение составных частей без деформации материала (рис. 2.1, б).

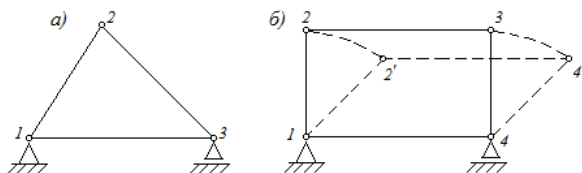


Рис. 2.1. Схема геометрически неизменяемой системы (шарнирный треугольник) (а);  
схема геометрически изменяемой системы (б)

Случай прикрепления узла двумя стержнями  $ab$  и  $ac$ , лежащими на одной прямой (рис. 2.2,  $a$ ), дает мгновенно изменяемую систему при одном определенном (мгновенном) положении связей (три шарнира  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат на одной прямой). При этом если точка  $a$  может получить бесконечно малое перемещение в результате удлинения стержней  $ab$  и  $ac$ , то система (рис. 2.2,  $a$ ) обращается в неизменяемую систему, так как три шарнира  $a_1$ ,  $b$  и  $c$  уже не будут лежать на одной прямой.

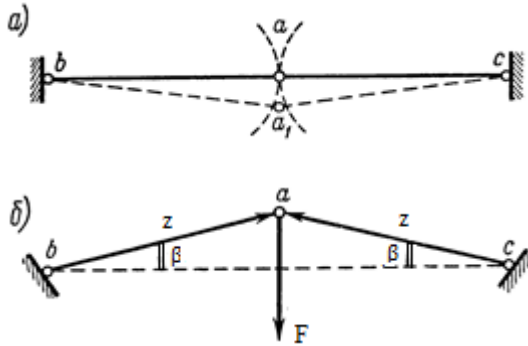


Рис. 2.2. Мгновенно изменяемая система:  
 $a$  – схема прикрепления узла двумя стержнями;  $b$  – схема для определения усилий, возникающих в стержнях от действия нагрузки  $F$  в узле  $a$

Таким образом, *мгновенно изменяемой* называют систему, элементы которой могут получать только мгновенные перемещения.

Для данного частного случая дадим статическую характеристику *мгновенно изменяемой системы*. Предположим, что стержни  $ab$  и  $ac$  не лежат на одной прямой (рис. 2.2,  $b$ ). Определим усилия  $Z$  для случая симметричного расположения стержней.

Проектируя все силы, приложенные к узлу  $a$ , на вертикальную ось, находим:

$$2Z \sin \beta - F = 0,$$

откуда

$$Z = F / 2 \sin \beta. \quad (2.1)$$

При стремлении  $\beta$  к нулю усилие  $Z$  стремится к бесконечности. При малом значении  $\beta$  усилие  $Z$  получает конечное очень большое значение. Когда же точка  $a$  незначительно отклоняется от прямой  $bc$ ,

то в стержнях  $ab$  и  $ac$  возникают усилия, вызывающие если не разрушение, то по крайней мере значительные деформации, что сопровождается резким опасным смещением точки  $a$ .

Применение мгновенно изменяемых систем при проектировании недопустимо.

Сооружения можно разделить на статически определимые, усилия в которых определяются только с помощью одних уравнений статики, и статически неопределимые, расчет которых производится с дополнительным использованием уравнений совместности деформаций.

## 2.2. Образование неизменяемых систем. Необходимое и достаточное условия геометрической неизменяемости. Число степеней свободы и число лишних связей, их определение

Число степеней свободы ( $n$ ) – это минимальное количество координат, требуемое для определения места нахождения элемента системы.

Если при удалении одной связи система остается неизменной, то такая связь называется лишней.

Если при удалении одной связи система из неизменяемой превращается в изменяемую, то такая связь называется абсолютно необходимой.

Пусть задана шарнирно-стержневая система (рис. 2.3), в которой шесть шарнирных узлов (без учета опорных) связаны стержнями  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ ,  $ae$ ,  $af$ ,  $fe$ ,  $cd$ ,  $eb$ ,  $bc$ . Установим соотношение между числом узлов  $k$  системы и числом стержней  $s$  (с учетом опорных).

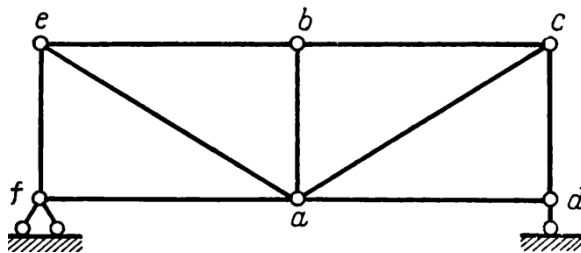


Рис. 2.3. Схема шарнирно-стержневой системы

Согласно рис. 2.3  $k = 6$ ,  $s = 12$ . При отсутствии всех  $s$  стержней система будет обладать  $2k$  степенями свободы, так как каждый узел име-

ет на плоскости две степени свободы. При наличии связей  $s = 2k$  система может быть неподвижна, если стержни расположены правильно. Таким образом, условие неизменяемости системы имеет вид

$$s = 2k. \quad (2.2)$$

Получен аналитический признак геометрической неизменяемости, согласно которому число связей между узлами равно числу возможных степеней свободы узлов. Если  $s < 2k$ , система изменяема, она не имеет необходимого количества связей. Если  $s = 2k$ , система может быть неизменяема, она обладает достаточным количеством связей для создания геометрически неизменяемой системы.

Если же связи расположены неправильно, система может оказаться изменяемой. Итак, соотношение  $s = 2k$  является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости. То же можно сказать и относительно соотношения  $s > 2k$ .

Рассмотрим шарнирно-стержневую систему, в первой панели которой имеется два раскоса, а во второй раскос отсутствует (рис. 2.4).

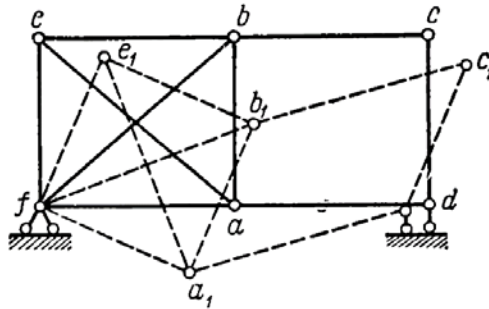


Рис. 2.4. Схема шарнирно-стержневой фермы

Общее число стержней и узлов в заданной системе  $s = 12$ ,  $k = 6$ , т. е.  $s = 2k$ . Однако система изменяема, так как она сводится к шарнирному четырехугольнику (имеем панель  $abef$ , которую заменяем одним стержнем).

Для определения числа степеней свободы системы  $n$  обозначим число дисков  $D$ , число опорных связей  $C$ , число шарниров  $\Pi$ .

Если бы все диски были свободны, то общее число степеней свободы системы равнялось бы  $3D$ . Каждый опорный стержень уменьшает

число степеней свободы на единицу, каждый шарнир – на два. Таким образом, получим формулу Чебушева:

$$n = 3Д - С - 2Ш. \quad (2.3)$$

Если  $n > 0$ , то система не имеет достаточного количества связей и поэтому является геометрически изменяемой.

Если  $n = 0$ , то система обладает минимально необходимым для неизменяемости количеством связей и при правильной их расстановке является геометрически неизменяемой и статически определимой системой.

Если  $n < 0$ , то система обладает избыточным для неизменяемости количеством связей и при правильной их расстановке является геометрически неизменяемой и статически неопределимой. При этом лишние связи определяются по формуле

$$Л = -n = С + 2Ш - 3Д. \quad (2.4)$$

### 2.3. Понятие о диске. Соединение двух и трех дисков. Анализ структуры стержневых систем

Положение диска на плоскости определяется координатами его произвольной точки  $A(x, y)$  и углом  $\alpha$  к оси абсцисс любой прямой, проведенной из данной точки (рис. 2.5, *a*).

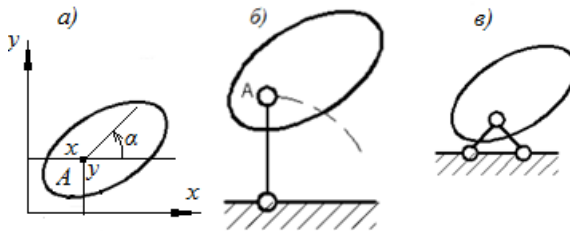


Рис. 2.5. Схемы дисков: *a* – с тремя степенями свободы; *б* – с двумя степенями свободы; *в* – с одной степенью свободы

Число независимых геометрических параметров, характеризующих положение диска на плоскости, определяет число степеней свободы диска. Таким образом, отдельный диск обладает тремя степенями свободы.

Если соединить точку  $A$  диска с массивом при помощи опорного стержня (рис. 2.5, б), то эта точка будет двигаться по дуге окружности. Координаты точки  $A$  будут определяться уравнением окружности, при этом независимой является только одна координата. Положение диска в данном случае определяется лишь двумя независимыми параметрами, и, следовательно, диск обладает только двумя степенями свободы. Поэтому опорный стержень рассматривается как одна кинематическая связь – элементарная связь. В связи возникает только одна расчетная сила.

Если этот диск прикрепить к земле с помощью цилиндрического шарнира (рис. 2.5, в), то он потеряет две степени свободы. Шарнир следует рассматривать как две кинематические связи. В шарнире возникает одна реактивная сила, которую обычно раскладывают на две составляющие. Шарнир эквивалентен двум элементарным связям.

Как отмечалось выше, если диск припаять (приварить), то он теряет три степени свободы (см. рис. 1.10), и такая связь называется припайкой.

Если шарнир или припайка соединяют не два диска, а больше, то такую связь называют кратной.

Кратная связь заменяет столько простых шарниров и припаяек, сколько дисков в системе без одного.

Места соединения дисков шарнирами или припайками называют узлами.

В системах, составленных из дисков (стержней), различают узлы жесткие (рис. 2.6, а), шарнирные (рис. 2.6, б) и смешанные (рис. 2.6, в).

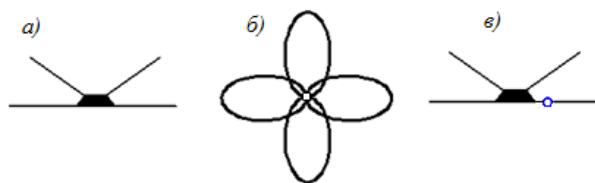


Рис. 2.6. Схемы узлов, соединяющих диски

Рассмотрим сооружение, которое опирается на две шарнирные опоры, одна из которых неподвижная, другая – подвижная (рис. 2.7, а). Такая связь диска с землей обеспечивает ему геометрическую неизменяемость.

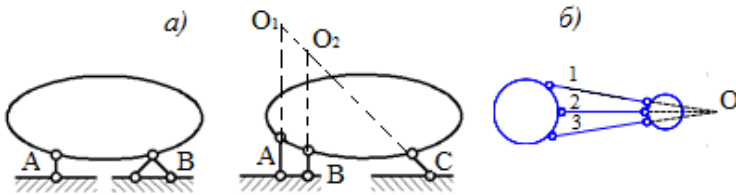


Рис. 2.7. Схемы соединения диска с землей (а) и соединения двух дисков тремя стержнями (б)

Если три опорных стержня пересекаются в одной точке, то диск повернется вокруг этой точки и займет такое положение, при котором стержни уже не будут пересекаться в одной точке (рис. 2.7, б). Дальнейшее перемещение диска уже невозможно без деформации системы.

Система, прикрепленная к земле, является мгновенно изменяемой, значит, достаточным условием геометрической неизменяемости является соединение двух дисков тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу.

Рассмотрим способы геометрически неизменяемого соединения двух и трех дисков минимальным количеством связей. Следует отметить, что любой узел, прикрепленный к диску с помощью двух линейных связей (диады), не лежащих на одной прямой и не параллельных друг другу, будет неподвижен относительно этого диска. Таким образом, последовательное присоединение к неизменяемой системе любого числа узлов при помощи диад образует в целом неизменяемую систему (ферма, рис. 2.8).

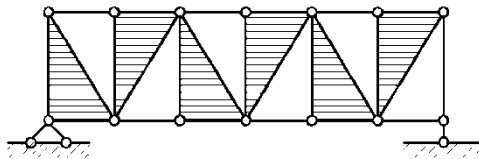


Рис. 2.8. Схема геометрически неизменяемой фермы

Рассмотрим образование плоской системы из дисков 1, 2 с помощью трех элементарных связей:

– шарнира  $A$  и стержня  $BC$ , не проходящего через этот шарнир (рис. 2.9).

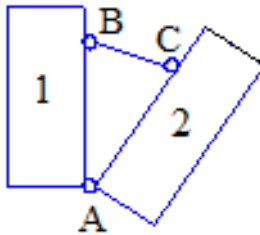


Рис. 2.9. Схема двух дисков, соединенных между собой тремя связями

Полученная система является геометрически неизменяемой, так как три шарнира не лежат на одной прямой;

– тремя стержнями 1, 2, 3, не пересекающимися в одной точке (рис. 2.10).

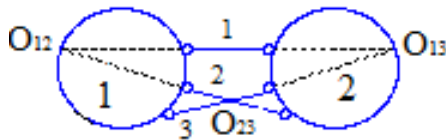


Рис. 2.10. Схема двух дисков, соединенных тремя стержнями

Полученная система является геометрически неизменяемой, так как три стержня не пересекаются в одной точке;

– тремя шарнирами (рис. 2.11, а) или тремя парами стержней (рис. 2.11, б), образующих шарниры  $O_{12}$ ,  $O_{13}$ ,  $O_{23}$ , не лежащих на одной прямой.

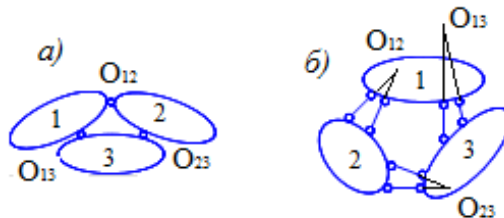


Рис. 2.11. Схемы трех дисков: а – соединенных тремя шарнирами; б – соединенных тремя парами стержней

Кинематический анализ стержневых систем рассмотрим на конкретных примерах.

Для стержневой системы (рис. 2.12) число степеней свободы определим по формуле

$$n = 3Д - С - 2Ш = 3 \cdot 4 - 6 - 2 \cdot 3 = 0.$$

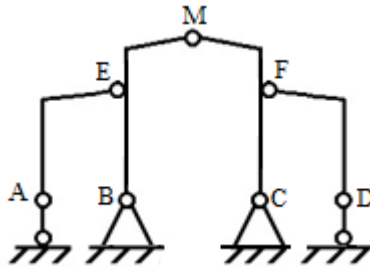


Рис. 2.12. Схема стержневой системы

Проведем структурный анализ системы. Рама *BMS* опирается на две шарнирные неподвижные опоры, имеет полный шарнир и является неподвижной. Вспомогательные рамы *AE* и *DF* прикрепляются к раме *BMS* при помощи шарнирных подвижных опор, двух неполных шарниров и являются неподвижными. Таким образом, система является геометрически неизменяемой, статически определимой, так как не имеет лишних связей.

Для стержневой системы (рис. 2.13) число степеней свободы определим по формуле

$$n = 3Д - С - 2Ш = 3 \cdot 3 - 5 - 2 \cdot 2 = 0,$$

т. е. система геометрически неизменяемая и не имеет лишних связей. Если убрать выделенную связь, то система станет геометрически изменяемой.

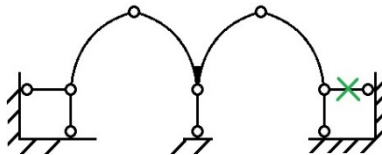


Рис. 2.13. Схема стержневой системы

Для стержневой системы (рис. 2.14) число степеней свободы определим по формуле

$$n = 3Д - С - 2Ш = 3 \cdot 5 - 7 - 2 \cdot 4 = 0.$$

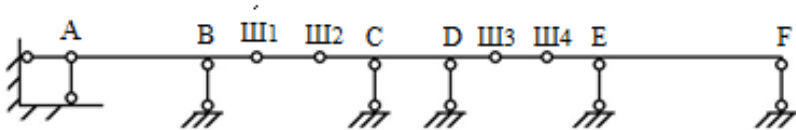


Рис. 2.14. Схема многопролетной статически определимой балки

Выполним структурный анализ. Балка  $ABШ_1$  является однопролетной, опирается на две шарнирные опоры и является неподвижной. С ней через балку  $Ш_1Ш_2$  и полные шарниры соединена балка  $Ш_2CDШ_3$ , которая также будет неподвижной. Балка  $Ш_4EF$  соединена с первыми двумя балками через балку  $Ш_3Ш_4$  и полные шарниры. Таким образом, вся система будет неподвижной, геометрически неизменяемой и статически определимой.

Для стержневой системы (рис. 2.15) число степеней свободы определим по формуле

$$n = -1 = 3Д - С - 2Ш = 3 \cdot 3 - 6 - 2 \cdot 2 = -1.$$

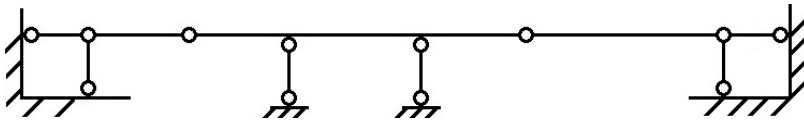


Рис. 2.15. Схема многопролетной балки

Система имеет одну лишнюю связь. При правильной расстановке шарниров система является геометрически неизменяемой и статически неопределимой.

Для стержневой системы (рис. 2.16, а) число степеней свободы определим по формуле

$$n = 3Д - С - 2Ш = 3 \cdot 6 - 6 - 2 \cdot 5 = -1 = 2.$$

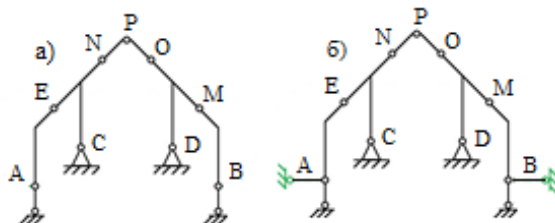


Рис. 2.16. Схема стержневой системы

Система геометрически изменяема, так как связей недостаточно. Для того чтобы система стала статически определимой и геометрически неизменяемой, необходимо добавить две связи (рис. 2.16, б).

## 2.4. Примеры расчета

**Задача 2.1.** Исследовать систему (рис. 2.17).

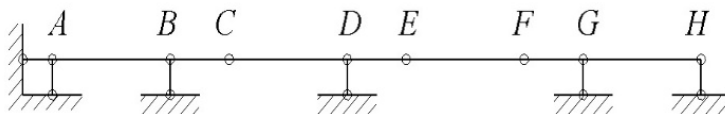


Рис. 2.17. Схема многопролетной балки

### Решение.

Система состоит из четырех дисков ( $AC$ ,  $CE$ ,  $EF$  и  $FH$ ). Число шарниров  $\Pi = 3$  (шарниры  $C$ ,  $E$ ,  $F$ ). Число жестких креплений равно нулю. Число опорных стержней  $C_{оп} = 2 + 1 \cdot 4 = 6$ . Степень свободы системы  $n = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$ . Необходимое условие неизменяемости системы выполнено.

Проведем кинематический анализ. Диск  $AC$  прикреплен неподвижно тремя опорными стержнями. К нему шарниром  $C$  и к земле в точке  $D$  опорным стержнем неподвижно прикреплен диск  $CE$ . К полученной системе стержнем (диск)  $EF$  и двумя опорными стержнями в точках  $G$  и  $H$  неподвижно присоединен диск  $FH$ . Таким образом, рассматриваемая система является геометрически неизменяемой и неподвижной.

**Задача 2.2.** Доказать геометрическую неизменяемость системы (рис. 2.18).

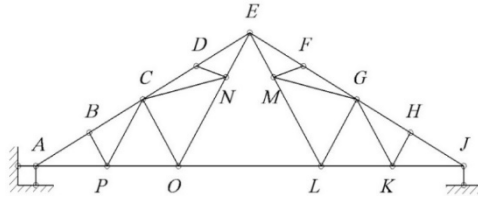


Рис. 2.18. Схема стержневой системы (фермы)

**Решение.**

Система состоит из 27 дисков (каждый стержень рассматриваем как диск). Шарниры  $A$  и  $J$  – простые; шарниры  $B, D, F$  и  $H$  – двукратные ( $3 - 1 = 2$ ); шарниры  $K, E, L, M, N, O$  и  $P$  – трехкратные ( $4 - 1 = 3$ ); шарниры  $C$  и  $G$  – четырехкратные ( $5 - 1 = 4$ ). Итого:  $\text{Ш} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 39$ . Число жестких креплений равно нулю. Число опорных стержней  $C_{\text{оп}} = 3$ . Степень свободы системы  $n = 3 \cdot 27 - 2 \cdot 29 - 3 = 0$ . Следовательно, необходимое условие неизменяемости системы выполнено.

Для окончательного утверждения неизменяемости системы произведем анализ ее геометрической структуры. Левая часть системы  $ABCDENOP$  и правая ее часть  $EFGHIKLM$  представляют собой укрупненные диски, так как каждая из них образована из шарнирных треугольников. Ввиду того что оба укрупненных диска соединены между собой шарниром  $E$  и стержнем  $OL$ , ось которого не проходит через центр этого шарнира, система в целом является геометрически неизменяемой. Кроме этого система имеет правильно расположенные опорные связи, поэтому она неподвижна.

**Задача 2.3.** Исследовать систему (рис. 2.19).

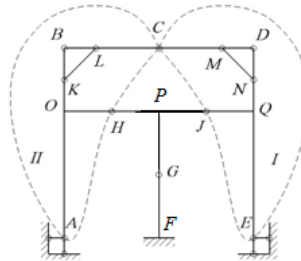


Рис. 2.19. Схема рамной системы

### Решение.

Система состоит из 11 дисков (стержни  $AB, BC, CD, DE, KL, MN, OH, HI, IQ, PG, GF$ ), т. е.  $D = 11$ . Число шарниров  $\Pi = 10$  (все шарниры простые). Число жестких креплений равно трем. Каждая из жестких связей  $O, P, Q$  является простой, так как соединяет два стержня. Число опорных стержней  $C_{\text{оп}} = 2 + 3 + 2 = 7$ . Степень свободы  $n = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 10 - 3 \cdot 3 = -3$ .

Таким образом, система может быть неизменяемой и имеет три лишние связи. Анализ геометрической структуры дает следующее. В системе можно выделить два укрупненных диска I и II, соединенных между собой в неизменяемую систему шарниром  $C$  и стержнем  $HJ$ , ось которого не проходит через центр указанного шарнира. Стержень  $PG$  жестко прикреплен одним концом к неподвижному стержню  $HJ$ . Полученная неизменяемая система является неподвижной, так как прикреплена четырьмя опорными стержнями (опоры  $A$  и  $E$ ) к земле и шарниром  $G$  к концу неподвижного стержня  $FG$ .

Следует отметить, что для неподвижного присоединения этой системы достаточно было бы двух опорных стержней в опоре  $A$  и одного вертикального в опоре  $E$ . Остальные связи с точки зрения геометрической неизменяемости являются лишними.

**Задача 2.4.** Исследовать систему (рис. 2.20).

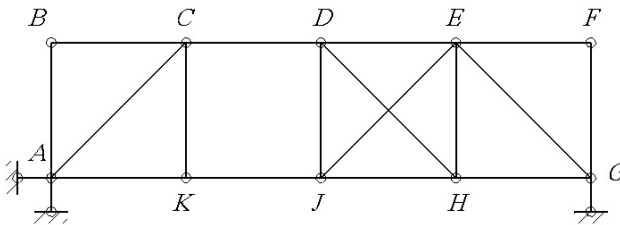


Рис. 2.20. Схема стержневой фермы

### Решение.

В рассматриваемой системе  $D = 17$ . Шарниры  $B$  и  $F$  — простые, шарниры  $A, K, G$  — двукратные, шарниры  $C, D, H, I$  — трехкратные ( $4 - 1 = 3$ ); шарнир  $E$  — четырехкратный ( $5 - 1 = 4$ ). Итого:  $\Pi = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 24$ . Число жестких креплений равно нулю. Число опорных стержней  $C_{\text{оп}} = 2 + 1 = 3$ . Степень свободы системы  $n = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 24 - 3 = 0$ . Следовательно, данная система может быть геометрически неизменяемой.

Проведем кинематический анализ. В системе можно выделить два укрупненных диска ( $ABCK$  и  $DEFGHI$ ), представляющих собой геометрически неизменяемые системы. В диске  $ABCK$  треугольник  $ACK$  – элементарная неизменяемая система. К ней диадой  $AB$  и  $CB$  прикреплен узел  $B$ . (Диадой называют совокупность стержней, не лежащих на одной прямой.)

В диске  $DEFGHI$  к шарнирному треугольнику  $EGH$  диадой  $EF$  и  $GF$  прикреплен узел  $F$ . К полученной неизменяемой системе диадой  $EJ$  и  $HJ$  присоединен узел  $J$ . Узел  $D$  прикреплен тремя стержнями ( $ED$ ,  $HD$ ,  $JD$ ), а для неподвижного его присоединения достаточно двух стержней.

Таким образом, с точки зрения геометрической неизменяемости в диске  $DEFGHI$  имеется один лишний стержень. Между собой же оба укрупненных диска соединены всего лишь двумя стержнями ( $CD$  и  $KJ$ ). Следовательно, система в целом геометрически изменяемая и не может быть применена в качестве строительной конструкции.

## 2.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.5.** Определить степень статической неопределимости системы (рис. 2.21).

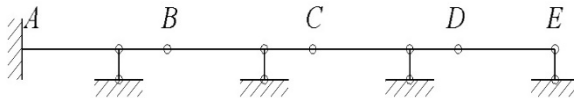


Рис. 2.21. Схема стержневой системы

**Задача 2.6.** Исследовать систему (рис. 2.22).

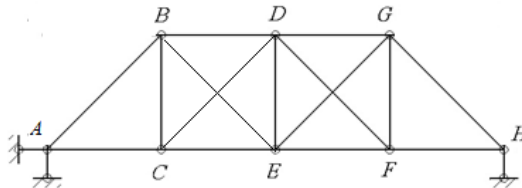


Рис. 2.22. Схема стержневой фермы

## 2.6. Контрольные вопросы

1. Что такое геометрически неизменяемая система?
2. Геометрически изменяемые и мгновенно изменяемые системы.
3. Необходимое и достаточное условия существования геометрически неизменяемых систем.
4. Понятия статически определимых и статически неопределимых систем.
5. Как определить степень свободы системы?
6. Что такое диск? Его соединение с землей. Определение степени свободы.
7. Понятие кинематической связи первого вида.
8. С помощью каких элементов соединяются диски в системах?
9. Что такое кратная связь, диада, триада в стержневых системах?
10. Достаточное условие геометрической неизменяемости двух дисков, соединенных тремя стержнями.
11. Условие геометрической неизменяемости трех дисков, соединенных шарнирами или стержнями.
12. Как образуются плоские статически определимые и геометрически неизменяемые системы?
13. Для чего проводится кинематический анализ систем?

# СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

## Глава 3. ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

### 3.1. Расчет систем на подвижную нагрузку. Типы подвижных нагрузок. Основные свойства линий влияния. Построение линий влияния для однопролетных балок

При расчете мостов, подкрановых балок, кранов, эстакад и ряда других сооружений приходится иметь дело с так называемой подвижной нагрузкой.

В качестве подвижной нагрузки может быть вес железнодорожного состава, автомобиля, подвешенного краном груза – такая нагрузка непрерывно меняет свое положение на сооружении. Расчет линейно-деформируемых систем на подвижную нагрузку выполняют с помощью линий влияния. Линией влияния какого-либо фактора (например, изгибающего момента, поперечной силы, опорной реакции) называется график, изображающий закон изменения этого фактора при передвижении по сооружению единичного груза  $\bar{F} = 1$ .

Не следует путать линию влияния и эпюру. При построении эпюры нагрузка зафиксирована и перемещается сечение, при построении линий влияния, наоборот, сечение зафиксировано, а перемещается нагрузка. То есть линия влияния строится для определенного сечения при всевозможных положениях силы  $\bar{F} = 1$ .

Рассмотрим линии влияния на примере их построения для однопролетных балок.

Построим линии влияния реакций  $R_A$  и  $R_B$  для однопролетной балки (рис. 3.1). Предположим, что сила  $\bar{F} = 1$  находится на расстоянии  $z$  от опоры  $A$ . Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma m_B &= 0; \\ -R_A l + \bar{F} (l - z) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$R_A = \bar{F} (l - z) / l = (l - z) / l. \quad (3.1)$$

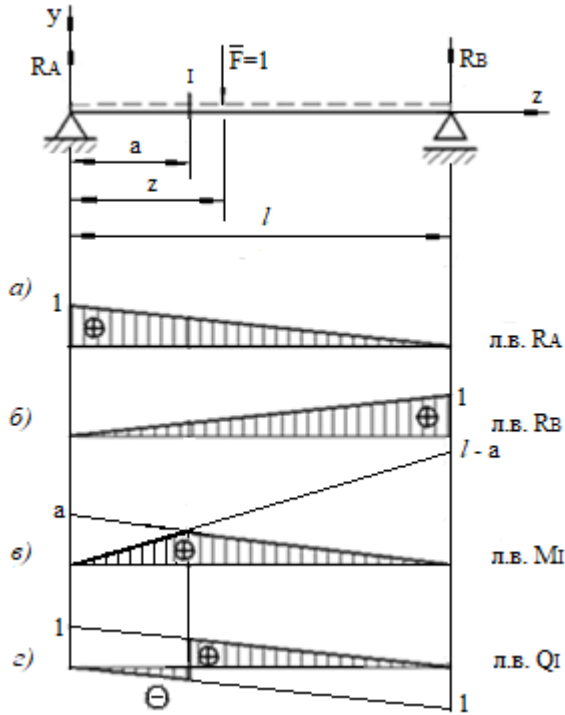


Рис. 3.1. Построение линий влияния реакций, моментов, поперечных сил

$$\Sigma m_A = 0;$$

$$R_B l - \bar{F} z = 0,$$

откуда

$$R_B = \bar{F} z / l = z / l. \quad (3.2)$$

Полученные выражения (3.1) и (3.2) представляют собой уравнения прямых линий. Для их построения зададим граничные значения координате  $z$ : при  $z = 0$   $R_A = 1$ ; при  $z = l$   $R_A = 0$  (рис. 3.1, а); при  $z = 0$   $R_B = 0$ ; при  $z = l$   $R_B = 1$  (рис. 3.1, б).

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении  $I$  рассмотрим два положения единичного груза:

– сила  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения I. В этом случае изгибающий момент в сечении I определим, рассматривая левую часть балки, так как на нее действует только сила  $R_A$ , на правую часть – две силы  $R_B$  и  $\bar{F} = 1$ :

$$M_I = R_A a. \quad (3.3)$$

Линию влияния  $M_I$ , как видно из выражения (3.3), можно получить, используя уже построенную линию влияния  $R_A$ , если все ее ординаты умножить на численное значение  $a$ . Причем действительной будет часть линии влияния правее сечения I, т. е. на том участке балки, где находится сила  $\bar{F} = 1$ . Эта часть линии влияния является ее правой прямой;

– сила  $\bar{F} = 1$  находится левее сечения I. Изгибающий момент в сечении I определим, рассматривая правую часть балки:

$$M_I = R_B (l - a). \quad (3.4)$$

Рассуждая аналогично, получим левую прямую линии влияния  $M_I$ .

Обе прямые пересекаются под сечением I (рис. 3.1, в).

Построим линию влияния силы  $Q_I$ . Вначале груз располагаем правее сечения I, рассматриваем левую часть балки:

$$Q_I = R_A, \quad (3.5)$$

т. е. линия влияния  $Q_I$  ничем не отличается от линии влияния  $R_A$ . Согласно выражению (3.5) получаем правую прямую линии влияния  $Q_I$ .

Для построения левой прямой линии влияния предположим, что  $\bar{F} = 1$  находится левее сечения I, рассматриваем правую часть балки:

$$Q_I = -R_B. \quad (3.6)$$

Левую прямую линии влияния  $Q_I$  получим путем умножения ординат линии влияния  $R_B$  на  $-1$  (рис. 3.1, з).

Построим линии влияния реакций и внутренних усилий для однопролетной консольной балки (рис. 3.2).

Из уравнений равновесия балки получим выражения для определения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \Sigma m_B &= 0; \\ -R_A l + \bar{F} (l - z) &= 0; \\ R_A &= \bar{F} (l - z) / l. \end{aligned} \quad (3.7)$$

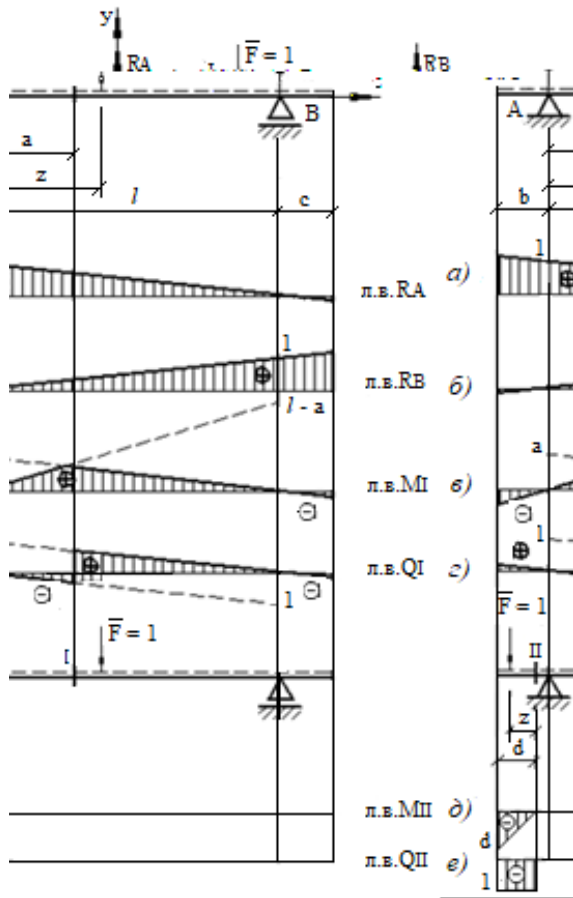


Рис. 3.2. Построение линий влияния для однопролетной консольной балки

$$\begin{aligned}
 \Sigma m_A &= 0; \\
 R_B l - \bar{F} z &= 0; \\
 R_B &= \bar{F} z / l = z / l.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Эти выражения полностью совпадают с уравнениями (3.1) и (3.2). При подстановке в выражения (3.7) и (3.8) граничных значений  $z = -b$  и  $z = l + c$  получаем по две точки для построения линий влияния:

$$\text{при } z = -b \quad R_A = 1 + b / l;$$

$$\text{при } z = l + c \quad R_A = -c / l;$$

$$\text{при } z = -b \quad R_B = -b / l;$$

$$\text{при } z = l + c \quad R_B = 1 + c / l.$$

Не трудно доказать, что эти линии влияния в пределах пролета балки полностью совпадают с линиями влияния реакций в однопролетной балке.

Для построения линии влияния  $M_I$  вначале предположим, что  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения I. Рассматривая левую от сечения I часть балки, определим:

$$M_I = R_A a, \quad (3.9)$$

т. е. линия влияния  $M_I$  правее сечения I будет такой же, как линия влияния  $R_A$ , ординаты которой необходимо умножить на  $a$ . Затем  $\bar{F} = 1$  устанавливаем левее сечения I и рассматриваем правую часть балки:

$$M_I = R_B (l - a). \quad (3.10)$$

Видно, что левая прямая линии влияния  $M_I$  по своему виду такая же, как линия влияния  $R_B$ , ординаты которой должны быть умножены на величину  $(l - a)$ .

Рассуждая аналогично, можно построить линию влияния  $Q_I$ . Так же как и линия влияния  $M_I$  в пределах пролета, линия влияния  $Q_I$  полностью совпадает с линией влияния однопролетной балки. В пределах консолей левая и правая прямые линий влияния  $M_I$  и  $Q_I$  просто продлеваются до крайнего левого и крайнего правого сечений балки (рис. 3.2, в, з).

Построим линии влияния  $M_{II}$  и  $Q_{II}$  для сечения II, расположенного на консоли. Допустим,  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения II. Из равновесия левой части балки получаем, что  $M_{II} = 0$ . Затем предположим, что  $\bar{F} = 1$  находится левее сечения II, его положение определяется координатой  $z$ , т. е.

$$M_{II} = -\bar{F} z. \quad (3.11)$$

При  $z = 0$   $M_{II} = 0$ ; при  $z = d$   $M_{II} = -d$  (рис. 3.2, д).

При построении линии влияния  $Q_{II}$  рассматриваем случай, когда  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения II (из равновесия левой части  $Q_{II} = 0$ ), и случай, когда  $\bar{F} = 1$  находится левее сечения II. Из равновесия левой части балки получаем  $Q_{II} = -\bar{F} = -1$  (рис. 3.2, е).

Построим линии влияния  $M_I$  и  $Q_I$  для консольной балки (рис. 3.3). Когда  $\bar{F} = 1$  находится левее сечения I, то из равновесия правой части имеем  $M_I = 0$ ; когда  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения I, то  $M_I = -\bar{F} z$ ; при  $z = 0$   $M_I = 0$ , при  $z = a$   $M_I = -a$ . Аналогично получаем линию влияния  $Q_I$  (рис. 3.3, б).

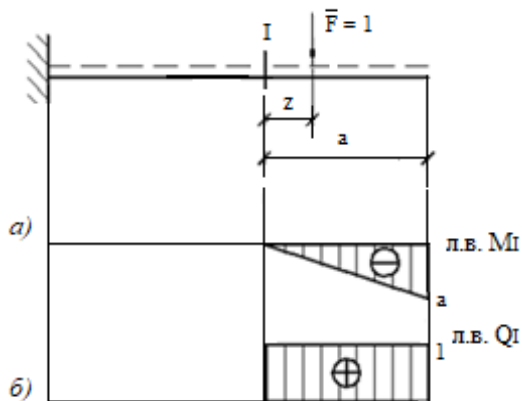


Рис. 3.3. Построение линий влияния для консольной балки

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для консольной балки имеют точно такой же вид, как и линии влияния для сечений, расположенных на консоли однопролетной балки (см. рис. 3.2).

### 3.2. Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния

Усилия от нагрузки по линиям влияния определяются на основании линейной зависимости между усилиями и нагрузкой. Пусть построена линия влияния некоторого усилия  $S$  (рис. 3.4). Вычислим это усилие при действии сосредоточенной силы  $F$ . Для вычисления  $S$  необходимо умножить величину силы  $F$  на ординату у линии влияния под этой си-

лой, так как все ординаты линии влияния представляют собой величину усилия  $S$  от силы  $\bar{F} = 1$ , т. е.

$$S = F y. \quad (3.12)$$

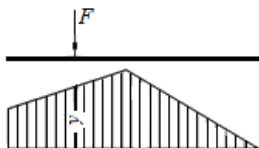


Рис. 3.4. Определение усилия от сосредоточенной силы по линии влияния

Для определения усилия от системы сосредоточенных сил каждая из сил умножается на ординату линии влияния под этой силой с учетом знака:

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i. \quad (3.13)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки усилие элементарной равнодействующей силы определим по формуле

$$dS = q dz y. \quad (3.14)$$

Усилия от всей нагрузки получаем путем интегрирования выражения (3.14):

$$S = \int_0^b q y dz = q \int_0^b y dz = q \omega, \quad (3.15)$$

где  $\omega$  – площадь фигуры, очерченной линией влияния в пределах распределенной нагрузки (рис. 3.5).

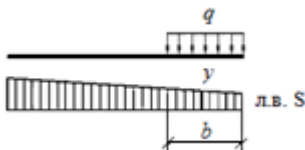


Рис. 3.5. Определение усилия от равномерно распределенной нагрузки по линии влияния

В общем случае при наличии нескольких распределенных нагрузок усилие определяется по следующей формуле:

$$S = \sum_{i=1}^n q_i \omega_i \quad (3.16)$$

Для определения усилия от сосредоточенного момента  $M$  (рис. 3.6) заменим момент парой сил  $F$ :  $M = F dz$ .

Тогда

$$S = -Fy + F(y + dy) = F dy = M \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.17)$$

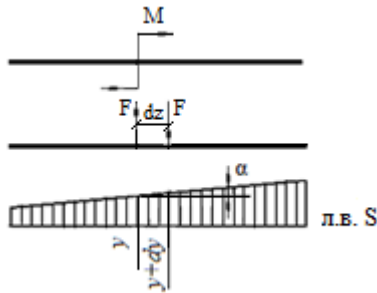


Рис. 3.6. Определение усилия от сосредоточенного момента по линии влияния

При  $n$  внешних моментов усилие определяется по следующей формуле:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad (3.18)$$

В выражение (3.18)  $M_i$  и  $\alpha_i$  подставляются со своим знаком:  $M > 0$ , если момент действует по ходу часовой стрелки, и  $\alpha > 0$ , если линию влияния до совмещения с осью по кратчайшему пути необходимо повернуть по ходу часовой стрелки.

### 3.3. Определение экстремальных усилий от подвижной нагрузки по линиям влияния. Критерии невыгодного положения системы грузов при полигональных и треугольных линиях влияния

При действии на сооружение подвижной нагрузки в виде одной сосредоточенной силы невыгодное, или опасное, положение нагрузки соответствует *наибольшей по абсолютной величине ординате линии влияния*. С учетом вышесказанного для определения экстремальных усилий от подвижной нагрузки по линиям влияния необходимо использовать формулы (3.13), (3.16), (3.18).

Определим опасное положение нагрузки, если на сооружение действует система подвижных, связанных между собой грузов, а линия влияния имеет ломаное очертание (рис. 3.7).

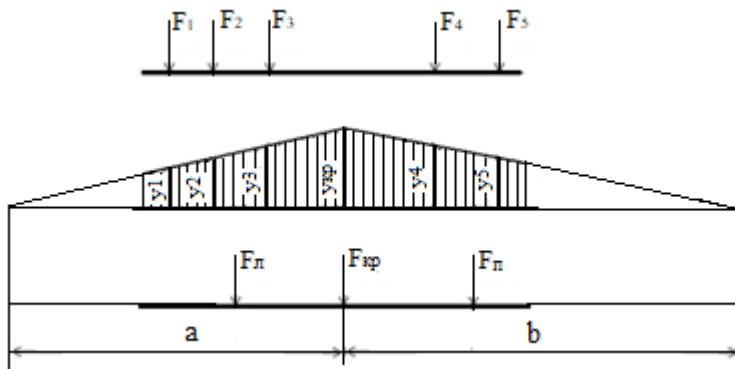


Рис. 3.7. Определение опасного положения системы подвижных грузов

Предположим, что ни один из грузов не находится над вершиной линии влияния, усилие от системы подвижных грузов определим как сумму:

$$F = \Sigma F_{л} y_{л} + \Sigma F_{п} y_{п},$$

где  $F_{л}$ ,  $F_{п}$  – грузы, находящиеся слева и справа от вершины линии влияния;

$y_{л}$ ,  $y_{п}$  – ординаты левого и правого участков линии влияния.

Возьмем производную  $F$  по  $dz$ :

$$dF / dz = \Sigma F_{л} dy_{л} / dz + \Sigma F_{п} dy_{п} / dz.$$

С учетом того, что

$$dy_{\text{л}} / dz = \operatorname{tg} \alpha, \quad dy_{\text{п}} / dz = -\operatorname{tg} \beta,$$

получим:

$$dF / dz = \operatorname{tg} \alpha \Sigma F_{\text{л}} - \operatorname{tg} \beta \Sigma F_{\text{п}}. \quad (3.19)$$

При  $dF / dz > 0$  усилие  $F$  возрастает при движении системы грузов вправо, значит, его наибольшее значение, а следовательно, и опасное положение грузов не достигнуто.

При  $dF / dz < 0$  усилие  $F$  убывает, значит, опасное положение уже пройдено.

Таким образом, при переходе системы грузов через опасное положение знак производной  $dF / dz$  изменяется на противоположный. Это возможно лишь в том случае, когда один из грузов переходит из одного участка в другой, для чего он должен пройти вершину линии влияния.

Значит, опасное положение будет в том случае, когда один из грузов (его называют критическим  $F_{\text{кр}}$ ) окажется над вершиной линии влияния.

Обозначим сумму левых грузов без критического  $F_{\text{л}}$ , а сумму правых грузов без критического  $F_{\text{п}}$ .

Если критический груз отнести к левым грузам, то  $dF / dz > 0$ ; если к правым, то  $dF / dz < 0$ . В этом случае получим:

$$(F_{\text{л}} + F_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha - F_{\text{п}} \operatorname{tg} \beta > 0;$$

$$F_{\text{л}} \operatorname{tg} \alpha - (F_{\text{п}} + F_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \beta < 0.$$

С учетом того, что

$$\operatorname{tg} \alpha = y_{\text{кр}} / a, \quad \operatorname{tg} \beta = y_{\text{кр}} / b,$$

получим:

$$(F_{\text{л}} + F_{\text{кр}}) / a > F_{\text{п}} / b; \quad (3.20)$$

$$F_{\text{л}} / a < (F_{\text{п}} + F_{\text{кр}}) / b. \quad (3.21)$$

Неравенства (3.20) и (3.21) являются условием для определения критического груза, т. е. опасного положения нагрузки в целом.

Если не выполняется первое условие, то система грузов смещается влево, если не выполняется второе условие – вправо, и расчет повторяют.

### 3.4. Примеры расчета

**Задача 3.1.** Для двухконсольной балки определить  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $M_1$ ,  $Q_1$  от заданной внешней нагрузки (рис. 3.8).

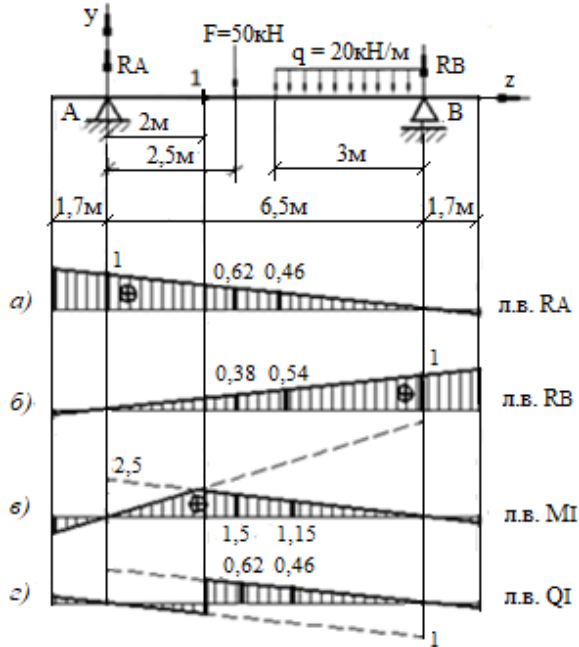


Рис. 3.8. Расчетная схема двухконсольной балки

#### Решение.

Построим линии влияния (л. в.) для силовых факторов  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $M_1$ ,  $Q_1$  от подвижной единичной нагрузки  $\bar{F} = 1$  (см. п. 3.1). Определим ординаты линии влияния под заданной внешней нагрузкой (рис. 3.8, а, б, в, г) из подобия треугольников.

Перемножим величину ординат линии влияния для каждого силового фактора на величину сосредоточенной силы  $F = 50 \text{ кН}$ , распределенную нагрузку  $q = 20 \text{ кН/м}$  на площадь линии влияния, расположенную под ней. Результат перемножения арифметически сложим с учетом знаков линии влияния. Таким образом,

$$R_A = 50 \cdot 0,62 + 20 \cdot 3 \cdot 0,46 / 2 = 44,8 \text{ кН};$$

$$R_B = 50 \cdot 0,38 + 20 \cdot (1 + 0,54) \cdot 3 / 2 = 65,2 \text{ кН};$$

$$M_I = 50 \cdot 1,54 + 20 \cdot 3 \cdot 1,15 / 2 = 111,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_I = 50 \cdot 0,62 + 20 \cdot 3 \cdot 0,46 / 2 = 44,8 \text{ кН}.$$

**Задача 3.2.** Определить невыгодное положение системы связанных грузов по изгибающему моменту в заданном сечении однопролетной балки (рис. 3.9).

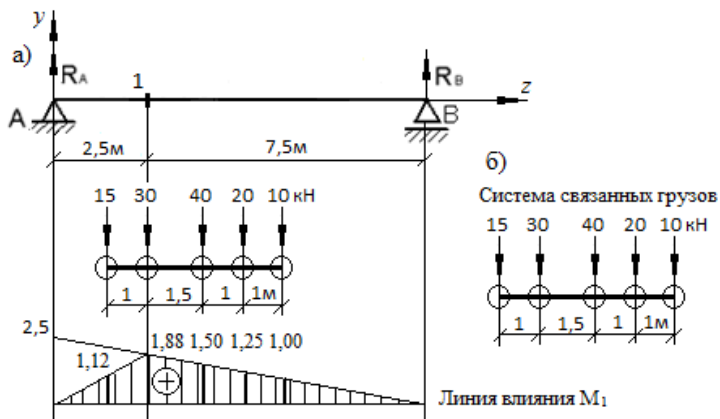


Рис. 3.9. Расчетная схема однопролетной балки

**Решение.**

Для сечения I однопролетной балки строим линию влияния (рис. 3.9, a). Определим критическую силу для системы связанных грузов. Предположим, что  $F_{кр} = 30 \text{ кН}$ . Проверяем на выполнение два неравенства:

$$(F_{л} + F_{кр}) / a > F_{п} / b; (15 + 30) / 1 > 70 / 3,5.$$

$$F_{л} / a < (F_{п} + F_{кр}) / b; 15 / 1 < (70 + 30) / 3,5.$$

Оба неравенства выполняются. Следовательно,  $F_{кр} = 30 \text{ кН}$ . Установим систему связанных грузов таким образом, чтобы критическая сила оказалась над пиком линии влияния  $M_I$ . Определим из подобия треугольников ординаты линии влияния, которые соответствуют каж-

дой силе системы связанных грузов. Определим значение момента в сечении I, которое будет максимальным:

$$M_I = 15 \cdot 1,12 + 30 \cdot 1,88 + 40 \cdot 1,50 + 20 \cdot 1,25 + 10 \cdot 1,00 = 168,2 \text{ кН}.$$

### 3.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.3.** Установить грузы в опасное положение и найти максимальное усилие  $Q$  (рис. 3.10).

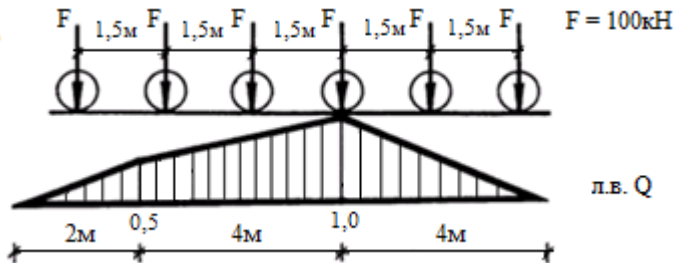


Рис. 3.10. Определение опасного положения системы связанных грузов

**Ответ:**  $Q = 368,75 \text{ кН}$ .

**Задача 3.4.** Установить грузы в опасное положение и найти максимальное усилие  $M$  (рис. 3.11).

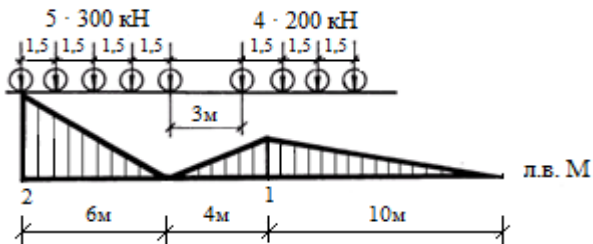


Рис. 3.11. Система связанных грузов

**Ответ:**  $M = 1127,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

### 3.6. Контрольные вопросы

1. Что понимается под линией влияния усилия? В чем заключается отличие линии влияния от эпюры?
2. Какими способами можно строить линии влияния?
3. Как определяется значение усилия по линии влияния от заданной постоянной нагрузки?
4. Как определяется значение усилия по линиям влияния от подвижной нагрузки?
5. Приведите критерий опасного положения нагрузки при многоугольной линии влияния, при треугольной линии влияния.
6. Для чего используются линии влияния?
7. Для чего определяют опасное положение подвижной нагрузки?

## Глава 4. БАЛОЧНЫЕ И КОНСОЛЬНО-БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ

### 4.1. Понятие о ферме. Образование ферм. Статическая определенность и геометрическая неизменяемость ферм. Классификация ферм

**Ферма** – стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после замены ее жестких узлов шарнирными. В элементах фермы, при отсутствии расцентровки стержней и внеузловой нагрузки, возникают только усилия растяжения-сжатия. Фермы образуются из прямолинейных стержней, соединенных в узлах в геометрически неизменяемую систему, к которой нагрузка прикладывается только в узлах. Фермы широко используются в современном строительстве, в основном для перекрытия больших пролетов с целью уменьшения расхода применяемых материалов и облегчения конструкций, например, в строительных большепролетных конструкциях (мосты, путепроводы, акведуки), стропильных системах промышленных зданий, спортивных сооружений, а также при возведении небольших легких строительных и декоративных конструкций: павильонов, сценических конструкций, тентов и подиумов.

Иногда используются пространственные фермы, расчет которых обычно сводится к расчету нескольких плоских ферм.

Расстояние между осями опор фермы называется ее **пролетом**. Стержни, расположенные по внешнему контуру, называются **поясами** и образуют пояса. Вертикальные стержни, соединяющие пояса, называются **стойками**, наклонные – **раскосами**. Стойки и раскосы образуют **решетку** фермы. Расстояние между соседними узлами пояса фермы называется **панелью**.

Рассмотрим порядок образования плоских статически определимых ферм ( $n = 0$ ).

Любой узел, прикрепленный к диску (шарнирный треугольник) с помощью двух линейных связей (диады), не лежащих на одной прямой и не параллельных друг другу, будет неподвижен относительно этого диска. Таким образом, последовательное присоединение к неизменяемой системе любого числа узлов при помощи диад образует в целом простейшую неизменяемую ферму (рис. 4.1). Для обеспечения геометрической неизменяемости фермы необходимо, чтобы связей, наложенных на перемещение узлов фермы, было достаточно и они были правильно размещены. Следовательно, исследование геометрической неизменяемости фермы состоит из двух этапов (структурный анализ фермы):

- 1) проверка достаточности числа связей;
- 2) анализ правильности их размещения.

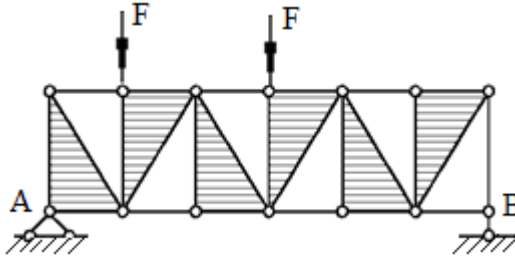


Рис. 4.1. Схема плоской геометрически неизменяемой фермы

При анализе геометрической неизменяемости ферм, как и любых других стержневых систем, будем считать стержни абсолютно жесткими. Каждый узел плоской фермы имеет две степени свободы, т. е. имеет возможность линейного смещения в вертикальном и горизонтальном направлениях. Следовательно, минимальное количество связей, необходимых для закрепления узлов фермы от смещений, должно равняться удвоенному числу узлов. Часть из этих связей должна обеспечивать закрепление фермы относительно основания. Таким образом, минимальное число стержней в ферме, необходимое для обеспечения ее геометрической неизменяемости, определяется по формуле

$$n_c = n_y - C, \quad (4.1)$$

где  $n_c$  – число стержней в ферме;

$n_y$  – число узлов;

$C$  – число опорных связей.

Условие (4.1) одновременно является условием статической определимости фермы. Для каждого узла можно составить два уравнения статики – условия равенства нулю проекций на вертикальную и горизонтальную оси всех действующих на узел внешних, внутренних сил и реакций опор. В данном случае неизвестными являются продольные усилия в каждом стержне и реакции в опорах.

Если количество стержней в ферме будет больше, чем требуется согласно условию (4.1), то ферма будет статически неопределимой, если меньше – геометрически изменяемой.

При этом следует отметить, что условие (4.1) является необходимым, но недостаточным для обеспечения геометрической неизменяемости. Таким образом, кроме обеспечения необходимого числа связей, требуется их правильное размещение.

Систему, в которой невозможны взаимные смещения узлов при абсолютно жестких стержнях, называют **жестким диском**. В шарнирном треугольнике  $CDE$  (рис. 4.2) взаимное смещение узлов будет невозможным, следовательно, он является жестким диском. Присоединение к такому треугольнику еще одного узла двумя не лежащими на одной прямой связями приведет к образованию новой системы, в которой также невозможны взаимные смещения узлов. Если продолжить этот процесс, то получится система, которая также будет жестким диском. Примером жесткого диска является простейшая ферма, т. е. ферма, состоящая из шарнирных треугольников.

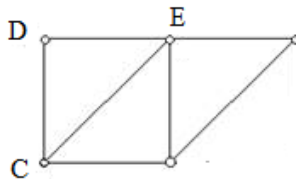


Рис. 4.2. Схема шарнирного треугольника

Для того чтобы обеспечить неподвижность простейшей фермы относительно основания, необходимы как минимум три опорные связи, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим ферму (рис. 4.3), для которой выполняется равенство (4.1):  $25 = 2 \cdot 14 - 3 = 25$ . Линии действия трех опорных связей не параллельны и не пересекаются в одной точке. Однако из-за неправильного распределения связей ферма является геометрически изменяемой. Шарнирами  $C, D, E, K$  образуется шарнирный квадрат, который при приложении незначительной нагрузки обращается в ромб.

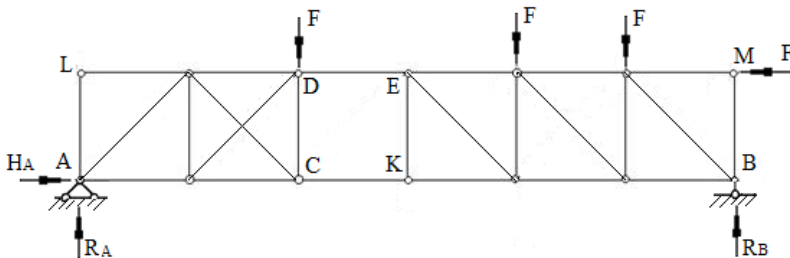


Рис. 4.3. Схема геометрически изменяемой фермы

Выполним перестановку опорных связей и стержней фермы. Отбросим на левой опоре одну связь, сделав неподвижную опору подвижной, и добавим еще одну подвижную опору в центре пролета фермы (рис. 4.4).

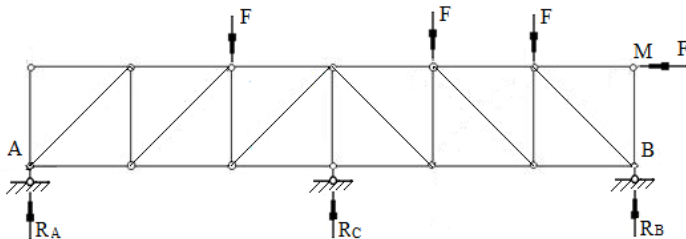


Рис. 4.4. Схема простейшей фермы с подвижной опорой посередине пролета

Количество опорных связей не изменилось, а осталось равным трем, т. е. равенство (4.1) осталось справедливым. Но при этом линии действия опорных реакций стали параллельными, направленными вертикально вверх.

В результате система получила возможность смещения в горизонтальном направлении, т. е. стала геометрически изменяемой.

На рис. 4.5 простейшая ферма является статически определимой и геометрически неизменяемой, так как для нее выполнены два условия структурного анализа.

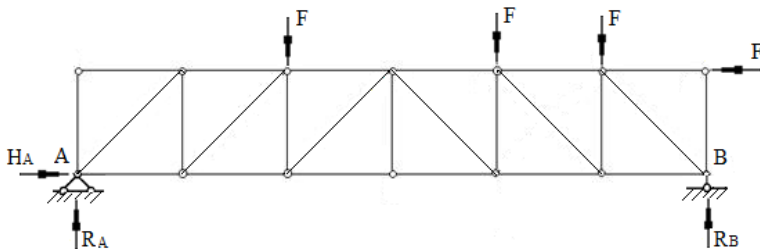


Рис. 4.5. Схема простейшей статически определимой и геометрически неизменяемой фермы

Классификацию ферм обычно проводят по пяти признакам:

- характеру очертания внешнего контура;
- типу решетки;
- типу опирания фермы;
- назначению;
- уровню езды.

По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис. 4.6, *а*), треугольные фермы (рис. 4.6, *б*) и с полигональным расположением поясов (рис. 4.6, *в*).

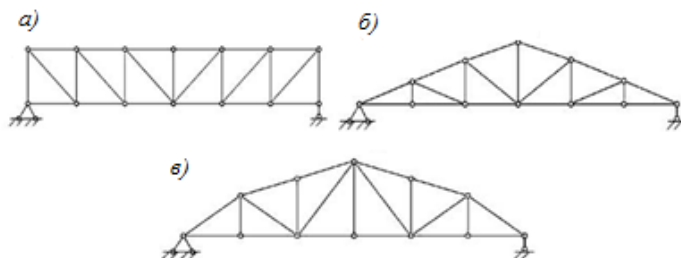


Рис. 4.6. Схемы ферм по характеру очертания внешнего контура

В зависимости от типа решетки наиболее распространенными являются раскосные фермы (рис. 4.7, *а*), фермы с треугольной решеткой (рис. 4.7, *б*), фермы с полураскосной решеткой (рис. 4.7, *в*) и фермы с ромбической решеткой (рис. 4.7, *г*).

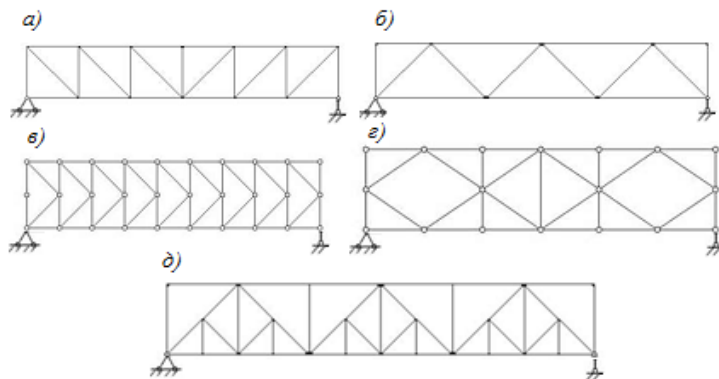


Рис. 4.7. Схемы ферм по типу решетки

Раскосы, идущие вверх от опор к середине фермы, называют восходящими раскосами, идущие наоборот – нисходящими раскосами (рис. 4.7, *а*). Фермы, усиленные дополнительными стержнями (шпренгелями), называют шпренгельными фермами (рис. 4.7, *д*). Наличие шпренгелей позволяет увеличить количество узлов в нагруженном поясе, что может потребоваться для облегчения конструкций, с помощью

которых внешняя нагрузка передается на узлы фермы. Например, для уменьшения ширины плит перекрытия, которые опираются на стропильные фермы здания (рис. 4.8).

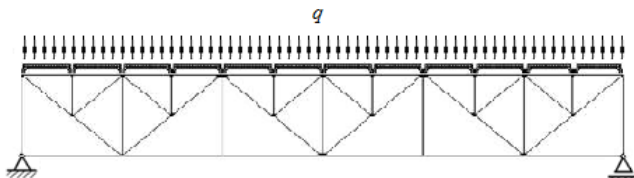


Рис. 4.8. Схема стропильной шпренгельной фермы

В зависимости от типа опирания фермы (характера опорных закреплений) различают балочные фермы (рис. 4.9, а), консольные фермы (рис. 4.9, б), консольно-балочные фермы (рис. 4.9, в) и арочные фермы (рис. 4.9, г, д, е). К ним также относятся различные висячие системы (рис. 4.9, ж) и комбинированные системы (рис. 4.9, з).

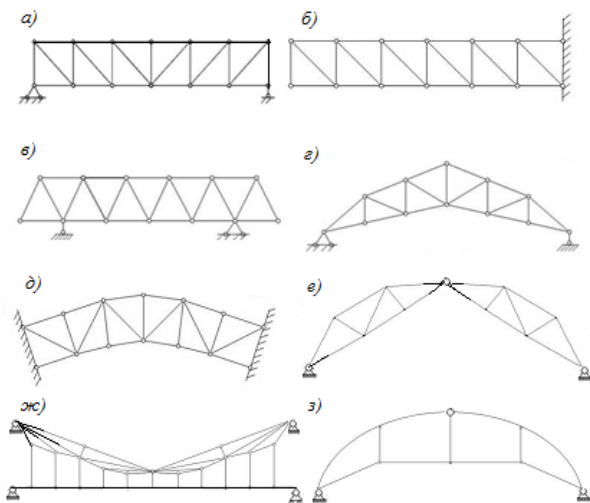


Рис. 4.9. Схемы ферм по типу опирания

В зависимости от назначения различают фермы стропильные (рис. 4.10, а), крановые (рис. 4.10, б), башенные (рис. 4.10, в), мостовые.

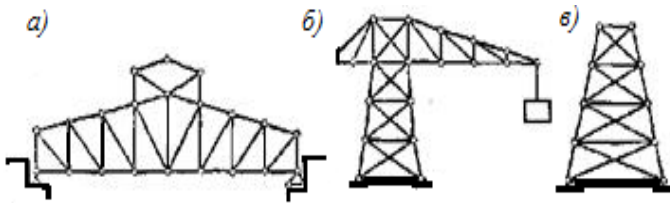


Рис. 4.10. Схемы ферм по назначению

Мостовые фермы в зависимости от уровня езды делятся на фермы с ездой понизу (рис. 4.11, а), с ездой поверху (рис. 4.11, б) и с ездой по середине (рис. 4.11, в).

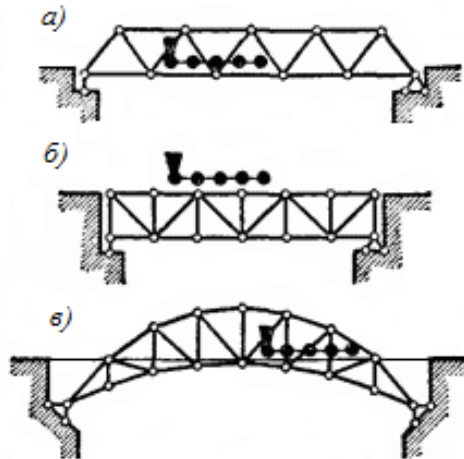


Рис. 4.11. Схемы мостовых ферм по уровню езды

#### 4.2. Допущения, принятые при расчете ферм. Признаки нулевых стержней. Аналитический расчет ферм: способ вырезания узлов, способ моментных точек, способ проекций

При расчете сил, действующих в узлах ферм, обычно исходят из следующих допущений:

- внешние силы приложены только к узлам фермы;
- весом стержней пренебрегаем (его можно учесть, разнося по узлам соответствующих стержней).

При таких допущениях силы, действующие в узлах фермы со стороны стержней, всегда направлены вдоль осей, проходящих через

центр тяжести поперечного сечения стержня. Если стержни фермы прямолинейные, то они либо растягиваются, либо сжимаются.

Иногда без предварительных расчетов можно определить стержни, в которых усилия равны нулю. Такие стержни называются нулевыми (рис. 4.12).

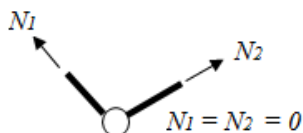


Рис. 4.12. Нулевые стержни в ненагруженном двухстержневом узле

В двухстержневом ненагруженном узле оба стержня нулевые, если они не лежат на одной прямой.

В трехстержневом ненагруженном узле, если два стержня лежат на одной прямой, а третий – под углом к ним, последний стержень является нулевым, а усилия в двух других равны между собой (рис. 4.13).

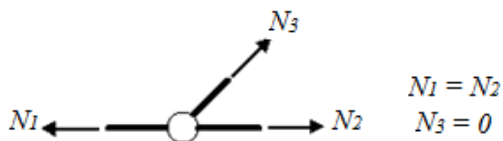


Рис. 4.13. Нулевые стержни в ненагруженном трехстержневом узле

В трехстержневом нагруженном узле нагрузка приложена по направлению одного из стержней, другой стержень будет нулевым, а усилие в первом стержне равно внешней силе (рис. 4.14).

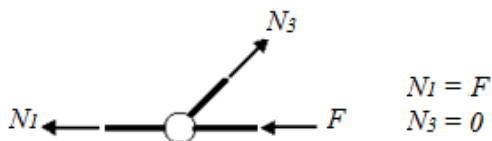


Рис. 4.14. Нулевые стержни в нагруженном трехстержневом узле

В четырехстержневом ненагруженном узле, в котором стержни парно лежат на двух прямых, усилия в лежащих на одной прямой стержнях равны по величине и противоположны по направлению (рис. 4.15).

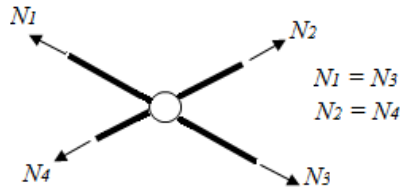


Рис. 4.15. Усилия в стержнях в ненагруженном четырехстержневом узле

Опорные реакции в фермах определяются так же, как и в балках. Наиболее часто усилия в стержнях определяются статическим способом, который основан на методе сечений. В этом случае сечениями выделяются узлы или отдельные части фермы и рассматриваются условия их равновесия под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях.

Рассмотрим статические способы расчета, позволяющие определить внутренние усилия в каждом из элементов фермы, как правило, с помощью одного уравнения с одним неизвестным.

*Способ вырезания узлов.* Последовательно вырезаются узлы, к ним прикладывается внешняя нагрузка и неизвестные продольные силы в рассеченных стержнях. При этом предполагается, что все продольные силы являются растягивающими, т. е. направлены от узла. Силы, действующие на узел, представляют собой систему сходящихся в одной точке сил, поэтому для каждого узла можно составить лишь два уравнения равновесия статики. При их составлении можно брать сумму проекций усилий и внешних нагрузок на вертикальную и горизонтальную ось. Иногда удобнее брать сумму проекций всех сил на оси, перпендикулярные направлениям стержней. В этом случае получаются уравнения с одним неизвестным.

Определение усилий начинают с узла, содержащего не более двух неизвестных, и затем последовательно вырезают остальные узлы фермы. Недостатком способа вырезания узлов является зависимость последующих вычислений от предыдущих и постепенное накопление погрешности.

В способе вырезания узлов необходимо установить последовательность вырезания узлов. Например, для расчета фермы (рис. 4.16, *a*) сначала вырежем узел *A* (рис. 4.16, *б*) и запишем уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_{A-1} + N_{A-2} \cos \alpha = 0; \quad (4.2)$$

$$\Sigma Y = N_{A-2} \sin \alpha + 1,5F = 0.$$

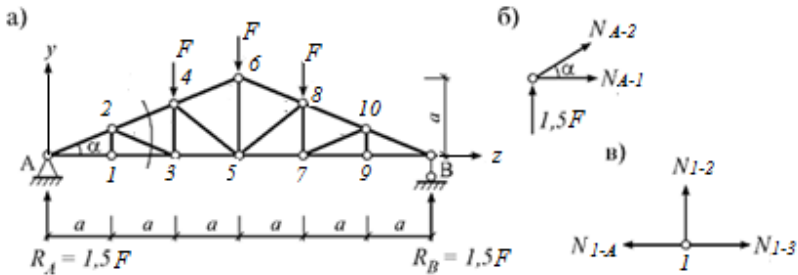


Рис. 4.16. Расчетная схема фермы для способа вырезания узлов

Решая совместно систему уравнений (4.2), находим:

$$N_{A-2} = -1,5F / \sin \alpha; \quad N_{A-1} = 1,5F / \operatorname{tg} \alpha.$$

Теперь вырежем узел 1 (рис. 4.16, в) и запишем условия равновесия:

$$\Sigma X = N_{1-3} - N_{1-A} = 0; \quad \Sigma Y = N_{1-2} = 0.$$

Из них получаем:

$$N_{1-3} = N_{1-A} = 1,5F / \operatorname{tg} \alpha; \quad N_{1-2} = 0 \text{ (нулевой стержень).}$$

После этого можно вырезать узлы 2, 3, 4, 6, 5, 8, 7, 9, 10.

Результаты расчета фермы могут быть проверены по формуле

$$\Sigma N_i l_i = \Sigma F_x x + \Sigma F_y y,$$

где  $N_i$  – усилия в стержнях;

$l_i$  – длины стержней;

$F_x$  и  $F_y$  – проекции нагрузок (включая и опорные реакции);

$x$  и  $y$  – координаты нагрузок.

*Способ сечений.* Этот способ состоит в мысленном рассечении фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из них. При этом действие отбрасываемой части на рассматриваемую должно быть заменено усилиями в стержнях ферм. Если провести сечение не более чем через три стержня, то можно составить уравнения равновесия для рассматриваемой отсеченной части фермы таким образом, чтобы найти усилия во всех трех стержнях. Относительно точки пересечения двух стержней по сечению составляется уравнение моментов, из кото-

рого определяется третье усилие. Точка, для которой составляется уравнение моментов, называется *моментной точкой*. Рассмотрим вышеприведенную ферму, проведя через вторую панель слева сквозное сечение 1-1 (рис. 4.16, а). Рассматривая равновесие левой части от сечения (рис. 4.17), составим уравнение моментов относительно точки 2:

$$\Sigma M_2 = -N_{1-3} a / 3 + 1,5F a = 0.$$

Отсюда получаем:

$$N_{1-3} = 4,5F.$$

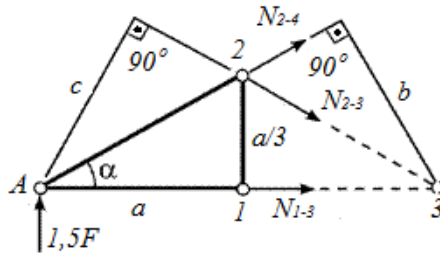


Рис. 4.17. Расчетная схема левой отсеченной части фермы

Точка 3 является моментной точкой для усилия  $N_{2-4}$ . Поэтому

$$\Sigma M_3 = N_{2-4} b + 1,5F \cdot 2a = 0.$$

Так как  $b = 2a \sin \alpha$ , получаем  $N_{2-4} = -1,5F / \sin \alpha$ .

Для усилия  $N_{2-3}$

$$\Sigma M_A = -N_{2-3} c = 0.$$

Отсюда получаем  $N_{2-3} = 0$ .

Когда два стержня, попадающие в сечение, параллельны, то моментной точки для них не существует. В этом случае вместо уравнения моментов требуется составлять уравнение проекций на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

У способа сечений есть один недостаток: в сложных фермах не всегда удастся провести сечение, чтобы в него попадали только три неизвестных усилия. В этом случае некоторые неизвестные нужно определять заранее или использовать другие способы (способы совместных сечений или замены связей).

При использовании этих способов необходимо предварительное определение опорных реакций из уравнений равновесия фермы.

### **4.3. Расчет ферм с простой решеткой на подвижную нагрузку. Построение линий влияния опорных реакций, усилий в стержнях ферм, расположенных в пролете фермы и на консолях**

При расчете ферм на подвижную нагрузку используют метод линий влияния. В фермах имеет место узловая передача нагрузки, в связи с чем процесс построения линий влияния продольных сил имеет свои особенности. Линия влияния усилия в стержне фермы является графиком, показывающим закон изменения этого усилия в зависимости от положения единичного груза на грузовом поясе. Грузовым принимается пояс фермы, по которому перемещается подвижная нагрузка.

Аналогично аналитическим способам определения усилий в стержнях ферм при неподвижной нагрузке различают следующие способы построения линий влияния для ферм:

- способ моментной точки;
- способ проекций;
- способ вырезания узлов.

Уравнения опорных реакций и их линии влияния в фермах строятся так же, как в однопролетных статически определимых балках. Линии влияния усилий в стержнях фермы могут быть построены статическим и кинематическим методами. Рассмотрим статический метод.

Для построения линии влияния усилия в стержне необходимо провести сквозное сечение через тот стержень, для которого строится линия влияния. При этом в сечение должно попадать не более трех стержней. В случае большего количества стержней используется способ совместных сечений.

Каждая линия влияния усилий в стержнях фермы будет иметь три ветви: левая, правая и передаточная прямая в пределах расчлененной панели грузового пояса. Следует различать два вида сечений: междуопорное и консольное сечения. Способ построения линий влияния зависит от вида сечений.

Построим линии влияния (л. в.) усилий в стержнях однопролетной фермы с простой решеткой (рис. 4.18).

Считаем, что перемещение единичной нагрузки происходит по нижнему грузовому поясу фермы.

Линии влияния опорных реакций фермы строятся аналогично линиям влияния опорных реакций однопролетной статически определенной балки (рис. 4.18, а, б). Проведем сечение 1-1.

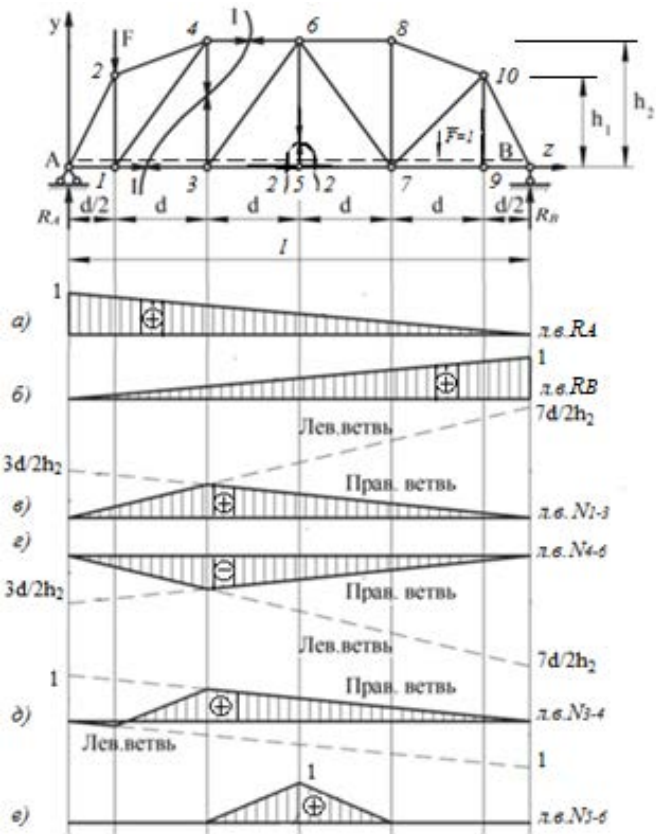


Рис. 4.18. Расчетная схема однопролетной фермы с простой решеткой

Линия влияния  $N_{1-3}$ . Линию влияния строим способом моментной точки, которой является узел 4. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 3 рассеченной панели. Составим уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma M_4 = -N_{1-3} h_2 + R_A \cdot 3d / 2 = 0.$$

Тогда

$$N_{1-3} = R_A \cdot 3d / 2h_2.$$

Строим правую прямую линии влияния  $N_{1-3}$ . Сносим узел 3 на правую прямую. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 1. Составим уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы:

$$\Sigma M_4 = N_{1-3} h_2 - R_B \cdot 7d / 2 = 0.$$

Тогда

$$N_{1-3} = R_B \cdot 7d / 2h_2.$$

Строим левую прямую линии влияния  $N_{1-3}$ . Сносим узел 1 на левую прямую.

Снесенные точки в пределах рассеченной панели соединим передаточной прямой (рис. 4.18, *в*).

Линия влияния  $N_{4-6}$ . Линию влияния строим способом моментной точки, которой является узел 3. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 3 рассеченной панели. Составим уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma M_3 = N_{4-6} h_2 + R_A \cdot 3d / 2 = 0.$$

Тогда

$$N_{4-6} = -R_A \cdot 3d / 2h_2.$$

Строим правую прямую линии влияния  $N_{4-6}$ . Сносим узел 6 на правую прямую. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 1. Составим уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы:

$$\Sigma M_3 = -N_{4-6} h_2 - R_B \cdot 7d / 2 = 0.$$

Тогда

$$N_{4-6} = -R_B \cdot 7d / 2h_2.$$

Строим левую прямую линии влияния  $N_{4-6}$ . Сносим узел 4 на левую прямую. Снесенные точки (узлы 4, 6) в пределах рассеченной панели соединим передаточной прямой (рис. 4.18, *з*).

Линия влияния  $N_{3-4}$ . Линию влияния строим способом проекций, так как два стержня в сечении рассеченной панели параллельны друг другу. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 3 рассеченной панели. Составим уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma Y = -N_{3-4} + R_A = 0.$$

Тогда

$$N_{3-4} = R_A.$$

Строим правую прямую линии влияния  $N_{3-4}$ . Сносим узел 3 на правую прямую. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 1. Составим уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы:

$$\Sigma Y = N_{3-4} + R_B = 0.$$

Тогда

$$N_{3-4} = -R_B.$$

Строим левую прямую линии влияния  $N_{3-4}$ . Сносим узел 1 на левую прямую. Снесенные точки в пределах рассеченной панели соединим передаточной прямой (рис. 4.18, *д*).

Линия влияния  $N_{5-6}$ . Вырезаем узел 5 сечением 2-2. Когда единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узлах 3 и 7, то  $N_{5-6} = 0$ . Если единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узле 5, то из уравнения равновесия  $N_{5-6} = 1$ . Полученную ординату соединяем передаточными прямыми с точками 3 и 7 на нулевой линии (рис. 4.18, *е*).

При построении линий влияния усилий в стержнях консольной фермы следует учитывать следующее правило: для составления уравнения (зависимости) изменения усилия в заданном стержне необходимо рассматривать равновесие той части фермы, которая находится в пределах от сечения до конца консольного участка независимо от того, где располагался единичный груз (правее или левее рассеченной панели). Рассмотрим построение линий влияния усилий  $N_{6-7}$ ,  $N_{3-7}$ ,  $N_{3-2}$ ,  $N_{2-7}$  в стержнях консольной фермы, изображенной на рис. 4.19. Считаем, что движение подвижной нагрузки происходит по нижнему поясу (пунктирная линия).

Линия влияния  $N_{6-7}$ . Рассечем вторую панель слева сечением 1-1. Пусть единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 2. Рассмотрим правую отсеченную часть фермы. Способом моментной точки составим уравнение равновесия, когда единичный груз находится в узле 4:

$$\Sigma M_3 = -N_{6-7} h + 1d = 0.$$

Отсюда

$$N_{6-7} = d / h.$$

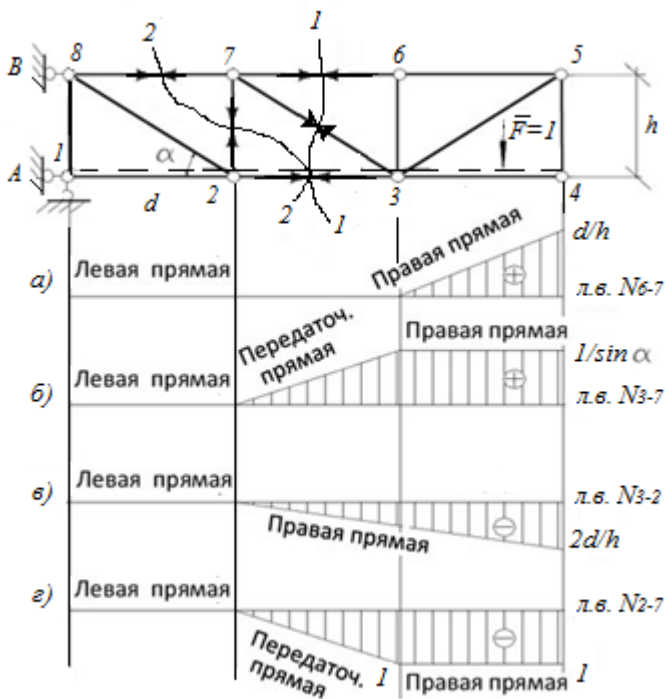


Рис. 4.19. Построение линий влияния усилий в стержнях консольной фермы

Единичный груз находится в узле 3, тогда  $N_{6-7} = 0$ . Строим правую прямую линии влияния  $N_{6-7}$ .

Единичный груз находится левее узла 2. Рассмотрим равновесие правой отсеченной части относительно моментной точки 3. В этом случае  $N_{6-7} = 0$ . Левая прямая линии влияния  $N_{6-7}$  в пределах левой крайней панели будет совпадать с нулевой линией. Передаточная прямая в пределах рассеченной панели также будет совпадать с нулевой линией. Линия влияния  $N_{6-7}$  изображена на рис 4.19, а.

Линия влияния  $N_{3-7}$ . Линия влияния для данного стержня строится способом проекций, так как два других стержня в сечении 1-1 параллельны друг другу. Когда единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узлах 3 и 4 правой отсеченной части фермы, то уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\Sigma Y = N_{3,7} \sin \alpha - 1 = 0.$$

Отсюда

$$N_{3,7} = 1 / \sin \alpha.$$

Правая прямая линии влияния  $N_{3,7}$  строится в пределах третьей панели слева параллельно нулевой линии. Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 2. Рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы. Левая прямая линии влияния  $N_{3,7}$  в пределах первой панели слева совпадает с нулевой линией. В пределах рассеченной панели ординаты узлов 2 и 3 соединяем передаточной прямой (рис. 4.19, б).

Аналогичным образом строим линию влияния  $N_{3,2}$ , составляя уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы относительно моментной точки 7, когда единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узле 4. Строим правую прямую линии влияния  $N_{3,2}$ , которая совпадает с передаточной прямой. Левая прямая совпадает с нулевой линией в пределах первой панели (рис. 4.19, в).

Для построения линии влияния  $N_{2,7}$  проведем сечение 2-2. Способом сечений составим уравнение равновесия для правой отсеченной части, когда единичный груз  $\bar{F} = 1$  последовательно находится в узлах 4, 3 и 2 (рис. 4.19, г).

Для определения усилий в стержнях фермы по линии влияния от системы связанных подвижных грузов необходимо:

- построить линию влияния усилия в рассматриваемом стержне фермы;
- определить критический груз в системе связанных подвижных грузов;
- установить критический груз в системе связанных подвижных грузов над пиком линии влияния;
- определить ординаты линии влияния под каждым связанным грузом;
- определить усилие в стержне от системы связанных грузов.

#### 4.4. Примеры расчета

**Задача 4.1.** Для фермы (рис. 4.20) найти усилия в отмеченных стержнях. Построить линии влияния (л. в.)  $N_{3,4}$ ,  $N_{3,5}$ ,  $N_{4,5}$  и по ним определить усилия.

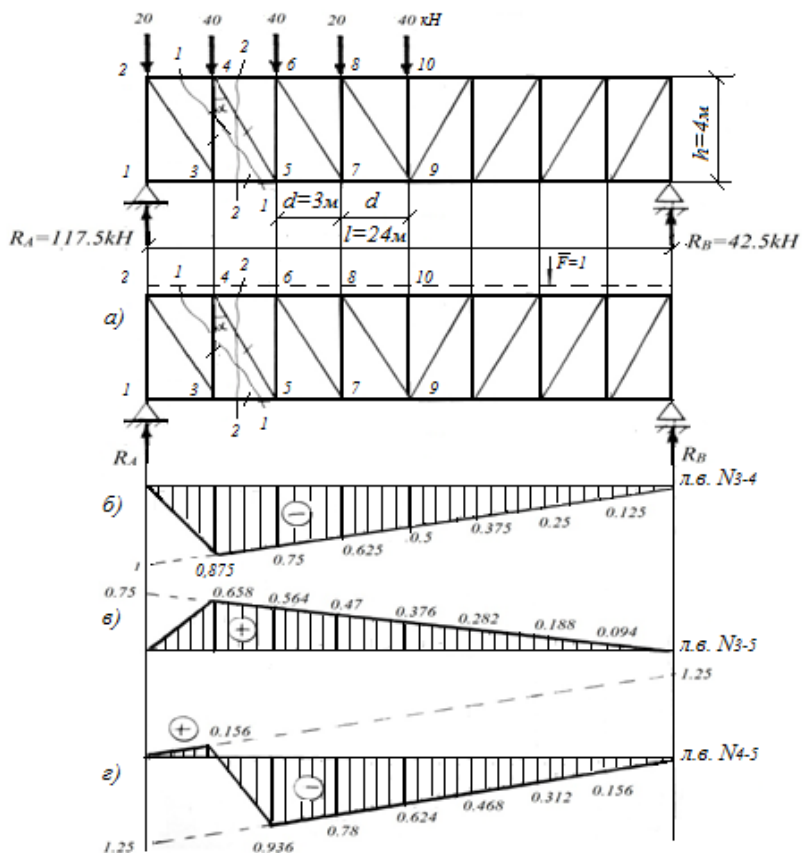


Рис. 4.20. Расчетная схема однопролетной простой фермы

### Решение.

Определяем опорные реакции:

$$\Sigma m_A = 0; 40 \cdot 3 + 40 \cdot 6 + 20 \cdot 9 + 40 \cdot 12 - R_B \cdot 24 = 0;$$

$$R_B = (120 + 240 + 180 + 480) / 24 = 42,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0; R_A \cdot 24 - 20 \cdot 24 - 40 \cdot 21 - 40 \cdot 18 - 20 \cdot 15 - 20 \cdot 15 = 0;$$

$$R_A = (480 + 840 + 720 + 300 + 480) / 24 = 117,5 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\Sigma Y = -20 - 40 - 40 - 20 - 40 + 42,5 + 117,5 = 0.$$

Аналитическим способом определяем усилия в стержнях.

Сечение 1-1:

$$\Sigma Y = N_{3-4} - 20 + 117,5 = 0;$$

$$N_{3-4} = 20 - 117,5 = -97,5 \text{ кН (способ проекций).}$$

$$\Sigma m_4 = 0; -20 \cdot 3 + 117,5 \cdot 3 - N_{3-5} \cdot 4 = 0;$$

$$N_{3-5} = (-60 + 352,5) / 4 = 73,125 \text{ кН (способ моментной точки).}$$

Сечение 2-2:

$$\Sigma Y = 0; -20 - 40 + 117,5 N_{4-5} \cos \alpha = 0,$$

где  $\alpha = \arctg(3/4) = 36,87^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0,8$ ;

$$N_{4-5} = (-60 + 117,5) / 0,8 = -71,875 \text{ кН.}$$

Строим линии влияния усилий в выделенных стержнях.

Линия влияния  $N_{3-4}$ , сечение 1-1 (способ проекций).

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 4. Рассматриваем левую отсеченную часть фермы:

$$\Sigma Y = 0; R_A + N_{3-4} = 0; N_{3-4} = -R_A, \text{ л. в. } N_{3-4} = \text{л. в. } R_A \cdot (-1).$$

Строим правую прямую линии влияния  $N_{3-4}$ .

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 1,  $N_{3-4} = 0$ . В пределах панели 2-4 проводим передаточную прямую (рис. 4.20, б).

Линия влияния  $N_{3-5}$ , сечение 1-1 (способ моментной точки).

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 4. Рассматриваем левую отсеченную часть фермы:

$$\Sigma m_4 = 0; R_A \cdot 3 - N_{3-5} \cdot 4 = 0; N_{3-5} = 0,75 \cdot 0,75 R_A.$$

Строим правую прямую линии влияния  $N_{3-5}$ .

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 1,  $N_{3-5} = 0$ . В пределах панели 2-4 проводим передаточную прямую (рис. 4.20, в).

Линия влияния  $N_{4-5}$ , сечение 2-2 (способ проекций).

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 6. Рассматриваем левую отсеченную часть фермы:

$$\Sigma Y = 0; R_A - N_{4-5} \cos \alpha = 0; N_{4-5} = R_A / \cos \alpha = 1,25R_A, \\ \text{л. в. } N_{4-5} = \text{л. в. } R_A \cdot 1,25.$$

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 4. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы:

$$\Sigma Y = 0; N_{4-5} \cos \alpha + R_B = 0; N_{4-5} = -R_B / \cos \alpha = \\ = -1,25R_A, \text{ л. в. } N_{4-5} = \text{л. в. } R_B \cdot (-1,25).$$

В пределах панели 4-6 проводим передаточную прямую (рис. 4.20, з).

По линиям влияния находим усилия в стержнях от заданной внешней нагрузки. Для этого из подобия треугольников определяем ординаты линии влияния под внешней нагрузкой для соответствующих усилий в стержнях фермы. Затем ординаты каждой линии влияния перемножаем с соответствующей внешней нагрузкой, а результат складываем с учетом знаков.

$$N_{3-4} = -40 \cdot 0,875 - 40 \cdot 0,75 - 20 \cdot 0,625 - 40 \cdot 0,5 = -97,5 \text{ кН};$$

$$N_{3-4} = 40 \cdot 0,658 + 40 \cdot 0,564 + 20 \cdot 0,97 + 40 \cdot 0,376 = 73,13 \text{ кН};$$

$$N_{4-5} = 40 \cdot 0,156 - 40 \cdot 0,936 - 20 \cdot 0,78 - 40 \cdot 0,624 = -71,89 \text{ кН}.$$

Усилия, вычисленные аналитическим способом и по линиям влияния, совпадают.

**Задача 4.2.** Определить усилия в отмеченных стержнях консольной фермы, построить линии влияния  $N_{2-3}$ ,  $N_{2-4}$ ,  $N_{5-6}$  и по ним найти усилия от заданной внешней нагрузки (рис. 4.21).

**Решение.**

Вырезаем узел 2 (сечение 1-1):

$$\Sigma Y = 0; -F - N_{2-3} = 0; N_{2-3} = -F = -40 \text{ кН (способ вырезания узлов)}.$$

Сечение 2-2. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma m_3 = 0; -N_{2-4} \cdot 1 + 40 \cdot 2,5 = 0;$$

$$N_{2-4} = 100 \text{ кН (способ моментной точки)}.$$

Сечение 3-3. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma m_5 = 0; -N_{6-4} \cdot 2 + 40 \cdot 2,5 + 40 \cdot 5 = 0; -N_{6-4} = 150 \text{ кН}$$

(способ моментной точки).

$$\Sigma m_1 = 0; N_{5-6} h_1 - 40 \cdot 2,5 = 0, \text{ где } h_1 = 7,5 \sin \alpha = 7,5 \cdot 0,62 = 4,65 \text{ м,}$$

$$\alpha = \arctg 2 / 2,5 = 38,66^\circ, \sin \alpha = 0,62; N_{5-6} = 100 / 4,65 = 21,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_6 = 0; N_{5-7} h_2 + 40 \cdot 5 + 40 \cdot 7,5 = 0, \text{ где } h_2 = 3 \cos \beta = 3 \cdot 0,93 =$$

$$= 2,785 \text{ м, } \beta = \arctg 1 / 2,5 = 21,8^\circ, \cos \beta = 0,93, N_{5-7} = -(200 + 300) /$$

$$/ 2,785 = 179,53 \text{ кН.}$$

Строим линии влияния усилий в выделенных стержнях.

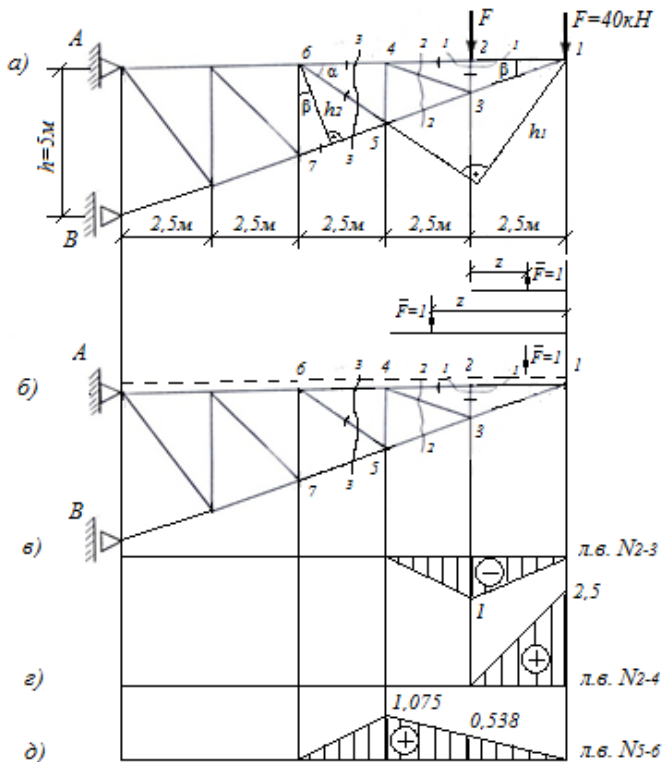


Рис. 4.21. Расчетная схема консольной фермы

Линия влияния  $N_{2,3}$ , сечение 1-1 (способ вырезания узлов). Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узле 2. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы (см. рис. 4.21):

$$\Sigma Y = 0; -\bar{F} - N_{2,3} = 0; N_{2,3} = -\bar{F} = -1.$$

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится в узлах 1 и 4. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы:  $N_{2,3} = 0$ . В пределах панелей 2-4 и 2-1 проводим передаточные прямые (см. рис. 4.21, в).

Линия влияния  $N_{2,4}$ , сечение 2-2 (способ моментной точки). Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 2. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы (см. рис. 4.21, б):

$$\Sigma m_3 = 0; N_{2,4} \cdot 1 - \bar{F} z = 0.$$

При  $z = 0$   $N_{2,4} = 0$ ; при  $z = 2,5$  м  $N_{2,4} = 2,5$ .

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится левее узла 4. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы:  $N_{2,4} = 0$ . В пределах панели 1-2 проводим передаточную прямую (см. рис. 4.21, з).

Линия влияния  $N_{5,6}$ , сечение 3-3 (способ моментной точки). Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 4. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы (см. рис. 4.21, б):

$$\Sigma m_1 = 0; N_{5,6} h_1 - \bar{F} \cdot 2,5 = 0.$$

При  $z = 0$   $N_{5,6} = 0$ , при  $z = 5$  м  $N_{5,6} = 5 / 4,65 = 1,075$ .

Единичный груз  $\bar{F} = 1$  находится правее узла 6. Рассматриваем правую отсеченную часть фермы:  $N_{5,6} = 0$ . В пределах панели 6-4 строим передаточную прямую (см. рис. 4.21, д).

По линиям влияния находим усилия в отмеченных стержнях (см. рис. 4.21, б):

$$N_{2,3} = 40 \cdot (-1) = -40 \text{ кН};$$

$$N_{2,4} = 40 \cdot 2,5 = 100 \text{ кН};$$

$$N_{5,6} = 40 \cdot 0,538 = 21,5 \text{ кН}.$$

Усилия, вычисленные аналитическим способом и по линиям влияния, совпадают.

#### 4.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.3.** Для балочной фермы (рис. 4.22) определить усилия в выделенных стержнях от заданной внешней нагрузки по линиям влияния, если  $h_1 = 4$  м,  $h_2 = 6$  м,  $d = 5$  м,  $l = 20$  м. Грузовым является нижний пояс фермы.

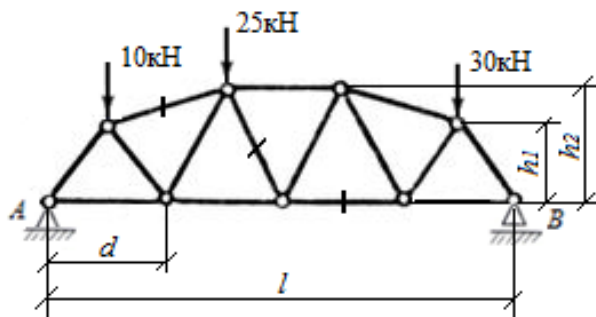


Рис. 4.22. Расчетная схема балочной фермы

**Задача 4.4.** Для балочно-консольной фермы (рис. 4.23) построить линии влияния усилий в выделенных стержнях.

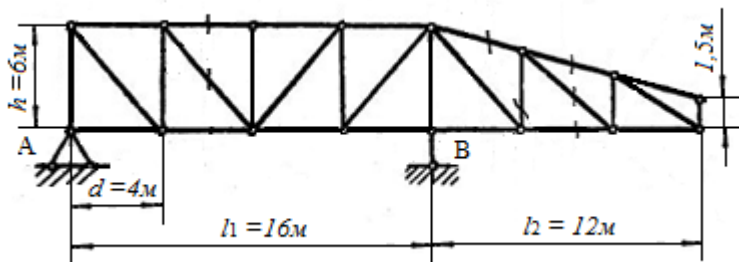


Рис. 4.23. Расчетная схема балочно-консольной фермы

#### 4.6. Контрольные вопросы

1. Основные элементы простых ферм.
2. Классификация ферм по типу решетки, типу опирания и назначению.
3. Необходимое условие геометрической неизменяемости фермы.
4. Особенности загрузки и характер работы стержней фермы.
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях стержней фермы?
6. Классификация аналитических способов определения усилий в стержнях ферм.
7. Определение нулевых стержней в элементах решетки фермы.
8. Построение линий влияния усилий в стержнях фермы.
9. Какие способы используются при построении линий влияния усилий в стержнях фермы?
10. Определение усилий в стержнях фермы по линиям влияния от постоянной нагрузки.
11. Определение усилий в стержнях фермы по линиям влияния от системы подвижных связанных грузов.

## Глава 5. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ И ПРОСТЫЕ РАМЫ

### 5.1. Определение многопролетных статически определимых балок.

#### Типы балок. Условия геометрической неизменяемости, кинематический анализ многопролетных балок и простых рам

Многопролетные статически определимые балки состоят из однопролетных (с консолями и без консолей) балок, соединенных между собой шарнирами.

В строительной практике этот вид балок применяется для перекрытия нескольких смежных пролетов. При равной нагрузке в многопролетных балках усилия меньше, чем в ряде однопролетных балок, следовательно, они имеют меньший расход материала и вес. По сравнению с неразрезными многопролетными балками они менее чувствительны к температурным воздействиям и неравномерным осадкам опор.

В зависимости от расположения шарниров возможны различные схемы многопролетных статически определимых балок. Однопролетные балки в данных схемах могут быть сплошными или сквозными (фермы) или частью сплошными, а частью сквозными. Отдельные однопролетные балки соединяются в многопролетную балку по следующим правилам:

1. В каждом пролете может быть установлено не более двух шарниров.

2. Пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров (рис. 5.1, *a*).

3. Пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим, начиная со второго пролета. Это справедливо для балок без заделанных концов (рис. 5.1, *b*).

4. Для балок с одним заделанным концом пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим (рис. 5.2, *a*).

5. Для балок с двумя заделанными концами, один из которых подвижная заделка, пролеты с одним и двумя шарнирами чередуются (рис. 5.3, *a*).

На практике наиболее часто используются балки двух видов: или только с шарнирными опорами (рис. 5.1), или с одной защемленной и остальными шарнирными опорами (рис. 5.2).

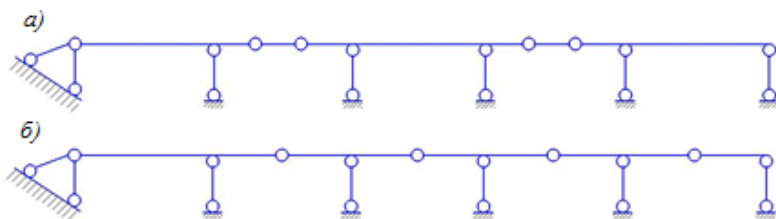


Рис. 5.1. Расчетные схемы многопролетных шарнирных балок

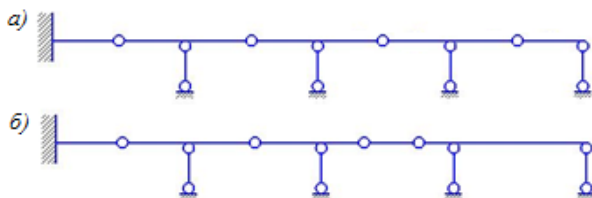


Рис. 5.2. Расчетные схемы многопролетной шарнирной балки с одним заделанным концом

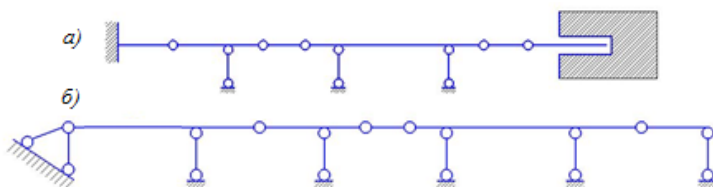


Рис. 5.3. Расчетные схемы многопролетной шарнирной балки, в которой пролеты с одним и двумя шарнирами чередуются

При неудачной расстановке шарниров (рис. 5.4) часть балки  $AB$  получилась статически неопределимой, часть  $BC$  – геометрически изменяемой (пунктирная линия).

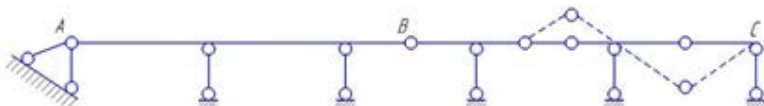


Рис. 5.4. Неудачная расстановка шарниров в многопролетной шарнирной балке

Число промежуточных шарниров  $\Pi$ , при котором балка может быть статически определимой и геометрически неизменяемой, определяют по формуле

$$\Pi = C_0 - 3, \quad (5.1)$$

где  $\Pi$  – число промежуточных шарниров;

$C_0$  – число опорных связей.

Для решения вопроса о геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки, а также для более наглядного представления о работе ее элементов изображают схему взаимодействия отдельных элементов балки, так называемую *поэтажную схему*. Поэтажная схема нужна для упрощения расчета балки, так как этажи рассчитываются отдельно, что позволяет избежать составления и решения сложных систем уравнений. В поэтажной схеме каждый элемент должен быть геометрически неизменяемым и статически определимым. При этом мысленно удаляя промежуточные шарниры, расчленяют балку на элементарные балки и выделяют среди них так называемые основные, подвесные и вспомогательные балки.

Для многопролетных шарнирных балок (см. рис. 5.1) поэтажные схемы изображены на рис. 5.5.

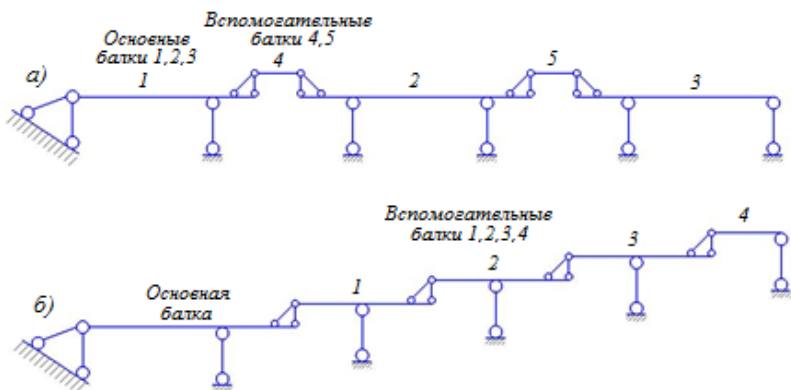


Рис. 5.5. Поэтажные схемы шарнирных балок с шарнирными опорами

Основные балки в поэтажных схемах должны быть геометрически неизменяемыми и статически определимыми системами. В балках на шарнирных опорах с двумя шарнирами в пролетах поэтажные схемы

содержат несколько основных балок, которые, как правило, располагаются на одном уровне. На основные балки надстраиваются вспомогательные балки (рис. 5.5, а). В аналогичных шарнирных балках с одним шарниром в пролетах поэтажная схема содержит, как правило, одну основную балку, на которую последовательно надстраиваются вспомогательные балки (рис. 5.5, б). Поэтажные схемы с одной жесткой опорой (см. рис. 5.2) изображены на рис. 5.6.

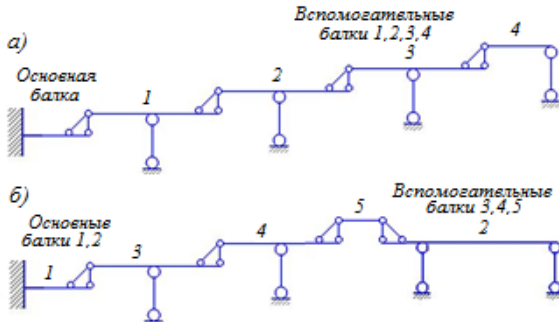


Рис. 5.6. Поэтажные схемы шарнирных балок с одной жесткой опорой

Рассмотрим неразрезную балку с двумя заделками, у которой правая заделка имеет горизонтальную подвижность (рис. 5.7, а). Для превращения такой балки в шарнирную необходимо установить в пролетах  $\Pi = C_0 - 3 = 8 - 3 = 5$  шарниров (рис. 5.7, б).

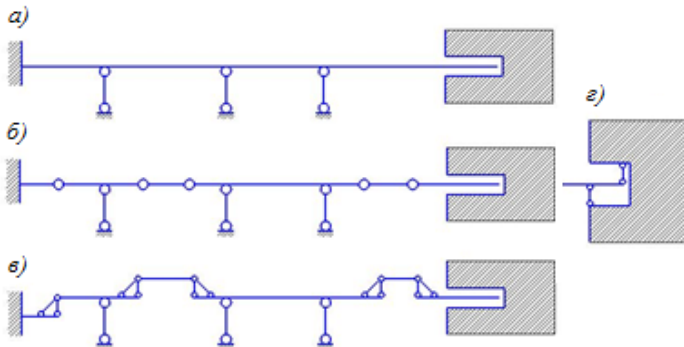


Рис. 5.7. Расчетные схемы шарнирной балки с подвижной заделкой

Количество опорных связей в подвижной заделке равно 2 (рис. 5.7, з).

Рассмотрим неразрезную балку с двумя жесткими заделками (рис. 5.8, а). Для аналогичной шарнирной балки необходимо установить в пролетах  $\text{Ш} = C_0 - 3 = 9 - 3 = 6$  шарниров. Постановкой обычных шарниров нельзя обратить эту балку в статически определимую и геометрически неизменяемую систему. В пролетах такой балки устанавливаем дополнительные элементы (рис. 5.8, з), которые эквивалентны двум одиночным шарнирам и допускают взаимное горизонтальное перемещение соединяемых частей. Поэтажная схема такой балки изображена на рис. 5.8, в.

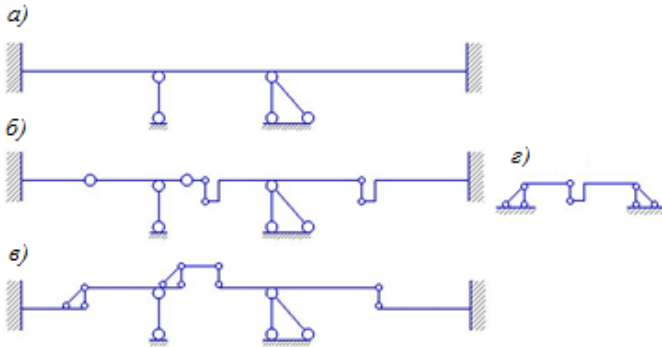


Рис. 5.8. Расчетные схемы шарнирной балки с двумя неподвижными заделками

Определим степень статической неопределимости для рамы (рис. 5.9):  $n = 3Д - C - 2\text{Ш} = 3 \cdot 2 - 4 - 2 \cdot 1 = 0$ .

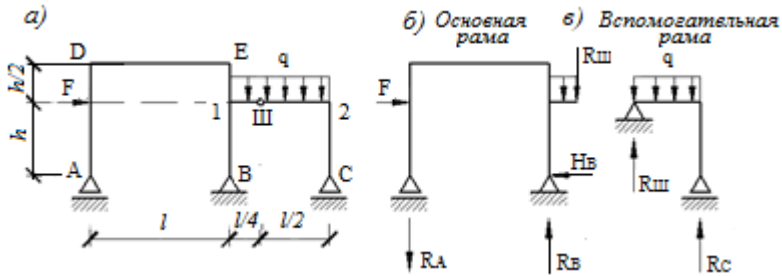


Рис. 5.9. Расчетные схемы статически определимой рамы

Рама является статически определимой. С другой стороны, данная система является геометрически неизменяемой, так как под воздействием внешней нагрузки, приложенной к раме, не меняет своего положения на плоскости. Для определения внутренних силовых факторов в сечениях элементов рамы расчленим ее на основную (рис. 5.9, б) и вспомогательную (рис. 5.9, в) системы.

## **5.2. Аналитический расчет на неподвижную нагрузку при непосредственном ее приложении. Построение эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил**

Аналитический расчет шарнирной балки на неподвижную нагрузку начинаем с построения поэтажной схемы.

Рассмотрим конкретный пример. Для шарнирной балки (рис. 5.10, а) аналитическим методом построить эпюры  $M$  и  $Q$ . Поэтажная схема представлена на рис. 5.10, б. Определим опорные реакции. Расчет начнем с последней вспомогательной балки АШ, которая опирается на основную балку ШВС. Расчетная схема вспомогательной балки изображена на рис. 5.10, в.

Элемент АШ:

$$\Sigma M_{\text{Ш}} = R_A \cdot 6 - F \cdot 3 = 0, R_A = F / 2 = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = -R_{\text{Ш}} \cdot 6 + F \cdot 3 = 0, R_{\text{Ш}} = F / 2 = 20 \text{ кН}.$$

Определим реакции в основной балке, расчетная схема которой представлена на рис. 5.10, г. При этом сила давления в шарнире основной балки  $V_{\text{ш}}$ , равная опорной реакции  $R_{\text{ш}}$ , будет иметь противоположное направление данной реакции.

Элемент ШВС:

$$\Sigma M_B = -V_{\text{ш}} \cdot 2 - R_C \cdot 8 + q \cdot 8 \cdot 4 = 0, R_C = (320 - 40) / 8 = 35 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C = -V_{\text{ш}} \cdot 10 + R_B \cdot 8 - q \cdot 8 \cdot 4 = 0, R_B = (200 + 320) / 8 = 65 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0, 65 + 35 - 20 - 80 = 0.$$

Реакции определены верно.

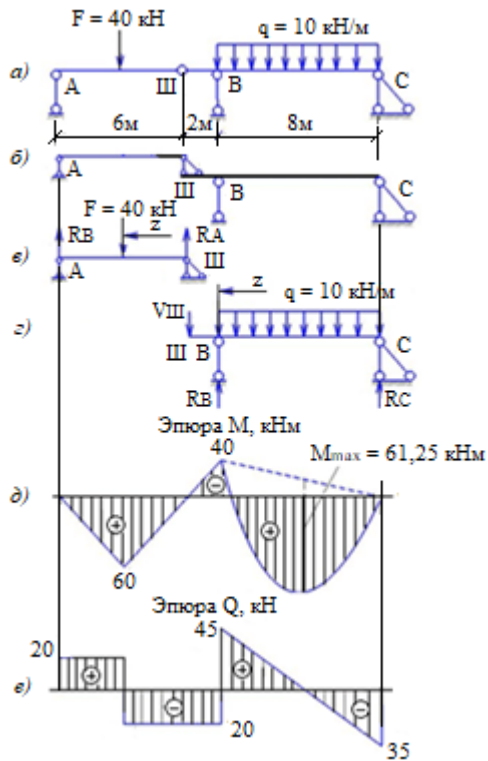


Рис. 5.10. Расчетная схема шарнирной балки

Определим ординаты эпюр  $M$  и  $Q$ .

Элемент АIII:

$$M = R_A(z + 3) - Fz, \quad 0 \leq z \leq 3 \text{ м};$$

$$z = 0, \quad M = 3R_A = 3 \cdot 20 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 3 \text{ м}, \quad M = 6R_A - 3F = 6 \cdot 20 - 3 \cdot 40 = 0;$$

$$z = 0, \quad Q = R_A = 20 \text{ кН}; \quad z = 3 \text{ м}, \quad Q = R_A - F = 20 - 40 = -20 \text{ кН}.$$

Элемент IIIBC:

$$M_B = -V_{III} \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M = -V_{III}(2 + z) + R_B z - qz^2 / 2, 0 \leq z \leq 8 \text{ м};$$

$$z = 0, M = -V_{III} \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}; z = 8 \text{ м},$$

$$M = -V_{III} \cdot 10 + R_B \cdot 8 - q \cdot 8^2 / 2 = -20 \cdot 10 + 65 \cdot 8 - 10 \cdot 8^2 / 2 = 0;$$

$$Q = -V_{III} + R_B - qz, 0 \leq z \leq 8 \text{ м}; z = 0, Q = -20 + 65 = 45;$$

$$z = 8 \text{ м}, Q = -20 + 65 - 10 \cdot 8 = -35 \text{ кН}.$$

Определим ординату экстремального значения момента:

$$Q = -V_{III} + R_B - qz = 0.$$

Отсюда

$$z = (65 - 20) / 10 = 4,5 \text{ м}.$$

Подставим полученное значение  $z$  в общее уравнение моментов:

$$M_{\max} = -V_{III}(2 + z) + R_B z - qz^2 / 2 = -20 \cdot 6,5 + 65 \cdot 4,5 - 10 \cdot 4,5^2 / 2 = 61,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры моментов и поперечных сил построены на рис. 5.10, *д*, *е*.

Рассмотрим расчет рамы, изображенной на рис. 5.9, *а*. При этом принимаем, что  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $l = 4 \text{ м}$ ,  $h = 2 \text{ м}$ . Определим опорные реакции вспомогательной рамы.

$$\Sigma M_{III} = -R_C \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0, R_C = 2 \cdot 2 \cdot 1 / 2 = 2 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C = R_{III} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0, R_{III} = 2 \cdot 2 \cdot 1 / 2 = 2 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0; R_C + R_{III} - q \cdot 2 = 2 + 2 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Реакции определены верно.

Определим опорные реакции основной рамы.

$$\Sigma M_A = F \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot 4,5 - R_B \cdot 4 + R_{III} \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = (10 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4,5 + 2 \cdot 5) / 4 = 9,75 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = F \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - R_A \cdot 4 + R_{III} \cdot 1 = 0,$$

$$R_A = (10 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1) / 4 = 5,75 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; F - H_B = 0, H_B = 10 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0; -R_A - R_{III} + R_B - q \cdot 1 = 0, -5,75 - 2 + 9,75 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Реакции определены верно.

Строим эпюры изгибающих моментов для основной и вспомогательной рам. Построение эпюр осуществляем на растянутых волокнах. Контуры рам обходим по часовой стрелке. Окончательная эпюра  $M$  построена на рис. 5.11,  $a$ .

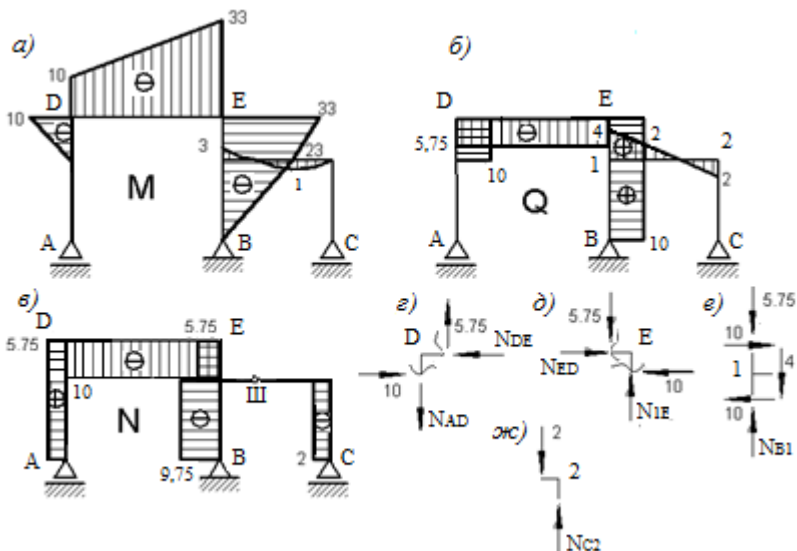


Рис. 5.11. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для простой рамы

По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил. При этом используем зависимость

$$Q = (M^II - M^I) / l, \quad (5.2)$$

где  $M^II$ ,  $M^I$  – ординаты эпюры моментов на правом и левом концах участка длиной  $l$  с учетом знаков соответственно.

Если на участке длиной  $l$  действует равномерно распределенная нагрузка, то:

$$Q^I = (q l) / 2 + (M^II - M^I) / l, \quad Q^{II} = -(q l) / 2 + (M^II - M^I) / l. \quad (5.3)$$

$$Q_{FD} = (-10 - 0) / 1 = -10 \text{ кН} = \text{const},$$

$$Q_{DE} = (-33 - (-10)) / 4 = -5,75 \text{ кН} = \text{const}.$$

$$Q_{1E} = (-23 - (-33)) / 1 = 10 \text{ кН} = \text{const}, Q_{B1} = (0 - (-20)) / 2 = 10 \text{ кН} = \text{const},$$

$$Q_{III} = (2 \cdot 2) / 2 + (0 - 0) / 2 = 2 \text{ кН}, Q_2 = -(2 \cdot 2) / 2 + (0 - 0) / 2 = -2 \text{ кН},$$

$$Q_1 = (2 \cdot 1) / 2 + (0 - (-3)) / 1 = 4 \text{ кН},$$

$$-- Q_{III} = -(2 \cdot 1) / 2 + (0 - (-3)) / 1 = 2 \text{ кН}.$$

Окончательная эпюра  $Q$  построена на рис. 5.11, б. По эпюре  $Q$ , вырезая жесткие узлы и рассматривая их равновесие, определяем про-

долги с ЭМС в элементах цепи

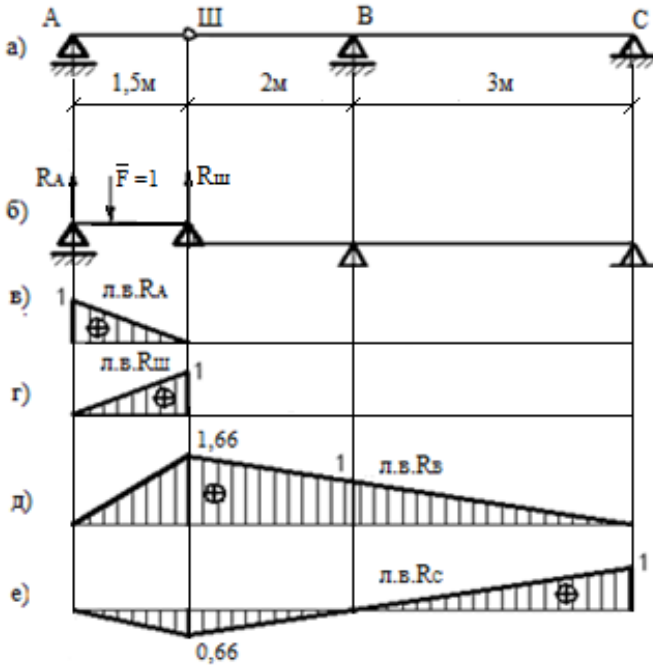


Рис. 5.12. Расчетная схема шарнирной балки.  
Построение линий влияния для опорных реакций

Если при переходе на смежную балку груз  $\bar{F} = 1$  опускается на ступеньку ниже, то линия влияния будет находиться в пределах заданной балки.

Если груз  $\bar{F} = 1$  поднимается на ступеньку выше, то линию влияния для заданной балки соединяем с ординатой ее консоли, а далее с нулем стационарной опоры смежной балки.

Линии влияния  $R_A$ ,  $R_{III}$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  построены на рис. 5.13, в, г, д, е.

Линии влияния  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  построены на рис. 5.13, а, б, в, г, д, е.

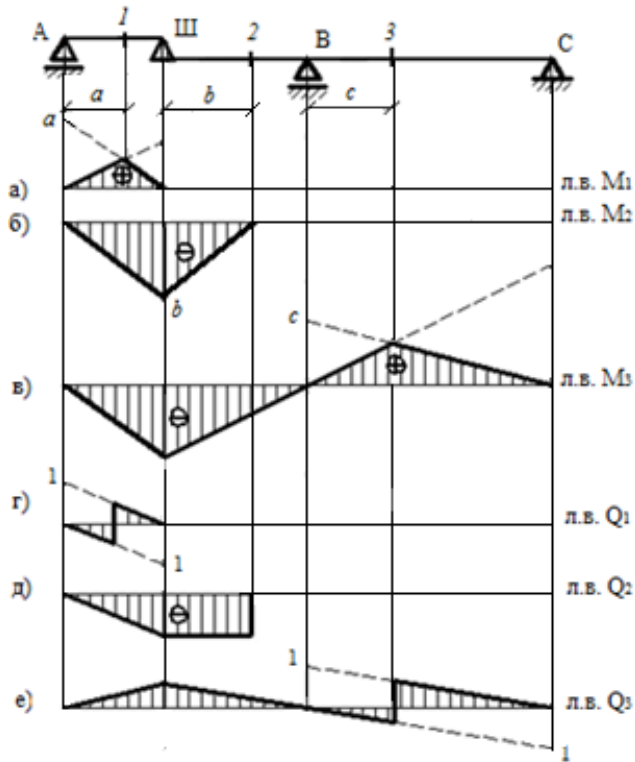


Рис. 5.13. Расчетная схема шарнирной балки.  
Построение линий влияния для внутренних силовых факторов

Часто нагрузка передается на конструкцию не непосредственно, а через систему дополнительных статически определимых балок (рис. 5.14, а). В этом случае имеет место узловая передача нагрузки.

Построим линии влияния опорных реакций для главной балки 1 при перемещении груза  $\bar{F} = 1$  по продольным балкам 2, когда усилие передается на нее через поперечные балки 3.

$$\sum M_B = 0; R_A l - \bar{F}(l - z) = 0, R_A = \bar{F}(l - z) / l.$$

При  $z = 0$   $R_A = 1$ , при  $z = l$   $R_A = 0$ .

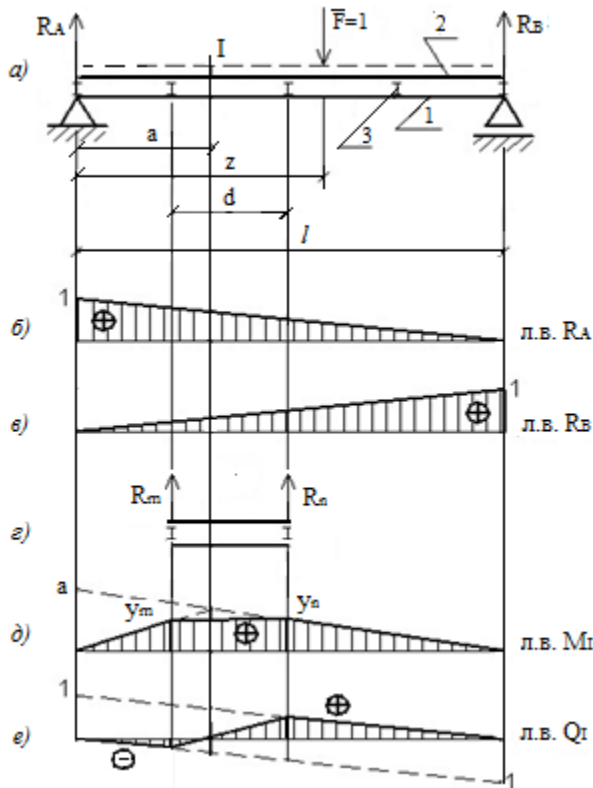


Рис. 5.14. Расчетная схема балки при узловой передаче нагрузки

Линия влияния  $R_A$  построена на рис. 5.14, б.

$$\Sigma M_A = 0; -R_B l + \bar{F} z = 0, R_B = \bar{F} z / l.$$

При  $z = 0$   $R_B = 0$ , при  $z = l$   $R_B = 1$ .

Линия влияния  $R_B$  построена на рис. 5.14, в.

Очевидно, линии влияния опорных реакций при узловой передаче нагрузки совпадают с линиями влияния реакций при непосредственном приложении нагрузки к основной балке.

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_I$  в сечении I рассмотрим два положения единичной нагрузки. Предположим,

что  $\bar{F} = 1$  находится правее сечения  $n$  (рис. 5.14,  $z$ ). Из равновесия левой отсеченной части имеем, что  $M_I = R_A a$ . Затем груз  $\bar{F} = 1$  размещаем слева от сечения  $m$ , рассматривая правую отсеченную часть, получим  $M_I = R_B (l - a)$ . Таким образом, левая (до сечения  $m$ ) и правая (после сечения  $n$ ) ветви линии влияния  $M_I$  будут такими же, как при непосредственном приложении нагрузки к основной балке. Когда же груз находится в пределах панели  $m$ - $n$ , то левая реакция основной балки определяется следующим образом:

$$R_m = (d - z) / d,$$

а правая –

$$R_n = z / d.$$

Значение изгибающего момента в сечении I определим как сумму:

$$M_I = \Sigma F_i y_i = R_m y_m + R_n y_n = (d - z) y_m / d + z y_n / d.$$

Из последнего равенства очевидно, что линия влияния  $M_I$  на участке  $m$ - $n$  имеет линейную зависимость. Поэтому крайние ординаты под сечениями  $m$  и  $n$  ( $y_m$ ,  $y_n$ ) соединяем передаточной прямой (рис. 5.14,  $\delta$ ). Линия влияния  $Q_I$  строится аналогичным образом (рис. 5.14,  $e$ ).

## 5.4. Примеры расчета

**Задача 5.1.** Для многопролетной статически определимой балки (рис. 5.15,  $a$ ) построить эпюры  $M$  и  $Q$ .

**Решение.**

Строим поэтажную схему (рис. 5.15,  $\delta$ ). Расчет начинаем с верхней вспомогательной балки Ш<sub>2</sub>Ш<sub>3</sub>.

Элемент Ш<sub>2</sub>Ш<sub>3</sub>:

$$\Sigma M_{\text{Ш3}} = 0; R_{\text{Ш2}} \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, R_{\text{Ш2}} = 3 \cdot 3 \cdot 1,5 / 6 = 2,25 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_{\text{Ш2}} = 0; -R_{\text{Ш2}} \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 4,5 = 0, R_{\text{Ш2}} = 3 \cdot 3 \cdot 4,5 / 6 = 6,75 \text{ кН}.$$

Определим ординаты  $M$  и  $Q$  для элемента Ш<sub>2</sub>Ш<sub>3</sub>:

$$M_{\text{Ш2}} = M_{\text{Ш3}} = 0.$$

$$\text{При } z = 3 \text{ м } M = R_{\text{Ш2}} \cdot 3 = 2,5 \cdot 3 = 6,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$Q_{\text{Ш2}} = R_{\text{Ш2}} = 2,25 \text{ кН}, Q_{\text{Ш3}} = -R_{\text{Ш2}} = -6,75 \text{ кН}.$$

На правом участке  $\text{III}_2\text{III}_3$

$$Q = R_{\text{III}_2} - 3z = 0, \quad z = 2,25 / 3 = 0,75 \text{ м.}$$

При  $z = 0,75 \text{ м}$   $M^{\text{max}} = 2,25 \cdot 3,75 - 3 \cdot 0,75^2 / 2 = 7,59 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

На этом участке эпюра моментов – парабола с выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  – линейная зависимость.

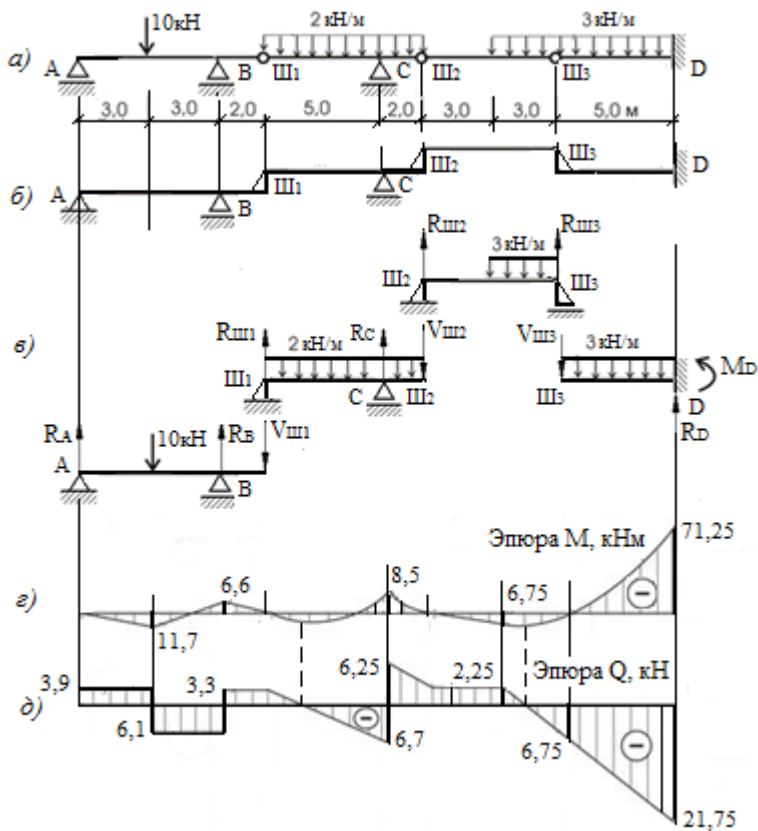


Рис. 5.15. Многопролетная статически определимая балка.  
Построение эпюр  $M$  и  $Q$

Элемент  $\text{Ш}_1\text{СШ}_2$ :

$$R_{\text{Ш}_2} = V_{\text{Ш}_2} = 2,25 \text{ кН}; \Sigma M_C = 0;$$

$$R_{\text{Ш}_1} \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 + 2,25 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$R_{\text{Ш}_1} = (2 \cdot 5 \cdot 2,5 - 2,25 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1) / 5 = 3,3 \text{ кН}; \Sigma M_{\text{Ш}_1} = 0;$$

$$-R_C \cdot 5 + 2 \cdot 7 \cdot 3,5 + 2,25 \cdot 7 = 0, R_C = (2 \cdot 7 \cdot 3,5 + 2,25 \cdot 7) / 5 = 12,25 \text{ кН}.$$

Определим ординаты  $M$  и  $Q$  для элемента  $\text{Ш}_1\text{СШ}_2$ :

$$M_{\text{Ш}_1} = M_C = 0.$$

При  $z = 5$  м  $M_C = R_{\text{Ш}_1} \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = 3,3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = -8,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  
при  $z = 7$  м  $M_{\text{Ш}_2} = R_{\text{Ш}_1} \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot 3,5 + R_C \cdot 2 = 3,3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot 3,5 + 12,95 \cdot 2 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $Q_{\text{Ш}_1} = R_{\text{Ш}_1} = 3,3 \text{ кН}$ ;

При  $z = 5$  м  $Q_C^{\text{л}} = R_{\text{Ш}_1} - 2z = 3,3 - 2 \cdot 5 = -6,7 \text{ кН}$ ,  $Q_C^{\text{п}} = R_{\text{Ш}_1} - 2z + R_C = 3,3 - 2 + 12,95 = 6,25 \text{ кН}$ ; при  $z = 7$  м  $Q_{\text{Ш}_2} = R_{\text{Ш}_1} - 2z + R_C = 3,3 - 2 \cdot 7 + 12,95 = 2,25 \text{ кН}$ ;  $Q = R_{\text{Ш}_1} - 2z = 0$ ,  $z = 3,3 / 2 = 1,65$  м,  $M^{\text{max}} = 3,3 \cdot 1,65 - 2 \cdot 1,65^2 / 2 = 2,72 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Элемент  $AB\text{Ш}_1$  (основная балка):

$$R_{\text{Ш}_1} = V_{\text{Ш}_1} = 3,3 \text{ кН}; \Sigma M_C = 0; R_A \cdot 6 - 10 \cdot 3 + V_{\text{Ш}_1} \cdot 2 = 0,$$

$$R_A = (10 \cdot 3 - 3,3 \cdot 2) / 6 = 3,9 \text{ кН}; \Sigma M_A = 0; -R_B \cdot 6 + 10 \cdot 3 + 3,3 \cdot 8 = 0,$$

$$R_B = (10 \cdot 3 + 3,3 \cdot 8) / 6 = 9,4 \text{ кН}.$$

Определим ординаты  $M$  и  $Q$  для элемента  $AB\text{Ш}_1$ :

$$M_A = M_{\text{Ш}_1} = 0.$$

При  $z = 3$  м  $M = R_A \cdot 3 = 3,9 \cdot 3 = 11,9 \text{ кНм}$ , при  $z = 6$  м  $M = R_A \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 3,9 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = -6,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $Q_A = R_A = 3,9 \text{ кН}$ ; при  $z = 3$  м  $Q^{\text{л}} = R_A = 3,9 \text{ кН}$ ,  $Q^{\text{п}} = R_A - 10 = 3,9 - 10 = -6,1 \text{ кН}$ ; при  $z = 6$  м  $Q^{\text{л}} = R_A - 10 = 3,9 - 10 = -6,1 \text{ кН}$ ; при  $z = 8$  м  $Q_{\text{Ш}_1} = R_A - 10 + R_B = 3,9 - 10 + 9,4 = 3,3 \text{ кН}$ .

Элемент  $\text{Ш}_3D$  (основная балка):

при  $z = 0$  м  $M_{\text{Ш}_3} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $Q_{\text{Ш}_3} = -V_{\text{Ш}_3} = -6,75 \text{ кН}$ ; при  $z = 5$  м  $M_D = -V_{\text{Ш}_3} \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 = -6,75 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 = -71,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $Q_D = -V_{\text{Ш}_3} - 3 \cdot 5 = -6,75 - 3 \cdot 5 = -21,75 \text{ кН}$ .

Эпюры  $M$  и  $Q$  построены на рис. 5.15, з, д.

**Задача 5.2.** Для трехпролетной статически определимой рамы (рис. 5.16) построить эпюры  $M, Q, N$ .

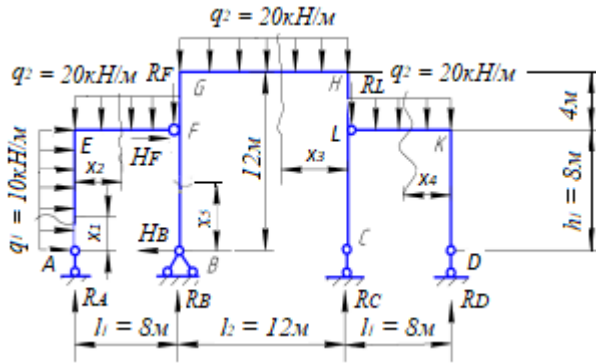


Рис. 5.16. Расчетная схема трехпролетной рамы

**Решение.**

Определим опорные реакции.

Для этого расчленим раму на основную  $BFGHLC$  и две вспомогательные  $AEF$  и  $DKL$ . Расчет начинаем со вспомогательных рам.

Элемент  $AEF$ :

$$\sum X = 0, 10h_1 + H_F = 0, H_F = -10 \cdot 8 = -80 \text{ кН.}$$

Реакция  $H_F$  в сечении  $F$  вспомогательной рамы  $AEF$  направлена справа налево.

$$\sum M_F = 0, R_A l_1 - q_1 h_1 \cdot h_1 / 2 - q_2 l_1 \cdot l_1 / 2 = 0, R_A = (q_1 h_1 \cdot h_1 / 2 + q_2 l_1 \cdot l_1 / 2) / l_1 = (10 \cdot 8 \cdot 8 / 2 + 20 \cdot 8 \cdot 8 / 2) / 8 = 120 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, R_F l_1 + q_1 h_1 \cdot h_1 / 2 + q_2 l_1 \cdot l_1 / 2 - H_F h_1 = 0,$$

$$R_F = (H_F h_1 - q_1 h_1 \cdot h_1 / 2 - q_2 l_1 \cdot l_1 / 2) / l_1 = (80 \cdot 8 - 10 \cdot 8 \cdot 8 / 2 - 20 \cdot 8 \cdot 8 / 2) / 8 = -40 \text{ кН.}$$

Реакция  $R_F$  в сечении  $F$  основной рамы  $BFGHLC$  направлена снизу вверх.

Проверка:

$$\sum Y = 0, R_A + R_F - q_2 l_1 = 120 + 40$$

Элемент *DKL*:

$$\Sigma M_L = 0, -R_D l_1 + q_2 l_1 \cdot l_1 / 2 = 0, R_D = (q_2 l_1 \cdot l_1 / 2) / l_1 = \\ = (20 \cdot 8 \cdot 8 / 2) / 8 = 80 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0, -R_L l_1 - q_2 l_1 \cdot l_1 / 2 = 0, R_L = -(q_2 l_1 \cdot l_1 / 2) / l_1 = \\ = -(20 \cdot 8 \cdot 8 / 2) / 8 = -80 \text{ кН}.$$

Реакция  $R_L$  в сечении  $L$  вспомогательной рамы *DKL* направлена снизу вверх.

Проверка:

$$\Sigma Y = 0, R_D + R_L - q_2 l_1 = 80 + 80 - 20 \cdot 8 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Элемент *BFGHLC* (основная рама):

$$\Sigma X = 0, H_F - H_B = 0, H_B = H_F = 80 \text{ кН}.$$

Реакция  $H_B$  на опоре  $B$  основной рамы *BFGHLC* направлена справа налево.

$$\Sigma M_C = 0, R_B l_2 - R_F l_2 - q_2 l_2 \cdot l_2 / 2 + H_F h_1 = 0, R_B = (R_F l_2 + q_2 l_2 \cdot l_2 / 2 - \\ - H_F h_1) / l_1 = (40 \cdot 12 + 20 \cdot 12 \cdot 12 / 2 - 80 \cdot 8) / 12 = 106,7 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, -R_C l_2 + R_L l_2 + q_2 l_2 \cdot l_2 / 2 + H_F h_1 = 0, R_C = (R_L l_2 + q_2 l_2 \cdot l_2 / 2 + \\ + H_F h_1) / l_2 = (80 \cdot 12 + 20 \cdot 12 \cdot 6 + 80 \cdot 8) / 12 = 253,3 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0, R_B + R_C - R_F - R_L - q_2 l_2 = 106,7 + 253,3 - 40 - 80 - 20 \cdot 12 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Построение эпюры  $M$  (рис. 5.17, *a*).

Для каждого элемента рамы рассчитываем ординаты эпюры  $M$ , строим эпюры и объединяем их в одну общую эпюру моментов для составной рамы. Эпюры  $M$  строим на растянутых волокнах.

Элемент *AEF*.

Участок *AE*:

$$0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м}, M_1 = -q_1 x_1 \cdot x_1 / 2.$$

При  $x_1 = 0$   $M_1 = 0$ ,  $x_1 = 8$  м,  $M_1 = -320 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок *EF*:

$$0 \leq x_2 \leq 8 \text{ м}, M_2 = -q_1 \cdot 8 \cdot 8 / 2 + R_A x_2 - q_2 x_2 \cdot x_2 / 2.$$

При  $x_2 = 0$  м  $M_2 = -320 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , при  $x_2 = 8$  м  $M_2 = -320 + 120 \cdot 8 - 20 \cdot 8 \cdot 8 / 2 = 0$ .

На участках вспомогательной рамы эпюра  $M$  очерчена параболой с выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки.

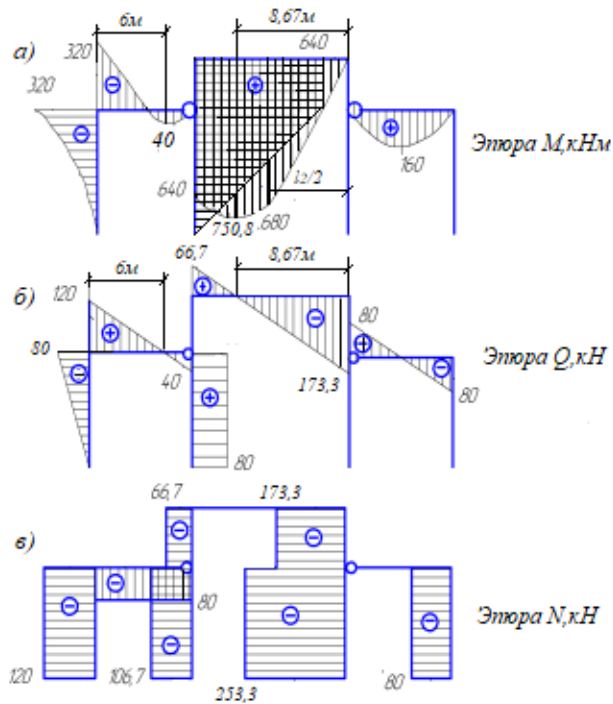


Рис. 5.17. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для трехпролетной рамы

Элемент  $DKL$ .

Участок  $KL$ :

$$0 \leq x_4 \leq 8 \text{ м}, M_4 = R_D x_4 - q_2 x_4 \cdot x_4 / 2.$$

При  $x_4 = 0$   $M_4 = 0$ , при  $x_4 = 4$  м  $M_4 = 80 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 160$  кН · м,  
 при  $x_4 = 8$  м  $M_4 = 80 \cdot 8 - 20 \cdot 8 \cdot 4 = 0$  кН · м.

Элемент  $BFGHLC$  (основная рама).

Участок  $HG$ :

$$0 \leq x_3 \leq 12 \text{ м}, M_3 = R_C x_3 - R_L x_3 - q_2 x_3 \cdot x_3 / 2.$$

При  $x_3 = 0$  м  $M_H = 0$  кН · м, при  $x_3 = 6$  м  $M_3 = 253,3 \cdot 6 - 80 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 680$  кН · м, при  $x_3 = 12$  м  $M_G = 253,3 \cdot 12 - 80 \cdot 12 - 20 \cdot 12 \cdot 6 = 640$  кН · м.

Участок  $BFG$ :

$$0 \leq x_5 \leq 12 \text{ м.}$$

При  $x_5 = 8 \text{ м}$   $M_F = H_B x_5 = 80 \cdot 8 = 640 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , при  $x_5 = 12 \text{ м}$   
 $M_G = H_B x_5 - H_F(x_5 - 8) = 80 \cdot 12 - 80 \cdot (12 - 8) = 640 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Окончательная эпюра моментов построена на рис. 5.16, *а*.

Построение эпюры  $Q$  (рис. 5.17, *б*).

Ординаты эпюр поперечных сил для элементов рамы определяем по эпюрам  $M$ , используя зависимость:

- на элемент рамы действует сосредоточенная нагрузка

$$Q = (M^{\text{п}} - M^{\text{л}}) / l,$$

где  $M^{\text{п}}$ ,  $M^{\text{л}}$  – ординаты эпюры моментов на правом и левом концах рассматриваемого участка с учетом знаков;

$l$  – длина участка;

- на элемент рамы действует равномерно распределенная нагрузка

$$Q_{\text{п}} = + q l / 2 + (M^{\text{п}} - M^{\text{л}}) / l, \quad Q_{\text{л}} = -q l / 2 + (M^{\text{п}} - M^{\text{л}}) / l,$$

где  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки.

Элемент  $AEF$ .

Участок  $AE$ :

$$0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м}, \quad Q_A = 20 \cdot 8 / 2 + (0 - 0) / 8 = 80 \text{ кН},$$

$$Q_E = -10 \cdot 8 / 2 + (-320 - 0) / 8 = -80 \text{ кН}.$$

Участок  $EF$ :

$$0 \leq x_2 \leq 8 \text{ м}, \quad Q_E = 20 \cdot 8 / 2 + (0 - (-320)) / 8 = 120 \text{ кН},$$

$$Q_F = -20 \cdot 8 / 2 + (0 - (-320)) / 8 = -40 \text{ кН}.$$

Участок  $EF$ :

$$Q = R_A - q_2 x_2 = 0, \quad x_2 = 120 / 20 = 6 \text{ м}, \quad M_2^{\text{max}} = -q_1 \cdot 8 \cdot 8 / 2 + R_A x_2 - q_2 x_2 \cdot x_2 / 2 = -10 \cdot 8 \cdot 4 + 120 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Элемент  $DKL$ .

Участок  $KL$ :

$$0 \leq x_4 \leq 8 \text{ м}, \quad Q_L = 20 \cdot 8 / 2 + (-320 - 0) / 8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_K = -20 \cdot 8 / 2 + (0 - 0) / 8 = -80 \text{ кН}.$$

При  $x_4 = 4$  м  $M_4^{\max} = R_D x_4 - q_2 x_4 \cdot x_4 / 2 = 80 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 160$  кН · м.  
Элемент  $BFGHLC$  (основная рама).

Участок  $BFG$ :

$$0 \leq x_3 \leq 12 \text{ м}, Q_B = (640 - 0) / 8 = 80 \text{ кН}, Q_G = (640 - 640) = 0 = \text{const.}$$

Участок  $HG$ : при  $x_3 = 0$  м

$$Q_H = q_2 x_3 - R_C + R_L = -253,3 + 80 = -173,3 \text{ кН}, Q_3 = q_2 x_3 - R_C + R_L = 0,$$

$$x_3 = (253,3 - 80) / 20 = 8,67 \text{ м}, M_3^{\max} = R_C x_3 - R_L x_3 - q_2 x_3 \cdot x_3 / 2 = \\ = 253,3 \cdot 8,67 - 80 \cdot 8,67 - 20 \cdot 8,67 \cdot 8,67 / 2 = 750,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

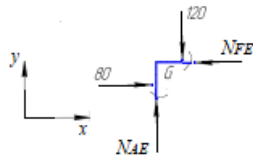
$$Q_G = 20 \cdot 12 - 253,3 + 80 = 66,7 \text{ кН}.$$

Окончательная эпюра поперечных сил построена на рис. 5.16, б.

Построение эпюры  $N$  (рис. 5.17, в).

Ординаты эпюр продольных сил для элементов рамы определяем по эпюрам  $Q$ , вырезая жесткие узлы и рассматривая их равновесие.

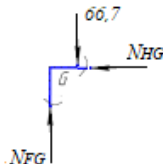
Узел  $E$ .



$$\Sigma X = 0, 80 - N_{FE} = 0; N_{FE} = 80 \text{ кН (сжатие);}$$

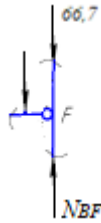
$$\Sigma Y = 0, -120 + N_{AE} = 0; N_{AE} = 120 \text{ кН (сжатие).}$$

Узел  $G$ .



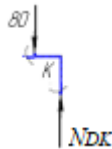
$$\Sigma X = 66,7 - N_{FG} = 0; N_{HG} = 66,7 \text{ кН (сжатие);}$$

$$\Sigma Y = 0, -N_{HG} + 0 = 0; N_{HG} = 0.$$



$$\Sigma Y = 0, N_{BF} - 66,7 - 40 = 0; N_{BF} = 66,7 + 40 = 106,7 \text{ кН (сжатие)}.$$

Узел К.

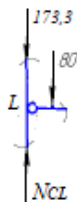


$$\Sigma Y = 0, N_{DK} - 80 = 0; N_{DK} = 80 \text{ кН (сжатие)}.$$

Узел Н.



$$\Sigma Y = 0, N_{LH} - 173,3 = 0; N_{DK} = 173,3 \text{ кН (сжатие)}.$$



$$\Sigma Y = 0, N_{CL} - 173,3 - 80 = 0; N_{CL} = 173,3 + 80 = 253,3 \text{ кН (сжатие)}.$$

Окончательная эпюра продольных сил построена на рис. 5.16, в.

### 5.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.3.** Для шарнирной балки (рис. 5.18) построить линии влияния  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  и по ним определить усилия от заданной внешней нагрузки.

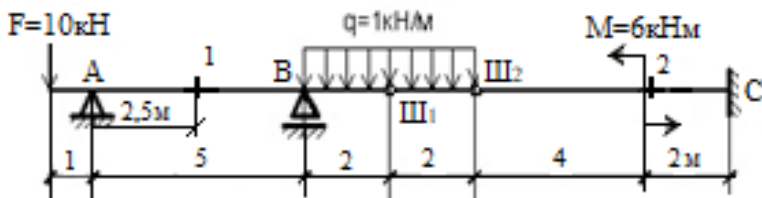


Рис. 5.18. Расчетная схема шарнирной балки

**Задача 5.4.** Для статически определимой рамы (рис. 5.19) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

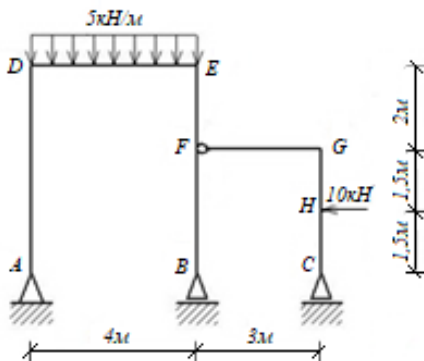


Рис. 5.19. Расчетная схема составной рамы

## 5.6. Контрольные вопросы

1. Чем отличаются многопролетные статически определимые балки от неразрезных?
2. Какие требования предъявляются к количеству и размещению промежуточных шарниров?
3. Какие существуют основные типы шарнирных балок и из каких элементов они состоят?
4. Каковы порядок расчета и последовательность монтажа элементов шарнирных балок?
5. Порядок построения линий влияния для шарнирных балок.
6. Определение усилий от заданной внешней нагрузки для шарнирных балок по линиям влияния.
7. Сущность узловой передачи нагрузки.
8. Построение линий влияния в шарнирных балках при узловой передаче нагрузки.
9. Составные статически определимые рамы.
10. Построение эпюр внутренних силовых факторов для элементов составных рам.

## Глава 6. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ

### 6.1. Образование трехшарнирных арок и рам. Условие геометрической неизменяемости, кинематический анализ трехшарнирных арок и рам

Арочными называются системы криволинейного, или ломаного, очертания, в опорах которых от внешней нагрузки возникают наклонные реакции, направленные внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой наклонной реакции называется распором. Арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными за счет меньших, чем в балках, изгибающих моментов. К простейшим арочным статически определимым и геометрически неизменяемым системам относятся трехшарнирная арка (рис. 6.1, *а*) и трехшарнирная рама (рис. 6.1, *б*).

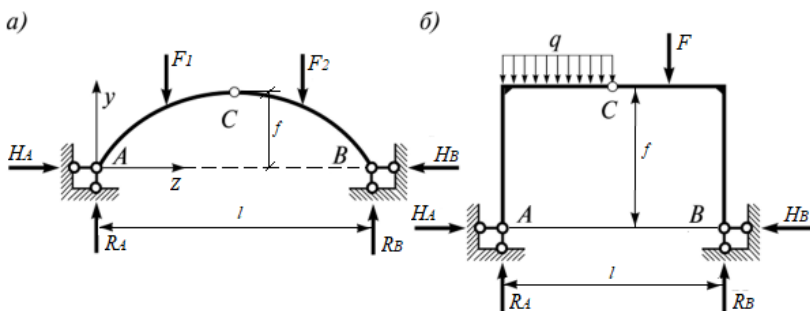


Рис. 6.1. Расчетная схема трехшарнирных арок и рамы

На данных расчетных схемах:

$C$  – ключевой шарнир, соединяющий составные части трехшарнирной арки (рамы);

$l$  – пролет арки (рамы) между двумя неподвижными шарнирными опорами;

$f$  – стрела подъема арки (рамы) – вертикальное расстояние от осевой опорной линии до ключевого шарнира.

Основной геометрической характеристикой арки является отношение стрелы подъема арки  $f$  к длине пролета  $l$  (рис. 6.2, *а*). Эта величина изменяется в пределах  $0,1 \leq f / l \leq 1$ . С уменьшением отношения  $f / l$  возрастает распор  $H$  и, как следствие, горизонтальные составляющие давления арки на фундаменты. Для восприятия распора в арки

часто вводится горизонтальный стержень, называемый затяжкой (рис. 6.2, б).

Затяжка – горизонтальный стержень, предназначенный для полного или частичного восприятия горизонтального распора. Для того чтобы система при наличии затяжки осталась статически определимой, одну из опор арки делают шарнирно-подвижной. В этом случае при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки горизонтальные реакции в опорах будут равны нулю, а затяжка будет воспринимать распор полностью.

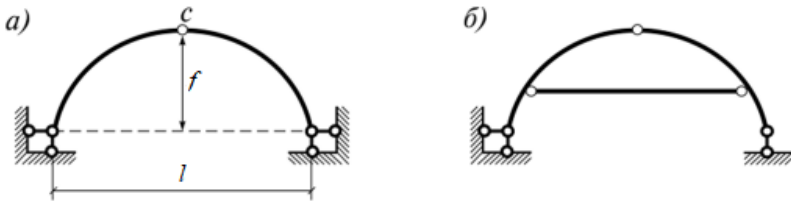


Рис. 6.2. Расчетная схема трехшарнирной арки (а); трехшарнирная арка с повышенной затяжкой (б)

Прежде чем приступить к расчету трехшарнирных систем, необходимо выполнить их кинематический анализ, который включает два этапа.

1-й этап – определение геометрической неизменяемости системы. Согласно формуле (2.3), число степеней свободы трехшарнирной системы, для того чтобы она была геометрически неизменяемой, должно равняться нулю, т. е.

$$n = 3Д - С - 2Ш = 0,$$

где Д – число дисков в системе;

С – число опорных связей;

Ш – число одиночных шарниров.

Для расчетной схемы, приведенной на рис. 6.2, а, Д = 2, С = 4 (две шарнирные неподвижные опоры), Ш = 1.

Таким образом,

$$n = 3 \cdot 2 - 4 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Для расчетной схемы, приведенной на рис. 6.2, б, Д = 3, С = 3, Ш = 3. Следовательно,

$$n = 3 \cdot 3 - 3 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Обе трехшарнирные системы являются геометрически неизменяемыми.

2-й этап – определение степени статической определимости системы. При разделении трехшарнирной арочной системы на  $D$  составных дисков мы можем составить  $3D$  уравнений равновесия (по три для каждого диска). Число неизвестных реакций связей при этом будет равно числу опорных стержней  $C$  плюс  $2Ш$  реакций связей (по две на каждое шарнирное соединение) при разделении трехшарнирной арочной системы в шарнирных соединениях. Для определения неизвестных реакций необходимо, чтобы число уравнений равновесия было равно числу неизвестных:

$$3D = C + 2Ш, 3 \cdot 2 = 4 + 2 \cdot 1 = 6.$$

Так как для геометрически неизменяемой трехшарнирной арки (рис. 6.2, *а*) это условие обеспечивается, то задача по определению опорных реакций разрешима и трехшарнирная арка является статически определимой системой. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что трехшарнирная арка с затяжкой (рис. 6.2, *б*) является статически определимой системой.

## 6.2. Типы трехшарнирных систем. Особенности работы. Определение опорных реакций. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

Как было сказано выше, трехшарнирная система – это система из двух дисков, связанных между собой и основанием тремя шарнирами. Трехшарнирные системы бывают двух видов: арочные (рис. 6.3, *а*) и подвесные (рис. 6.3, *б*).

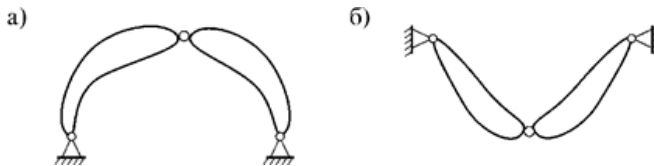


Рис. 6.3. Виды трехшарнирных систем

Расчет этих видов трехшарнирных систем мало отличается друг от друга. Рассмотрим арочные системы, которые бывают трех типов: трехшарнирные рамы (рис. 6.4, *а*), трехшарнирные арочные фермы

(рис. 6.4, б) и трехшарнирные арки (рис. 6.4, в). Дадим определение для каждого типа.

1. Если в трехшарнирной системе два диска являются прямолинейными или ломаными стержнями, то такая конструкция называется трехшарнирной рамой.

2. Если в трехшарнирной системе два диска являются сквозными решетчатыми конструкциями, то такая система называется трехшарнирной арочной фермой.

3. Арки – сооружения, у которых два диска представляют собой криволинейные стержни, оси которых имеют круговое, параболическое, гиперболическое, в виде эллипса очертание.

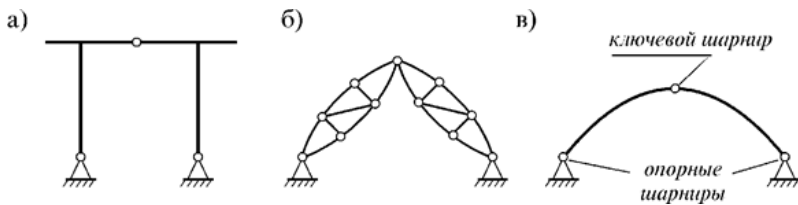


Рис. 6.4. Типы трехшарнирных систем

Особенность работы трехшарнирных систем заключается в том, что в опорных закреплениях возникает распор (боковое давление) даже от вертикальной нагрузки. Опорные реакции таких систем (рис. 6.5, а) определяются способом совместных сечений.

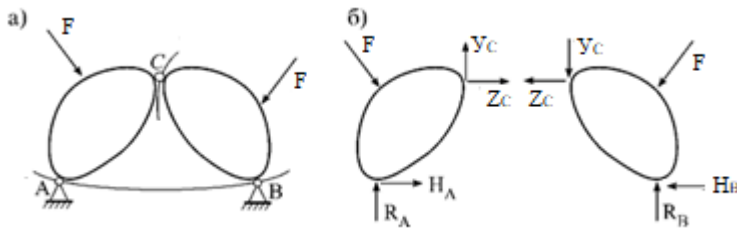


Рис. 6.5. Расчетная схема для определения опорных реакций трехшарнирных систем

В результате расчленения системы по ключевому шарниру и шарнирным опорам появляются два независимых диска с шестью неизвестными (четыре опорные реакции  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$ ,  $H_B$  и две шарнирные реакции  $X_C$ ,  $Y_C$ ) (рис. 6.5, б).

Составив для каждого диска по три уравнения равновесия (всего шесть уравнений), можно определить все реакции. Далее каждый диск рассчитывается самостоятельно.

Способы определения опорных реакций в трехшарнирных арках и рамах принципиального различия не имеют. Трехшарнирные фермы после определения опорных реакций рассчитывают далее, как обычные фермы.

Различные типы трехшарнирных систем нашли широкое применение при строительстве мостов, путепроводов, в сельском строительстве, при перекрытии больших пролетов промышленных цехов, зрелищных сооружений, где они являются экономически целесообразными и надежными строительными конструкциями.

Реакции в опорах трехшарнирной арки (рамы) определяются из уравнений статического равновесия. Принимаем направления реакций в опорах арки, как показано на рис. 6.6, а, при условии, что на арку действует только вертикальная нагрузка.

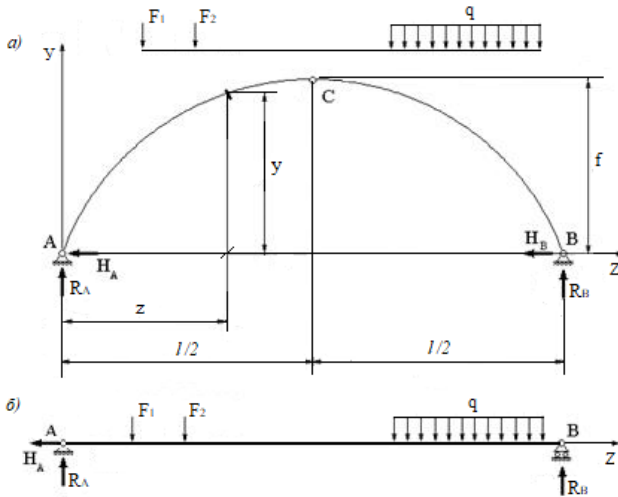


Рис. 6.6. Расчетная схема трехшарнирной арки

Из уравнений статического равновесия имеем:

$$\Sigma M_B = R_A l - \Sigma M_B^{\text{вн}} = 0, \quad (6.1)$$

где  $\Sigma M_B^{\text{вн}}$  – сумма моментов внешних сил относительно опоры  $B$ .

Откуда

$$R_A = \Sigma M_B^{\text{BH}} / l.$$

Считаем реактивные и активные силы, которые создают момент относительно выбранной точки по часовой стрелке, положительными.

$$\Sigma M_A = -R_B l + \Sigma M_A^{\text{BH}} = 0, \quad (6.2)$$

где  $\Sigma M_A^{\text{BH}}$  – сумма моментов внешних сил относительно опоры  $A$ .

Откуда

$$R_B = \Sigma M_A^{\text{BH}} / l.$$

$$\Sigma M_C^{\text{I}} = R_A l / 2 - H_A f - \Sigma M_C^{\text{BHII}} = 0, \quad (6.3)$$

где  $\Sigma M_C^{\text{BHII}}$  – сумма моментов внешних сил, действующих на левую отсеченную часть арки относительно ключевого шарнира  $C$ .

Таким образом,

$$H_A = (R_A l / 2 - M_C^{\text{BHII}}) / f.$$

По аналогии определяем реакцию  $H_B$ :

$$\Sigma M_C^{\text{II}} = -R_B l / 2 + H_B f + \Sigma M_C^{\text{BHII}} = 0, \quad (6.4)$$

где  $\Sigma M_C^{\text{BHII}}$  – сумма моментов внешних сил, действующих на правую отсеченную часть арки относительно ключевого шарнира  $C$ .

Следовательно,

$$H_B = (R_B l / 2 - \Sigma M_C^{\text{BHII}}) / f.$$

После определения опорных реакций выполняем проверки:

$$\Sigma X = 0, R_A + R_B - \Sigma F^{\text{BH}} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0, H_A - H_B = 0.$$

В случае только вертикальной нагрузки, действующей на арку, распорные реакции равны между собой и имеют противоположное направление.

При определении геометрических параметров арки необходимо задать: пролет  $l$ , стрелу подъема  $f$  и функцию  $y(z)$ , описывающую очертание оси арки. Для арки с затяжкой, кроме того, необходимо задать высоту над затяжкой  $f'$ .

Задав значения  $l$  и  $f$ , определяем положение трех точек – опорных закреплений и ключевого шарнира арки. Если дополнительно выбрать, что ось арки будет очерчена по окружности, по параболе, по гиперболе, по кривой в виде эллипса, то положение этих трех точек однозначно определит функцию  $y(z)$ , поскольку через три точки можно провести только одну из вышеперечисленных кривых.

При круговом очертании арки

$$y(z) = f - R(1 - \cos \alpha), \quad (6.5)$$

где  $R = l^2 / 8f + f / 2$ ,  $\alpha = \arcsin (l / 2R - z / R)$ .

При параболическом очертании арки

$$y(z) = 4fz(l - z) / l^2; \quad (6.6)$$

$$\alpha = \arctg (4f(l - 2z) / l^2),$$

где  $\alpha$  – угол наклона касательной к оси арки в заданном сечении.

Для левой половины арки  $\alpha > 0$ , для правой –  $\alpha < 0$ .

При гиперболическом очертании арки

$$y(z) = -b / a \sqrt{a^2 + (l/2 - z)^2} - b + f, \quad (6.7)$$

где  $b = (b / a) (l^2 / 8f) - f / 2$ ;  $\alpha = \arctg [(b / a)^2 (l - 2z) / 2(b + f - y)]$ ;  $(b / a) = 0,8$  – отношение полуосей гиперболы.

При очертании арки в виде эллипса

$$y(z) = -b / a \sqrt{a^2 + (l/2 - z)^2} - b + f, \quad (6.8)$$

где  $b = (f / 2) + (b / a)^2 (l^2 / 8f)$ ;  $\alpha = \arctg [(b / a)^2 (l - 2z) / 2(y + b - f)]$ ;  $(b / a) = 0,8$  – отношение полуосей эллипса.

Для сечения  $(z, y)$  арки (см. рис. 6.6, а) составим общие уравнения внутренних силовых факторов ( $M_z$ ,  $Q_z$ ,  $N_z$ ). Рассмотрим левую часть арки относительно данного сечения.

$$M(z) = R_A z + H_A y - \Sigma M^{BH}(z), \quad (6.9)$$

где  $\Sigma M^{BH}(z)$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении, вызванный внешними силами, действующими слева от рассматриваемого сечения.

Из условия равенства нулю суммы проекций всех действующих сил на горизонтальную ось имеем:

$$\Sigma X = 0, -H_A - H_B + \Sigma F_H^{\text{вн}} = 0, \quad (6.10)$$

где  $\Sigma F_H^{\text{вн}}$  – сумма проекций действующих на арку внешних сил на горизонтальную ось.

Внешняя сила считается положительной, если она направлена слева направо. При вертикальной внешней нагрузке на арку по формуле (6.10) имеем:

$$-H_A = H_B = H. \quad (6.11)$$

Определим изгибающий момент в сечении  $z$  балки (см. рис. 6.6, б), у которой пролет и приложенная внешняя нагрузка соответствуют параметрам арки.

$$M^0 = R_A z - \Sigma M^{\text{вн}}(z). \quad (6.12)$$

Сопоставляя формулы (6.9), (6.11), (6.12), получим:

$$M(z) = M^0 - H y. \quad (6.13)$$

Величину распора  $H$  определяют из равенства нулю изгибающего момента в ключевом шарнире  $C$  по формуле

$$H = M_C^0 / f, \quad (6.14)$$

где  $M_C^0$  – балочный изгибающий момент в сечении  $C$  балки от сил, взятых слева или справа от этого сечения;

$f$  – стрела подъема арки.

Поперечное усилие  $Q(z)$  действует перпендикулярно касательной к оси, а продольное  $N(z)$  – вдоль касательной к оси арки в заданном сечении (рис. 6.7).

Обозначим сумму проекций всех внешних сил и реакций опор, действующих на левую часть арки, на оси координат  $y, z$  через  $\Sigma F_R$  и  $\Sigma F_H$  соответственно.

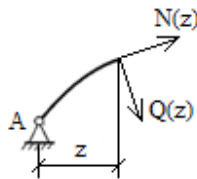


Рис. 6.7. Поперечное и продольное усилия в произвольном сечении арки

Положительными направлениями этих сил будем считать такие, которые будут противоположны положительным направлениям  $Q(z)$  и  $N(z)$  в рассматриваемом сечении для левой части арки (см. рис. 6.7).

Составив уравнения равновесия сил, действующих на левую часть сечения арки (рис. 6.8) в осях, совпадающих с направлением действия  $Q(z)$  и  $N(z)$ , получим:

$$Q(z) = \Sigma F_R \cos \alpha + \Sigma F_H \sin \alpha; \quad (6.15)$$

$$N(z) = -\Sigma F_R \sin \alpha + \Sigma F_H \cos \alpha, \quad (6.16)$$

где  $\alpha$  – угол наклона касательной к оси арки в заданном сечении  $z$ .

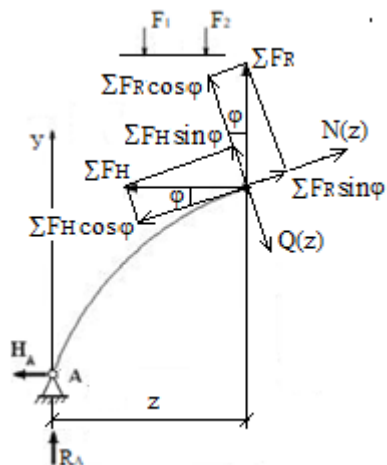


Рис. 6.8. Расчетная схема для определения поперечных и продольных усилий в сечениях арки

Для сечений левой полуарки угол  $\alpha > 0$ ,  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ , а для сечений правой полуарки угол  $\alpha < 0$ ,  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ .

При отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки, при условии, что известны  $H_A = H_B = H$ ,  $M^0$  и  $Q^0$ , внутренние силовые факторы в любом сечении арки определяются по формулам:

$$M(z) = M^0 - Hy; \quad (6.17)$$

$$Q(z) = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \quad (6.18)$$

$$N(z) = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi), \quad (6.19)$$

где  $M^0, Q^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в сечении соответствующей балки с координатой  $z$ , что и заданное сечение арки.

Расчетная схема для определения  $Q(z)$  и  $N(z)$  при вертикальной внешней нагрузке на арку изображена на рис. 6.9.

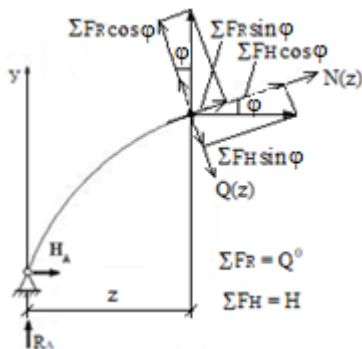


Рис. 6.9. Расчетная схема левой части арки для определения  $M(z), Q(z)$  и  $N(z)$  при действии вертикальной нагрузки

Знаки внутренних усилий в поперечных сечениях арки представлены на рис. 6.10.

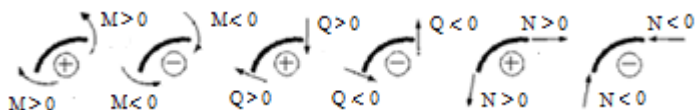


Рис. 6.10. Правило знаков для  $M(z), Q(z)$  и  $N(z)$  для трехшарнирных систем

### 6.3. Построение линий влияния реакций опор и внутренних силовых факторов в трехшарнирных системах

Построим линии влияния опорных реакций для арки (рис. 6.11, *a*). Линия влияния опорных реакций построены на рис. 6.11, *a, б, в, г* при условии, что ключевой шарнир *C* находится посередине пролета арки, т. е.  $l_1 = l_2 = l / 2$ .

При определении вертикальных опорных реакций и распора в арках с затяжкой затяжку мысленно удаляют, заменяя ее действие на осталь-

ную часть конструкции усилиями  $H$  (рис. 6.11). Далее составляют обычные уравнения статики, как для арки без затяжки, из которых определяются опорные реакции.

Если рассматривать распор в затяжке  $H$  как одну из внешних нагрузок (рис. 6.11), то построение эпюр внутренних усилий можно выполнять как для арки без затяжки по формулам (6.9), (6.15) и (6.16).

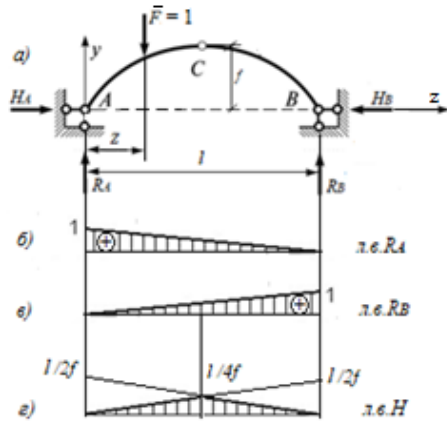


Рис. 6.11. Построение линий влияния опорных реакций для трехшарнирной арки

Построим линии влияния внутренних силовых факторов, используя метод нулевой точки. Под нулевыми точками понимаются такие точки, при нахождении единичного груза  $\bar{F} = 1$  в которых,  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в искомом сечении равны нулю. При построении линий влияния используем формулы (6.17), (6.18), (6.19). Для произвольного сечения  $\kappa$  (рис. 6.12, а) имеем:

$$M_{\kappa} = M_{\kappa}^0 - H y_{\kappa}.$$

Порядок построения линии влияния  $M_{\kappa}$ :

- 1) на левой опорной вертикали (сечение  $\kappa$  находится в левой половине арки) отложить вверх ординату  $x_{\kappa}$ ;
- 2) снести по вертикали нулевую точку  $F_m$  на ось абсцисс, точка  $d$ ;
- 3) соединить вершину ординаты  $x_{\kappa}$  с точкой  $d$  на оси абсцисс,  $a_1 d_1 c_1$  – первая правая прямая;
- 4) снести по вертикали сечение  $\kappa$  на первую правую прямую, точка  $\kappa_1$ ;

- 5) соединить точку  $\kappa_1$  с нулем на левой опоре,  $a\kappa_1$  – левая прямая;
- 6) снести по вертикали на первую правую прямую ключевой шарнир  $C$ , точка  $c_1$ ;
- 7) соединить точку  $c_1$  с нулем на правой опоре,  $c_1b$  – вторая правая прямая. Линия влияния  $M_\kappa$  показана на рис. 6.12, б.

$$Q_\kappa = Q_\kappa^0 \cos \varphi_\kappa - H \sin \varphi_\kappa.$$

Порядок построения линии влияния  $Q_\kappa$ :

- 1) на левой опорной вертикали (сечение  $\kappa$  находится в левой половине арки) отложить вверх ординату  $\cos \varphi_\kappa$ ;
- 2) снести по вертикали нулевую точку  $F_q$  на ось абсцисс, точка  $d$ ;
- 3) соединить вершину ординаты  $\cos \varphi_\kappa$  с точкой  $d$  на оси абсцисс,  $a_1dc_1$  – первая правая прямая;
- 4) снести по вертикали сечение  $\kappa$  на первую правую прямую, точка  $\kappa_1$ ;
- 5) отложить вниз по вертикали от точки  $\kappa_1$   $\cos \varphi_\kappa$ , точка  $\kappa_2$ ;
- 6) соединить точку  $\kappa_2$  с нулем на левой опоре,  $a\kappa_2$  – левая прямая;
- 7) снести по вертикали на первую правую прямую ключевой шарнир  $C$ , точка  $c_1$ ;
- 8) соединить точку  $c_1$  с нулем на правой опоре,  $c_1b$  – вторая правая прямая. Линия влияния  $Q_\kappa$  изображена на рис. 6.12, в, г.

$$N_\kappa = -(Q_\kappa^0 \sin \varphi_\kappa + H \cos \varphi_\kappa).$$

Порядок построения линии влияния  $N_\kappa$ :

- 1) на левой опорной вертикали (сечение  $\kappa$  принадлежит левой части арки) отложить вверх ординату  $\sin \varphi_\kappa$ ;
- 2) снести по вертикали нулевую точку  $F_n$  на ось абсцисс, точка  $d$ ;
- 3) соединить вершину ординаты  $\sin \varphi_\kappa$  с точкой  $d$ ,  $dkc_1$  – первая правая прямая;
- 4) снести на первую правую прямую сечение  $\kappa$ , точка  $\kappa$ ;
- 5) отложить от точки  $\kappa$  вниз по вертикали  $\sin \varphi_\kappa$ , точка  $\kappa_1$ ;
- 6) соединить точку  $\kappa_1$  с нулем на левой опоре,  $a\kappa_1$  – левая прямая;
- 7) снести по вертикали на первую правую прямую ключевой шарнир  $C$ , точка  $c_1$ ;
- 8) соединить точку  $c_1$  с нулем правой опоры,  $c_1b$  – вторая правая прямая. Линия влияния  $N_\kappa$  изображена на рис. 6.12, д.

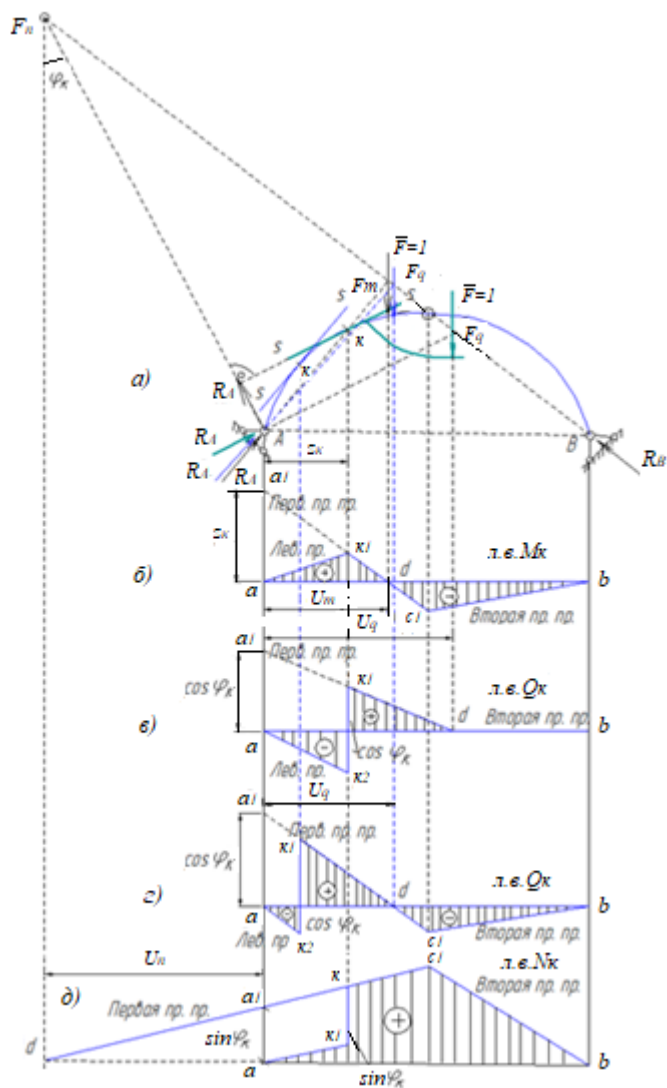


Рис. 6.12. Построение линий влияния внутренних усилий в сечениях трехшарнирной арки

Величины абсцисс нулевых точек моментов, поперечных и продольных сил в заданных сечениях трехшарнирной арки находим по следующим формулам:

$$U_m = lfz_{\kappa} / (y_{\kappa}l_2 + z_{\kappa}f); \quad (6.20)$$

$$U_q = lf / (l_2 \operatorname{tg} \varphi_{\kappa} + f); \quad (6.21)$$

$$U_n = lf / (l_2 \operatorname{ctg} \varphi_{\kappa} - f), \quad (6.22)$$

где  $l$  – длина пролета;

$f$  – стрела подъема;

$z_{\kappa}, y_{\kappa}$  – ординаты сечения;

$l_2$  – абсцисса ключевого шарнира  $C$  до правой опоры арки;

$\varphi_{\kappa}$  – угол наклона касательной в заданном сечении арки к горизонту.

Определение опорных реакций, внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  и построение их линий влияния в трехшарнирных рамах производится способами (аналитическими и графическими), применяемыми при расчете трехшарнирных арок. При построении линий влияния усилий в поперечных сечениях наклонных и горизонтальных элементов трехшарнирной рамы, а также продольных сил в вертикальных ее элементах может быть использован метод нулевой точки.

#### 6.4. Примеры расчета

**Задача 6.1.** Определить опорные реакции трехшарнирной арки (рис. 6.13), а также внутренние силовые факторы  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в ее сечении, соответствующем точке приложения силы  $F_2$  (точка  $E$ ). Ось арки очерчена по квадратной параболе, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{4f}{l^2} z(l - z).$$

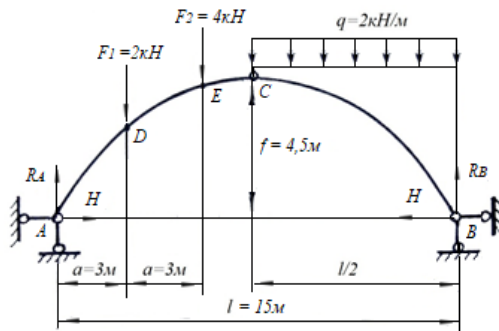


Рис. 6.13. Расчетная схема трехшарнирной арки

**Решение.**

$$y_E = \frac{4 \cdot 4,5}{15^2} \cdot 6 \cdot (15 - 6) = 4,32 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{4f}{l^2} x(l-x) \right] = \frac{4f}{l^2} (l-2x),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_E = \frac{4 \cdot 4,5}{15^2} \cdot (15 - 2 \cdot 6) = 0,24,$$

$$\varphi_E = 13^\circ 30'; \quad \sin \varphi_E = 0,233; \quad \cos \varphi_E = 0,972.$$

Вычисляем реакции опор:

$$\sum M_A = -R_B l + \left(\frac{ql}{2}\right)\left(\frac{3l}{4}\right) + F_2 \cdot 2a + F_1 a = 0,$$

$$R_B = \frac{\left[\left(\frac{ql}{2}\right)\left(\frac{3l}{4}\right) + F_2 \cdot 2a + F_1 a\right]}{l} = \frac{\left[\left(\frac{2 \cdot 15}{2}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 15}{4}\right) + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3\right]}{15} =$$
$$= 13,25 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = R_A l - F_1(l-a) - F_2(l-2a) - \left(\frac{ql}{2}\right)\frac{l}{4} = 0,$$

$$R_A = \frac{\left[F_1(l-a) + F_2(l-2a) + \frac{ql^2}{8}\right]}{l} = \frac{\left[2 \cdot (15-3) + 4 \cdot (15-2 \cdot 3) + \frac{2 \cdot 15^2}{8}\right]}{15} =$$
$$= 7,75 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения вертикальных опорных реакций:

$$\sum y = R_A - F_1 - F_2 - \frac{ql}{2} + = 7,75 - 2 - 4 - 2 \cdot 7,5 + 13,25 = 0.$$

Условие равновесия  $\sum y = 0$  выполняется.

Следовательно, реакции  $R_A$  и  $R_B$  определены верно.

Далее определим распор  $H$ :

$$\sum M_C^n = R_A \frac{l}{2} - Hf - F_1 \left( \frac{l}{2} - a \right) - F_2 \left( \frac{l}{2} - 2a \right) = 0.$$

Из полученного равенства имеем:

$$H = \frac{\left[ R_A \frac{l}{2} - F_1 \left( \frac{l}{2} - a \right) - F_2 \left( \frac{l}{2} - 2a \right) \right]}{f} = \frac{(7,75 \cdot 7,5 - 2 \cdot 4,5 - 4 \cdot 1,5)}{4,5} = 9,6 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения распора:

$$\begin{aligned} \sum M_C^n &= -R_B \frac{l}{2} + Hf + \frac{ql}{2} \frac{l}{2} = 0, \\ H &= \frac{\left( \frac{R_B l}{2} - \frac{ql^2}{8} \right)}{f} = \frac{(13,25 \cdot 7,5 - \frac{2 \cdot 15^2}{8})}{4,5} = 9,6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из последнего уравнения получено то же значение распора, что и из уравнения  $\sum M_C^n = 0$ , следовательно, оно вычислено верно.

Определение поперечных сил:

$$Q_E^n = (R_A - F_1) \cos \varphi_E - H \sin \varphi_E = (7,75 - 2) \cdot 0,972 - 9,6 \cdot 0,233 = 3,37 \text{ кН,}$$

$$Q_E^n = Q_E^n - F_2 \cos \varphi_E = 3,37 - 4 \cdot 0,972 = -0,51 \text{ кН.}$$

Определение продольных сил:

$$\begin{aligned} N_E^n &= (R_A - F_1) \sin \varphi_E - H \cos \varphi_E = \\ &= (7,75 - 2) \cdot 0,233 - 9,6 \cdot 0,972 = -7,99 \text{ кН,} \\ N_E^n &= N_E^n - F_1 \sin \varphi_E = -7,99 - 4 \cdot 0,233 = -8,92. \end{aligned}$$

**Задача 6.2.** Построим эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  для трехшарнирной арки (рис. 6.14).

Ось арки очерчена по квадратной параболе, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{4f}{l^2} z(l - z).$$

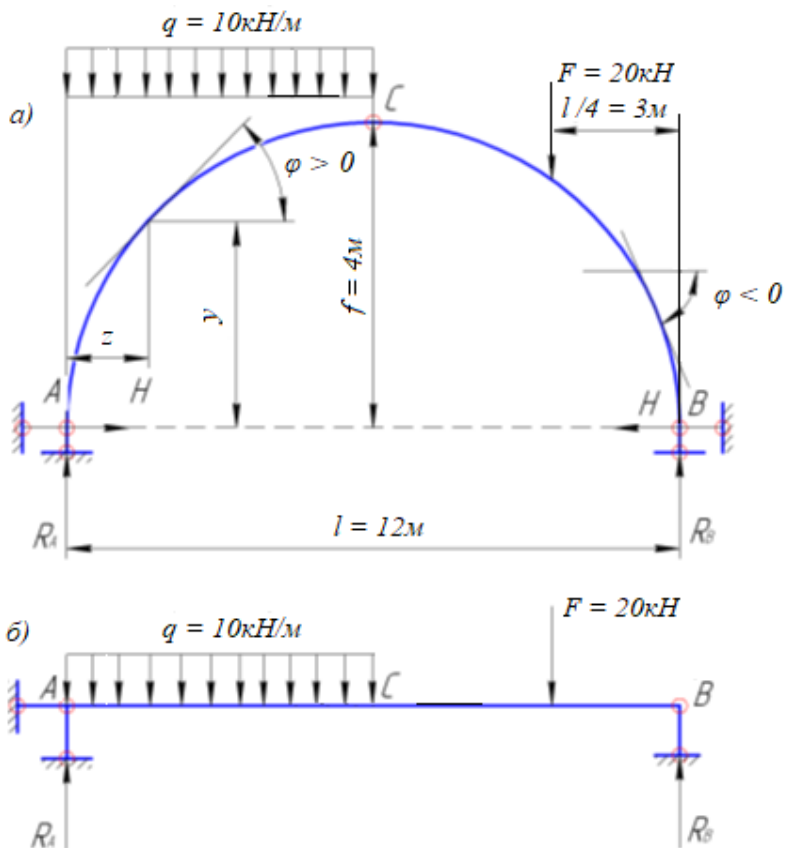


Рис. 6.14. Расчетная схема трехшарнирной арки

**Решение.**

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -R_B l + F \cdot 3l/4 + ql/2 \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{3F}{4} + \frac{ql}{8} = 3 \cdot \frac{20}{4} + 10 \cdot \frac{12}{8} = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = R_A l - \frac{ql}{2} \frac{3l}{4} - \frac{Fl}{4} = 0.$$

Проверка:

$$\sum y = 0, R_A - \frac{ql}{2} - F + R_B = 50 - 10 \cdot \frac{12}{2} - 20 + 30 = 0.$$

Находим распор:

$$\sum M_C^n = R_A \frac{l}{2} - Hf - \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = 0,$$

$$H = \frac{(R_A \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8})}{f} = \frac{(50 \cdot \frac{12}{2} - 10 \cdot \frac{12^2}{8})}{4} = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^n = -R_B \frac{l}{2} + F \frac{l}{4} + Hf = 0,$$

$$H = \frac{(R_B \frac{l}{2} - \frac{Fl}{4})}{f} = \frac{(30 \cdot \frac{12}{2} - 20 \cdot \frac{12}{4})}{4} = 30 \text{ кН.}$$

Распор определен правильно.

Для определения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил используем следующие формулы:

$$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$M = M^0 - Hy;$$

$$N = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi),$$

где  $M^0$ ,  $Q^0$  – балочный изгибающий момент и балочная поперечная сила соответственно.

Угол  $\varphi$  находим из  $\operatorname{tg} \varphi$ . Для этого определим первую производную от уравнения осевой линии арки.

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2z) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} \cdot (12 - 2z) = 2 \cdot \frac{6 - z}{9}.$$

Результаты вычислений сводим в табл. 6.1, после заполнения которой строим эпюры  $Q^0$ ,  $M^0$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  (рис. 6.15).

Таблица 6.1. Расчет ординат эшюр  $M, Q, N$  для трехшарнирной арки

$z,$ м	$y,$ м	$\text{tg } \varphi$	$\varphi,$ град	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$Q^0,$ кН	$Q^0 \sin \varphi,$ кН	$Q^0 \cos \varphi,$ кН	$-H \sin \varphi,$ кН	$-H \cos \varphi,$ кН	$-Hy,$ кН · м	$M^0,$ кН · м	$Q,$ кН	$M,$ кН	$N,$ кН
0	0	1,333	53,08	0,800	0,600	5	4,00	3,00	-2,40	1,80	0	0	0,60	0	-5,80
1	1,222	1,111	48,01	0,743	0,669	4	2,97	2,69	-2,23	2,01	-3,67	4,50	0,45	0,83	-4,98
2	2,222	0,889	41,38	0,664	0,747	3	1,99	2,24	-1,99	2,24	-6,67	8,00	0,25	1,33	-4,23
3	3,000	0,667	33,42	0,555	0,832	2	1,11	1,67	-1,67	2,50	-9,00	10,50	0,00	1,50	-3,62
4	3,556	0,444	23,56	0,406	0,914	1	0,41	0,92	-1,22	2,74	-10,67	12,00	-0,30	1,33	-3,15
5	3,869	0,222	12,31	0,217	0,976	0	0	0	-0,65	2,93	-11,67	12,50	-0,65	0,83	-2,93
6	4,000	0	0	0	1,000	-1	0	-1,00	0	3,00	-12,00	12,00	-1,00	0	-3,00
7	3,889	-0,222	-12,31	-0,217	0,976	-1	0,22	-0,98	0,65	2,93	-11,67	11,00	-0,33	-0,67	-3,15
8	3,556	-0,444	-23,56	-0,406	0,914	-1	0,41	-0,91	1,22	2,74	-10,67	10,00	0,31	-0,67	-3,15
9	3,000	-0,667	-33,42	-0,555	0,832	-1	0,56	-0,83					0,84		-3,06
						-3	1,67	-2,50	1,65	2,50	-9,00	9,00	-0,83	0	-4,17
10	2,222	-0,889	-41,38	-0,664	0,747	-3	1,99	-2,24	1,99	2,24	-6,67	6,00	-0,25	-0,67	-4,23
11	1,222	-1,111	-48,01	-0,743	0,669	-3	2,23	-2,01	2,23	2,01	-3,67	3,00	0,22	-0,67	-4,24
12	0	1,333	53,01	-0,800	0,600	-3	2,40	-1,08	2,40	1,80	0	0	0,60	0	-4,20

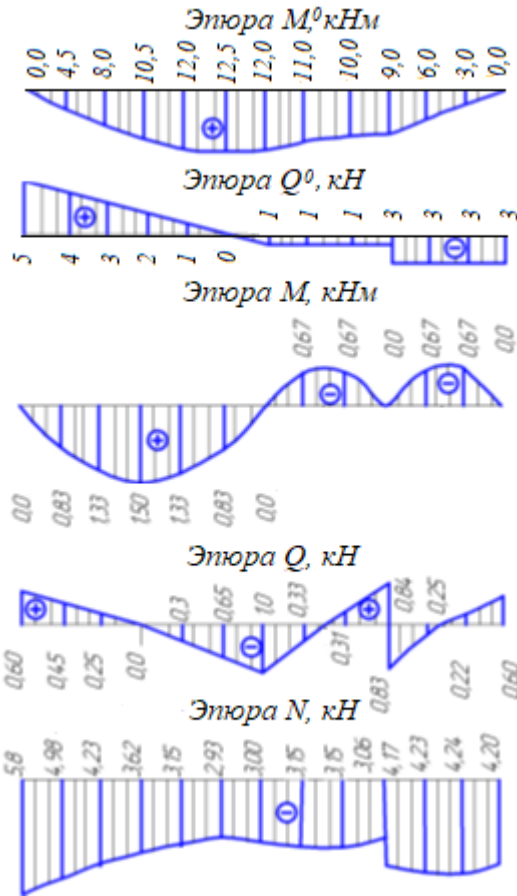


Рис. 6.15. Эпюры  $M^0$ ,  $Q^0$ ,  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , построенные для трехшарнирной рамы

**Задача 6.3.** Для трехшарнирной рамы (рис. 6.16) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

**Решение.**

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = R_B \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0.$$

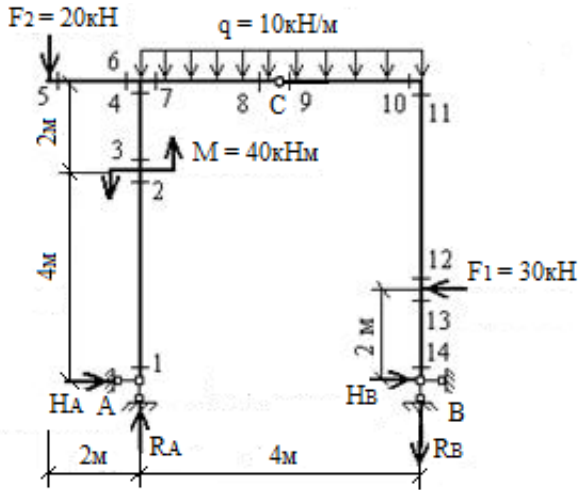


Рис. 6.16. Расчетная схема трехшарнирной рамы

$$\sum M_A = R_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2 \cdot 3}{2} + q \cdot 2 + 40 = \frac{30}{2} + \frac{20 \cdot 3}{2} + 10 \cdot 2 + \frac{40}{4} = 75 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = 0, R_A - ql - F_2 - R_B = 75 - 10 \cdot 4 - 20 - 15 = 0.$$

Находим распор:

$$\sum M_C^n = R_A \cdot 2 - H_A \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 - M = 0,$$

$$H_A = \frac{(R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 - M)}{6} = \frac{(75 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 20 \cdot 4 - 40)}{6} = 1,67 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^n = R_B \cdot 2 - H_B \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 + F_1 \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{(R_B \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + F_1 \cdot 4)}{6} = \frac{(15 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 4)}{6} = 28,33 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum z = 0, H_A - F_1 + H_B = 1,67 - 28,33 = 0.$$

Все реакции определены верно.

Для построения эпюры  $M_x$  используем способ сечений. Обходим контур рамы по часовой стрелке. Построение эпюры изгибающих моментов осуществляем на растянутых волокнах. На горизонтальных элементах рамы (ригелях) положительные ординаты откладываем вниз, отрицательные – вверх. На вертикальных элементах рамы (стойках) положительные ординаты откладываем внутри контура рамы, отрицательные – снаружи.

Элемент 5-4:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, M_{5,4} = -F_2 z.$$

При  $z = 0$   $M_{5,4} = 0$ , при  $z = 2$  м  $M_{5,4} = -20 \cdot 2 = -40$  кН · м.

Элемент 1-2:

$$0 \leq z \leq 4 \text{ м}, M_{1,2} = -H_A z.$$

При  $z = 0$   $M_{1,2} = 0$ , при  $z = 4$  м  $M_{1,2} = -1,67 \cdot 4 = -6,7$  кН · м.

Элемент 3-4:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, M_{3,4} = -H_A(z + 4) - M.$$

При  $z = 0$   $M_{3,4} = -46,7$  кН · м, при  $z = 2$  м  $M_{3,4} = -1,67 \cdot 6 - 40 = -50$  кН · м.

Элемент 7-8:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, M_{7,8} = R_A z - F_2(z + 2) - H_A \cdot 6 - M - qz^2 / 2.$$

При  $z = 0$   $M_7 = -20 \cdot 2 - 1,67 \cdot 6 - 40 = -90$  кН · м, при  $z = 2$  м  $M_8 = 75 \cdot 2 - 20 \cdot 4 - 1,67 \cdot 6 - 40 - 10 \cdot 2^2 / 2 = 0$ .

Обходим контур рамы против часовой стрелки.

Элемент 14-13:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, M_{14-13} = H_B z.$$

При  $z = 0$   $M_{14-13} = 0$ , при  $z = 2$  м  $M_{14-13} = 28,33 \cdot 2 = 56,67$  кН · м.

Элемент 12-11:

$$0 \leq z \leq 4 \text{ м}, M_{12-11} = H_B(z + 2) - F_1 z.$$

При  $z = 0$   $M_{12-11} = 28,33 \cdot 2 = 56,67$  кН · м, при  $z = 4$  м  $M_{12-11} = 28,33 \cdot 6 - 30 \cdot 4 = 50$  кН · м.

Элемент 10-9:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м, } M_{10-9} = H_B \cdot 6 - F_1 \cdot 4 - R_{Bz} - qz^2 / 2.$$

При  $z = 0$   $M_{10-9} = 28,33 \cdot 6 - 30 \cdot 4 = 50$  кН · м, при  $z = 2$  м  $M_C = 28,33 \cdot 6 - 30 \cdot 4 - 15 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 / 2 = 0$ .

Эпюра  $M_x$  построена на рис. 6.17.

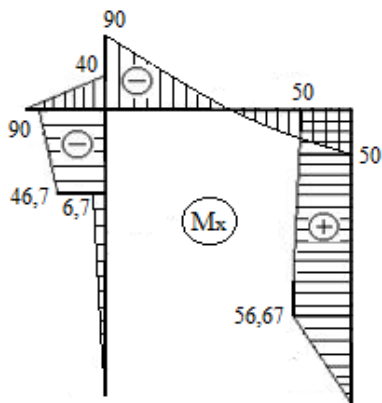


Рис. 6.17. Построение эпюры изгибающих моментов для трехшарнирной рамы

Эпюру поперечных сил  $Q_y$  строим по эпюре изгибающих моментов, используя зависимости (рис. 6.18, а):

$$Q = \frac{M^n - M^l}{l}; Q^n = + \frac{ql^2}{2} + \frac{M^n - M^l}{l}; Q^l = - \frac{ql^2}{2} + \frac{M^n - M^l}{l},$$

где  $M^n$ ,  $M^l$  – ординаты эпюры моментов на правом и левом концах участка рамы соответственно;

$q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки на соответствующем участке рамы.

Элемент 5-4:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м, } Q_{5-4} = (-40 - 0) / 2 = -20 \text{ кН} = \text{const.}$$

Элемент 1-2:

$$0 \leq z \leq 4 \text{ м, } Q_{1-2} = (-6,7 - 0) / 4 = -1,67 \text{ кН} = \text{const.}$$

Элемент 3-4:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, Q_{3-4} = Q_{1-2} = -1,67 \text{ кН} = \text{const.}$$

Элемент 7-8:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, Q_7 = 10 \cdot 2 / 2 + (0 - (-90)) / 2 = 55 \text{ кН},$$

$$Q_8 = -10 \cdot 2 / 2 + (0 - (-90)) / 2 = 35 \text{ кН}.$$

Элемент 10-9:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, Q_9 = 10 \cdot 2 / 2 + (0 - (-50)) / 2 = 35 \text{ кН},$$

$$Q_{10} = -10 \cdot 2 / 2 + (0 - (-50)) / 2 = 15 \text{ кН}.$$

Элемент 14-13:

$$0 \leq z \leq 2 \text{ м}, Q_{14-13} = (0 - 56,67) / 2 = -28,33 \text{ кН} = \text{const.}$$

Элемент 12-11:

$$0 \leq z \leq 4 \text{ м}, Q_{12-11} = (56,67 - 50) / 2 = 1,67 \text{ кН} = \text{const.}$$

Эпюру продольных сил  $N_z$  строим по эпюре поперечных сил, вырезая жесткие узлы и рассматривая их равновесие (рис. 6.18, б).

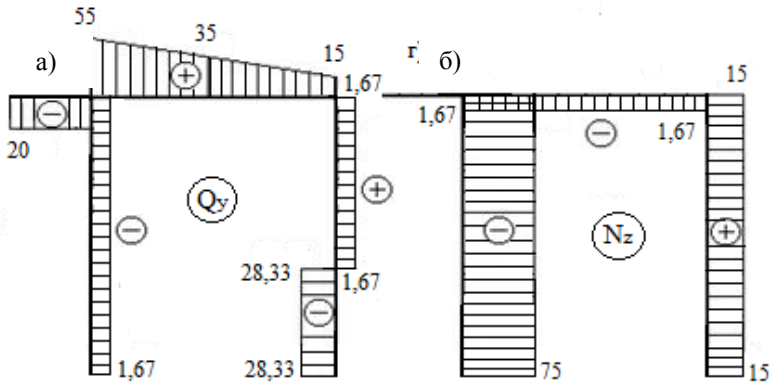


Рис. 6.18. Построение эпюр поперечных и продольных сил для трехшарнирной рамы

Узел 6-4-7 (рис. 6.19, а):

$$\Sigma y = 0, 20 - 55 + N_{1-4} = 0, N_{1-4} = 75 \text{ кН} = \text{const (сжатие)}.$$

$$\Sigma z = 0, 1,67 - N_{10-7} = 0, N_{10-7} = 1,67 \text{ кН (сжатие)}.$$

Узел 10-11 (рис. 6.19, б):

$$\Sigma y = 0, 15 - N_{11-14} = 0, N_{11-14} = 15 \text{ кН (растяжение).}$$

$$\Sigma z = 0, -1,67 + N_{10-7} = 0, N_{10-7} = 1,67 \text{ кН (сжатие).}$$

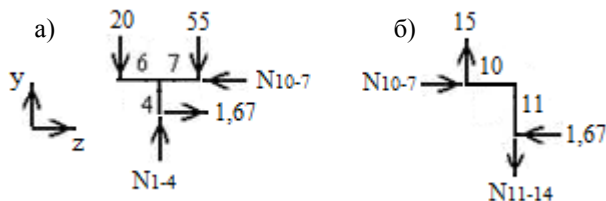


Рис. 6.19. Расчетная схема вырезания жестких узлов для трехшарнирной рамы

На горизонтальных элементах рамы (ригелях) положительные ординаты  $Q$  и  $N$  откладываем вверх, отрицательные – вниз. На вертикальных элементах рамы (стойках) положительные ординаты откладываем снаружи контура рамы, отрицательные – внутри.

### 6.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.4.** Для трехшарнирной арки (рис. 6.20) в сечениях  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  определить значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Для сечения  $\kappa_2$  методом нулевой точки построить линии влияния  $M_{\kappa_2}$ ,  $Q_{\kappa_2}$  и  $N_{\kappa_2}$ .

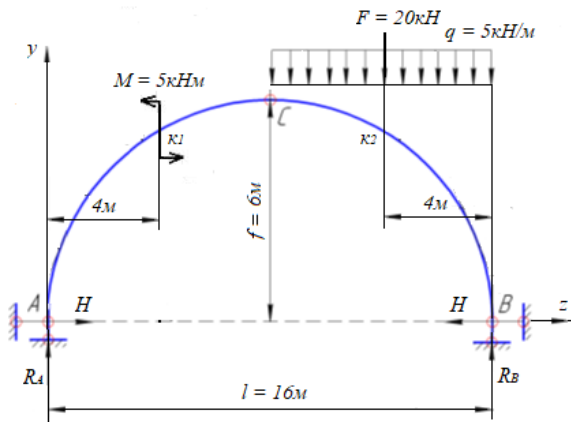


Рис. 6.20. Расчетная схема трехшарнирной арки

**Задача 6.5.** Для сечения  $k$  трехшарнирной рамы (рис. 6.21) построить линии влияния внутренних силовых факторов и по ним определить значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  от заданной внешней нагрузки.

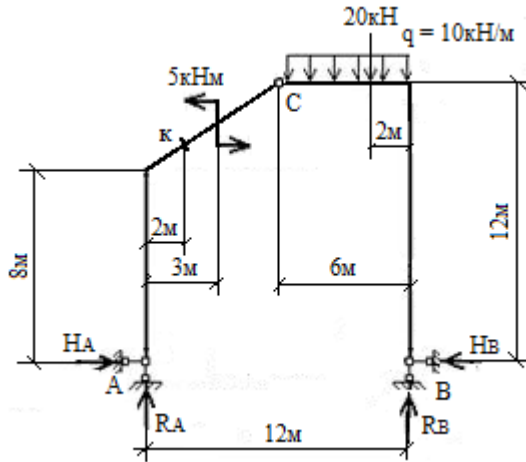


Рис. 6.21. Расчетная схема трехшарнирной рамы

### 6.6. Контрольные вопросы

1. Что понимается под трехшарнирной системой? В чем заключается геометрический смысл промежуточного (ключевого) шарнира? Кинематический анализ трехшарнирных систем.
2. Как определяются вертикальные составляющие опорных реакций трехшарнирной арки (рамы) при вертикальной нагрузке?
3. Как зависит распор трехшарнирной арки от стрелы подъема?
4. Что понимается под рациональным очертанием оси трехшарнирной арки?
5. Формулы для определения внутренних усилий в трехшарнирной арке.
6. В чем заключается преимущество трехшарнирной арки по сравнению с балкой при одинаковом пролете?
7. Сущность метода нулевой точки при построении линий влияния  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в трехшарнирных системах.
8. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в трехшарнирных арках.
9. Особенности построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в трехшарнирных рамах с наклонными элементами (стойка, ригель).

## Глава 7. ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 7.1. Перемещения возможные и действительные.

#### Работа внешних сил. Теорема о взаимности работ и перемещений. Суммарная работа статически действующих внешних сил

Перемещением данной точки сооружения называется изменение ее координаты, вызванное деформацией сооружения. Рассмотрим перемещения линейно-деформируемых систем, для которых справедлив закон Гука и принцип независимости действия сил (принцип наложения).

Под силой, приложенной к упругой системе, будем понимать любое воздействие – сосредоточенную силу, сосредоточенный момент, равномерно распределенную нагрузку, под перемещением – такое перемещение, на котором заданная внешняя сила производит работу. Сосредоточенной силе  $F$  соответствует линейное перемещение  $\Delta$ , сосредоточенному моменту  $M$  – угловое перемещение  $\theta$ , равномерно распределенной нагрузке  $q$  – площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки. Различают действительное и возможное перемещение для силы  $F$ . Под действительным перемещением  $\Delta_{FF}$  понимают перемещение, вызванное силой  $F$  (рис. 7.1).

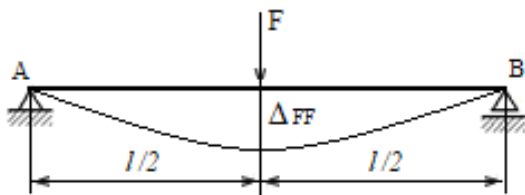


Рис. 7.1. Действительное перемещение от силы  $F$

$$\Delta_{FF} = \alpha F, \quad (7.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности.

Под возможным перемещением  $\Delta_{FK}$  понимают весьма малое перемещение точки оси сооружения, допускаемое имеющимися связями и не зависящее от заданной системы сил (рис. 7.2).

Перемещение  $\Delta_{FK}$ , вызванное в той же системе другой силой  $K$ , будет возможным перемещением для силы  $F$ .

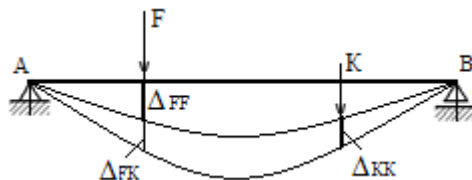


Рис. 7.2. Возможное перемещение для силы  $F$ , вызванное силой  $K$

Обобщенное перемещение рассмотрим на примере балки, на которую действует система сил (рис. 7.3).

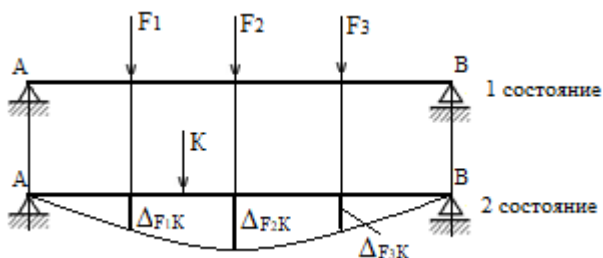


Рис. 7.3. Обобщенное перемещение системы сил

На балку действуют силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , причем  $\alpha_{21} = F_2 / F_1$ ,  $\alpha_{31} = F_3 / F_1$ .

Возможная работа внешних сил первого состояния на перемещениях по их направлению во втором состоянии определяется по формуле

$$A_{FK} = F_1 (\Delta_{F_1K} + \alpha_{21} \Delta_{F_2K} + \alpha_{31} \Delta_{F_3K}) = F_1 \Delta_{FK}, \quad (7.2)$$

где  $\Delta_{FK}$  – обобщенное перемещение по направлению системы сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ .

Определим работу внешней силы  $F$ , статически приложенной к упругой системе, материал которой подчиняется закону Гука (рис. 7.4).

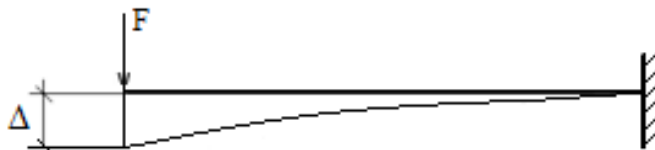


Рис. 7.4. Расчетная схема по определению работы внешней силы

При малых деформациях перемещения отдельных точек конструкции прямо пропорциональны вызывающей их внешней нагрузке.

$$\Delta = \alpha F, \quad (7.3)$$

где  $\Delta$  – перемещение точки конструкции, в которой приложена сила  $F$ ;  $\alpha$  – коэффициент, который зависит от материала, формы и размеров конструкции.

Увеличим силу  $F$  на  $dF$ . Это приращение вызовет увеличение перемещения на  $d\Delta$ . Составим выражение элементарной работы внешней силы на перемещении  $d\Delta$ :

$$dA = (F + dF) d\Delta = Fd\Delta + dFd\Delta = Fd\Delta. \quad (7.4)$$

Так как  $dFd\Delta$  – величина второго порядка малости, то ей можно пренебречь.

Из формулы (7.3) имеем:

$$d\Delta = \alpha dF. \quad (7.5)$$

Подставив формулу (7.5) в выражение (7.4), получим:

$$dA = F\alpha dF.$$

Интегрируя это выражение по силе, получим:

$$A = \alpha \int FdF = \alpha F^2 / 2. \quad (7.6)$$

С учетом того что  $\Delta = \alpha F$ , окончательно получим:

$$A = \Delta F / 2. \quad (7.7)$$

Таким образом, работа внешней силы при статическом воздействии ее на сооружение равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила  $F$ , во втором состоянии – сила  $K$  (рис. 7.5).

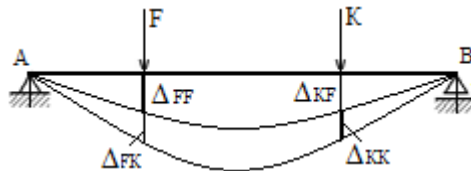


Рис. 7.5. Расчетная схема по определению возможных работ

Определим возможную работу в первом и втором состояниях системы.

Первое состояние системы:

$$A_{FK} = F\Delta_{FK};$$

второе состояние системы:

$$A_{KF} = K\Delta_{KF}.$$

Согласно формуле (7.2) получим, что  $A_{FK} = A_{KF}$ , так как возможные перемещения не зависят от системы сил, приложенных к сооружению.

Таким образом, работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния. Это есть теорема о взаимности работ – теорема Бетти.

Рассмотрим два состояния системы (рис. 7.6). В первом состоянии к системе приложена сила  $F_1 = 1$ , во втором –  $F_2 = 1$ . Эти состояния будем называть единичными.

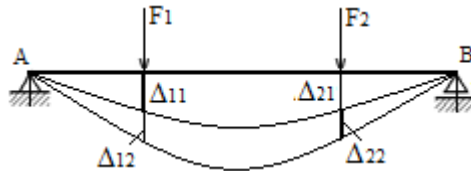


Рис. 7.6. Расчетная схема к теореме о взаимности перемещений

Возможные перемещения от единичных сил в первом и втором состояниях будем обозначать  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$  соответственно. На основании теоремы о взаимности работ для этих двух состояний имеем:

$$F_1\delta_{12} = F_2\delta_{21}, \quad (7.8)$$

где  $F_1 = F_2 = 1$ .

Тогда из равенства (7.8)  $\delta_{12} = \delta_{21}$  – теорема о взаимности перемещений.

Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой единичной силой, – теорема Максвелла.

Равенство перемещений (7.8) остается в силе, когда  $F_1 \neq F_2 \neq 1$ , при этом  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ .

Согласно формуле (7.7) суммарная работа статически действующих на систему внешних сил равна полусумме произведений значений этих сил на соответствующие им полные перемещения. Математически данное утверждение можно представить следующим образом:

$$A = \Sigma F_i \Delta_i. \quad (7.9)$$

Пусть на систему действует две внешние силы  $F_i$  и  $F_k$ , для которых полные перемещения  $\Delta_i$  и  $\Delta_k$  (рис. 7.7).

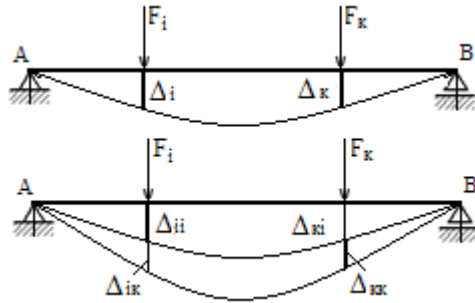


Рис. 7.7. Расчетная схема к теореме о суммарной работе внешних сил

Докажем, что

$$A = (F_i \Delta_i + F_k \Delta_k) / 2.$$

Последовательно загрузим систему силами  $F_i$  и  $F_k$ .

$$A_1 = F_i \Delta_{ii} / 2, A_2 = F_k \Delta_{kk} / 2, A_3 = F_i \Delta_{ik}.$$

Полная работа будет равна:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 = F_i \Delta_{ii} / 2 + F_k \Delta_{kk} / 2 + F_i \Delta_{ik} = \\ &= (F_i \Delta_{ii} + F_k \Delta_{kk} + 2F_i \Delta_{ik}) / 2 = \\ &= (F_i \Delta_{ii} + F_k \Delta_{kk} + F_i \Delta_{ik} + F_i \Delta_{ik}) / 2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

По теореме о взаимности работ имеем:

$$F_i \Delta_{ik} = F_k \Delta_{ki}. \quad (7.11)$$

Подставив равенство (7.11) в выражение (7.10), получим:

$$A = (F_i \Delta_{ii} + F_k \Delta_{kk} + F_i \Delta_{ik} + F_k \Delta_{ki}) / 2 = ((F_i (\Delta_{ii} + \Delta_{ik}) + F_k (\Delta_{kk} + \Delta_{ki})) / 2 = (F_i \Delta_i + F_k \Delta_k) / 2,$$

что требовалось доказать.

## 7.2. Работа внутренних сил. Зависимость между работой внешних и внутренних сил. Работа внутренних сил при изменении температуры

Работа внешних сил на вызванных ими перемещениях может быть выражена и через внутренние усилия  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

Выделим из стержня малый элемент  $dz$ . На элемент действуют силы  $M_F$ ,  $Q_F$  и  $N_F$  (рис. 7.8).

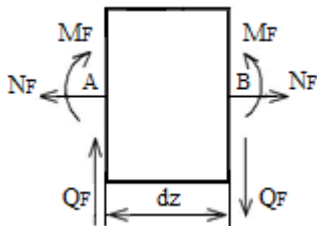


Рис. 7.8. Расчетная схема для определения работы внутренних сил

Усилия  $M_F$ ,  $Q_F$  и  $N_F$  являются внутренними усилиями по отношению к стержню. Для выделенного элемента они являются внешними силами, поэтому работа  $A$  может быть определена как интегральная сумма работ, совершенных статически возрастающими усилиями  $M_F$ ,  $Q_F$  и  $N_F$  на соответствующих деформациях элемента  $dz$ . Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент  $dz$ , если левое сечение выделенного элемента закрепить в заделке.

Перемещением от изгибающего момента  $M_F$  (рис. 7.9) является взаимный угол поворота торцевых сечений выделенного элемента, который будет равен углу поворота  $\Delta_0$  его правого сечения  $B$ .

$$\Delta_0 = \frac{M dz}{EI_x}, \quad (7.12)$$

где  $EI_x$  – жесткость при изгибе.

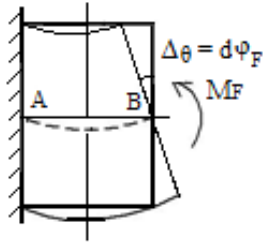


Рис. 7.9. Расчетная схема по определению работы статически возрастающего момента

На угловом перемещении согласно формуле (7.7) статически возрастающий момент  $M_F$  совершит работу

$$dA_{M_F} = \frac{M \Delta_\theta}{2} = \frac{M M dz}{2EI_x}. \quad (7.13)$$

Продольная сила (рис. 7.10)  $N_F$  вызывает перемещение правого сечения  $B$  на величину

$$\Delta_z = \frac{N dz}{EA}, \quad (7.14)$$

где  $EA$  – жесткость при растяжении выделенного элемента.

На этом перемещении возрастающая сила  $N_F$  совершит работу

$$dA_{N_F} = \frac{N \Delta_z}{2} = \frac{N N dz}{2EA}. \quad (7.15)$$

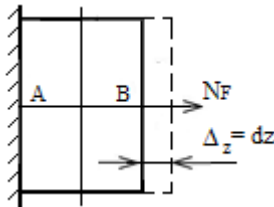


Рис. 7.10. Расчетная схема по определению работы статически возрастающей продольной силы

Поперечная сила  $Q_F$  (рис. 7.11) вызовет сдвиг торцевых сечений выделенного элемента относительно друг друга на величину  $\Delta_y$ .

К правому сечению  $B$  приложим касательные усилия  $\tau dA$ , равнодействующей которых будет  $Q_F$ , тогда имеем:

$$\tau dA^o = \frac{Q_S^*}{I_x b} dA^o, \quad (7.16)$$

где  $dA^o$  – площадь элементарной части поперечного сечения выделенного элемента;

$b$  – ширина элементарной части поперечного сечения;

$S^*$  – статический момент отсеченной элементарной части поперечного сечения.

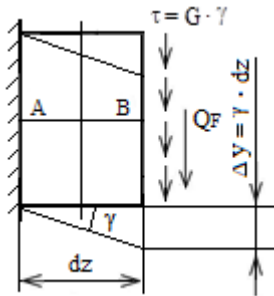


Рис. 7.11. Расчетная схема по определению работы статически возрастающей поперечной силы

Абсолютный сдвиг  $\Delta_y$  сечения  $B$  с учетом закона Гука:

$$\Delta_y = \gamma dz = \frac{\tau}{G} dz, \quad (7.17)$$

где  $\gamma$  – угол сдвига;

$G$  – модуль сдвига.

Тогда работа от поперечной силы  $Q_F$  для элементарной части поперечного сечения выделенного элемента определяется по формуле

$$dA = \frac{1}{2} \tau dA^o \gamma dz. \quad (7.18)$$

На перемещении  $\Delta_y$  возрастающая поперечная сила  $Q_F$  совершит работу

$$\begin{aligned} dA_{Q_F} &= \int_A \frac{1}{2} \tau \gamma dz dA = \int_A \tau \frac{\tau}{2G} dz dA = \int_A \frac{Q^2 S^{*2}}{I_x^2 b^2} \frac{dz}{2G} dA = \\ &= \frac{Q^2 dz}{2GI_x^2} \cdot \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA = \eta \frac{Q^2 dz}{2GA}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где  $GA$  – жесткость поперечного сечения стержня при сдвиге;

$$\eta = \frac{A}{I_x^2} \cdot \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA - \text{безразмерный коэффициент, зависящий только}$$

от формы поперечного сечения стержня.

Обозначим  $\eta \frac{Q dz}{GA}$  через  $\Delta_y$ . Тогда  $dA_{Q_F}$  можно представить в следующем виде:

$$dA_{Q_F} = \frac{1}{2} Q \Delta_y = \frac{1}{2} Q \frac{Q dz}{GA} \eta. \quad (7.20)$$

Для прямоугольного сечения  $A = bh$ ,  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ,  $S^* = \frac{b}{2} (\frac{h^2}{4} - y^2)$ . После несложных вычислений находим, что  $\eta = 1,2$ .

При одновременном действии на элемент  $dz$  сил  $M$ ,  $Q$  и  $N$  работа каждой из этих сил на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Поэтому полная элементарная работа имеет вид

$$\begin{aligned} dA &= dA_{M_F} + dA_{Q_F} + dA_{N_F} = \\ &= \frac{1}{2} \left( M \frac{M dz}{EI_x} + Q \frac{Q dz}{GA} \eta + N \frac{N dz}{EA} \right). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Тогда полная работа равна сумме интегралов элементарных работ:

$$A = \frac{1}{2} \left( \int_0^l M \frac{M dz}{EI_x} + \int_0^l Q \frac{Q dz}{GA} \eta + \int_0^l N \frac{N dz}{EA} \right). \quad (7.22)$$

Окончательно получим:

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI_x} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dz}{2GA} \eta + \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}. \quad (7.23)$$

Полученные выражения определяют работу внешних сил через внутренние усилия в стержнях. Из формулы (7.23) видно, что работа внешних сил на вызванных ими перемещениях всегда положительна.

Рассмотрим два состояния системы (рис. 7.12).

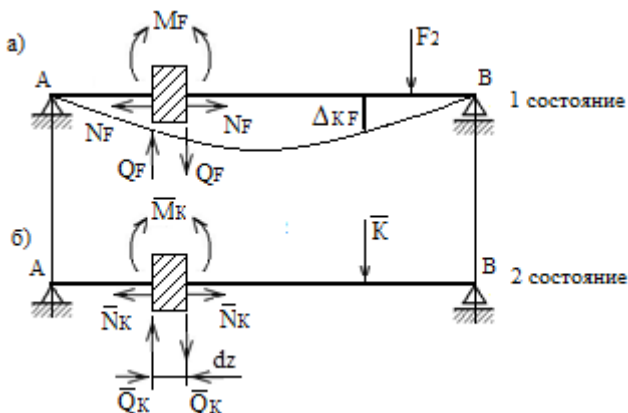


Рис. 7.12. Расчетная схема для вывода формулы Мора

Рассмотрим единичное второе состояние системы. В точке  $K$  по направлению искомого перемещения приложим силу  $K = 1$  (для линейного перемещения – единичную сосредоточенную силу, для угла поворота – единичный сосредоточенный момент и т. д.). Единичное второе состояние системы (рис. 7.12, б) рассматриваем как действительное (силовое), за возможное примем первое состояние от действия заданной нагрузки  $F$ . Работу силы  $K = 1$  на перемещении  $\Delta_{KF}$  в первом состоянии определим по формуле  $1 \cdot \Delta_{KF}$ .

По направлению внутренних сил  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{Q}_K$  и  $\bar{N}_K$  в первом состоянии происходят перемещения  $d\varphi_F$ ,  $d\gamma_F$  и  $d\lambda_F$ , где  $d\varphi_F$  – взаимный угол поворота смежных сечений, отстоящих на расстоянии  $dz$  друг от друга;  $d\gamma_F$  – взаимный сдвиг смежных сечений;  $d\lambda_F$  – абсолютное удлинение элемента  $dz$ .

По теореме о равенстве возможных работ (теорема Бетти – возможная работа внешних сил второго состояния на перемещениях в первом состоянии равна работе внутренних сил второго состояния) получаем:

$$1 \cdot \Delta_{KF} = \sum_{n=0}^l \int \overline{M}_K d\varphi_F + \sum_{n=0}^l \int \overline{Q}_K d\gamma_F + \sum_{n=0}^l \int \overline{N}_K d\lambda_F, \quad (7.24)$$

где согласно закону Гука  $d\varphi_F = M_F dz / EI$ ,  $d\gamma_F = \eta Q_F dz / GA$ ;  $d\lambda_F = N_F dz / EA$ .

Тогда окончательно получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{KF} = \sum_{n=0}^l \int \overline{M}_K M_F dz / EI + \sum_{n=0}^l \int \overline{Q}_K Q_F dz \eta / GA + \\ + \sum_{n=0}^l \int \overline{N}_K N_F dz / EA. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Таким образом, получена формула Мора для определения перемещения  $\Delta_{KF}$  от заданной внешней нагрузки  $F$  в упругой области работы системы.

Интегралами Мора можно пользоваться в случае определения перемещений системы, вызванных действием температуры.

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = \sum_{n=0}^l \int \overline{M}_m M_n dz / EI + \sum_{n=0}^l \int \overline{Q}_m Q_n dz \eta / GA + \\ + \sum_{n=0}^l \int \overline{N}_m N_n dz / EA. \end{aligned} \quad (7.26)$$

В этом случае состояние  $n$  представляет собой действительное состояние системы, вызванное изменением температуры.

Входящие в формулу (7.26) множители  $\Delta_{zn} = N_n dz / EA$  – взаимное смещение концевых сечений элемента  $dz$  в направлении оси стержня;  $\Delta_{yn} = Q_n dz \eta / GA$  – взаимное смещение концевых сечений элемента  $dz$  в направлении нормали к оси стержня;  $\Delta_{\varphi n} = M_n dz / EI$  – взаимный угол поворота концевых сечений элемента  $dz$ , определяющие деформации элемента в состоянии  $n$  от заданной нагрузки, необходимо заменить деформациями того же элемента, но вызванным изменением температуры (рис. 7.13).

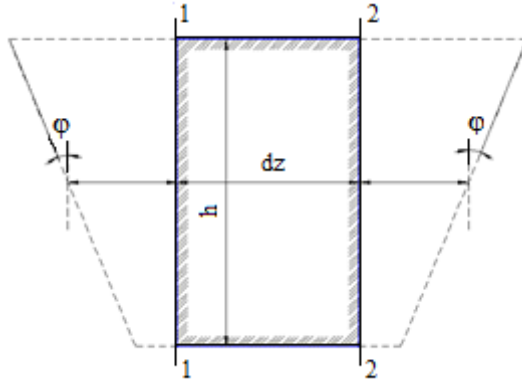


Рис. 7.13. Расчетная схема для вывода формулы Максвелла – Мора при температурном воздействии

Пусть верхнее волокно элемента  $dz$  нагрето до температуры  $t_1$ , нижнее волокно – до температуры  $t_2$  (рис. 7.14). По высоте  $h$  элемента  $dz$  распределение температуры  $t$  имеет линейный характер.

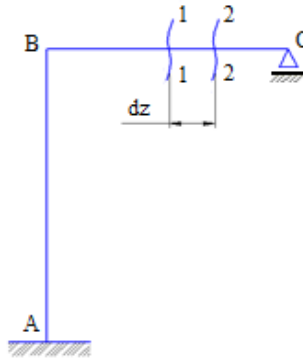


Рис. 7.14. Расчетная схема для вывода формулы при температурном воздействии

Удлинение верхнего волокна –  $\alpha t_1 dz$ , нижнего –  $\alpha t_2 dz$ . Осевое удлинение  $\Delta_z t$  будет равно среднему арифметическому указанных выше величин (при поперечном сечении, симметричном относительно горизонтальной оси).

$$\Delta_z t = (\alpha t_1 dz + \alpha t_2 dz) / 2 = \alpha(t_1 + t_2) dz / 2. \quad (7.27)$$

Угол взаимного поворота концевых сечений элемента  $dz$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi / 2 = (\alpha t_1 dz - \alpha t_2 dz) / 2h.$$

Так как  $\operatorname{tg} \varphi / 2 \approx \varphi / 2$ , то

$$\Delta_\varphi t = (\alpha t_1 dz - \alpha t_2 dz) / h = \alpha(t_1 - t_2) dz / h. \quad (7.28)$$

Деформации сдвига в элементе  $dz$  от действия  $t$  не возникают, поэтому  $\Delta_y t = 0$ .

Подставив значения формул (7.27) и (7.28) в уравнение (7.26), получим формулу для определения температурных перемещений:

$$\begin{aligned} \Delta_{mt} = \sum_n \alpha(t_1 - t_2) / h \int_0^l \overline{M}_m dz / EI + \sum_n \alpha(t_1 + t_2) / 2 \times \\ \times \int_0^l \overline{N}_m dz / EA. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Если сечение элемента не симметрично относительно горизонтальной оси, то в формулу (7.29) вместо  $(t_1 - t_2) / 2$  необходимо подставить выражение  $t_2 + (t_1 - t_2)y / h$ .

При вычислении  $\Delta_{mt}$  интегрирование распространяется лишь на те участки системы, температурный режим которых меняется. Для случая прямолинейных или ломаных стержней постоянного сечения интегралы могут быть подсчитаны как площади единичных эпюр, и формула перемещений примет следующий вид:

$$\Delta_{mt} = \sum_n \alpha(t_1 - t_2) / h \Omega_{\overline{M}} + \sum_n \alpha(t_1 + t_2) / 2 \Omega_{\overline{N}}, \quad (7.30)$$

где  $\Omega_{\overline{M}}$  и  $\Omega_{\overline{N}}$  – площади единичных эпюр  $\overline{M}$  и  $\overline{N}$  (рис. 7.15).

Знаки членов формулы (7.30) определяют следующим образом: если характер температурной деформации и деформации, вызываемой единичным состоянием, совпадает, то знак соответствующего члена формулы перемещений будет «+», наоборот – «-».

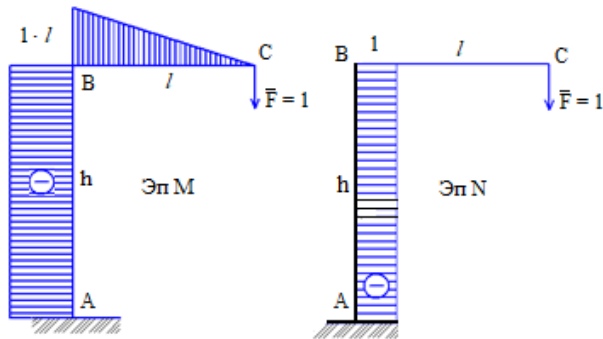


Рис. 7.15. Построение единичных эпюр при температурном воздействии

### 7.3. Потенциальная энергия. Свойства потенциальной энергии. Формулы перемещений: теорема Кастильяно, упрощенная запись теоремы Кастильяно, формула Мора

В процессе нагружения системы внешние силы совершают работу. При разгрузке потенциальная энергия, накопленная в упругом элементе при его деформации, высвобождается в виде работы, совершаемой внутренними силами, действующими внутри элемента. На основе закона сохранения энергии можно считать, что вся работа  $A$  внешних сил равна потенциальной энергии  $W$  деформации системы, т. е.  $A = W$ . Подставив в последнее равенство выражение (7.23), получим:

$$W = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI_x} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dz}{2GA} \eta + \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}. \quad (7.31)$$

#### Свойства потенциальной энергии.

Согласно выражению (7.31) можно сделать следующие выводы:

1.  $W$  всегда положительна, так как в ее уравнения входят квадраты внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

2. Потенциальная энергия является однородной функцией второй степени усилий, а также и перемещений (так как перемещения пропорциональны усилиям).

3. Количество потенциальной энергии не зависит от последовательности загрузки (так как от нее не зависят значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$ ), а определяется конечным состоянием упругой системы.

4.  $W$ , вызванная группой сил, не равна сумме  $W_i$ , вызванных каждой из сил в отдельности, и, следовательно, к  $W$  не применим принцип независимости действия сил. Это связано с тем, что  $W$  зависит от квадратов внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ , а квадрат суммы не равен сумме квадратов слагаемых.

Рассмотрим стержень (рис. 7.16).

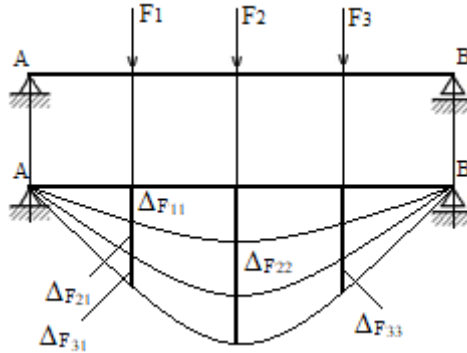


Рис. 7.16. Расчетная схема стержня для определения потенциальной энергии

Сопоставим потенциальные энергии  $W_3$  и  $W_1 + W_2$ .

$$W_3 = W_1 + W_2 + \frac{F_1 F_2 l}{EA}. \quad (7.32)$$

Рассмотрим последовательное нагружение стержня силами  $F_1$  и  $F_2$ . Сначала действует сила  $F_1$  от 0 до  $F_1$ , затем сила  $F_2$  от 0 до  $F_2$ . В результате воздействия силы  $F_2$  нижнее волокно стержня, а вместе с ним и сила  $F_1$  дополнительно переместится на величину  $\frac{F_2 l}{EA}$ . Так как при

возрастании  $F_2$  от 0 до ее конечного значения сила  $F_1$  остается постоянной, то на этом дополнительном перемещении, вызванном силой  $F_2$ , совершится работа, равная  $F_1 \frac{F_2 l}{EA}$ . Таким образом, при определении  $W$

упругой системы не применим принцип независимости действия сил, так как в этом случае будут потеряны члены, учитывающие работу одних сил на перемещениях, вызванных другими силами.



С учетом уравнений (7.36) имеем:

$$\partial\Delta_1 / \partial F_i = \delta_{1i}; \partial\Delta_2 / \partial F_i = \delta_{2i}; \partial\Delta_3 / \partial F_i = \delta_{3i}; \partial\Delta_i / \partial F_i = \delta_{ii}. \quad (7.38)$$

Тогда уравнение (7.37) с учетом уравнения (7.38) примет вид

$$\partial W / \partial F_i = 1 / 2 (F_1\delta_{1i} + F_2\delta_{2i} + F_3\delta_{3i} + \dots + 1\Delta_i + F_i\delta_{ii}). \quad (7.39)$$

По теореме о взаимности перемещений имеем:

$$\delta_{1i} = \delta_{i1}; \delta_{2i} = \delta_{i2}; \delta_{3i} = \delta_{i3}.$$

Тогда уравнение (7.39) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial W / \partial F_i &= 1 / 2 (F_1\delta_{1i} + F_2\delta_{2i} + F_3\delta_{3i} + \dots + F_i\delta_{ii} + \Delta_i) = \\ &= 1 / 2 (\Delta_i + \Delta_i) = \Delta_i, \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

Упрощенная запись теоремы Кастильяно:

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}.$$

Рассмотрим два интеграла в формуле (7.31) для определения потенциальной энергии:

$$W = \sum_n \left[ \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA} \right]. \quad (7.40)$$

Используя упрощенную запись теоремы Кастильяно, получим:

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \sum_n \left[ \int_0^l \frac{2M}{2EI_x} \frac{\partial M}{\partial F_i} dz + \int_0^l \frac{2N}{2EA} \frac{\partial N}{\partial F_i} dz \right]. \quad (7.41)$$

Окончательно получим:

$$\Delta_i = \sum_n \left[ \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial F_i} \frac{dz}{EI_x} + \int_0^l N \frac{\partial N}{\partial F_i} \frac{dz}{EA} \right]. \quad (7.42)$$

Теорема Кастильяно (7.42) в упрощенной записи используется сравнительно мало и представляет собой чисто теоретический интерес. Последовательность расчетов по определению перемещений при ее использовании следующая:

1) к сооружению прикладывается сила в том сечении и направлении, в котором определяется перемещение;

2) составляется полное выражение потенциальной энергии от совместного действия приложенной силы и внешней нагрузки;

3) дифференцируется выражение потенциальной энергии по приложенной силе и получается выражение для перемещения. Затем в полученном выражении приравнивается значение силы нулю, если она не входит в состав внешней нагрузки (или ее действительному значению, если сила входит в состав внешней нагрузки).

**Формула Мора.** Для вывода формулы Мора используем упрощенную запись теоремы Кастильяно.

Пусть на сооружение действует группа сил  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i$ . Тогда внутренние силовые факторы в рассматриваемом сечении

$$N = N_{F_1} + N_{F_2} + N_{F_3} + \dots + N_{F_i}; \quad (7.43)$$

$$M = M_{F_1} + M_{F_2} + M_{F_3} + \dots + M_{F_i}.$$

Обозначим  $\bar{N}_1$  как продольную силу в сечении от действия силы  $F_1 = 1$ , соответственно,  $\bar{N}_2$  – от силы  $F_2 = 1$ ;  $\bar{N}_3$  – от силы  $F_3 = 1$ ; ... ;  $\bar{N}_i$  – от силы  $F_i = 1$ . Аналогично обозначим  $\bar{M}_1$  как изгибающий момент в сечении от действия силы  $F_1 = 1$ , соответственно,  $\bar{M}_2$  – от силы  $F_2 = 1$ ;  $\bar{M}_3$  – от силы  $F_3 = 1$ ; ... ;  $\bar{M}_i$  – от силы  $F_i = 1$ .

С учетом этих условий выражения (7.43) принимают вид

$$N = F_1 \bar{N}_1 + F_2 \bar{N}_2 + F_3 \bar{N}_3 + \dots + F_i \bar{N}_i; \quad (7.44)$$

$$M = F_1 \bar{M}_1 + F_2 \bar{M}_2 + F_3 \bar{M}_3 + \dots + F_i \bar{M}_i.$$

Тогда

$$\partial N / \partial F_i = \bar{N}_i, \quad \partial M / \partial F_i = \bar{M}_i.$$

Подставим полученные выражения в формулу (7.42), получим формулу Мора:

$$\Delta_i = \sum_n \left[ \int_0^l M \bar{M}_i \frac{dz}{EI_x} + \int_0^l N \bar{N}_i \frac{dz}{EA} \right]. \quad (7.45)$$

#### 7.4. Особенности вычисления интегралов Мора: перемножение эпюр по правилу Верещагина. Формула Симпсона для вычисления интегралов Мора

Основным недостатком при определении перемещений с помощью интеграла Мора является то, что в расчетах необходимо составлять выражение подынтегральных функций в общем виде и брать интеграл от произведения двух функций. Эти функции иногда бывают сложными, и взять интеграл от них затруднительно. Особенно неудобно, если на стержне имеется несколько участков. Оказывается, что для большинства встречающихся на практике нагрузок функция от единичной силы имеет линейный характер, и процесс интегрирования можно заменить перемножением эпюр по правилу Верещагина.

Для вывода формулы, предложенной Верещагиным, возьмем участок стержня длиной  $l_1-l_2$ . Построим грузовую эпюру  $M$  от заданной внешней нагрузки. Часть грузовой эпюры на участке стержня  $l_1-l_2$  показана на рис. 7.17, а.

В сечении  $C$ , где необходимо определить прогиб стержня, прикладываем единичную силу  $\bar{F} = 1$  и строим от нее единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}$ . Часть этой эпюры на той же длине стержня приведена на рис. 7.17, б.

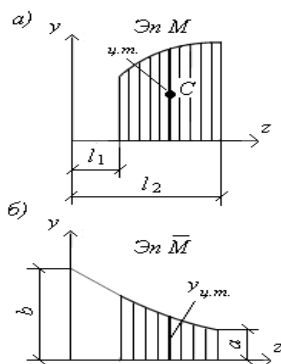


Рис. 7.17. Схема участка стержня для определения перемещений способом Верещагина

В общем случае грузовая эпюра определяется уравнением  $M = f(x)$ , а эпюра от единичной нагрузки – уравнением прямой линии  $\overline{M} = az + b$ . Подставим эти значения в интеграл Мора, получим:

$$\Delta_c = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_x \overline{M} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_x (az + b) dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_x az dz + \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_x b dz = \frac{1}{EJ_x} \left( \int_0^l az dA + \int_0^l b dA \right) = \frac{1}{EJ_x} A(b + az_{ц.т.}),$$

где  $A$  – площадь грузовой эпюры на участке стержня длиной  $dz$ .

Так как  $b + az = y_{ц.т.}$ , то окончательно получим:

$$\Delta_c = \frac{1}{EJ_x} Ay_{ц.т.},$$

где  $y_{ц.т.}$  – ордината единичной эпюры моментов  $\overline{M}$  под центром тяжести грузовой эпюры  $M_x$ .

Для нескольких грузовых участков стержня формула перемещений имеет вид

$$\Delta_c = \frac{1}{EJ_x} \sum_n A_i y_{ц.т.i}. \quad (7.46)$$

Для определения перемещений при помощи способа Верещагина необходимо:

1) построить эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки.

В том сечении, где необходимо определить прогиб, приложить единичную силу (для нахождения угла поворота в сечении приложить единичный момент);

2) построить эпюры изгибающих моментов от единичной силы (от единичного момента);

3) вычислить площадь эпюры  $A$  на каждом участке стержня.

Умножить каждую площадь грузовой эпюры на соответствующую ординату единичной эпюры, находящуюся под центром тяжести грузовой эпюры.

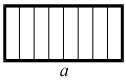
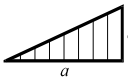
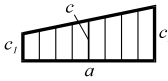
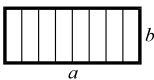
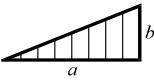
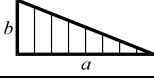
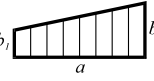
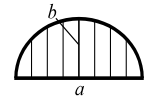
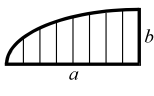
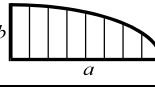
Полученные результаты сложить.

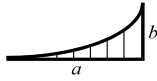
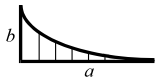
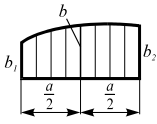
При этом необходимо учитывать следующее: перемножение эпюр с одинаковыми знаками дает знак «+», с разными знаками – «-».

Положительные перемещения  $\Delta_c$  и  $\Delta_{0c}$  всегда направлены в сторону действия соответствующей им единичной силы или единичного момента.

Для упрощения процесса расчета деформаций балки целесообразно воспользоваться готовой таблицей, в которой приведены формулы, по которым можно найти произведение  $A_{y_{\text{ИТ}}}$  в зависимости от вида эпюр  $M_x$  и  $\bar{M}$  (табл. 7.1).

Таблица 7.1. Значения  $A_{y_{\text{ИТ}}}$ , используемые при применении правила Верещагина

Эпюры $M_x$ , построенные от внешних нагрузок	Эпюры $\bar{M}$ , построенные от единичных сил и моментов		
			
1	2	3	4
	$abc$	$(abc) / 2$	$ab(c_1 + c_2) / 2$
	$(abc) / 2$	$(abc) / 3$	$ab(c_1 + c_2) / 3$
	$(abc) / 2$	$(abc) / 6$	$ab(2c_1 + c_2) / 6$
	$ac(b_1 + b_2) / 2$	$ac(b_1 + 2b_2) / 6$	$a(2b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + 2b_2c_2)$
	$2(abc) / 3$	$(abc) / 3$	$ab(c_1 + c_2) / 3$
	$2(abc) / 3$	$5(abc) / 12$	$ab(3c_1 + 5c_2) / 12$
	$2(abc) / 3$	$(abc) / 4$	$ab(5c_1 + 3c_2) / 12$

1	2	3	4
	$(abc) / 3$	$(abc) / 4$	$ab(c_1 + 3c_2) / 12$
	$(abc) / 3$	$(abc) / 12$	$ab(3c_1 + c_2) / 12$
	$ac(b_1 + b_2 + 4b)$	$ac(b_2 + 2b)$	$a(b_1c_1 + b_2c_2 + 4bc)$

Если обе функции линейные, тогда безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату под ее центром тяжести на второй эпюре или площадь второй эпюры на ординату под ее центром тяжести на первой эпюре.

Способ Верещагина применим к любому из интегралов, и перемножение эпюр производится одинаково, вне зависимости, для каких внутренних силовых факторов они построены. Перемножение эпюр отличается лишь коэффициентом: при изгибе –  $\frac{1}{EI}$ , кручении –  $\frac{1}{GI_p}$ , растяжении –  $\frac{1}{EA}$ , сдвиге –  $\frac{1}{GA}$ .

В некоторых случаях интеграл Мора удобно вычислять с помощью формулы Симпсона. Эта формула приемлема в том случае, когда сумма порядков линий эпюр подынтегральных функций интеграла Мора не превышает 3 (кубическая парабола).

Рассмотрим функцию  $y = f(z)$ , непрерывную на отрезке  $[b - a]$ . Требуется вычислить определенный интеграл  $\int_a^b f(z) dz$ .

Разобьем отрезок  $[b - a]$  на  $n$  элементарных отрезков длиной  $h = (b - a) / n$ . Заменим  $y_z$  рядом дуг парабол, проходящих через концы каждой из трех ординат:  $y_0, y_{01}, y_1; y_1, y_{12}, y_2; y_2, y_{23}, y_3; y_3, y_{34}, y_4$  (рис. 7.18).

Тогда

$$\Delta k_F = \int_a^b y(z) dz \approx (h/6) [(y_0 + 4y_{01} + y_1) + (y_1 + 4y_{12} + y_2) + \dots + (y_{n-1} + 4y_{n-1,n} + y_n)]. \quad (7.47)$$

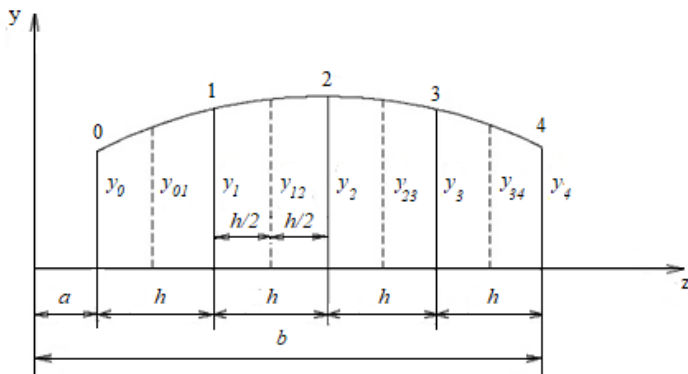


Рис. 7.18. Определение перемещений с помощью формулы Симпсона

При замене дуг парабол прямыми, проходящими через концы элементарных отрезков длиной  $h$ , выражение (7.47) преобразуется в формулу трапеций, которая имеет вид

$$\Delta k_F = \int_a^b y(z) dz \approx h(y_0/2 + y_1 + y_2 + \dots + y_n/2). \quad (7.48)$$

Когда одна из эпюр (рис. 7.19) очерчена по квадратной параболе (на участке действует распределенная нагрузка  $q$ ), а другая эпюра – трапеция, то формула Симпсона при перемножении эпюр принимает следующий вид:

$$\Delta k_F = l/6 (2ac + 2bd + ad + bc) + 2/3elg. \quad (7.49)$$

После подстановки в выражение (7.49)  $e = f - (a + b)/2$ ,  $g = (c + d)/2$  получим формулу трапеций:

$$\Delta k_F = l/6 (ac + 4fg + bd). \quad (7.50)$$

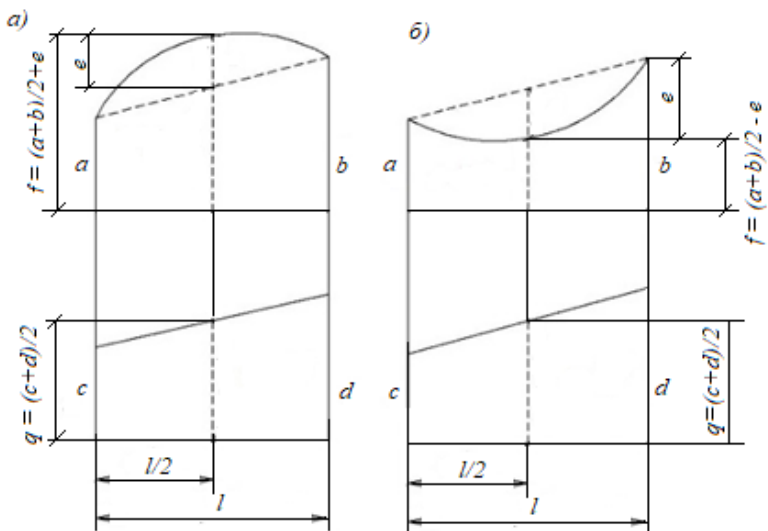


Рис. 7.19. Определение перемещений с помощью формулы трапеций

### 7.5. Перемещения узлов ферм. Определение перемещений в балках и рамах при осадке опор. Определение перемещений в рамах от изменения температуры по формуле Мора и правилу Верещагина

Определять перемещения в фермах целесообразно, используя интеграл Мора. Так как стержни ферм испытывают деформации только растяжения-сжатия, то при определении перемещений ее элементов (стержни, узлы, опорные крепления) применяется следующая формула:

$$\Delta_i = \sum \int_0^l \overline{(N_F N_i)} dz / EA, \quad (7.51)$$

где  $N_F$  – величина усилия в стержне фермы от внешней нагрузки.

При постоянной внешней нагрузке  $N_F$  – величина постоянная;

$\overline{N_i}$  – величина продольного усилия в этом же стержне фермы от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения. Тоже величина постоянная.

Тогда выражение (7.51) можно привести к виду

$$\Delta_i = \sum \int_0^l (N_F \bar{N}_i) dz / EA = (\sum N_F \bar{N}_i \int_0^l dz) / EA = \sum N_F \bar{N}_i l / EA. \quad (7.52)$$

Выражение (7.52) – формула для определения перемещений в плоских фермах. Обычно расчет перемещений элементов фермы проводится в табличной форме. Рассмотрим конкретный пример.

Для заданной фермы (рис. 7.20) определить вертикальное перемещение узла 4  $\Delta_4^{\text{верт}}$ .

Дано:  $F = 100$  кН;  $l = 2$  м;  $A = 10$  см<sup>2</sup>;  $EA = \text{const}$ ;  $E = 2 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>.

Алгоритм расчета:

1. Определим усилия во всех стержнях фермы от вертикальной нагрузки.

Определим опорные реакции от заданной внешней нагрузки.

При симметричной нагрузке  $R_A = R_B = F / 2$  (кН).

Вырезаем узел 1 и способом проекций находим:  $N_{1-2} = -F / 2 \sin 45^\circ = -F \sqrt{2} / 2 = N_{2-3}$ ;  $N_{1-4} = -N_{1-2} \cos 45^\circ = F / 2 = N_{3-4}$ ;  $N_{2-4} = 0$  (нулевой стержень при заданной внешней нагрузке).

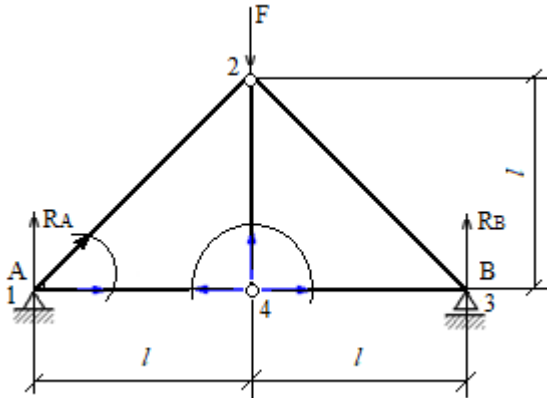


Рис. 7.20. Расчетная схема фермы по определению перемещения узла 4

2. Определим усилия в стержнях от единичной нагрузки, приложенной в узле 4 и направленной вниз.

Определим опорные реакции от единичной нагрузки:  $R_A = R_B = 1/2$ . По аналогии с п. 1 находим усилия в стержнях фермы.

Все расчеты сводим в табл. 7.2.

Таблица 7.2. Определение вертикального перемещения узла 4

Номер стержня	$N_F$	$\bar{N}$	$l$	$N_F \bar{N} l / EA$
1-2	$-F\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$l\sqrt{2}$	$F\sqrt{2}/2EA$
1-4	$F/2$	$1/2$	$l$	$F/4EA$
2-4	0	1	$l$	0
2-3	$-F\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$l\sqrt{2}$	$F\sqrt{2}/2EA$
3-4	$F/2$	$1/2$	$l$	$F/4EA$

$$\Delta_4^{\text{верт}} = \sum N_F \bar{N}_i l / EA = (F\sqrt{2}/2EA + F/4EA + F\sqrt{2}/2EA + F/4EA) l = 100 \cdot (\sqrt{2}/2 + 1/4 + \sqrt{2}/2 + 1/4) \cdot 200/2 \cdot 10^4 \cdot 10 = 0,24 \text{ см.}$$

Случайные осадки опор возникают в результате проседания грунта, размыва, оползня и других причин при отсутствии нагрузки на сооружение.

*В статически определимой системе при случайных осадках опор внутренние усилия не возникают.*

Найдем вертикальные и горизонтальные перемещения ключевого шарнира С (рис. 7.21).

По теореме Мора, сумма работ внешних сил единичного состояния на перемещениях в действительном состоянии равна возможной работе внутренних сил (равна нулю).

Изобразим первое и второе единичные состояния системы, возникающие при осадке опоры А. Для этого приложим единичные силы в ключевом шарнире С в вертикальном и горизонтальном направлениях. Определим опорные реакции, возникающие на опорах, значения которых подставим в соответствующие уравнения для определения  $\Delta u$  и  $\Delta z$ .

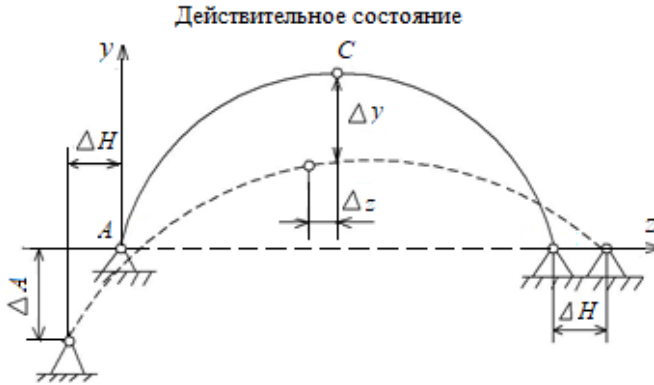


Рис. 7.21. Расчетная схема случайной осадки опоры

Рассмотрим первое единичное состояние (рис. 7.22).



Рис. 7.22. Расчетная схема первого единичного состояния

Составим уравнение Мора:

$$1 \cdot \Delta y - R_A \Delta_A - H \Delta_H - H \Delta_H = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= R_A \Delta_A + H \Delta_H + H \Delta_H = \Delta_a / 2 + 2l \Delta_H / 4f = \\ &= (\Delta_a + \Delta_H l / f) / 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе единичное состояние (рис. 7.23).

Составим уравнение Мора:

$$1 \cdot \Delta z - R_A \Delta_A - H \Delta_H + H \Delta_H = 0,$$

$$\Delta z = R_A \Delta_A + H \Delta_H - H \Delta_H = \Delta_a f / l.$$

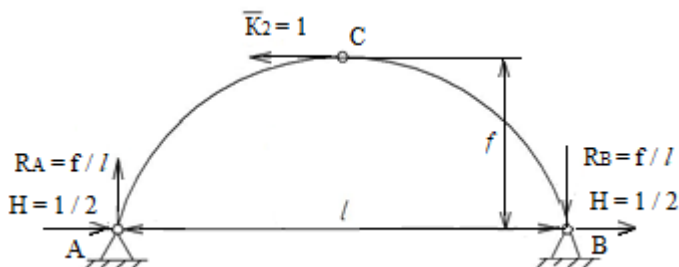


Рис. 7.23. Расчетная схема второго единичного состояния

*Упругие осадки опор* возникают в том случае, когда на систему действуют внешние нагрузки.

Рассмотрим определение перемещений на конкретном примере.

Для трехшарнирной рамы (рис. 7.24), на ригеле которой действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , определить перемещение ключевого шарнира  $C$ .

Вспользуемся теоремой Мора.

Сумма работ внешних сил единичного состояния на перемещениях в действительном состоянии равна возможной работе внутренних сил.

Действительное состояние рамы изображено на рис. 7.24.

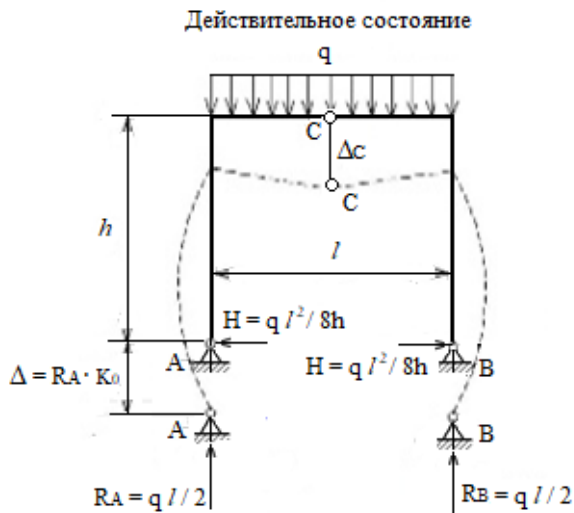


Рис. 7.24. Расчетная схема действительного деформированного состояния рамы

Строим грузовую эпюру от заданной внешней нагрузки и единичную эпюру, прикладывая вертикальную единичную силу в ключевом шарнире С.

Грузовая и единичная эпюры изображены на рис. 7.25 и 7.26.

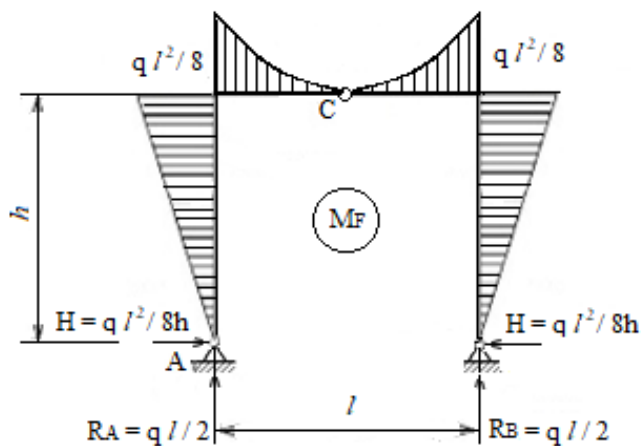


Рис. 7.25. Грузовая эпюра для трехшарнирной рамы

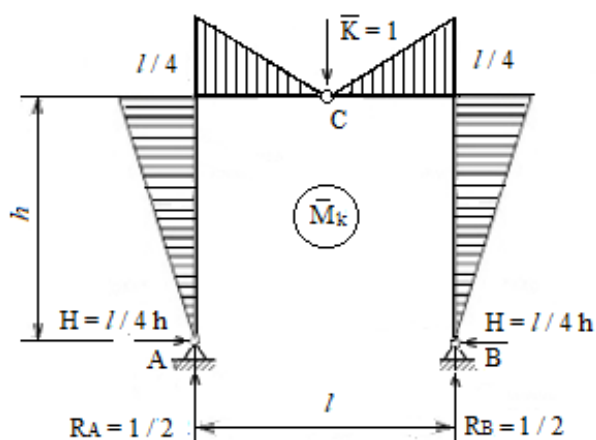


Рис. 7.26. Единичная эпюра для трехшарнирной рамы

Составляем уравнение Мора:

$$1 \cdot \Delta_c - 2R_A \Delta = (1 / EI) \int M_F \overline{M_K} dz.$$

Таким образом,

$$\Delta_c = (1 / EI) \int M_F \overline{M_K} dz + 2R_A \Delta, \quad (7.53)$$

где  $\Delta = R_A K_0$  – действительная осадка опор от заданной внешней нагрузки ( $K_0$  – коэффициент оседания опоры (жесткость упругого основания, которая численно равна силе, вызывающей единичное смещение, кН/м)).

В формуле (7.53) интеграл Мора можно определить по правилу Верещагина, перемножая грузовую и единичную эпюры.

Рассмотрим нагрев прямолинейного стержня (рис. 7.27).

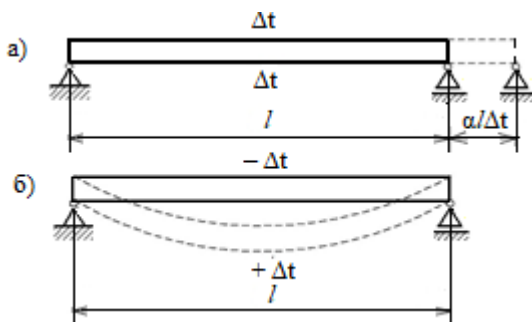


Рис. 7.27. Температурный нагрев прямолинейного бруса

При равномерном нагреве прямолинейного бруса (рис. 7.27, а) происходит его абсолютное удлинение без возникновения осевых напряжений, которое определяется по формуле

$$\Delta l = \alpha l \Delta t, \quad (7.54)$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

При неравномерном нагреве (рис. 7.27, б) брус изгибается без изгибающих напряжений, происходит его искривление аналогично деформации бруса при *чистом изгибе*.

Рассмотрим случай, когда брус неравномерно нагревается по высоте сечения при постоянном температурном воздействии по его длине (рис. 7.28, а). Если  $t_1 > t_2$ , то верхние волокна бруса будут растянуты, нижние – сжаты. Возьмем элементарный участок бруса длиной  $dz$ . Считаем, что левое сечение участка  $dz$  закреплено в заделке (рис. 7.28, в). Пусть ось бруса проходит через центр тяжести (ц. т.) поперечного сечения (рис. 7.28, б). Тогда средняя температура по сечению бруса определяется по формуле

$$t_0 = t_1 [(t_1 - t_2) / c] c_2. \quad (7.55)$$

Если центр тяжести находится посередине сечения, то  $t_0 = (t_1 + t_2) / 2$ , удлинение по оси бруса  $d\lambda_r = t_0 \alpha dz$ , взаимный угол поворота смежных сечений  $d\varphi_t = (t_1 - t_2) \alpha dz / c = t_r \alpha dz / c$ , где  $t_r$  – разность температур нагрева верхнего и нижнего волокна бруса.

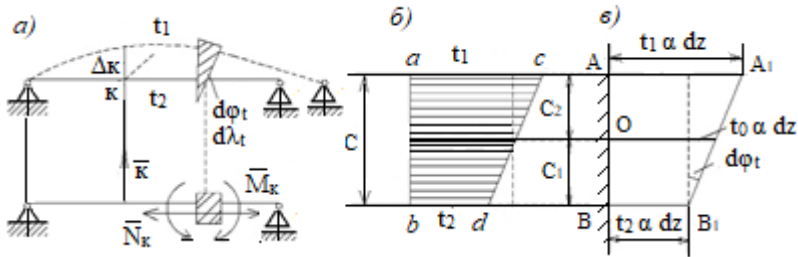


Рис. 7.28. Расчетная схема для определения температурных перемещений бруса

Определим температурные перемещения по формуле Мора:

$$1 \cdot \Delta_{kt} = \Sigma \int \overline{M_K} d\varphi_t + \Sigma \int \overline{N_K} d\lambda_r;$$

$$1 \cdot \Delta_{kt} = \Sigma \int \overline{M_K} t_r \alpha dz / c + \Sigma \int \overline{N_K} t_0 \alpha dz. \quad (7.56)$$

Формула (7.56) предназначена для определения перемещений при переменном температурном воздействии.

Если  $t_1, t_2, c = \text{const}$  по длине стержня, то формула (7.56) принимает следующий вид:

$$\Delta_{kt} = \Sigma (\alpha t_r / c) \int \overline{M_K} dz + \Sigma (\alpha t_0) \int \overline{N_K} dz, \quad (7.57)$$

где  $\int \overline{M_K} dz$  и  $\int \overline{N_K} dz$  – площади эпюр  $\overline{M_K}$  и  $\overline{N_K}$  во втором состоянии (рис. 7.28, а) при  $\overline{K} = 1$ .

Обозначим площади эпюр  $\overline{M_K}$  и  $\overline{N_K}$  через  $\Omega_{\overline{M_K}}$  и  $\Omega_{\overline{N_K}}$  соответственно, тогда формула (7.57) примет вид

$$\Delta_{\kappa l} = \Sigma(\alpha t_r / c) \Omega_{\overline{M_K}} + \Sigma(\alpha t_0) \Omega_{\overline{N_K}}. \quad (7.58)$$

Для шарнирно-стержневых ферм  $\Delta_{\kappa l} = \alpha \Sigma t_0 \overline{N_K} S$ , где  $S$  – длина стержня;  $t_0$  – температура нагрева данного стержня (меняется от стержня к стержню).

*Правило знаков.*

$\overline{M_K} d\varphi$ , принимается со знаком «+», если  $\overline{M_K}$  и  $d\varphi$  имеют одно направление,  $\overline{N_K} d\lambda_r$  принимается со знаком «+», если  $\overline{N_K}$  вызывает растяжение, изменение температуры – удлинение элемента  $d\lambda_r$ .

## 7.6. Примеры расчета

**Задача 7.1.** Для консольной балки (рис. 7.29) определить угол поворота сечения  $B$ . Жесткость балки  $EI = \text{const}$ .

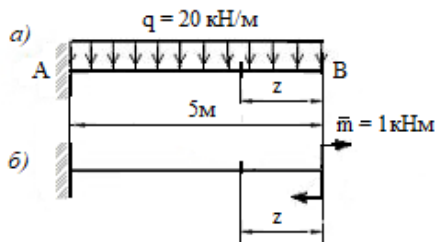


Рис. 7.29. Расчетная схема консольной балки

**Решение.**

1. Определим значения моментов в сечении  $z$  для первого грузового (рис. 7.29, а) и второго единичного (рис. 7.29, б) состояний консольной балки. Для определения угла поворота в заданном сечении второго состояния прикладываем единичный момент.



**Задача 7.3.** Для статически определимой рамы (рис. 7.31) определить перемещение сечения  $B$ . Жесткость элементов рамы  $EI = \text{const}$ .

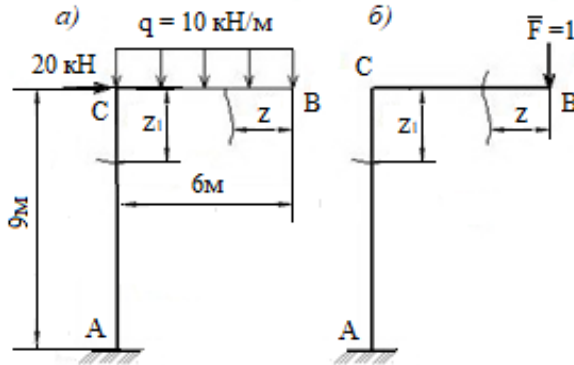


Рис. 7.31. Расчетная схема статически определимой рамы

**Решение.**

1. Определим значения моментов в сечениях  $z$  и  $z_1$  для первого грузового (рис. 7.31,  $a$ ) и второго единичного (рис. 7.31,  $b$ ) состояний статически определимой рамы.

Первое грузовое состояние. I участок:  $0 \leq z \leq 6$  м,  $M_F = -q z^2 / 2$ , II участок:  $0 \leq z \leq 9$  м,  $M_F = -q \cdot 6^2 / 2 - 20z_1$ .

Второе грузовое состояние. I участок:  $0 \leq z \leq 6$  м,  $\overline{M}_1 = -z$ , II участок:  $0 \leq z \leq 9$  м,  $\overline{M}_1 = -6$ .

2. Для определения перемещения сечения  $B$  применим интеграл Мора:

$$\begin{aligned}
 y_B &= (1 / EI) \cdot \left[ \int_0^6 -z (-q z^2 / 2) dz + \int_0^9 -6 \cdot (-10 \cdot 6^2 / 2 - 20z_1) \cdot dz \right] = \\
 &= (1 / EI) \left[ q z^4 / 8 \Big|_0^6 + (1080 - 10z_1^2) \Big|_0^9 \right] = 1890 / EI.
 \end{aligned}$$

**Задача 7.4.** Для однопролетной балки (рис. 7.32) определить прогиб под силой  $F$ . Жесткость балки  $EI = \text{const}$ .

**Решение.**

1. Для определения прогиба воспользуемся правилом Верещагина. Построим грузовую (рис. 7.32,  $b$ ) и единичную (рис. 7.32,  $z$ ) эпюры.

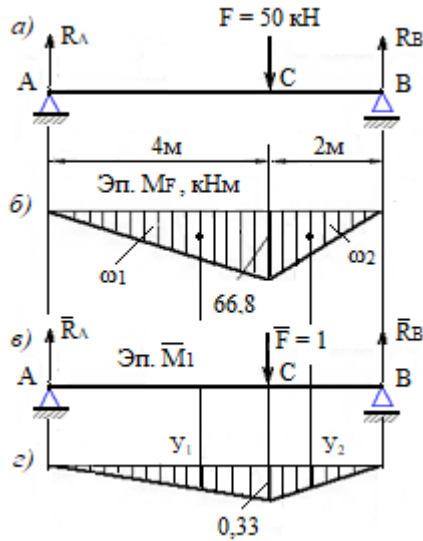


Рис. 7.32. Расчетная схема однопролетной балки

2. Перемножим полученные эпюры по правилу Верещагина.

$$y_B = (1 / EI) \Sigma (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2),$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – площади грузовой эпюры на участках балки;

$y_1, y_2$  – ординаты соответствующих единичных эпюр под центром тяжести грузовых эпюр.

$$y_B = (1 / EI) (66,8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0,33 / 6 + 66,8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,33 / 6) = 44,1 / EI.$$

**Задача 7.5.** Определить горизонтальное перемещение подвижной опоры  $B$  (рис. 7.33) при изменении температуры, если высота сечения элементов рамы  $c = h / 10$ .

**Решение.**

1. Построим эпюры  $\overline{M}_K$  и  $\overline{N}_K$  от  $\overline{K} = 1$ . Определим расчетные параметры для стойки и ригеля.

Стойка:  $\Omega_{\overline{M}_K} = h^2 / 2, t_r = t_1 - t_2 = 20 - 15 = 5^\circ, t_0 = (t_1 + t_2) / 2 = (20 + 15) / 2 = 17,5^\circ.$

Ригель:  $\Omega_{\overline{N}_K} = 1h, t_r = t_1 - t_2 = 50 - 15 = 35^\circ, t_0 = (t_1 + t_2) / 2 = (50 + 15) / 2 = 32,5^\circ.$

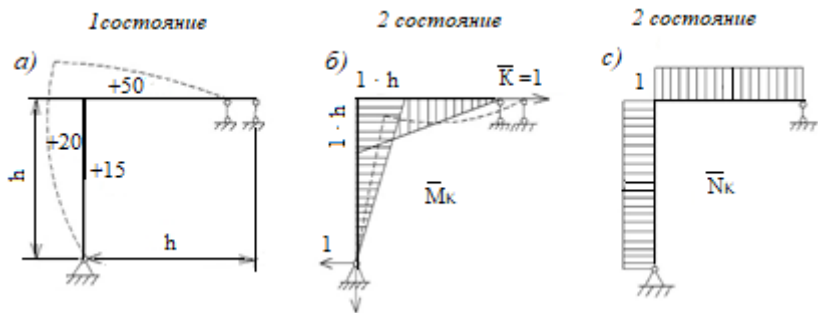


Рис. 7.33. Расчетная схема рамы при температурном воздействии

2. Определим перемещение подвижной опоры по формуле

$$\Delta_{kt} = \sum (\alpha t_r / c) \Omega_{M_k} + \sum (\alpha t_0) \Omega_{N_k} = -[(5\alpha / c) (h^2 / 2) + (35\alpha / c) (h^2 / 2)] + (17,5\alpha h + 32,5\alpha h) = -200\alpha h + 50\alpha h = -150\alpha h.$$

Согласно полученным расчетам можно сделать вывод, что температурные линейные деформации рамы составляют 25 % от температурных изгибных деформаций ее элементов.

### 7.7. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.6.** Для рамы (рис. 7.34) определить перемещение опоры *B* с использованием интеграла Мора.

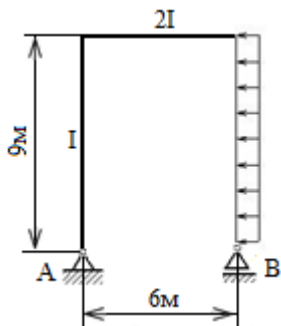


Рис. 7.34. Расчетная схема рамы

**Задача 7.7.** Используя правило Верещагина, для статически определимой балки (рис. 7.35) определить угол поворота сечения  $C$ .

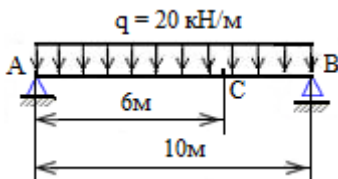


Рис. 7.35. Расчетная схема статически определимой балки

**Задача 7.8.** Для рамы (рис. 7.36) способом Верещагина определить угол поворота сечения  $C$  в численном виде.  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, сечение элементов рамы – швеллер № 12.

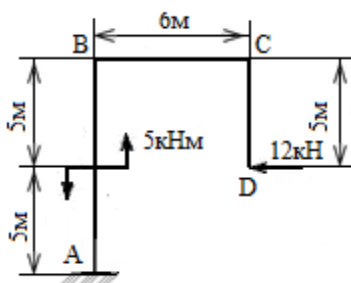


Рис. 7.36. Расчетная схема статически определимой рамы

**Задача 7.9.** Определить перемещение сечения  $C$  балки (рис. 7.37) при неравномерном нагреве. Поперечное сечение балки – двутавр № 12.

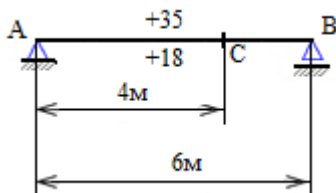


Рис. 7.37. Расчетная схема балки при температурном воздействии

**Задача 7.10.** Для балки (рис. 7.38) определить перемещение сечения  $C$ , если вертикальная осадка опоры  $A$   $\Delta = 2,5$  см. Сечение балки – швеллер № 16.

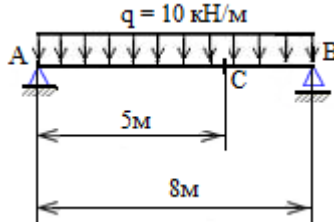


Рис. 7.38. Расчетная схема балки при осадке опор

### 7.8. Контрольные вопросы

1. Понятия о действительных и возможных перемещениях линейно-деформируемых систем.
2. Зависимость между работой внешних и внутренних сил.
3. Опишите порядок определения перемещений по Мору.
4. Как определяются перемещения по правилу Верещагина?
5. В какой последовательности определяют перемещения сечений балки способом Мора с использованием правила Верещагина?
6. Как выглядит единичное состояние для системы, если необходимо определить прогиб сечения?
7. Как выглядит единичное состояние для системы, если необходимо определить угол поворота сечения?
8. Когда удобно применять формулу Симпсона для перемножения эпюр?
9. Можно ли определить перемещение отдельно от силы  $F$  и распределенной нагрузки  $q$  с последующим сложением результатов?
10. Возможные упрощения формулы Мора в случае расчета рам, арок, балок.
11. Как записывается формула Мора при вычислении перемещений в фермах при действии узловой нагрузки?
12. Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
13. Какой вид имеет формула Мора для определения температурных перемещений в линейно-деформируемых системах?
14. Какой вид имеет формула Мора для определения перемещений при упругих осадках опор?

# СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

## Глава 8. МЕТОД СИЛ

### 8.1. Свойства статически неопределимых систем.

#### Степень статической неопределимости. Лишние связи.

#### Сущность метода сил. Основная система.

#### Требования, предъявляемые к основной системе

Система называется статически неопределимой, если усилия в ее элементах невозможно определить только из уравнений равновесия.

Для расчета таких систем необходимо дополнительно составлять уравнения совместности деформаций, число которых равно степени статической неопределимости системы.

Под степенью статической неопределимости понимают разность между числом неизвестных усилий (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений равновесия.

Элементарной связью является любой кинематический элемент, предотвращающий перемещение системы в одном направлении. Например, в балке (рис. 8.1) опорные стержни являются связями.

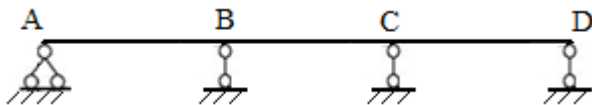


Рис. 8.1. Схема статически неопределимой балки

Связи, наложенные на систему, бывают *внешними* и *внутренними*. Под *внешними* связями понимают ограничения, накладываемые на перемещения относительно основания.

*Внутренние* связи ограничивают взаимные (относительные) перемещения элементов системы.

Если плоская система состоит из  $D$  дисков, каждый из которых можно рассматривать как жесткое тело, то количество параметров, определяющих положение этой системы, будет равно  $3D$ .

Каждый шарнир, соединяющий два диска, допускает лишь их взаимный поворот. Следовательно, он уменьшает количество возможных перемещений системы на две единицы. Каждый опорный стержень устраняет возможность перемещения системы в соответствующем направлении.

Таким образом, степень статической неопределимости системы, ограниченной внешними связями, определяется по формуле

$$n = C + 2Ш - 3Д, \quad (8.1)$$

где  $C$  – число опорных связей;

$Ш$  – число шарниров, соединяющих диски;

$Д$  – число дисков системы, каждый из которых может рассматриваться как абсолютно жесткое тело.

Определим степень статической неопределимости рамы (рис. 8.2).

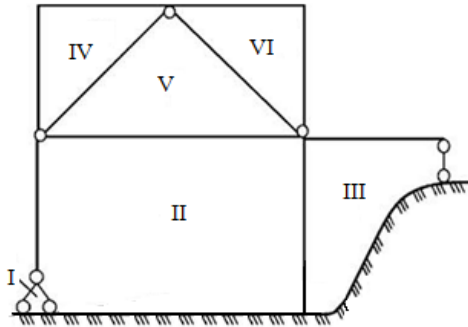


Рис. 8.2. Расчетная схема статически неопределимой рамы

Количество лишних связей в заданной системе определим по следующей формуле:

$$Л = 3К - Ш, \quad (8.2)$$

где  $К = 6$  – количество замкнутых контуров в системе;

$Ш = 13$  – число простых шарниров.

Тогда

$$Л = 3 \cdot 6 - 13 = 5.$$

Шарнир называется простым, или одиночным, если он связывает два элемента (рис. 8.3, *а*).

Если шарнир связывает  $n$  элементов, то он называется кратным, или общим (рис. 8.3, *б*).

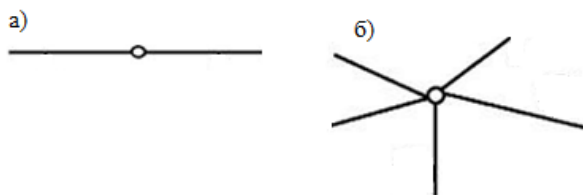


Рис. 8.3. Схема одиночного и кратного шарниров

Кратный шарнир эквивалентен  $n - 1$  простым шарнирам.  
С другой стороны,

$$n_c = C + 2Ш - 3Д = 3 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = -5.$$

Так как  $n_c = -5$ , то рама является 5 раз статически неопределимой и число лишних связей равно 5.

Сущность метода сил заключается в том, что отбрасываются лишние связи и заданная система заменяется эквивалентной статически определимой и геометрически неизменяемой системой. Метод сил при расчете статически неопределимых систем рассмотрим на конкретном примере.

Для рамы (рис. 8.4) построить эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

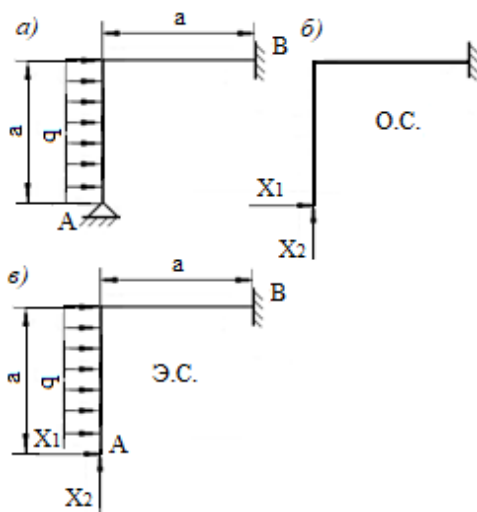


Рис. 8.4. Схема статически неопределимой рамы

Для заданной системы определим степень статической неопределимости по формуле

$$n_c = C_0 + 2Ш - 3Д = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Данная система является дважды статически неопределимой, т. е. имеет две лишние связи. Рассмотрим статически определимую систему, полученную из заданной путем удаления лишних связей. Такая система называется основной.

*Основная система (О. С.) должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.*

Заданная система может иметь несколько О. С. При этом для расчетов необходимо выбирать самую простую О. С.

Удалим опорные связи на опоре  $A$  и получим О. С., изображенную на рис. 8.4, б. Вместо отброшенных связей введем неизвестные силы  $X_1$  и  $X_2$ . О. С., нагруженная внешней нагрузкой и лишними неизвестными, называется *эквивалентной системой* (Э. С.) (рис. 8.4, в). Эквивалентная система будет эквивалентной заданной только при тех значениях неизвестных  $X_1$  и  $X_2$ , при которых горизонтальное  $\Delta_1$  и вертикальное  $\Delta_2$  перемещения точки  $A$  равны нулю, т. е.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0.$$

## **8.2. Составление канонических уравнений. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Решение канонических уравнений. Проверка правильности расчетов**

При вычислении перемещений, когда  $\Delta_i = f(X_1, X_2, F)$ , используем принцип независимости действия сил, тогда

$$\Delta_1 = \Delta_i(X_1) + \Delta_i(X_2) + \Delta_i(F) = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{iF} = 0, \quad (8.3)$$

где  $\Delta_{iF}$  – перемещение в О. С. по направлению силы  $X_i$ , вызванное силой  $F$ .

Для упругих линейно-деформируемых систем имеем:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad (8.4)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение в О. С. по направлению силы  $X_i$ , вызванное силой  $X_k = 1$ .



Коэффициенты, которые имеют одинаковые индексы, называются главными коэффициентами канонических уравнений.

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \overline{M_i} \overline{M_i} dz / EI. \quad (8.8)$$

Главные коэффициенты всегда имеют положительное значение. В балках и рамах для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений удобно пользоваться способом Мора, т. е.

$$\delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \overline{M_i} \overline{M_k} / EI; \quad \Delta_{iF} = \sum_{i=1}^n \overline{M_i} \overline{M_F} / EI. \quad (8.9)$$

После нахождения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений выполняем следующие проверки.

1. Построчная проверка:

$$\delta_{is} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \overline{M_i} \overline{M_s} dz / EI = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}, \quad (8.10)$$

где  $\overline{M_i}$  –  $i$ -я единичная эпюра;

$\overline{M_s}$  – суммарная единичная эпюра;

$\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}$  – коэффициенты  $i$ -го канонического уравнения.

2. Универсальная проверка:

$$\delta_{ss} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \overline{M_s} \overline{M_s} dz / EI = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (8.11)$$

3. Проверка свободных членов:

$$\Delta_{sF} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \overline{M_s} \overline{M_F} dz / EI = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}. \quad (8.12)$$

Перемножение эпюр для проверки правильности определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений возможно

и способом Верещагина. Определим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений для рассматриваемого примера (см. рис. 8.4, а).

Для этого построим эпюры изгибающих моментов в О. С. от действия единичных лишних неизвестных  $X_1$ ,  $X_2$  и внешней нагрузки (рис. 8.5, а, б, в).

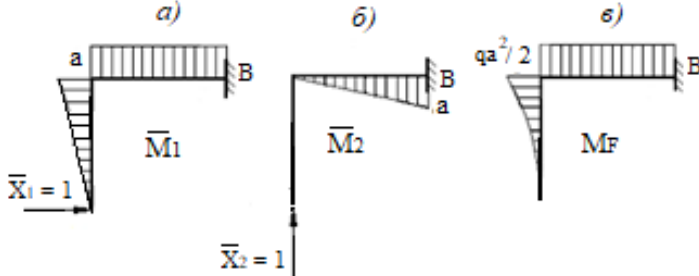


Рис. 8.5. Единичные и грузовая эпюры в О. С.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \overline{M_1} \overline{M_1} / EI = [(1/2) a a (2/3) a] / EI = (4/3) a^3 / EI;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^n \overline{M_1} \overline{M_2} / EI = -(1/2) a a a / EI = -(1/2) a^3 / EI;$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^n \overline{M_2} \overline{M_2} / EI = [(1/2) a a (2/3) a] / EI = (1/3) a^3 / EI;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum_{i=1}^n \overline{M_1} M_F / EI = [(1/2) q a a (1/4) a + (1/2) q a a a a] / EI = \\ &= (5/8) q a^4 / EI; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2F} = \sum_{i=1}^n \overline{M_2} M_F / EI = -[(1/2) q a a (1/2) a a] / EI = -(1/4) q a^4 / EI.$$

Подставив найденные коэффициенты в систему канонических уравнений, получим:

$$(4/3)a^3 X_1 - (1/2)a^3 X_2 + (5/8)qa^4 = 0;$$

$$-(1/2)a^3 X_1 + (1/3)a^3 X_2 - (1/4)qa^4 = 0.$$

После несложных преобразований имеем:

$$32X_1 - 12X_2 + 15qa = 0;$$

$$-6X_1 + 4X_2 - 3qa = 0.$$

Решая последнюю систему уравнений методом исключений, находим:

$$X_1 = -3qa/7; \quad X_2 = 3qa/28.$$

Знак «-» в выражении для  $X_1$  указывает на то, что истинное направление неизвестного усилия противоположно первоначально принятому направлению.

Подставляя найденные значения  $X_1$  и  $X_2$  в канонические уравнения метода сил, проверяем правильность расчетов по определению этих величин.

### 8.3. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Контроль правильности их построения

Для построения суммарной эпюры изгибающих моментов обычно используют принцип независимости действия сил, согласно которому суммарный изгибающий момент в любом сечении можно вычислить по формуле

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_F. \quad (8.13)$$

Для рассматриваемого примера сложение эпюр выполнено на рис. 8.6. После построения суммарной эпюры изгибающих моментов вычисляем поперечные силы, рассматривая равновесия отдельных участков рамы.

Рассмотрим произвольный участок рамы  $AB$ , на котором по всей длине действует равномерно распределенная нагрузка  $q$  (рис. 8.7).

Составим уравнения моментов относительно правого и левого сечений участка  $AB$ :

$$\sum M_n = Q_n a + M_n - M_n - qa^2/2 = 0;$$

$$Q_n = qa^2 / 2 + (M_n - M_n) / a = Q^0 + (M_n - M_n) / a;$$

$$\sum M_n = Q_n a + M_n - M_n - qa^2 / 2 = 0;$$

$$Q_n = -qa^2 / 2 + (M_n - M_n) / a = -Q^0 + (M_n - M_n) / a,$$

где  $Q^0$  – балочная поперечная сила.

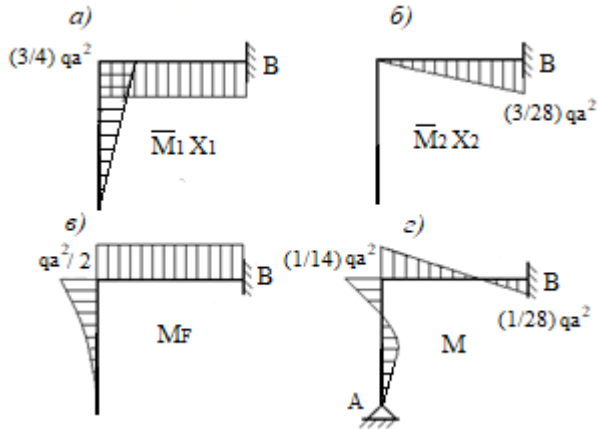


Рис. 8.6. Построение суммарной эпюры  $M$

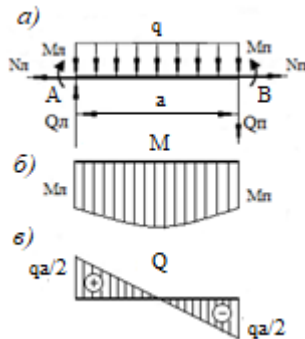


Рис. 8.7. Расчетная схема для определения ординат  $Q$  на участке рамы с распределенной нагрузкой

На участке, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , формула для определения поперечной силы имеет вид

$$Q = (M_{\text{п}} - M_{\text{л}}) / a. \quad (8.14)$$

По суммарной эпюре изгибающих моментов (см. рис. 8.6, з) строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 8.8, а). Рассматривая равновесие узла С на эпюре поперечных сил  $Q$  (рис. 8.8, б), строим эпюру продольных сил  $N$  (рис. 8.8, в).

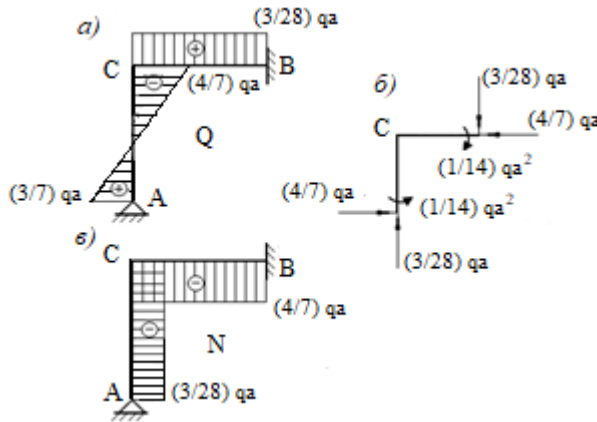


Рис. 8.8. Построение эпюр поперечных и продольных сил

После построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  выполняют две проверки.

1. Статическая проверка – вырезаются жесткие узлы, в которых с эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  согласно правилу знаков прикладываются внутренние силовые факторы, и рассматривается равновесие этих узлов.

2. Кинематическая проверка – по правилу Верещагина перемножаются окончательная эпюра моментов с одной из единичных эпюр. Результат перемножения должен быть равен нулю или отличаться от нулевого результата не более чем на 5%. Для рассматриваемого примера выполним кинематическую проверку.

$$\begin{aligned} \overline{MM}_1 &= (qa^2 / 14 - qa^2 / 28) a / 2 + qa^2 a \cdot 2a / 2 \cdot 14 \cdot 3 - \\ &- qa^3 a / 12 \cdot 2 = qa^4 / 56 + qa^4 / 42 - qa^4 / 24 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если кинематическая проверка сходится, то это свидетельствует о том, что окончательная эпюра  $M$  построена верно.

#### 8.4. Использование в расчетах статически неопределимых рам методом сил компьютерных программ Excel, MathCad, специальных программ MetSil

При ручных расчетах статически неопределимых систем возникают серьезные вычислительные трудности уже при степени статической неопределимости равной трем и выше. Кроме этого возрастает вероятность ошибок при определении грузовых и единичных перемещений, решении систем канонических уравнений, определении неизвестных и построении окончательных эпюр внутренних силовых факторов.

С развитием ЭВМ появилась возможность некоторые проблемные и громоздкие вычислительные операции производить без участия человека с помощью электронной машины. Однако ряд операций, связанных с подготовкой и внесением исходных данных, приходится выполнять вручную.

Речь идет о построении грузовых и единичных эпюр изгибающих моментов, численные значения которых, а также длины участков, жесткости элементов конструкции можно специальным образом обработать и занести в память ЭВМ. Все дальнейшие расчеты ЭВМ производит самостоятельно с высокой скоростью и точностью обработки по специально разработанным программам, таким как Excel, MathCad, специальным программам MetSil и др.

В результате полученных расчетов ЭВМ выдает на печать информацию о распределении внутренних силовых факторов в стержневых элементах конструкций.

Рассмотрим матричную запись системы канонических уравнений. Для этого сформируем несколько матриц, в число которых входят матрица-столбец лишних неизвестных, матрица-столбец свободных членов и матрица единичных коэффициентов.

Матрица-столбец лишних неизвестных  $X$ , матрица-столбец свободных членов  $\Delta$  и матрица единичных коэффициентов  $A$  имеют соответственно следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} \delta_{11}\delta_{12}\dots\delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22}\dots\delta_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}\delta_{n2}\dots\delta_{nn} \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Матричная запись системы канонических уравнений с учетом матрицы (8.15) принимает вид

$$AX + \Delta = 0. \quad (8.16)$$

Решение матричного уравнения (8.16) относительно вектора лишних неизвестных принимает вид

$$X = -A^{-1}\Delta. \quad (8.17)$$

Матрицу свободных членов можно определить с помощью матричного уравнения

$$\Delta = \overline{M}^T B M_F, \quad (8.18)$$

где  $B$  – матрица податливости.

Для  $j$ -го элемента системы матрица податливости имеет вид

$$B_j = (I_j / 6EI_j) \cdot \begin{bmatrix} 1 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 4 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 1 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Матрицу единичных коэффициентов найдем из матричного уравнения:

$$A = \overline{M}^T B \overline{M}. \quad (8.20)$$

С учетом уравнения (8.18) и матрицы (8.19) матричная форма системы канонических уравнений имеет вид

$$\overline{M}^T B \overline{N} + \overline{M}^T B M_F = 0. \quad (8.21)$$

Матричное уравнение для определения суммарных изгибающих моментов записывается в следующем виде:

$$M = \overline{M} X + M_F. \quad (8.22)$$

Рассмотрим порядок решения статически неопределимых систем методом сил.

1. Разбиваем статически неопределимую раму на участки (рис. 8.9), выбираем точку наблюдения, вводим положительные и отрицательные стороны и проставляем слева направо характерные сечения на каждом участке.

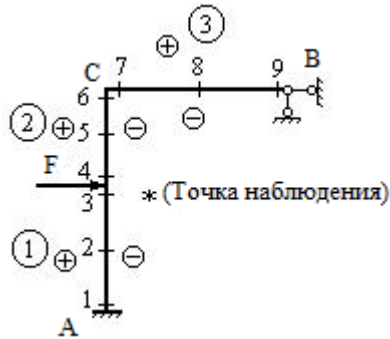


Рис. 8.9. Расчетная схема для статически неопределимой рамы матричным методом

2. Определяем степень статической неопределимости рамы.
3. Выбираем О. С.
4. Изображаем эквивалентную систему.
5. Строим грузовую эпюру моментов  $M_F$ .
6. Изображаем единичные состояния рамы и строим единичные эпюры моментов  $M_i$ .
7. Формируем матрицу грузовых моментов:

$$M_F = \begin{bmatrix} M_{F1} \\ M_{F2} \\ \dots \\ M_{F(3K)} \end{bmatrix}, \quad (8.23)$$

где  $K$  – число участков.

8. Формируем матрицы единичных моментов:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \overline{M_{11}} \overline{M_{21}} \\ \overline{M_{12}} \overline{M_{22}} \\ \dots \\ \overline{M_{1(3K)}} \overline{M_{2(3K)}} \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$



Свободные члены канонических уравнений  $\Delta_{kt}$  определяются по формуле

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha t_0 \Omega_{\bar{N}} + \sum \alpha \Delta t \Omega_{\bar{M}} / h, \quad (8.27)$$

где  $\alpha$  – коэффициент температурного линейного расширения материала;  
 $t_0$  – средняя температура по сечению рассматриваемого элемента;  
 $\Delta t$  – градиент температур по сечению рассматриваемого элемента;  
 $\Omega_{\bar{N}}$ ,  $\Omega_{\bar{M}}$  – площади единичных эпюр  $N$  и  $M$  соответственно.

Рассмотрим температурные воздействия на конкретном примере.

Рассчитать статически неопределимую раму на температурные воздействия (рис. 8.10, а). Построить эпюру моментов для рамы, если  $\alpha = 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $h_1 / h_2 = 1,26$ ;  $I_1 / I_2 = 2$ ;  $EI = 13,5 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ ;  $h_2 = 0,1 \text{ м}$ .

1. Определим степень статической неопределимости:

$$n = 3K - 2Ш + C_0 - 3 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 - 3 = 1.$$

2. Выбираем О. С. (рис. 8.10, б).

3. Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0, \quad X_1 = -\Delta_{1t} / \delta_{11}.$$

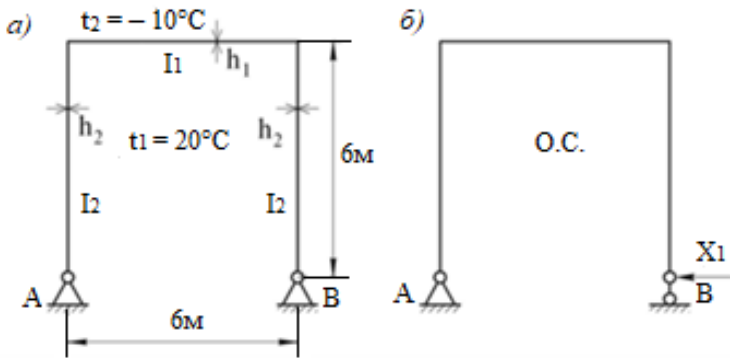


Рис. 8.10. Расчетная схема рамы на температурное воздействие

4. Строим единичные эпюры изгибающих моментов и продольных сил в О. С. (рис. 8.11).

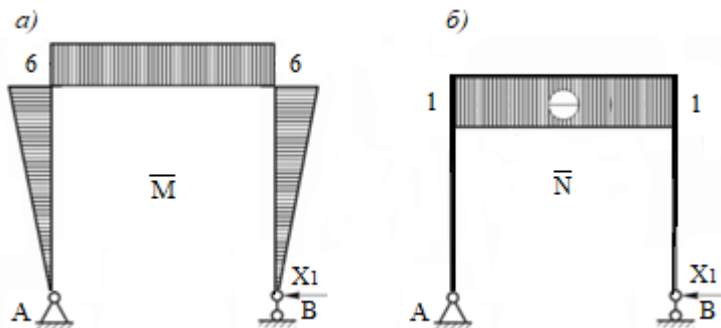


Рис. 8.11. Построение единичных эпюр  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  в О. С.

5. Вычисляем коэффициент и свободный член канонического уравнения, используя правило Верещагина:

$$\delta_{11} = [2 \cdot (1/2) \cdot 6 \cdot 6 \cdot (2/3) \cdot 6] / EI_2 + (6 \cdot 6 \cdot 6) / 2 EI_2 = (144 + 108) / EI_2 = 252 / EI_2 \text{ (Н/м)};$$

$$\Delta_{1t} = \alpha t_0 \Omega_{\bar{N}} + \alpha \Delta t \Omega_{\bar{M}} / h = -\alpha (20 + (-10)) \cdot 1 \cdot 6 / 2 - \alpha (20 - (-10)) \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 / 2 \cdot 0,1 - \alpha (20 - (-10)) \cdot 6 \cdot 6 / 2 \cdot 0,126 = -0,0194 \text{ м}.$$

6. Решаем уравнение метода сил относительно неизвестной реакции:

$$X_1 = -(-0,0194 / 252) EI_2 = (0,0194 / 252) \cdot 13,5 \cdot 10^6 = 1039 \text{ Н}.$$

7. Строим окончательную эпюру (рис. 8.12) по формуле

$$M_t = \bar{M}_1 X_1.$$

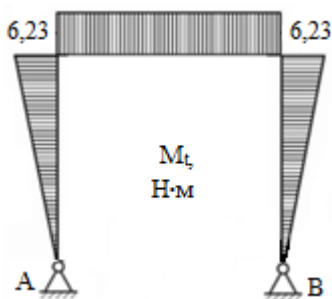


Рис. 8.12. Окончательная эпюра моментов при температурном воздействии



Лишние связи отбрасываем в месте осадки опоры  $B$ , вводим неизвестные усилия  $X_1, X_2, X_3$  и получаем О. С. рамы (рис. 8.13, б).

Определим грузовые коэффициенты канонических уравнений по формуле (8.29):

$$\begin{aligned}\Delta_{1\Delta} &= -(-1b) = b; \\ \Delta_{2\Delta} &= -(-1a) = a; \\ \Delta_{3\Delta} &= -(1\varphi) = \varphi.\end{aligned}\tag{8.30}$$

Если связи отброшены не в месте осадки опор, то по направлению отброшенных связей прикладываются единичные силы и определяют опорные реакции в месте осадки.

Рассмотрим случай, когда у О. С. отброшена опора  $A$ . Определим реактивные усилия, возникающие на опоре  $B$ , где происходят осадки (рис. 8.14).

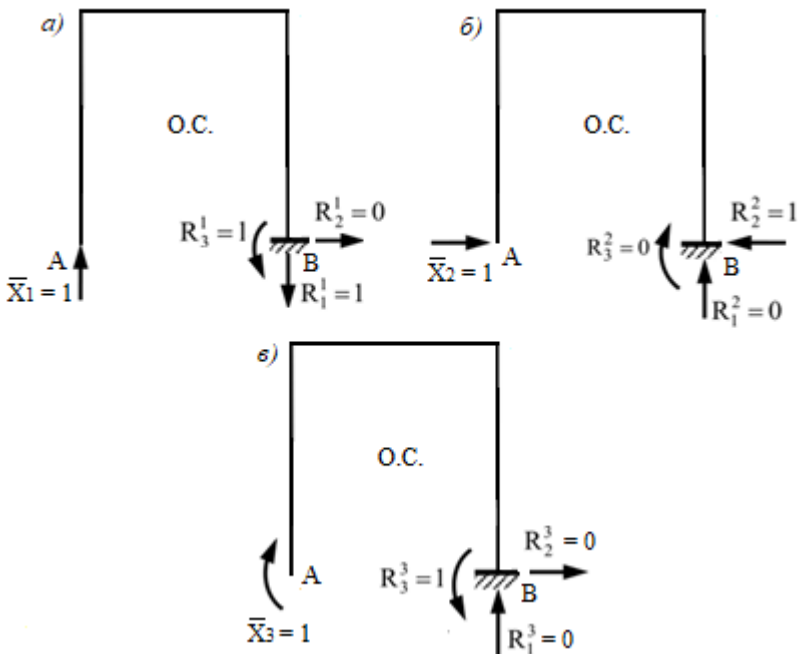


Рис. 8.14. Определение реактивных усилий в местах осадок опоры  $B$  при отброшенной опоре  $A$  в О. С.

Определим грузовые коэффициенты по формуле (8.29):

$$\begin{aligned}\Delta_{1\Delta} &= -(R_1^1 b) - (-R_3^1 \varphi) = -b + l \varphi; \\ \Delta_{2\Delta} &= -(-R_2^2 b) = b; \\ \Delta_{3\Delta} &= -(-R_3^3 \varphi) = \varphi.\end{aligned}\quad (8.31)$$

Если О. С. (смешанная система) и неизвестные выбраны в виде, показанном на рис. 8.15, то согласно формуле (8.29) получим грузовые коэффициенты канонического уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta_{1\Delta} &= -(R_1^1 b) - (-R_2^1 a) = b / l + a / 2h; \\ \Delta_{2\Delta} &= -(-R_2^2 a) = -a / h; \\ \Delta_{3\Delta} &= -(-R_1^3 b) - (R_2^3 a) - (1\varphi) = b / l - a / 2h - \varphi.\end{aligned}\quad (8.32)$$

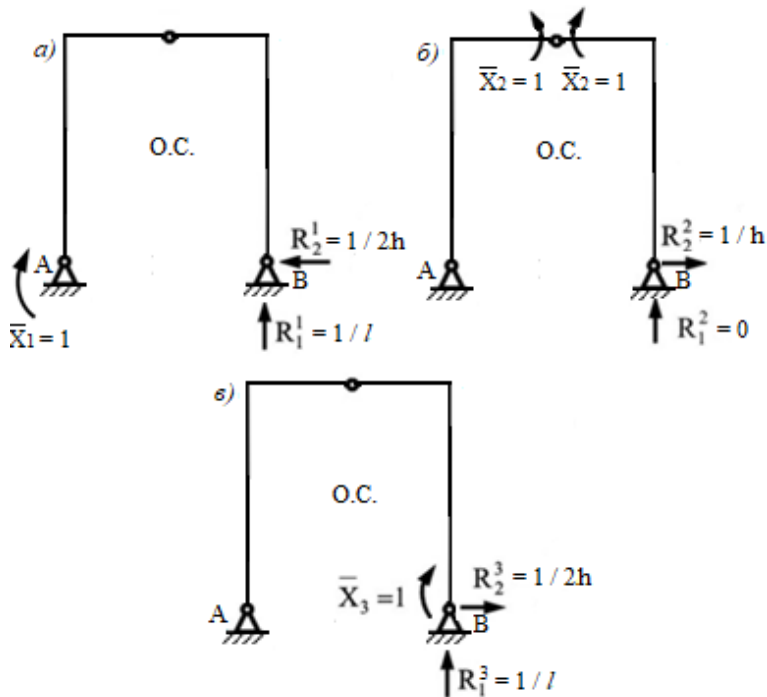


Рис. 8.15. Смешанная О. С. для рамы при осадке опоры *B*

После определения грузовых коэффициентов решаем систему канонических уравнений и находим реактивные усилия в опоре *B* при ее осадке.

### 8.6. Упрощение расчета сложных симметричных статически неопределимых рам: выбор рациональной основной системы, групповые неизвестные, преобразование нагрузок, способ упругого центра

Использование метода сил для расчета статически неопределимых систем с количеством лишних связей более трех вызывает определенные трудности в решении системы канонических уравнений, при условии, что все коэффициенты системы отличны от нуля.

В связи с этим нужно стремиться так выбрать О. С., чтобы возможно большее число второстепенных единичных перемещений  $\delta_{ik}$  и свободных членов  $\Delta_{iF}$  обратилось в нуль. Основным способом достижения этой цели является использование симметрии. Стержневая система является симметричной, если при этом симметричны не только ее оси и опорные закрепления (геометрическая симметрия), но и жесткости (упругая симметрия) отдельных элементов. При этом внешняя нагрузка, действующая на систему, может быть и несимметричной.

При выборе О. С. лишние неизвестные следует выбирать в виде симметричных и кососимметричных усилий.

Симметричные неизвестные создают симметричные эпюры моментов, а кососимметричные неизвестные – кососимметричные эпюры. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, т. е. результат их перемножения равен нулю:

$$\delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \overline{M_i} \overline{M_k} dz / EI. = 0.$$

Взаимная ортогональность эпюр может достигаться различными способами:

- выбор симметричной О. С.;
- выбор симметричных и кососимметричных неизвестных;
- группировка неизвестных;
- устройство жестких консолей (способ упругого центра);
- использование статически неопределимой основной системы;
- разложение произвольной нагрузки, действующей на систему, на симметричную и кососимметричную составляющие.

Рассмотрим раму, имеющую ось симметрии (рис. 8.16, а). Заменяем внешнюю нагрузку  $2F$  статически эквивалентной нагрузкой, как сумму симметричной (рис. 8.16, б) и кососимметричной (рис. 8.16, в) нагрузок относительно оси симметрии.

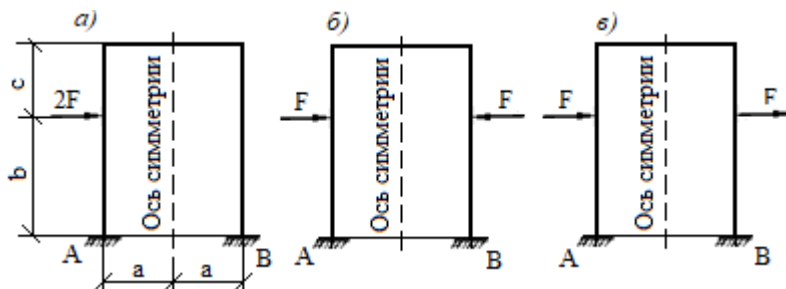


Рис. 8.16. Замена внешней нагрузки на симметричную и косимметричную составляющие

Если рассматривать поперечное сечение элемента рамы, то внутренние усилия ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ ) являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости поперечного сечения. Эти внутренние силовые факторы назовем симметричными, остальные ( $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$ ) – косимметричными.

Докажем следующее утверждение: у геометрически симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные внутренние силовые факторы (рис. 8.17, а), а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные внутренние силовые факторы (рис. 8.17, б).

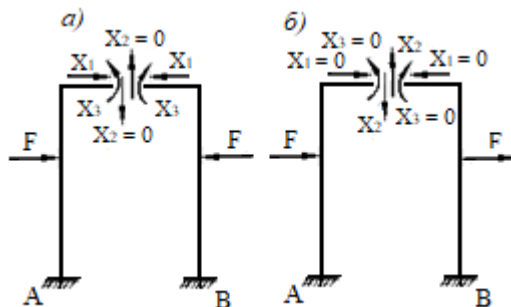


Рис. 8.17. Внутренние силовые факторы в сечении рамы при симметричной и косимметричной внешней нагрузке

Канонические уравнения метода сил для изображенной на рис. 8.17 трижды статически неопределимой рамы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\
 \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\
 \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.33}$$

Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил (рис. 8.18). Считаем, что  $l = b + c$ .

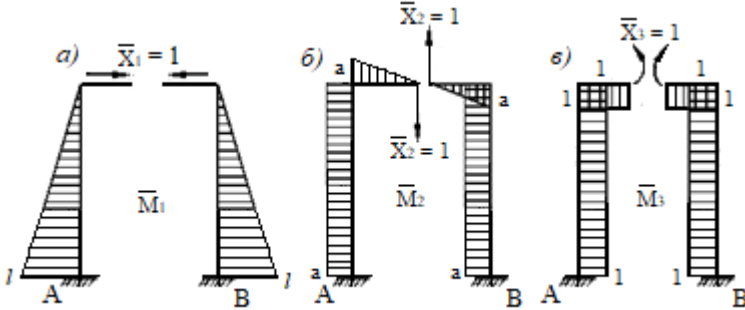


Рис. 8.18. Эпюры изгибающих моментов от единичных сил в О. С.

На основании эпюр (рис. 8.18) находим:

$$EI \delta_{12} = (1/2)lla - (1/2)lla = 0;$$

$$EI \delta_{23} = -(la) \cdot 1 + (la) \cdot 1 - (1/2)aa \cdot 1 + (1/2)aa \cdot 1 = 0.$$

Таким образом, канонические уравнения (8.33) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\
 \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0; \\
 \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.34}$$

На рис. 8.19 построены эпюры моментов от симметричной (рис. 8.19, а) и кососимметричной (рис. 8.19, б) внешних нагрузок.

В случае симметричной внешней нагрузки имеем:

$$EI \Delta_{2F} = (1/2)Fba - (1/2)Fba = 0.$$

Из уравнения (8.34) следует, что  $X_2 = 0$ , т. е. при симметричной внешней нагрузке кососимметричный внутренний силовой фактор (поперечная сила) обращается в нуль, что и требовалось доказать.

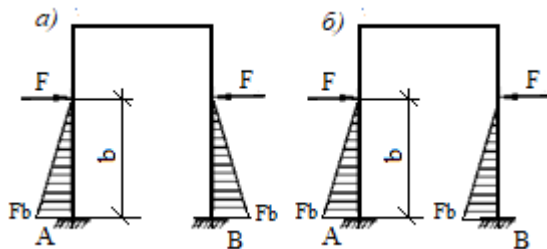


Рис. 8.19. Грузовые эпюры от симметричной и косимметричной внешней нагрузки

В случае косимметричной внешней нагрузки имеем:

$$EI \Delta_{1F} = (F b b / 2) (l - b / 3) - (F b b / 2) (l - b / 3) = 0;$$

$$EI \Delta_{3F} = -(F b b / 2) \cdot 1 + (F b b / 2) \cdot 1 = 0.$$

Канонические уравнения (8.34) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 &= 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Так как определитель 1-го и 3-го уравнений системы (8.35)

$$|\delta| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13}^2 \neq 0,$$

то  $X_1 = X_3 = 0$ , что и требовалось доказать.

Воспользуемся симметрией рамы (рис. 8.20) и разложим внешнюю нагрузку на симметричную (рис. 8.20, б) и косимметричную (рис. 8.20, в).

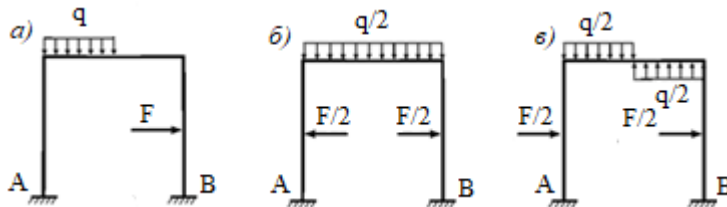


Рис. 8.20. Схема разложения внешней нагрузки на симметричную и косимметричную

Раму, изображенную на рис. 8.20, *a*, приходится рассчитывать дважды. Однако выбор О. С. (использование симметрии рамы), показанной на рис. 8.21, позволяет значительно сократить вычисления.

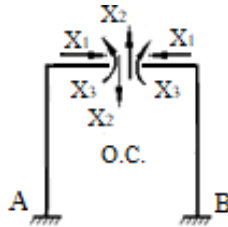


Рис. 8.21. О. С. рамы с использованием симметрии

Построим единичные и грузовые эпюры (рис. 8.22) для заданной рамы.

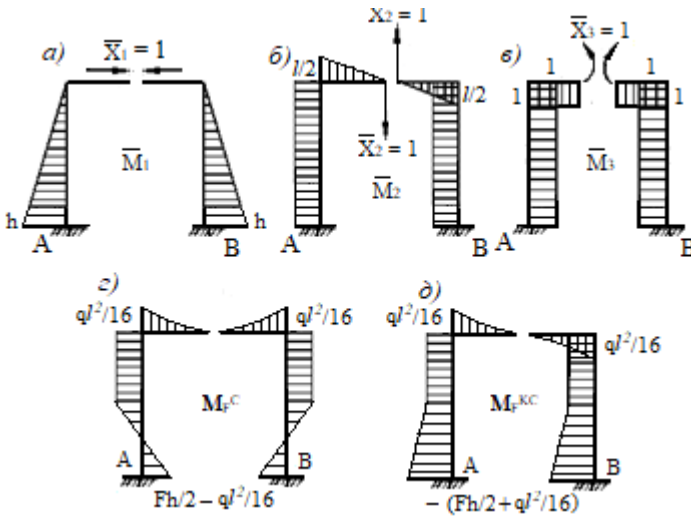


Рис. 8.22. Симметричные и косимметричные единичные и грузовые эпюры для рамы в О. С.

Канонические уравнения метода сил будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\
\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\
\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0.
\end{aligned}
\tag{8.36}$$

Две единичные эпюры (рис. 8.22, *а, в*) являются симметричными, а одна единичная эпюра (рис. 8.22, *б*) – кососимметричной. Перемножение двух ортогональных эпюр в результате дает нуль. Симметричная  $M_F^C$  и кососимметричная  $M_F^{KC}$  грузовые эпюры (рис. 8.22, *з, д*) являются взаимно ортогональными и их перемножение также равно нулю, т. е.

$$M_F^C M_F^{KC} = 0. \tag{8.37}$$

Таким образом, для системы (8.36)  $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$ . При этом система канонических уравнений распадается на две независимые системы:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} = 0; \tag{8.38}$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \tag{8.39}$$

Таким образом, при расчете симметричной рамы некоторые коэффициенты при неизвестных можно не вычислять, а решение системы канонических уравнений заменить решением двух систем со значительно меньшими вычислениями.

Рассмотрим расчет на симметричную нагрузку. Так как эпюра изгибающих моментов при действии симметричной нагрузки на раму (рис. 8.22, *з*) также является симметричной, то она будет ортогональна кососимметричной эпюре  $\overline{M_2}$  (рис. 8.22, *б*). Следовательно,  $\Delta_{2F} = 0$ . Поэтому, как следует из уравнения (8.39),  $X_2 = 0$ .

Таким образом, при симметричной нагрузке кососимметричная неизвестная равна нулю.

В этом случае эпюра изгибающих моментов будет строиться по следующей формуле:

$$M^C = \overline{M_1} X_1 + \overline{M_3} X_3 + M_F^C. \tag{8.40}$$

Эпюра  $M^C$ , как сумма симметричных эпюр, также будет симметричной. Тогда эпюра  $Q$  будет кососимметричной, а эпюра  $N$  – симметричной.

Рассмотрим расчет на кососимметричную нагрузку. В этом случае эпюра изгибающих моментов является кососимметричной (рис. 8.22, д) и ортогональной симметричным эпюрам  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_3$ .

Следовательно,  $\Delta_{1F} = \Delta_{3F}$ , и, как следует из системы уравнений (8.38),  $X_1 = X_3 = 0$ . Таким образом, при кососимметричной внешней нагрузке все симметричные неизвестные равны нулю.

Эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M^{KC} = \overline{M}_2 X_2 + M_F^{KC}. \quad (8.41)$$

Эпюра  $M^{KC}$  и эпюра  $N$  будут кососимметричными, а эпюра  $Q$  – симметричной.

Окончательная эпюра моментов строится по формуле

$$M = M^C + M^{KC}. \quad (8.42)$$

Если при расчете симметричной рамы (рис. 8.23, а) выбрана обычная О. С. (рис. 8.23, б), то все коэффициенты канонических уравнений (8.43) будут отличными от нуля.

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \quad (8.43)$$

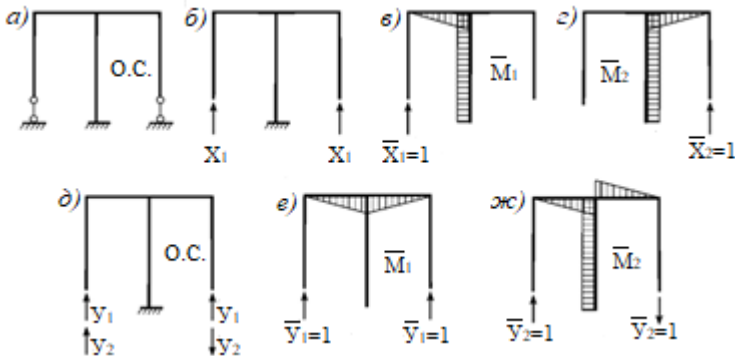


Рис. 8.23. Расчет симметричной рамы методом группировки неизвестных

Группируем неизвестные по формулам:

$$X_1 = Y_1 + Y_2; \quad X_2 = Y_1 - Y_2. \quad (8.44)$$

О. С. для неизвестных (8.44) изображена на рис. 8.23, *д*. Единичные эпюры (рис. 8.23, *е, ж*) будут ортогональными ( $\overline{M_1 M_2} = 0$ ), и канонические уравнения (8.43) распадутся на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} Y_1 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{22} Y_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

С одной стороны, при группировке неизвестных отдельные коэффициенты обращаются в нуль, и нет необходимости их вычисления. С другой стороны, система канонических уравнений распадается на две независимые системы, и это упрощает их решение. Поэтому группировка неизвестных позволяет существенно уменьшить объем вычислений.

Рассмотрим способ упругого центра (введение жестких консолей). Этот способ используется для ортогонализации эпюр в пределах каждого замкнутого контура или открытого с защемленными концами симметричного контура. Замкнутый контур (рис. 8.24, *а*) является трижды статически неопределимой системой, О. С. которой изображена на рис. 8.24, *б* и получена разрезом контура по оси симметрии в пределах верхней консоли.

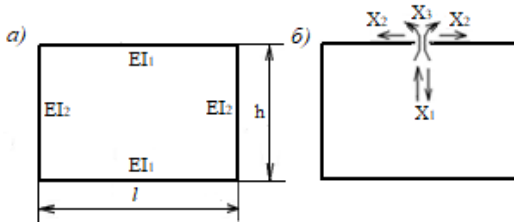


Рис. 8.24. Расчетная схема замкнутого контура

$X_2, X_3$  – симметричные неизвестные; неизвестная  $X_1$  – кососимметричная, тогда в системе канонических уравнений  $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$ . Для ортогональности единичных эпюр  $\overline{M_2}$  и  $\overline{M_3}$  с помощью жестких консолей (рис. 8.25, *а*) перенесем неизвестные  $X_1, X_2, X_3$  в точку *С* – центр тяжести условного тонкостенного сечения с толщиной  $1/EI$  (рис. 8.25, *б*).

Определим центр тяжести условного тонкостенного сечения:

$$a = S_{z-z} / A = [2(1/EI_2)(h^2/2) + (1/EI_1)lh] / [2l/EI_1 + 2h/EI_2]. \quad (8.46)$$

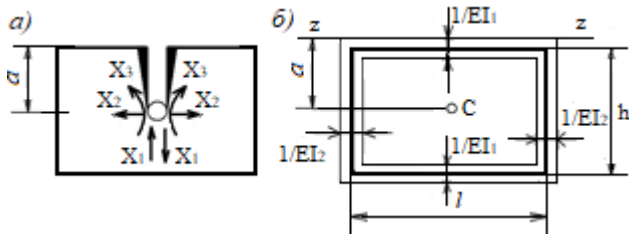


Рис. 8.25. Расчетная схема установки жестких консолей

После введения жестких консолей каноническое уравнение метода сил принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Рассмотрим открытый симметричный контур с защемленными концами (рис. 8.26, а). По оси симметрии устанавливаем жесткие консоли бесконечной длины, т. е.  $I = \infty$  (рис. 8.26, б).

Различие между двумя схемами (рис. 8.26, а, б) устраняем путем соединения консолей тремя непересекающимися стержнями – двумя горизонтальными, одним вертикальным.

Разрезаем эти стержни и заменяем их лишними неизвестными  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (рис. 8.26, в).

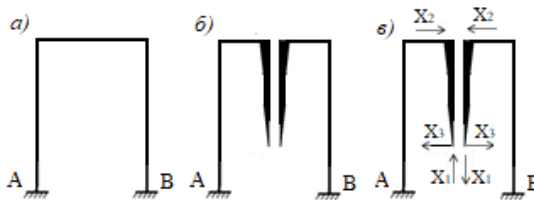


Рис. 8.26. Расчетные схемы симметричного контура с защемленными концами

Строим единичные эпюры  $\overline{M}_1$ ,  $\overline{M}_2$ ,  $\overline{M}_3$  в О. С.

При построении эпюр будем учитывать, что второстепенные коэффициенты в системе канонических уравнений при решении способом упругого центра равны нулю, т. е.

$$\delta_{23} = \Sigma(1 / EI) \Omega_2 y_{ц.т.3} = 0, \quad (8.48)$$

где  $\Omega_2$  – площадь единичной эпюры  $\overline{M}_2$  ;

$y_{ц.т.3}$  – ордината единичной эпюры  $\overline{M}_3$  , которая находится под центром тяжести единичной эпюры  $\overline{M}_2$  .

Отсюда  $y_{ц.т.3} = 0$ . Таким образом, длина консолей равна  $2/3h$ . Эпюры единичных моментов построены на рис. 8.27.

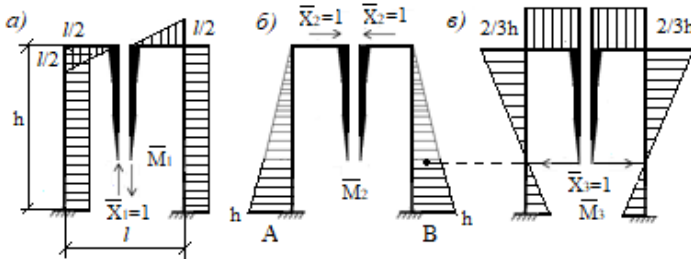


Рис. 8.27. Единичные эпюры для симметричной рамы

Так как эпюра  $\overline{M}_1$  – кососимметричная, а эпюры  $\overline{M}_2$  и  $\overline{M}_3$  – симметричные, то  $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$ . Таким образом, система канонических уравнений принимает следующий вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

## 8.7. Расчет неразрезных балок и статически неопределимых ферм методом сил

Расчет статически неопределимой балки рассмотрим на конкретном примере. Для статически неопределимой балки (рис. 8.28, а) построим эпюры  $M$  и  $Q$ .

Расчет балки выполняем при помощи уравнения трех моментов. Алгоритм расчета.

1. Степень статической неопределимости

$$n = C_0 - 3 = 5 - 3 = 2.$$

2. Выбираем О. С. Для этого врезаем шарниры на опорах и при наличии левой заделки вводим нулевой пролет. Нумерацию опор ведем слева направо, начиная с нуля. Номер пролета соответствует номеру правой опоры. На каждой опоре статически определимых балок будет действовать два опорных момента, начиная со второй опоры. На концевых опорах действует по одному опорному моменту. Все опорные моменты принимаются положительными (рис. 8.28, б).

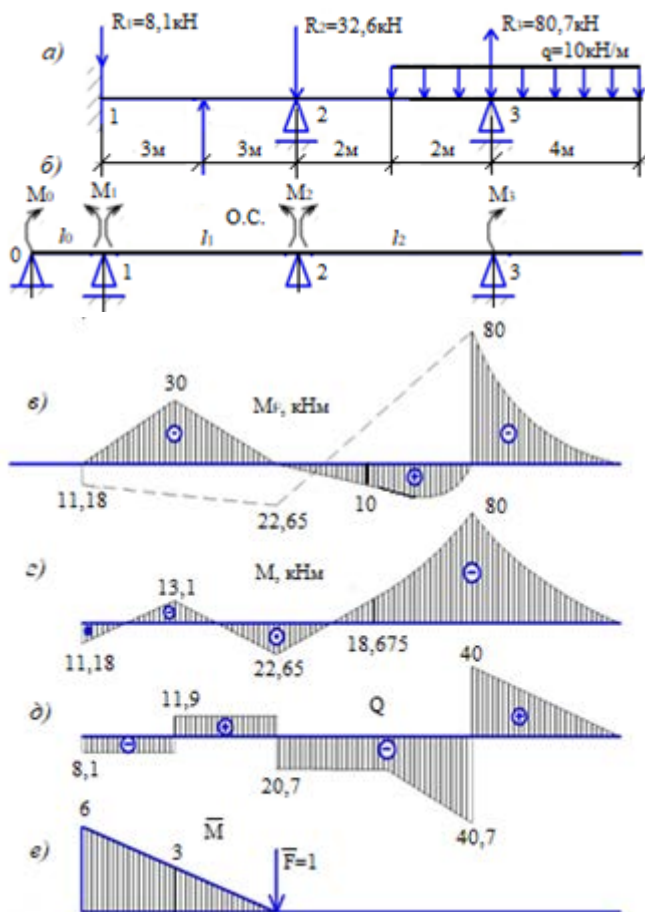


Рис. 8.28. Расчетная схема неразрезной балки

3. Составляем уравнение трех моментов по формуле

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n^\phi, \quad (8.49)$$

где  $M_{n-1}$ ,  $M_{n+1}$  – опорные моменты слева и справа от  $n$ -й опоры в основной системе;

$M_n$  – опорный момент на  $n$ -й опоре в основной системе;

$R_n^\phi$  – фиктивная реакция на  $n$ -й опоре.

$$R_n^\phi = \omega_n a_n / l_n + \omega_{n+1} b_{n+1} / l_{n+1}, \quad (8.50)$$

где  $\omega_n$  – площадь грузовой эпюры в О. С. на левой балке относительно  $n$ -й опоры;

$a_n$  – расстояние от центра тяжести эпюры на левой балке до ее левой опоры;

$\omega_{n+1}$  – площадь грузовой эпюры в О. С. на правой балке относительно  $n$ -й опоры;

$b_{n+1}$  – расстояние от центра тяжести эпюры на правой балке до ее правой опоры;

$l_n$ ,  $l_{n+1}$  – длина пролетов левой и правой балок относительно  $n$ -й опоры соответственно.

Для определения  $R_n^\phi$  строим грузовую эпюру в О. С. (рис. 8.28, в). Внешняя нагрузка в О. С. действует только на ту балку, к которой она приложена.

Количество уравнений (8.49) соответствует степени статической неопределимости балки или количеству ее промежуточных опор.

Выполним соответствующие вычисления и получим систему уравнений трех моментов:

$$12M_1 + 6M_2 = 270; \quad (8.51)$$

$$6M_1 + 20M_2 = 520.$$

Решая систему уравнений (8.51) методом исключения, находим:  $M_1 = 11,18 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_2 = 22,65 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_3 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Строим эпюру реактивных моментов  $M_p$ , возникающих на опорах в О. С. (на рис. 8.28, в эпюра показана пунктирной линией).

4. Строим окончательную эпюру моментов (рис. 8.28, з) по следующей формуле:

$$M = M_F + M_p. \quad (8.52)$$

5. Определим опорные реакции, возникающие на опорах в заданной системе. Для этого рассмотрим каждую статически определимую балку, приложив к ней реактивные моменты, и внешнюю нагрузку, действующую в пределах этой балки. При этом следует учитывать, что  $R_2 = R_2^{\text{л}} + R_2^{\text{п}}$ , где  $R_2^{\text{л}}$ ,  $R_2^{\text{п}}$  – опорные реакции, возникающие на опоре 2 для левой и правой балок в О. С. Решая, получим:  $R_1 = -8,1$  кН;  $R_2 = -32,6$  кН;  $R_3 = -80,7$  кН.

6. По эпюре  $M$ , используя зависимость  $Q = (M^{\text{л}} - M^{\text{п}}) / l$  или  $Q = \pm q l / 2 + (M^{\text{л}} - M^{\text{п}}) / l$ , строим эпюру  $Q$  (рис. 8.28, *д*).

7. Проверка.

*Статическая:*

$$-R_1 + F - R_2 + R_3 - q \cdot 6 = -8,1 + 20 - 32,6 + 80,7 - 10 \cdot 6 = 0.$$

Для *кинематической* проверки в О. С. строим единичную эпюру (рис. 8.28, *е*), которую перемножаем с окончательной эпюрой моментов по правилу Верещагина.

$$\Delta_1 = (1 / EI) \cdot [(3 / 6) \cdot (2 \cdot 13,1 \cdot 3 - 22,65 \cdot 3) + (3 / 6) \cdot (2 \cdot 13,1 \cdot 3 - 2 \cdot 11,18 \cdot 6 - 11,18 \cdot 3 + 13,1 \cdot 6)] = 10,65 - 10,5 = 0,15.$$

Процент расхождения результата расчетов

$$\delta = (0,15 / 10,65) \cdot 100 = 1,4 \%$$

Статическая и кинематическая проверки выполняются.

Расчет статически неопределимой фермы рассмотрим на конкретном примере. Для фермы, изображенной на рис. 8.29, *а*, определить усилия в стержнях от заданной внешней нагрузки, если  $d = 3,2$  м;  $A_{\text{н}} = 1,2A_0$ ;  $A_{\text{в}} = 1,7A_0$ ;  $A_{\text{с}} = A_{\text{р}} = A_0$ ;  $F = 3$  кН;  $h = 3$  м;  $A_{\text{н}}$ ,  $A_{\text{в}}$ ,  $A_{\text{с}}$ ,  $A_{\text{р}}$  – площадь поперечного сечения элементов нижнего и верхнего пояса, стойки, раскоса соответственно.

Алгоритм расчета статически неопределимой фермы.

1. Определяем число лишних связей в ферме по формуле

$$L = C + C_0 - 2U = 17 + 4 - 2 \cdot 10 = 1, \quad (8.53)$$

где  $C$  – количество стержней;

$C_0$  – количество опорных связей;

$U$  – количество узлов.

2. Выбираем симметричную О. С.

3. Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0. \quad (8.54)$$

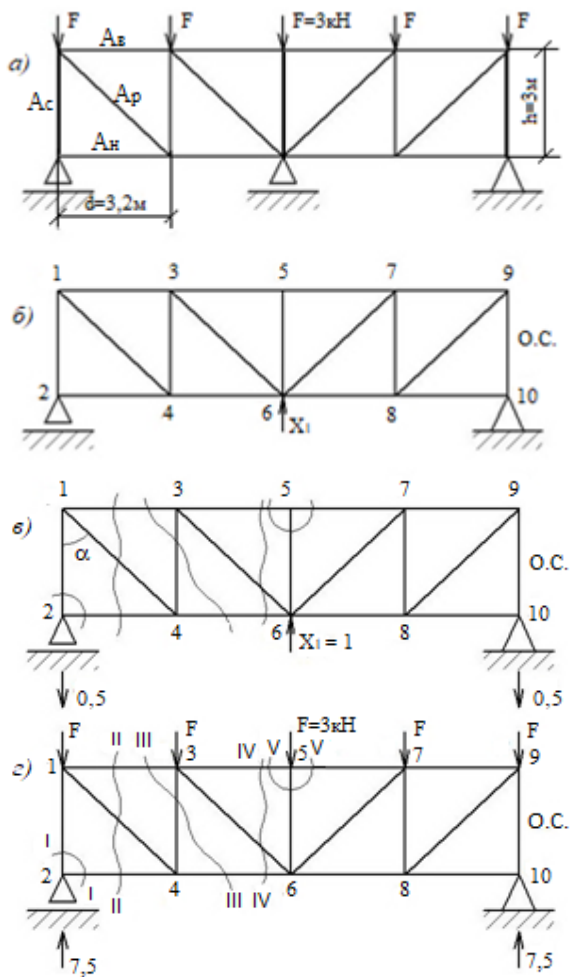


Рис. 8.29. Расчетная схема статически неопределимой фермы

4. Определяем коэффициент и свободный член канонического уравнения по формулам:

$$\delta_{11} = \sum N_i^2 / EA; \quad \Delta_{1F} = \sum N_i N_{Fi} / EA. \quad (8.55)$$

5. Используя способы вырезания узлов, проекций и моментной точки, определяем  $N_i$ ,  $N_{Fi}$ . Расчеты выполняем в табличной форме (табл. 8.1).

Таблица 8.1. Расчет статически неопределимой фермы

Номер стержни	$l$ , м	$A_0/A$	$N_i$	$N_{Fi}$ , кН	$N_i l A_0/A$	$N_i^2 l A_0/A$	$N_i N_{Fi} l A_0/A$	$N_i X_1$	$N = N_{Fi} + N_i X_1$ , кН	$N N_i l A_0/A$ Проверка
1-2	3,0	1	0,5	-7,5	1,5	0,75	-11,25	3,68	-3,82	-5,73
1-3	3,2	0,59	0,53	-4,8	1,0	0,53	-4,8	3,90	-0,9	-0,9
1-4	4,41	1	-0,73	6,62	-3,22	2,35	-21,32	-5,37	1,25	-4,02
2-4	3,2	0,83	0	0	0	0	0	0	0	0
3-4	3,0	1	-4,5	-4,5	1,5	0,75	-6,75	3,68	-0,82	-1,23
3-6	4,41	1	2,20	2,20	-3,22	2,35	-7,08	-5,37	-3,17	10,21
4-6	3,2	0,83	4,8	4,8	-1,41	0,75	-6,77	-3,90	0,9	-1,27
3-5	3,2	0,59	-6,4	-6,4	2,02	2,16	-12,93	7,86	1,46	2,95
5-6	3,0	1	-1,5	-1,5	0	0	0	0	-1,5	0
						9,64	-70,9			0,01

6. Из уравнения (8.54) определим  $X_1$ :

$$X_1 = 70,9 / 9,64 = 7,35 \text{ кН.}$$

7. Определим усилия в стержнях фермы по формуле

$$N = N_{Fi} + N_i X_1. \quad (8.56)$$

8. Проверка:

$$\Sigma = -13,15 + 13,16 = 0,01.$$

Процент погрешности вычислений

$$\delta = (0,01 / 13,16) \cdot 100 = 0,076 \text{ \%}.$$

## 8.8. Примеры расчета

**Задача 8.1.** Для статически неопределимой рамы (рис. 8.30) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

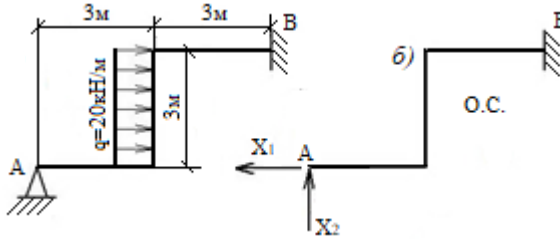


Рис. 8.30. Расчет статически неопределимой рамы

**Решение.**

1. Степень статической неопределимости рамы

$$n = C_0 - 3 = 2.$$

2. О. С. метода сил для рамы показана на рис. 8.31, а.

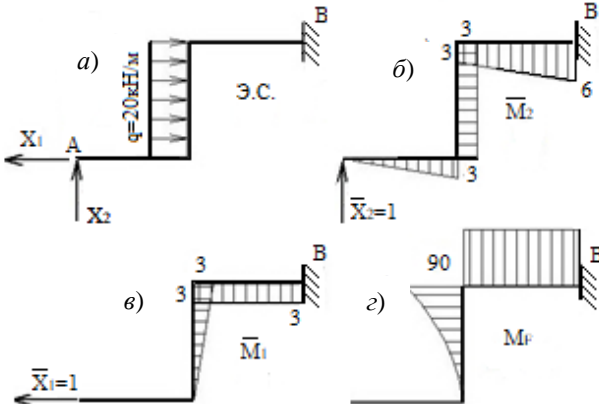


Рис. 8.31. Построение единичных и грузовой эпюр в О. С.

3. Система канонических уравнений:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

4. Для определения перемещений, входящих в уравнения, по правилу Верещагина строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил и от заданной нагрузки в О. С. (рис. 8.31, б, в, г).

$$\delta_{11} = (\overline{M_1 M_1}) / EI = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3) / EI = 36 / EI;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M_1 M_2}) / EI = (3 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + (3 + 6) \cdot 3 \cdot 3 / 2) / EI = 54 / EI;$$

$$\delta_{22} = (\overline{M_2 M_2}) = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3) / EI = 99 / EI;$$

$$\Delta_{1F} = (\overline{M_1 M_F}) / EI = (-90 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 20 \cdot 3^3 \cdot 3 / 12 \cdot 2 - 90 \cdot 3 \cdot 3) / EI = -1012,5 / EI;$$

$$\Delta_{2F} = (\overline{M_2 M_F}) / EI = [(-90 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 + 20 \cdot 3^3 \cdot 3 / 12 - 90 \cdot 3 \cdot (3 + 6) / 2) / EI = -1485 / EI.$$

5. Проверка коэффициентов и свободных членов. Построим суммарную единичную эпюру (рис. 8.32, а).

$$\Sigma \delta_{ik} = (\overline{M_s M_s}) / EI = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 6 / 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 / 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3) / EI = 243 / EI;$$

$$\Sigma \delta_{ik} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = (36 + 2 \cdot 54 + 99) / EI = 243 / EI.$$

$$\Sigma \Delta_{iF} = (\overline{M_s M_F}) / EI = [(-90 \cdot 3 \cdot 3 / 2 - 90 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 20 \cdot 3^3 \cdot 3 / 12 + 20 \cdot 3^3 \cdot 3 / 12 \cdot 2 - 90 \cdot 3 \cdot (6 + 9) / 2) / EI = -2497,5 / EI;$$

$$\Sigma \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -(1012,5 + 1485) / EI = -2497,5 / EI.$$

Коэффициенты канонических уравнений определены верно. Тогда система канонических уравнений примет вид

$$36X_1 + 54X_2 - 1012,5 = 0; \tag{8.57}$$

$$54X_1 + 99X_2 - 1485 = 0.$$

Решаем систему уравнений (8.57) методом исключения, находим:  $X_1 = 30,86$  кН,  $X_2 = -1,82$  кН.

Для построения эпюры изгибающих моментов используем следующую формулу:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_1 + M_F.$$

Эпюра  $M$  приведена на рис. 8.32, б. Эпюра  $Q$  построена по эпюре моментов и изображена на рис. 8.32, в. Эпюра  $N$  показана на рис. 8.32, г и построена методом вырезания узлов на эпюре  $Q$ .

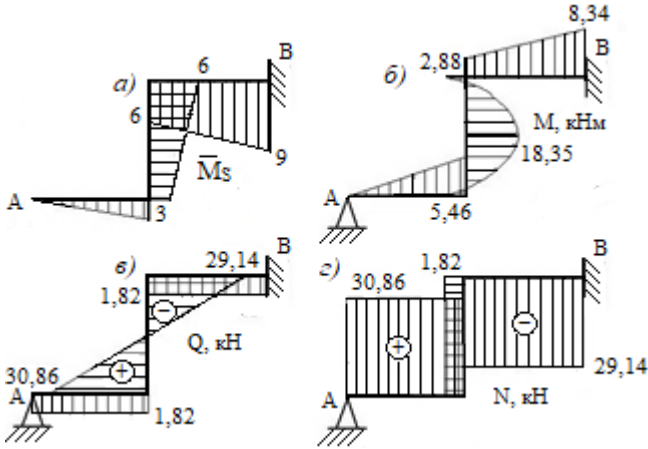


Рис. 8.32. Суммарная единичная эпюра и окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$

Выполним кинематическую проверку:

$$\begin{aligned} \Sigma(\overline{M}_s M) / EI = & [(-3 \cdot 5,46 \cdot 2 \cdot 3 / 2 \cdot 3) - 3 \cdot (2 \cdot 2,88 \cdot 6 + 2 \cdot 5,46 \cdot 3 + \\ & + 5,46 \cdot 6 + 2,88 \cdot 3) / 6 + 20 \cdot 3^2 \cdot 4,5 / 12 - 3 \cdot (2 \cdot 2,88 \cdot 6 + \\ & + 2 \cdot 8,34 \cdot 9 + 2,88 \cdot 9 + 8,34 \cdot 6) / 6] = 202,5 - 201,1 = 1,4. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений

$$\delta = (1,4 / 202,5) \cdot 100 = 0,69 \%$$

Следовательно, эпюра  $M$  построена верно.

Выполним статическую проверку:

$$\Sigma Z = 0; -Z_B - X_1 + 3q = -29,14 - 30,86 + 60 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; Y_B - X_2 = 1,82 - 1,82 = 0.$$

Эпюры  $Q$  и  $N$  построены верно.

**Задача 8.2.** Для симметричной рамы (рис. 8.33, а) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

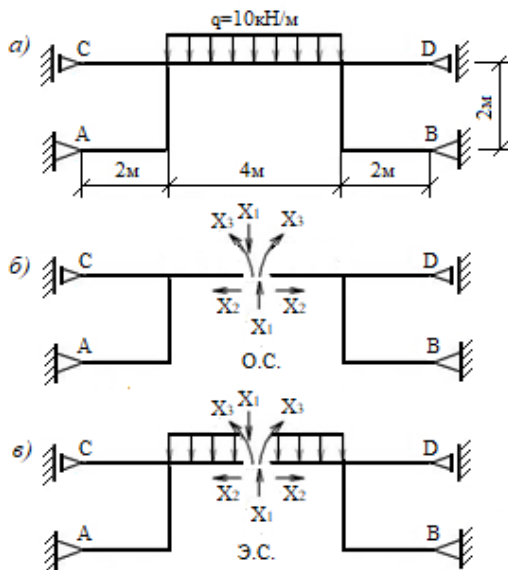


Рис. 8.33. Расчетная схема симметричной рамы

**Решение.**

1. Степень статической неопределимости рамы

$$n = C_0 - 3 = 3.$$

2. О. С. метода сил для рамы показана на рис. 8.33, б.

3. Система канонических уравнений:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Для определения перемещений, входящих в уравнения, строим эпюры изгибающих моментов от единичных неизвестных и от заданной нагрузки в О. С. (рис. 8.34, а, б, в, г).

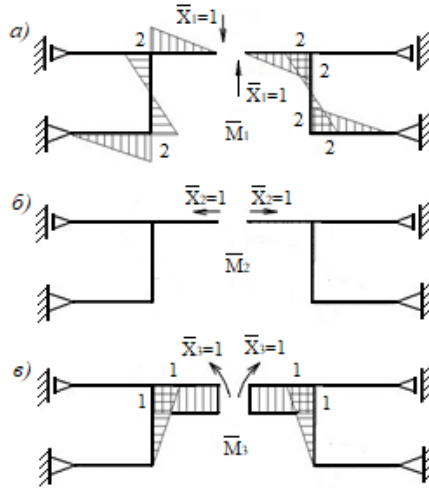


Рис. 8.34. Единичные эпюры в О. С. для симметричной рамы

$$\delta_{11} = (\overline{M_1 M_1}) / EI = (4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 / 2 \cdot 3) / EI = 48 / 3EI;$$

$$\delta_{22} = 0; \delta_{33} = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 / 3) / EI = 16 / 3EI;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Строим суммарную единичную и грузовую эпюры в О. С. (рис. 8.35, а, б).

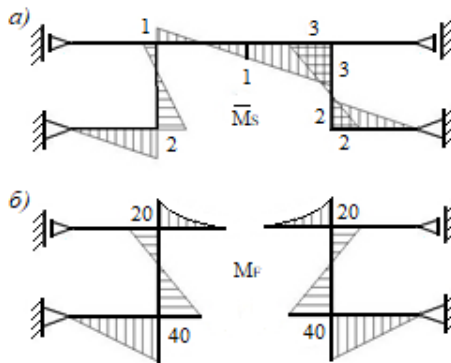


Рис. 8.35. Единичная и грузовая эпюры для симметричной рамы

$\Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0$ , так как эюра  $\overline{M_1}$  – кососимметричная, эюра  $\overline{M_2} = 0$ , эюра  $M_F$  – симметричная.

$$\Delta_{3F} = \Sigma \overline{M_3} M_F = [2 \cdot (2 \cdot 40 \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 - 40 \cdot 1 - 20 \cdot 2) / 6 + 2 \cdot (-2 \cdot 40 \cdot 2 - 2 \cdot 20 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3) / 6 + 20 \cdot 2 \cdot (2/3 - 1/3) / 2 - 20 \cdot 2 \cdot (1 + 2 \cdot 2/3) / 2 + 10 \cdot 2^3 \cdot 2 / 12] / EI = -80 / 3EI.$$

Проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

$$\Sigma \delta_{ik} = \Sigma \overline{M_s} \overline{M_s} = [2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 \cdot 3 + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1) / 6 + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2) / 6 + 4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2) / 6] / 3EI = 64 / 3EI = \delta_{11} + \delta_{33} = 64 / 3EI.$$

$$\Delta_{iF} = \Sigma \overline{M_s} M_F = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} = \Delta_{3F} = -80 / 3EI.$$

Следовательно, коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определены верно.

Тогда каноническое уравнение примет вид

$$16X_3 / 3EI - 80 / 3EI = 0.$$

Откуда

$$X_3 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}; X_1 = X_2 = 0.$$

Окончательную эюру изгибающих моментов (рис. 8.36, а) строим, используя следующую формулу:

$$M = \overline{M_1} X_1 + \overline{M_2} X_2 + \overline{M_3} X_3 + M_F.$$

Эюра  $Q$  построена по эюре моментов и изображена на рис. 8.36, б.

Эюра  $N$  показана на рис. 8.36, в и построена методом вырезания узлов на эюре  $Q$ .

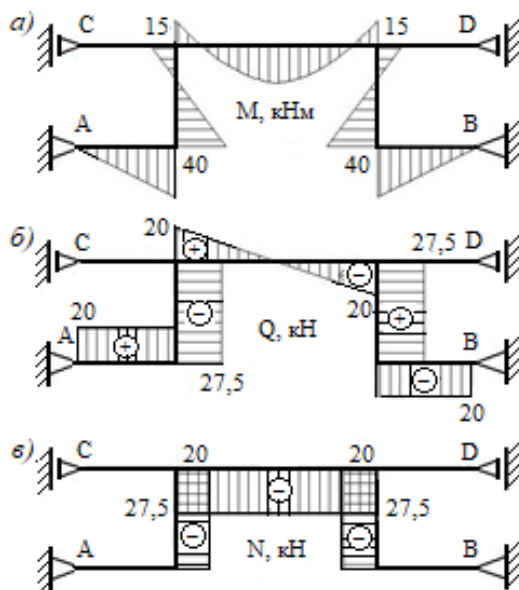


Рис. 8.36. Окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для симметричной рамы

Выполним кинематическую проверку:

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma(M_s)} / EI &= [2 \cdot (2 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 40 - 40 \cdot 1 - 15 \cdot 2) / 6 + \\ &+ 2 \cdot (2 \cdot 15 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 40 + 40 \cdot 3 + 15 \cdot 2) / 6 - 15 \cdot 4 \cdot 1 + \\ &+ 10 \cdot 4^3 \cdot 1 / 12] / EI = (40 - 100 / 3 - 60 + 160 / 3) / EI = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, эпюра  $M$  построена верно.

Выполним статическую проверку:

$$\Sigma Z = 0; H_A - H_B = 27,5 - 27,5 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; R_A + R_B - 4q = 20 + 20 - 40 = 0.$$

Эпюры  $Q$  и  $N$  построены верно.

### 8.9. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 8.3.** Для рамы (рис. 8.37) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

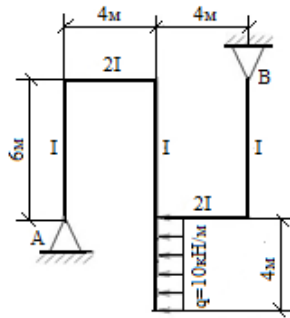


Рис. 8.37. Расчетная схема статически неопределимой рамы

**Задача 8.4.** Для рамы (рис. 8.38) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . Выполнить кинематическую и статическую проверки правильности построения эпюр внутренних силовых факторов.

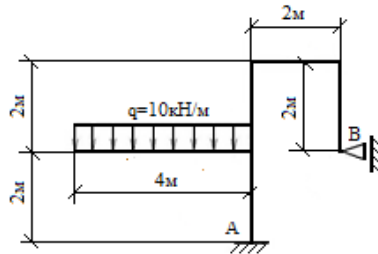


Рис. 8.38. Расчетная схема статически неопределимой рамы

**Задача 8.5.** Используя симметрию рамы (рис. 8.39) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

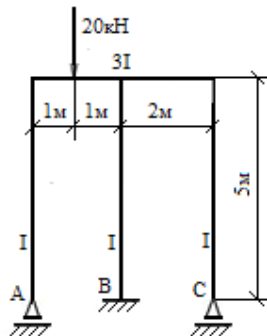


Рис. 8.39. Расчетная схема симметричной статически неопределимой рамы

## 8.10. Контрольные вопросы

1. Какие системы называют статически определимыми и статически неопределимыми?
2. Что понимают под степенью статической неопределимости системы?
3. Как определяется степень статической неопределимости?
4. Какие методы могут быть использованы для расчета статически неопределимых балок?
5. Какое дополнительное уравнение к трем основным уравнениям статики добавляет врезка в сечении балки шарнира?
6. Какой порядок расчета используется при решении статически неопределимых балок?
7. Какие плоские рамы считаются статически неопределимыми?
8. Какой метод расчета наиболее предпочтителен для расчета статически неопределимых рам?
9. Как определяется степень статической неопределимости рамы?
10. Что представляет собой О. С. и в чем заключается ее выбор?
11. Что понимается под выражением «каноническое уравнение метода сил»?
12. Каков физический смысл произведения  $\delta_{ik} X_i$ ?
13. Перемножением каких эпюр определяют коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений?
14. Какими способами можно построить окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов?
15. Как проводят деформационную проверку правильности построения окончательной эпюры  $M$  статически неопределимой системы?
16. Какие конструкции называют симметричными, какие – кососимметричными?
17. Какие нагрузки называют симметричными, какие – кососимметричными?
18. Как используют свойство симметрии рам при их решении?

## Глава 9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ И ТРУБЫ

### 9.1. Расчет статически неопределимых арок. Типы основных систем. Расчет арок на неподвижную нагрузку. Вычисление коэффициентов интегрированием и численным способом

Статически неопределимые арки в зависимости от устройства опорных закреплений делятся на три типа:

- двухшарнирные, имеющие две шарнирно-неподвижные опоры, в которых возникают четыре реакции, а число уравнений статики равно трем, поэтому такие арки являются один раз статически неопределимыми (рис. 9.1, *а*);

- одношарнирные, с заделанными концами (пятами) и промежуточным шарниром. Если такую арку разрезать в шарнире и приложить в данном сечении две лишние неизвестные, то она будет дважды статически неопределима (рис. 9.1, *б*);

- бесшарнирные, с заделанными концами и без промежуточных шарниров, имеют шесть опорных реакций, поэтому они трижды статически неопределимые (рис. 9.1, *в*).

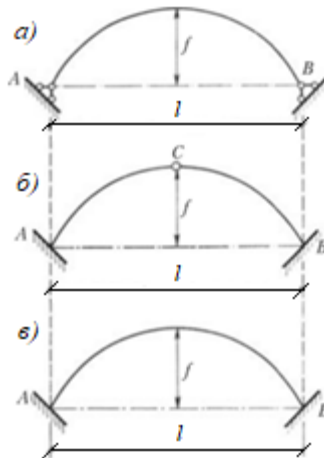


Рис. 9.1. Типы статически неопределимых арок

Статически неопределимые арки применяются в промышленно-гражданском строительстве, в мостостроении, гидротехническом строительстве и других областях.

Арки выполняются из различных материалов: металла, дерева, камня, бетона, железобетона. Каменные, бетонные и железобетонные арки выполняются сплошными; деревянные и металлические могут быть сплошными или сквозными в виде арочных ферм (рис. 9.2).

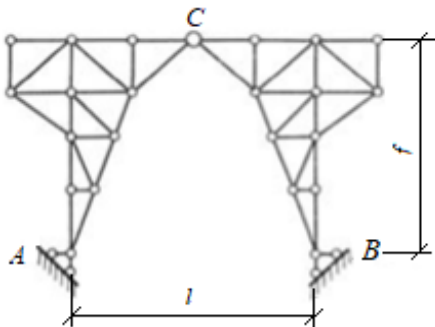


Рис. 9.2. Сквозная статически неопределимая арочная ферма

Расчет статически неопределимых арок выполняется методом сил. При этом основная система (О. С.) образуется путем отбрасывания лишних связей и заменой их неизвестными усилиями  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ .

Рассмотрим образование О. С. для конкретных арок.

*Двухшарнирная арка.* Такие арки могут иметь две шарнирно-неподвижные опоры (см. рис. 9.1, а) либо одну шарнирно-неподвижную опору, одну шарнирно-подвижную опору и затяжку (линейный стержень), соединяющую опорные крепления (рис. 9.3).

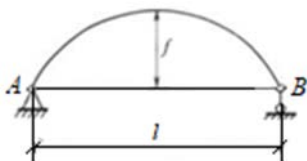


Рис. 9.3. Статически неопределимая арка с затяжкой

В первом случае О. С. образуется путем исключения горизонтальной распорной реакции. При этом за неизвестное  $X_1$  принята распорная реакция  $X_1 = H$  (рис. 9.4, а). Во втором случае О. С. получается разрезом затяжки и имеет вид криволинейной статически определимой балки. За неизвестное  $X_1$  принято усилие в затяжке  $X_1 = H$  (рис. 9.4, б).

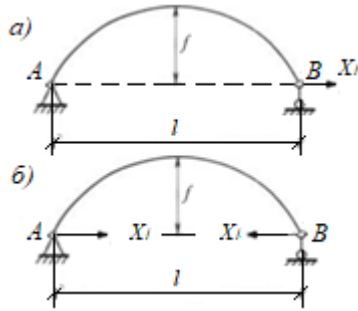


Рис. 9.4. О. С. двухшарнирной арки

Одношарнирная арка с заделанными концами (пятями) и промежуточным шарниром. Считаем, что ключевой шарнир  $C$  расположен посередине пролета арки (см. рис. 9.1, б). О. С. такой арки образуется исключением двух лишних связей путем разреза шарнира  $C$ . При этом получаем симметричную систему в виде двух криволинейных консолей. Влияние отброшенных связей заменяем двумя неизвестными  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 9.5).

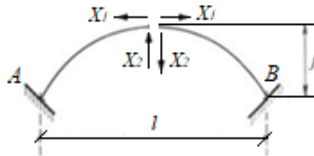


Рис. 9.5. О. С. одношарнирной арки с заделанными концами

Бесшарнирная арка с заделанными концами. О. С. бесшарнирной арки образуется отбрасыванием трех связей на оси, т. е. получается симметричная система из двух криволинейных консолей (рис. 9.6).

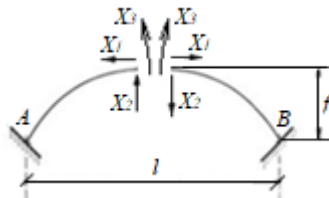


Рис. 9.6. О. С. бесшарнирной арки с заделанными концами

Влияние отброшенных связей заменяется соответствующими лишними неизвестными  $X_1, X_2, X_3$ .

Рассмотрим общие правила расчета арок.

В арках внутренние усилия ( $M, Q, N$ ) и перемещения зависят не только от внешней нагрузки, но и от формы оси, а в статически неопределимых арках еще и от геометрических характеристик поперечных сечений (площадей  $A$  и моментов инерции  $I$ , так как для определения внутренних усилий в статически неопределимых арках методом сил необходимо определять перемещения  $\delta$  и  $\Delta$ , содержащие жесткости  $EI, EA, GA$ ).

При расчете перемещений способом Мора необходимо учитывать для плоских арок все три слагаемых, содержащих  $M, Q$  и  $N$ . Однако при предварительных расчетах допускается пренебрегать влиянием на перемещения поперечных, а в некоторых случаях и продольных сил. Поэтому интегралы Мора вычисляют приближенно, используя численные методы. Способы перемножения эпюр по Верещагину неприменимы, так как все эпюры внутренних усилий в арках являются криволинейными. Однако в виде исключения можно разбить ось арки на малые участки, в пределах которых ось и эпюры считать прямолинейными, перемножить построенные эпюры для каждого участка и полученные результаты сложить. Закон изменения площади сечения арки выражается зависимостью

$$A(z) = A_0 \sqrt[n]{\frac{I(z)}{I_0}}, \quad (9.1)$$

где  $I(z) = I_0 (\cos \varphi(z))^n$  – для двухшарнирных арок;

$I(z) = I_0 / (\cos \varphi(z))^n$  – для бесшарнирных арок;

$I_0$  – момент инерции сечения в ключевом шарнире;

$n = 0, 1, 2$  и т. д.

Расчет статически неопределимых двухшарнирных арок на неподвижную нагрузку (рис. 9.7).

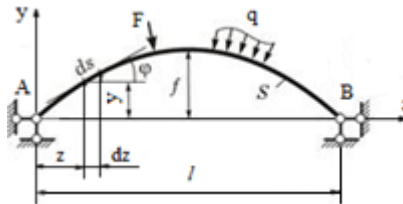


Рис. 9.7. Расчетная схема двухшарнирной арки

Двухшарнирная арка содержит одну лишнюю связь, поэтому для получения статически определимой О. С. метода сил необходимо отбросить эту связь и заменить ее неизвестной  $X_1$ . О. С. метода сил для двухшарнирной арки может быть образована двумя способами: в виде трехшарнирной арки (арочная О. С.) или криволинейной балки (балочная О. С.). В первом случае  $X_1$  представляет собой изгибающий момент в ключевом шарнире (рис. 9.8, а), во втором – горизонтальную опорную реакцию (распор) (рис. 9.8, б).

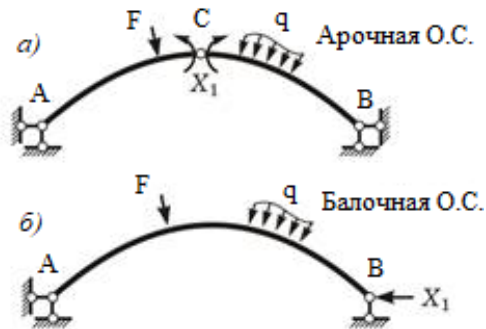


Рис. 9.8. О. С. двухшарнирной арки

На рис. 9.9 изображена О. С. двухшарнирной арки в деформированном состоянии от действия заданной внешней нагрузки.

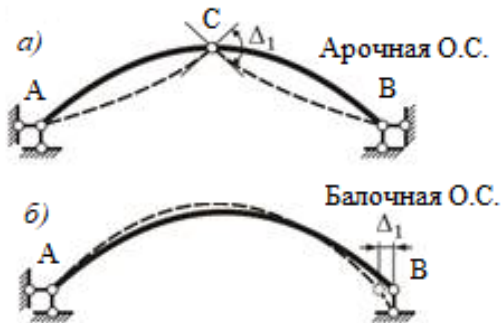


Рис. 9.9. О. С. двухшарнирной арки в деформированном состоянии

Составим уравнение, выражающее условие отсутствия перемещений по направлению неизвестного усилия  $X_1$ . Приравняв это уравнение к нулю, получим каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (9.2)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение по направлению  $X_1$ , вызванное единичной силой, приложенной в направлении  $X_1$ ;

$\Delta_{1F}$  – перемещение по направлению  $X_1$  от заданной внешней нагрузки.

Воспользовавшись методом Мора, находим перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$ :

$$\delta_{11} = \int_s \overline{M_1 M_1} ds / EI + \int_s \eta \overline{Q_1 Q_1} ds / GA + \int_s \overline{N_1 N_1} ds / EA; \quad (9.3)$$

$$\Delta_{1F} = \int_s \overline{M_1 M_F} ds / EI + \int_s \eta \overline{Q_1 Q_F} ds / GA + \int_s \overline{N_1 N_F} ds / EA, \quad (9.4)$$

где  $s$  – длина оси арки;

$ds$  – бесконечно малый элемент оси;

$EI$ ,  $GA$ ,  $EA$  – жесткости сечения при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии соответственно;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению при изгибе и зависящий от формы сечения.

Из уравнения (9.2) следует, что  $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11}$ .

Определяем изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в заданных сечениях арки:

$$\begin{aligned} M &= M_1 X_1 + M_F; \\ Q_1 &= Q_1 X_1 + Q_F; \\ N &= N_1 X_1 + N_F. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Особенности расчета двухшарнирной арки с балочной О. С. Рассмотрим двухшарнирную арку (рис. 9.10).

Составим уравнения равновесия для единичного состояния О. С. (рис. 9.10, а):

$$\Sigma M = 0, \quad \overline{M_1} = -y, \quad \Sigma t = 0, \quad \overline{N_1} = -\cos \varphi, \quad \Sigma n = 0, \quad \overline{Q_1} = -\sin \varphi.$$

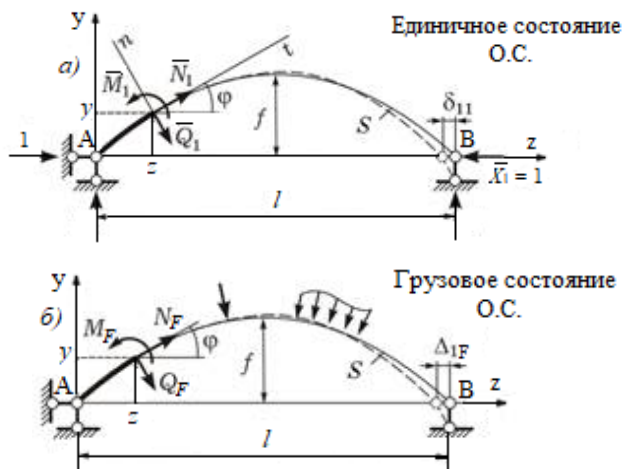


Рис. 9.10. Двухшарнирная арка с балочной О.С.

Подставим полученные значения в формулы (9.3) и (9.4). При этом перейдем от интегрирования по длине оси  $s$  к интегрированию по длине пролета  $l$ .

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 dz / EI \cos \varphi + \int_0^l \eta (\sin \varphi)^2 dz / GA \cos \varphi + \int_0^l (\cos \varphi)^2 dz / EA \cos \varphi; \quad (9.6)$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^l (-y) M_F dz / EI \cos \varphi + \int_0^l \eta (-\sin \varphi) Q_F dz / GA \cos \varphi + \int_0^l (-\cos \varphi) N_F dz / EA \cos \varphi. \quad (9.7)$$

В приближенном расчете двухшарнирных арок со стрелой подъема  $f < 1/3$  и с высотой поперечного сечения  $h < 1/10$  допускается не учитывать поперечные силы при определении  $\delta_{11}$ , продольные и поперечные силы при определении  $\Delta_{1F}$ .

Расчет статически неопределимых бесшарнирных арок на неподвижную нагрузку. Бесшарнирная арка (рис. 9.11) содержит три лишние

связи, поэтому для получения статически определимой О. С. метода сил необходимо отбросить три связи и заменить их неизвестными  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ .

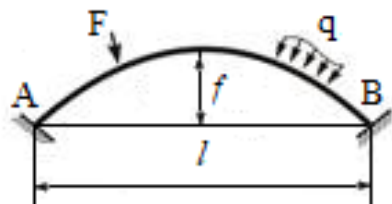


Рис. 9.11. Бесшарнирная арка

О. С. метода сил для бесшарнирной арки можно получить введением трех шарниров (рис. 9.12, а), отбрасыванием жесткой опоры (рис. 9.12, б), разрезанием арки по оси симметрии (рис. 9.12, в) и введением в каждом случае трех неизвестных  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ .

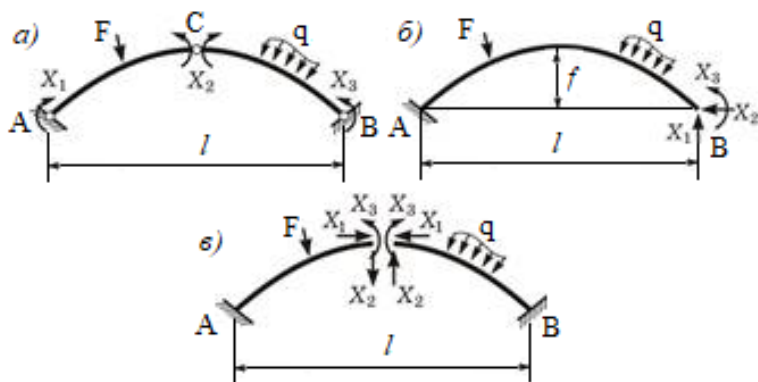


Рис. 9.12. О. С. бесшарнирной арки

Составим уравнения, выражающие условия отсутствия перемещений по направлению неизвестных усилий  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . В первом случае это углы поворота опорных сечений и взаимный угол поворота сечений в ключевом шарнире; во втором случае это линейные и угловое перемещения конца криволинейной консоли; в третьем – условие полной взаимной неподвижности левого и правого сечений арки в месте разреза.

Приравняв эти уравнения к нулю, получим канонические уравнения метода сил:

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0.\end{aligned}\tag{9.8}$$

Входящие в них перемещения определяются по методу Мора:

$$\delta_{ik} = \int_s \overline{M_i M_k} ds / EI + \int_s \eta \overline{Q_i Q_k} ds / GA + \int_s \overline{N_i N_k} ds / EA;\tag{9.9}$$

$$\Delta_{iF} = \int_s \overline{M_i M_F} ds / EI + \int_s \eta \overline{Q_i Q_F} ds / GA + \int_s \overline{N_i N_F} ds / EA,\tag{9.10}$$

где  $i, k = 1, 2, 3$ ;

$s$  – длина оси арки;

$\overline{M_i}, \overline{Q_i}, \overline{N_i}$  и  $\overline{M_F}, \overline{Q_F}, \overline{N_F}$  – внутренние усилия в О. С. от  $\overline{X_i} = 1$  и заданной внешней нагрузки соответственно;

$ds$  – бесконечно малый элемент оси;

$EI, GA, EA$  – жесткости поперечного сечения при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии соответственно;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению при изгибе, зависящий от формы сечения.

Особенности расчета бесшарнирной арки с О. С., полученной разрезанием арки по оси симметрии. Рассмотрим О. С. бесшарнирной арки (см. рис. 9.12, в).

Тогда

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

После решения системы канонических уравнений и определения неизвестных  $X_1, X_2, X_3$  вычисляются значения внутренних усилий  $M, Q, N$  по формулам:

$$\begin{aligned}
M &= \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_F; \\
Q &= \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \overline{Q}_3 X_3 + Q_F; \\
N &= \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \overline{N}_3 X_3 + N_F.
\end{aligned}
\tag{9.11}$$

Далее необходимо выполнить кинематическую проверку правильности вычисления внутренних усилий. Для этого можно использовать усилия одного из единичных состояний  $\overline{M}_i$ ,  $\overline{Q}_i$ ,  $\overline{N}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\Delta_i = \int_s \overline{M}_i M ds / EI + \int_s \eta \overline{Q}_i Q ds / GA + \int_s \overline{N}_i N ds / EA = 0, \tag{9.12}$$

где  $\Delta_i$  – перемещение по направлению  $X_i$ .

Или можно найти суммарные величины:

$$\overline{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \overline{M}_i; \quad \overline{Q}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \overline{Q}_i; \quad \overline{N}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \overline{N}_i.$$

Тогда должно выполняться равенство

$$\int_s \overline{M}_\Sigma M ds / EI + \int_s \eta \overline{Q}_\Sigma Q ds / GA + \int_s \overline{N}_\Sigma N ds / EA = 0. \tag{9.13}$$

Выполнение условий (9.12) и (9.13) говорит о том, что перемещения по направлениям реакций отброшенных связей отсутствуют, что соответствует расчетной схеме заданной бесшарнирной арки.

## 9.2. Особенности расчета параболических двухшарнирных и бесшарнирных арок. Расчет круговых арок и колец при радиальной нагрузке

Рассмотрим расчет параболических двухшарнирных и бесшарнирных арок на конкретных примерах.

Для параболической двухшарнирной арки постоянного поперечного сечения с заданными размерами и нагрузкой требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рис. 9.13).

Ось арки очерчена по квадратной параболе  $y = 4fz(l - z)$ , отнесенной к началу координат на левой опоре.

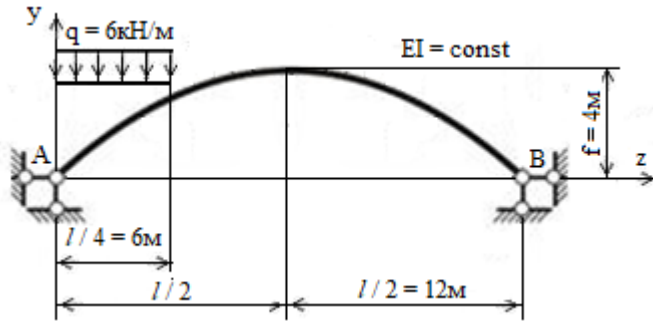


Рис. 9.13. Расчетная схема параболической двухшарнирной арки

Степень статической неопределимости арки определяется по формуле

$$n_c = 3Д - Ш = 3 \cdot 3 - 8 = 1,$$

где  $Д = 3$  – количество дисков в системе;

$Ш = 8$  – число одиночных шарниров.

Основную систему получаем, принимая за лишнее неизвестное реакцию распора (рис. 9.14).

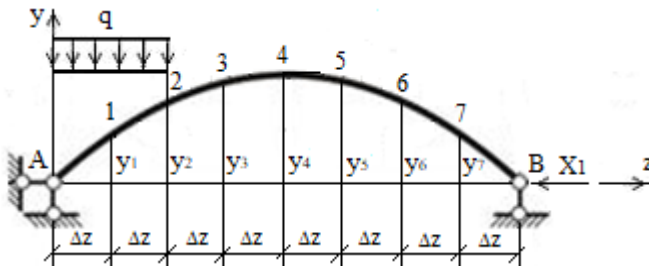


Рис. 9.14. О. С. параболической двухшарнирной арки

Разобьем пролет арки на равные отрезки длиной  $\Delta z = 3$  м. Составим каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Откуда

$$X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11}.$$

Продольными и поперечными силами при определении коэффициентов канонического уравнения пренебрегаем.

Рассмотрим О. С. в двух состояниях: при загрузке арки единичной силой  $\bar{M}_1 = 1$  (рис. 9.15, а) и внешней нагрузкой (рис. 9.15, б).

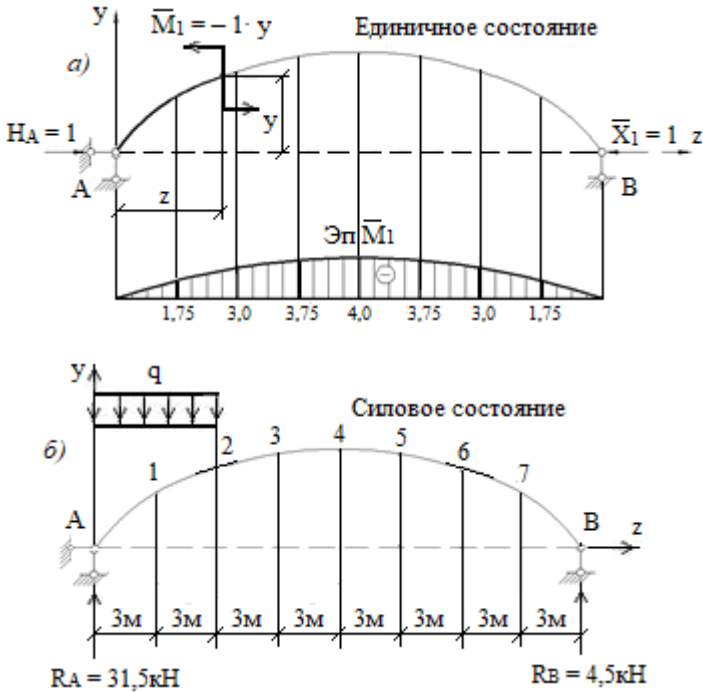


Рис. 9.15. Единичное и силовое состояния для двухшарнирной арки

Изгибающий момент в О. С. двухшарнирной арки от заданной внешней нагрузки совпадает с моментом однопролетной балки того же пролета и такой же нагрузки:

$$M_F = M^0.$$

Построим балочные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил  $M^0$  и  $Q^0$  (рис. 9.16, б, в).

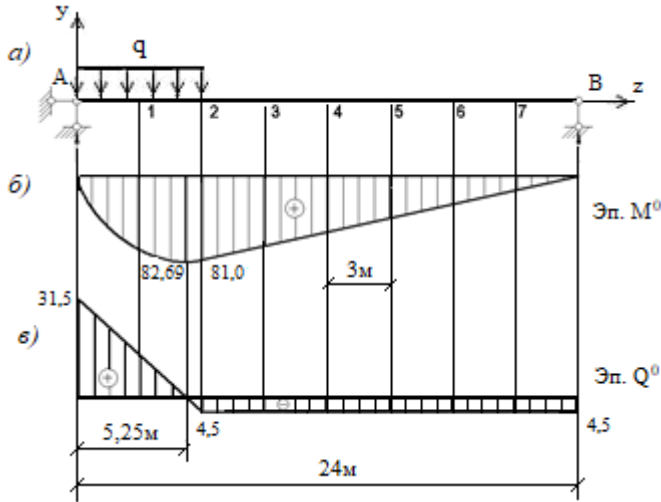


Рис. 9.16. Построение эпюр балочных моментов и поперечных сил

При вычислении перемещений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$  используем интеграл Мора:

$$\delta_{11} = (1/EI) \int_s \overline{M}_1 M_1 ds; \quad \Delta_{1F} = (1/EI) \int_s \overline{M}_1 M_F ds.$$

Подставим найденные зависимости  $\overline{M}_1 = -y$ ,  $M_F = M^0$ ,  $ds = dz / \cos \varphi$  в интегралы Мора:

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 dz / EI \cos \varphi; \quad \Delta_{1F} = \int_0^l (-y) M^0 dz / EI \cos \varphi. \quad (9.14)$$

Произведем замену в выражениях (9.14):

$$Z_y = y^2 / \cos \varphi; \quad Z_F = -(y M^0) / \cos \varphi.$$

Тогда выражения (9.14) преобразуются к следующему виду:

$$\delta_{11} = \int_0^l Z_y dz / EI; \quad \Delta_{1F} = \int_0^l Z_F dz / EI. \quad (9.15)$$

Интегралы (9.15) невозможно вычислить с достаточной степенью точности, поэтому интегрирование заменим суммированием. Разобьем

пролет арки на восемь равных частей  $\Delta z = 3$  м (см. рис. 9.15) и, используя правило Симпсона, получим следующие выражения для  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$ :

$$\delta_{11} = (\Delta z / 3EI) (Z_{yA} + 4Z_{y1} + 2Z_{y2} + 4Z_{y3} + 2Z_{y4} + 4Z_{y5} + 2Z_{y6} + 4Z_{y7} + Z_{yB}); \quad (9.16)$$

$$\Delta_{1F} = (\Delta z / 3EI) (Z_{FA} + 4Z_{F1} + 2Z_{F2} + 4Z_{F3} + 2Z_{F4} + 4Z_{F5} + 2Z_{F6} + 4Z_{F7} + Z_{FB}). \quad (9.17)$$

Дальнейший расчет приведен в табл. 9.1–9.3.

Подставив численные значения величин  $Z_y$  и  $Z_F$ , получим следующие значения перемещений:

$$\delta_{11} = (4 \cdot 3,427 + 2 \cdot 9,491 + 4 \cdot 14,258 + 2 \cdot 16,0 + 4 \cdot 14,258 + 2 \cdot 9,491 + 4 \cdot 3,427) = 211,444 / EI;$$

$$\Delta_{1F} = -(4 \cdot 132,19 + 2 \cdot 256,248 + 4 \cdot 256,641 + 2 \cdot 216,0 + 4 \cdot 153,985 + 2 \cdot 85,416 + 4 \cdot 26,438) / EI = -3392,344 / EI.$$

Определим горизонтальную составляющую опорной реакции (распор):

$$X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = H = 3392,344 / 211,444 = 16,04 \text{ кН.}$$

Внутренние усилия в поперечных сечениях двухшарнирной арки определяем по формулам:

$$M = M^0 - Hy. \quad (9.18)$$

$$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi. \quad (9.19)$$

$$N = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi). \quad (9.20)$$

Таблица 9.1. Расчет двухшарнирной арки

Показатель	Сечение								
	A	1	2	3	4	5	6	7	B
z, м	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y, м	0	1,75	3,0	3,75	4,0	3,75	3,0	1,75	0
y' = tg φ	0,667	0,5	0,333	0,167	0	-0,167	-0,333	-0,5	-0,667
sin φ	0,5544	0,4488	0,3173	0,165	0	-0,165	-0,3173	-0,4488	-0,5544
cos φ	0,832	0,8936	0,9483	0,9863	1,0	0,9863	0,9483	0,8936	0,832
M <sub>F</sub> = M <sup>0</sup>	0	67,5	81,0	67,5	54,0	40,5	27,0	13,5	0

Таблица 9.2. Расчет двухшарнирной арки

Показатель	Сечение								
	A	1	2	3	4	5	6	7	B
$Q^0$	31,5	13,5	-4,5	-4,5	-4,5	-4,5	-4,5	-4,5	-4,5
$-Q^0 \sin \varphi$	-17,464	-6,0588	1,428	0,752	0	-0,752	-1,428	-2,02	-2,495
$Q^0 \cos \varphi$	26,208	12,064	-4,267	-4,438	-4,5	-4,438	-4,267	-4,021	-3,744
$Z_y = y^2 / \cos \varphi$	0	3,427	9,491	14,258	16,0	14,258	9,491	3,427	0
$Z_F = -(yM^0) / \cos \varphi$	0	-132,19	-256,248	-256,641	-216,0	-153,985	-85,416	-26,438	0
$H_y$	0	28,07	48,12	60,15	64,16	60,15	48,12	28,07	0

Таблица 9.3. Расчет двухшарнирной арки

Показатель	Сечение								
	A	1	2	3	4	5	6	7	B
$H \sin \varphi$	8,893	7,199	5,089	2,647	0	-2,647	-5,089	-7,199	-8,893
$H \cos \varphi$	13,345	14,333	15,211	15,82	16,04	15,82	15,211	14,333	13,345
$M = M^0 - H_y$	0	39,43	32,88	7,35	-10,16	-19,65	-21,12	-14,57	0
$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$	17,315	4,865	-9,356	-7,085	-4,5	-1,791	0,822	3,178	5,149
$N = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi)$	-30,809	-20,392	-13,783	-15,068	-16,04	-16,572	-16,639	-16,353	-15,84
Кинематическая проверка: $Z = (-M_y) / \cos \varphi$	0	-77,219	-104,018	-27,945	40,64	74,711	66,814	28,533	0

Выполним кинематическую проверку эпюры изгибающих моментов. Суть проверки заключается в том, что перемещение по направлению неизвестного  $X_1$  должно равняться нулю:

$$\Delta_1 = \int_0^l M \overline{M}_1 dz / EI \cos \varphi, \quad (9.21)$$

где  $M$  – эпюра изгибающих моментов для статически неопределимой двухшарнирной арки;

$\overline{M}_1 = -1y$  – эпюра изгибающих моментов от единичной силы  $\overline{X}_1 = 1$

в О. С.

Произведем замену  $Z = -(yM) / \cos \varphi$ .

Тогда

$$\Delta_1 = \int_0^l Z dz / EI \cos \varphi.$$

О п р о р з л у п с

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\Delta_Z / 3EI) (Z_A + 4Z_1 + 2Z_2 + 4Z_3 + 2Z_4 + 4Z_5 + \\ &+ 2Z_6 + 4Z_7 + Z_B) = (-4 \cdot 77,219 - 2 \cdot 104,018 - 4 \cdot 27,945 + \\ &+ 2 \cdot 40,64 + 4 \cdot 74,711 + 2 \cdot 66,814 + 4 \cdot 28,533) / EI = \\ &= (627,884 - 628,692) / EI = -0,808 / EI. \end{aligned}$$

Окончательные эпюры внутренних силовых факторов изображены на рис. 9.17, б, в, г.

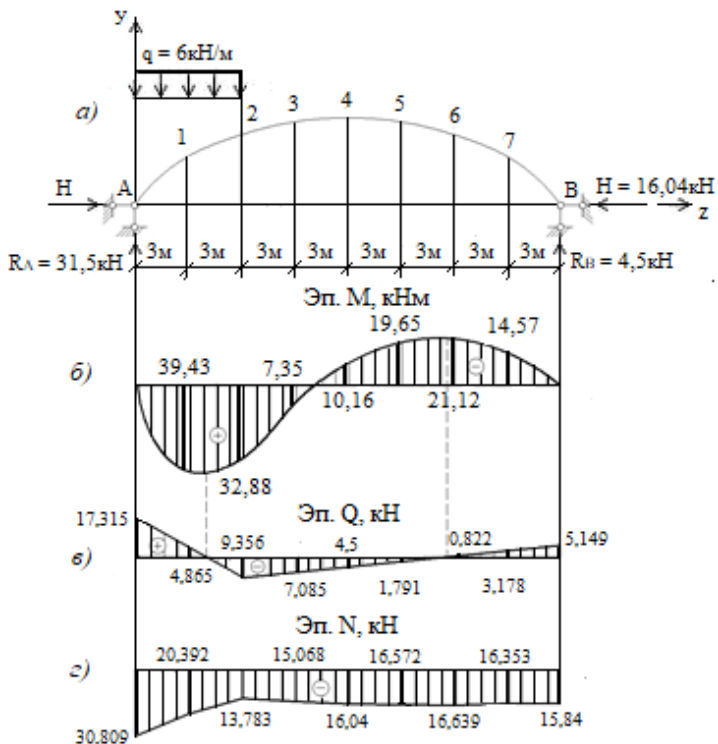


Рис. 9.17. Эпюры внутренних силовых факторов для двухшарнирной арки

Погрешность составляет:

$$(0,808 \cdot 100) / 627,884 = 0,13 \%$$

Допустимой можно считать погрешность до 5 %.

Для двухшарнирных арок кругового очертания  $\alpha = -\varphi$  (рис. 9.18, а).

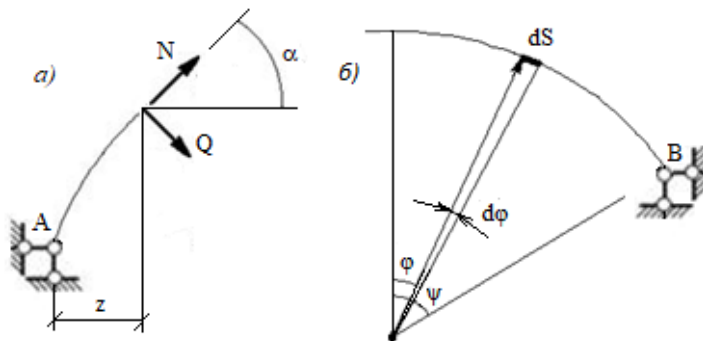


Рис. 9.18. Расчетная схема двухшарнирной арки кругового очертания

Для арки кругового очертания длина бесконечно малого участка арки  $dS$  связана с бесконечно малым приращением угла  $d\varphi$  зависимостью  $dS = R d\varphi$  (рис. 9.18, б).

Рассмотрим единичное состояние О. С. двухшарнирной арки (рис. 9.19).

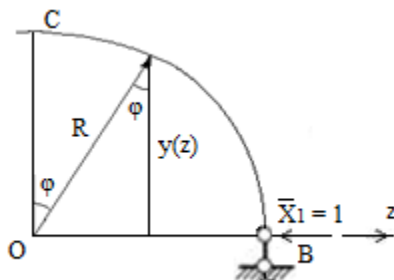


Рис. 9.19. Вспомогательное состояние О. С. двухшарнирной арки

Легко убедиться в том, что вертикальные реакции в опорах арки будут отсутствовать, а изгибающий момент в сечениях О. С. определяется по формуле

$$\overline{M}_1 = -1y = -R \cos \varphi.$$

Таким образом, выражения для определения коэффициентов канонического уравнения метода сил приобретают вид

$$\delta_{11} = R^3 \int_{-\Psi}^{+\Psi} \cos^2 \varphi \, d\varphi / EI(\varphi); \quad (9.22)$$

$$\Delta_{1F} = -R^2 \int_{-\Psi}^{+\Psi} \cos \varphi M_F(\varphi) \, d\varphi / EI(\varphi). \quad (9.23)$$

Интегралы (9.22) и (9.23) могут быть вычислены различными способами. В случае арки постоянной жесткости и достаточно простой нагрузки, т. е. при простом виде функции  $M_F(\varphi)$ , может быть использовано аналитическое вычисление интегралов. В более сложных случаях можно применить численное интегрирование, например, использовать математический пакет типа MathCad.

В качестве примера рассмотрим расчет арки кругового очертания постоянной жесткости по длине (рис. 9.20).

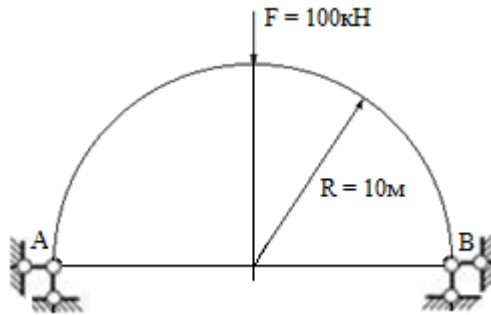


Рис. 9.20. Двухшарнирная арка кругового очертания

В грузовом состоянии О. С. в опорах арки возникают вертикальные реакции величиной  $F / 2 = 50$  кН каждая. Определим изгибающий момент на правой половине арки (рис. 9.21) по формуле

$$M_F = (F / 2) (KB) = (F / 2) [R - (OK)] = (F / 2) (R - R \sin \varphi) = (FR / 2) (1 - \sin \varphi).$$

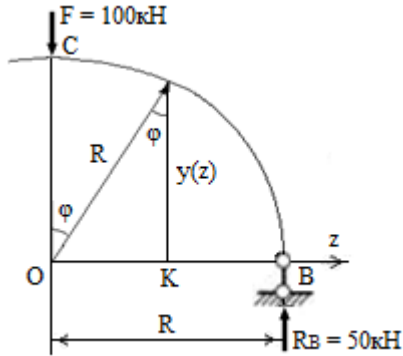


Рис. 9.21. О. С. грузового состояния двухшарнирной арки

На левой половине арки с учетом того, что угол  $\varphi$  имеет отрицательное значение, изгибающий момент равен:

$$M_F = (FR / 2) (1 + \sin \varphi).$$

После подстановки этого выражения в интегралы (9.22) и (9.23), с учетом того что  $\varphi = \pi / 2$ , получим:

$$\delta_{11} = R^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi / EI(\varphi); \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} = & -R^3 (F / 2) \int_{-\pi/2}^0 \cos \varphi (1 + \sin \varphi) d\varphi / EI(\varphi) - R^3 (F / 2) \times \\ & \times \int_0^{+\pi/2} \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi / EI(\varphi). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Так как жесткость арки – величина постоянная, внутренние усилия в поперечных сечениях не зависят от величины  $EI$ . Задав  $EI = 1$ , с помощью пакета MathCad получим:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi / EI = 0,7854;$$

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos \varphi (1 + \sin \varphi) d\varphi / EI = \int_0^{+\pi/2} \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi / EI(\varphi) = 0,5.$$

Отсюда следует:

$$\delta_{11} = 1570,8, \Delta_{1F} = -50000, X_1 = 50000 / 1570,8 = 31,83 \text{ кН.}$$

Выражение для изгибающего момента на правой половине арки:

$$M(\varphi) = -31,83R \cos \varphi + (FR / 2) (1 - \sin \varphi) = -318,3 \cos \varphi + 500 \cdot (1 - \sin \varphi).$$

Выражение для изгибающего момента на левой половине арки:

$$M(\varphi) = -31,83R \cos \varphi + (FR / 2) (1 + \sin \varphi) = -318,3 \cos \varphi + 500 \cdot (1 + \sin \varphi).$$

Зная реакции в опорах арки (горизонтальный распор  $H_A = 31,83$  кН, вертикальная реакция  $R_A = 50$  кН), найдем поперечное и продольное усилия.

Следует отметить, что при выводе формул для определения поперечных и продольных усилий в сечениях двухшарнирной арки кругового очертания положительными направлениями  $\Sigma F_H^{\text{лев}}(z)$  и  $\Sigma F_R^{\text{лев}}(z)$  считаются такие направления, при которых соответствующие им внутренние усилия будут положительными.

Результаты расчетов для левой половины арки приведены в табл. 9.4.

Таблица 9.4. Расчет для левой половины арки

Угол $\varphi$ , град	Изгибающий момент $M(\varphi) = 31,83 \cos \varphi +$ $+ 50 \cdot (1 + \sin \varphi)$	Поперечное усилие $Q(\varphi) = R_A \cos(-\varphi) -$ $- H_A \sin(-\varphi)$	Продольное усилие $N(\varphi) = -R_A \sin(-\varphi) -$ $- H_A \cos(-\varphi)$
-90	0	-31,83	-50,00
-75	-65,34	-17,80	-56,53
-60	-92,16	-2,57	-59,21
-45	-78,63	12,85	-57,86
-30	-25,66	27,39	-52,57
-15	+63,10	40,06	-43,69
0	+181,70	50,00	-31,83

Расчеты для правой половины арки будут аналогичными, исходя из симметрии системы.

Эпюры моментов, поперечных и продольных сил изображены на рис. 9.22, 9.23.

При этом эпюры  $M(\varphi)$  и  $N(\varphi)$  являются симметричными, а эпюра  $Q(\varphi)$  – кососимметричной.

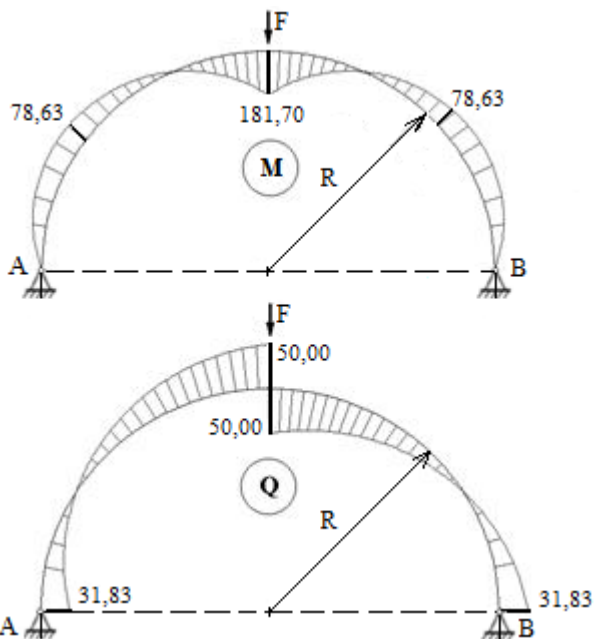


Рис. 9.22. Окончательные эпюры  $M$  и  $Q$  для двухшарнирной арки

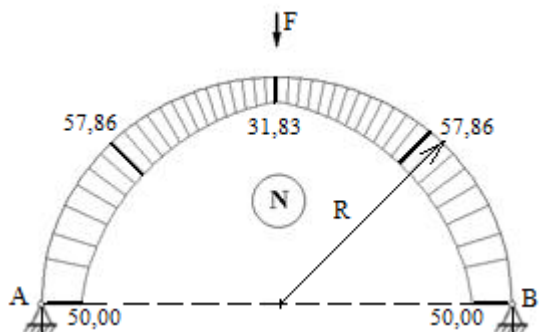


Рис. 9.23. Окончательная эпюра  $N$  для двухшарнирной арки

На опорах значение продольного усилия равно распору, а продольных усилий – вертикальным реакциям опор. В то же время значение продольного усилия на оси арки равно распору.

Величина максимального изгибающего момента в простой балке на двух опорах, перекрывающей тот же пролет 20 м и находящейся под действием такой же нагрузки, составит  $F l / 4 = 500 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , что значительно выше, чем в двухшарнирной арке. Как и в трехшарнирной арке, это связано с положительным влиянием арочного распора.

Кольцевыми системами называют замкнутые системы криволинейных стержней. Расчетные схемы кольцевых систем используются при расчетах трубопроводов, сосудов высокого давления, силосных башен и других подобных систем. Кольцевая система (рис. 9.24, а) представляет собой 3 раза статически неопределимую систему.

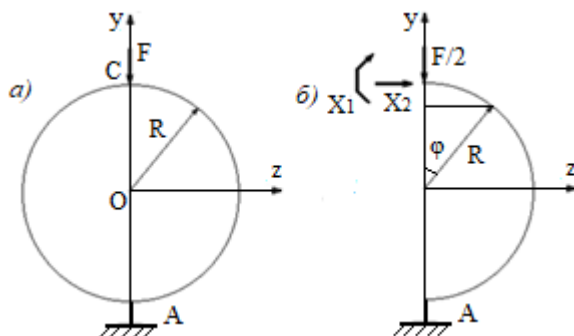


Рис. 9.24. Расчетная схема кольцевой системы

Если расцечь ее в каком-либо сечении, т. е. удалить три связи, получим статически определимую *О. С.* Действие отброшенных связей заменим тремя неизвестными  $X_1, X_2, X_3$ .

Рассмотрим расчет кольцевой системы (рис. 9.24, б).

Зададим  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $R = 1 \text{ м}$ . Жесткость  $EI$  криволинейного стержня будем считать постоянной по длине.

Рассмотрим сечение на оси симметрии системы, заменив силу  $F$  двумя силами  $F / 2$ , которые приложены слева и справа от сечения на бесконечно малом расстоянии от него. В этом случае *О. С.* кольцевой системы становится симметричной и можно будет ограничиться расчетом только ее половины.

Согласно расчетной схеме (рис. 9.24, а), поперечное усилие на оси симметрии должно равняться нулю. Поэтому для расчетной схемы *О. С.* остаются только две неизвестные – продольное усилие  $X_1$  и изгибающий момент  $X_2$ .

Таким образом, система канонических уравнений метода сил имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0.\end{aligned}\tag{9.26}$$

Коэффициенты канонических уравнений определим по формулам Максвелла – Мора.

Определим изгибающие моменты:  
в первом единичном состоянии

$$\overline{M}_1 = 1;$$

во втором единичном состоянии

$$\overline{M}_2 = R(1 - \cos \varphi);$$

в грузовом состоянии

$$M_F = -(F/2) R \sin \varphi.$$

Вычислим значения коэффициентов канонических уравнений (9.26) с помощью пакета MathCad:

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi} 1 \cdot 1 \, d\varphi / EI = 3,1415;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^{\pi} 1 R(1 - \cos \varphi) \, d\varphi / EI = 3,1415;$$

$$\delta_{22} = \int_0^{\pi} R^2 (1 - \cos \varphi)^2 \, d\varphi / EI = 4,71239;$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^{\pi} (-F/2) R \sin \varphi \, d\varphi / EI = -10;$$

$$\Delta_{2F} = \int_0^{\pi} (-F/2) R \sin \varphi R(1 - \cos \varphi) \, d\varphi / EI = (-F/2) R^2 \cdot 2 = -10.$$

После решения системы канонических уравнений (9.26) получим:

$$X_1 = 3,1831 \text{ кН};$$

$$X_2 = 0.$$

Таким образом, продольные усилия в крайней нижней и верхней точках кольцевой системы равны нулю. Также можно сделать вывод о том, что продольные усилия в крайней левой и правой точках кольцевой системы должны равняться  $-F / 2 = -5 \text{ кН}$ .

Внутренние усилия в сечениях криволинейного стержня определяются по формулам:

$$M(\varphi) = \overline{M}_1 X_1 + M_F = 3,1831 - 5 \sin \varphi;$$

$$Q(\varphi) = \overline{Q}_3 X_3 + Q_F = -5 \cos \varphi; \quad (9.27)$$

$$N(\varphi) = \overline{N}_2 X_2 + N_F = -5 \sin \varphi.$$

Результаты расчета по формулам (9.27) сведены в табл. 9.5.

Таблица 9.5. Расчет внутренних усилий в сечениях криволинейного стержня

Угол $\varphi$ , град	Изгибающий момент, кН · м, $M(\varphi) = 3,1831 -$ $- 5 \sin \varphi$	Поперечная сила, кН, $Q(\varphi) = -5 \cos \varphi$	Продольная сила, кН, $N(\varphi) = -5 \sin \varphi$
0	3,1831	-5,000	0,000
15	1,8890	-4,829	-1,294
30	0,6831	-4,330	-2,500
45	-0,3524	-3,536	-3,536
60	-1,1470	-2,500	-4,330
75	-1,6465	-1,294	-4,829
90	-1,8169	0,000	-5,000

В силу наличия в системе двух осей симметрии построить эпюру изгибающих моментов достаточно для одной четверти кольца. На остальной части построение производится, исходя из симметрии задачи.

Эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  построены на рис. 9.25.

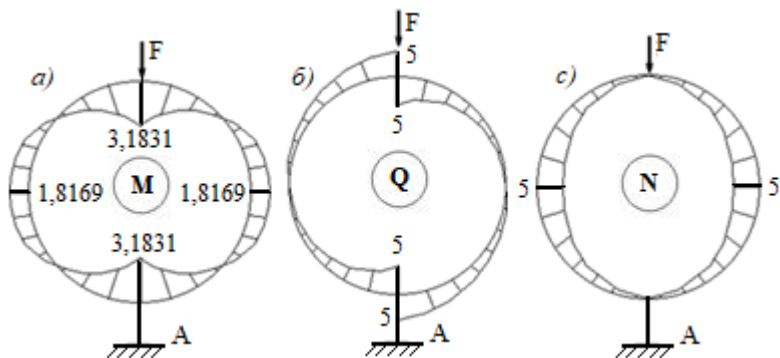


Рис. 9.25. Эпюры внутренних силовых факторов для кольцевой системы

Рассмотрим кольцевую систему радиусом  $R$  (рис. 9.26), находящуюся под действием внутренней, равномерно распределенной нагрузки  $q$ . Подобная ситуация возникает, например, при расчете трубопровода высокого давления, если  $q$  – давление газа, находящегося внутри трубопровода.

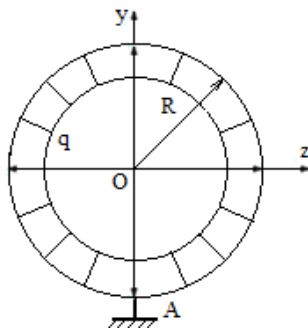


Рис. 9.26. Расчетная схема кольцевой системы под действием распределенной нагрузки

Очевидно, что равнодействующая нагрузки, приложенной к кольцевой системе, равна нулю. Следовательно, реакции опор в системе также будут нулевыми. Отсюда любая прямая, проходящая через центр окружности, будет являться осью ее симметрии. Таким образом, во всех сечениях поперечная сила  $Q$  будет равна нулю.

Из равенства нулю поперечной силы и с учетом формулы  $Q = dM / dz$  следует, что изгибающий момент является величиной постоянной. Докажем, что изгибающий момент должен быть равен нулю.

Доказательство будем вести от противного. Пусть изгибающий момент во всех сечениях рассматриваемой системы постоянный и отличный от нуля. Выполним для данной кольцевой системы деформационную проверку:

$$\int_L M_{\text{ок}} \bar{M} dL / EI = 0, \quad (9.28)$$

где  $L$  – длина участка интегрирования;

$M_{\text{ок}}$  – величина окончательного изгибающего момента, полученная в результате расчета;

$\bar{M}$  – величина изгибающего момента в единичном состоянии.

В единичном состоянии О. С. (рис. 9.27) в любом сечении  $\bar{M} = 1$ .

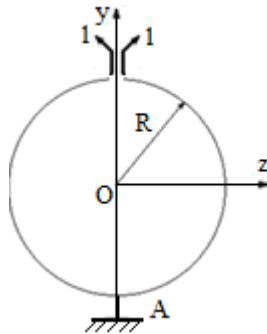


Рис. 9.27. Единичное состояние основной системы при единичном изгибающем моменте

Так как  $M_{\text{ок}} = \text{const}$  по всей длине участка  $L$ , то равенство (9.28) выполняется только в случае, если  $M_{\text{ок}} = 0$ . Итак, мы доказали, что изгибающий момент во всех сечениях рассматриваемой системы отсутствует. Кстати, в этом случае равенство (9.28) выполняется автоматически для единичного состояния любой О. С.

Таким образом, при действии внутренней, равномерно распределенной нагрузки на кольцевые системы единственным ненулевым усилием в них оказывается продольное усилие.

Для его определения рассмотрим равновесие, например, верхней половины кольца (рис. 9.28). В силу симметрии по вертикальной оси продольные усилия в местах, где выполнены сечения, должны быть одинаковыми и равными  $N$ .

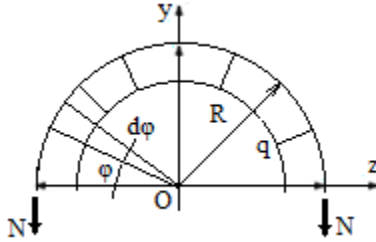


Рис. 9.28. Расчетная схема для определения продольной силы в кольцевой системе

Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось. Нагрузка, действующая на бесконечно малый участок криволинейного стержня длиной  $dL = R d\phi$ , даст на вертикальную ось проекцию величиной  $q R d\phi \sin \phi$ .

Интегрируя эту величину по  $\phi$  от  $0$  до  $\pi$ , получим проекцию равнодействующей нагрузки на вертикальную ось:

$$\int_0^{\pi} q R \sin \phi d\phi = 2qR.$$

Составим уравнение равновесия всех действующих сил на рассматриваемую часть системы относительно вертикальной оси, получим:

$$2N = 2qR.$$

Откуда

$$N = qR. \tag{9.29}$$

Таким образом, продольные усилия в данной задаче являются растягивающими, одинаковыми по всей длине криволинейного стержня и определяются по формуле (9.29). Эта формула известна в инженерных расчетах как **котельная формула**.

### 9.3. Примеры расчета

**Задача 9.1.** Для статически неопределимой арки (рис. 9.29, а), очерченной по окружности, построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Считаем, что  $EI = \text{const}$ .

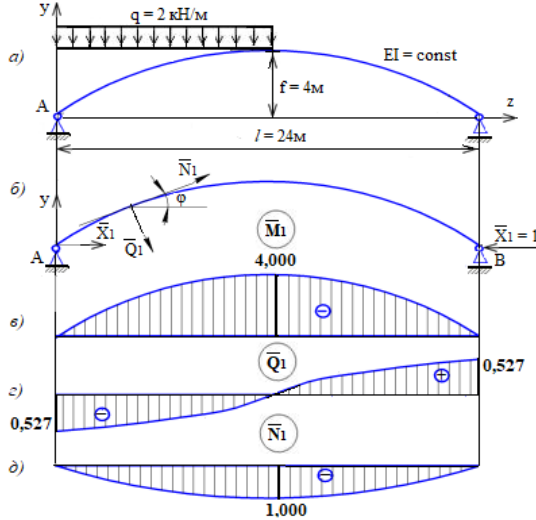


Рис. 9.29. Эпюры для единичных состояний О. С. двухшарнирной арки

#### Решение.

1. Расчет производим методом сил. Степень статической неопределимости двухшарнирной арки равна 1. О. С. арки изображена на рис. 9.29, б. Составим каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Отсюда

$$X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11}.$$

2. Разбиваем пролет арки на восемь одинаковых отрезков  $\Delta_z = 3$  м. Определяем координаты узловых точек арки из уравнения

$$y = [R^2 - (l/2 - z)^2]^{1/2} - R + f, \quad (9.30)$$

где  $R = f/2 + l^2/8f$ .

Для О. С. расчеты выполняем в табл. 9.6.

Таблица 9.6. Расчет для статически неопределимой арки

Сече- ние	$z$ , м	$l/2 - z$	$C =$ $=(l/2 - z)^2$	$\sqrt{R^2 - C}$	$y$	$\sin y$	$\cos y$
<i>A</i>	0	12	144	16,00	0	0,527	0
1	3	9	81	17,86	1,86	0,377	0,927
2	6	6	36	19,08	3,08	0,223	0,975
3	9	3	9	19,77	3,77	0,077	0,977
4	12	0	0	20,00	4,00	0	1,000
5	15	-3	9	19,77	3,77	-0,077	0,977
6	18	-6	36	19,08	3,08	-0,223	0,975
7	21	-9	81	17,86	1,86	-0,377	0,927
<i>B</i>	24	-12	144	16,00	0	-0,527	0

Определим значения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для единичных состояний О. С. (рис. 9.29, б). Для этого находим:  $\operatorname{tg} y = (y_n - y_{n-1}) / \Delta z$ ;  $\sin y$ ;  $\cos y$ .

Таким образом,  $\bar{M} = -y$ ;  $\bar{Q} = -\sin y$ ;  $\bar{N} = -\cos y$ .

Строим единичные эпюры  $\bar{M}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{N}$  (рис. 9.29, в, г, д).

Построим единичную эпюру  $\bar{M}$  для арки с криволинейной осью (рис. 9.30, б).

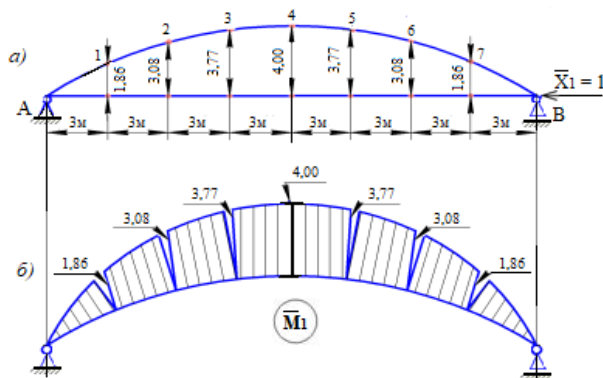


Рис. 9.30. Единичная эпюра для двухшарнирной арки

Строим эпюры  $M_F$ ,  $Q_F$ ,  $N_F$  для арки с криволинейной осью. Расчеты для построения эпюр внутренних силовых факторов от заданной внешней нагрузки в О. С. выполняем в табл. 9.7.

Таблица 9.7. Расчет внутренних силовых факторов

Сечение	$\Delta S = \Delta z / \cos \varphi$	$M_F = M^0$	$Q_F = (M_n - M_{n-1}) / \Delta S$	$N_F = -Q \sin \varphi$
A		0	12,75	-7,91
1	3,236	45	8,34	-3,39
2	3,077	72	2,93	-0,67
3	3,009	81	-2,99	0,23
4	3,009	72	-5,98	-0,46
5	3,077	54	-5,85	-1,34
6	3,236	36	-5,56	-2,26
7	3,529	18	-5,10	-3,16
B		0	-5,10	-3,16

Ординаты грузовой эпюры моментов двухшарнирной арки в О. С. совпадают с ординатами балочного момента, т. е.

$$M_F = M^0 = R_A z - q z^2 / 2.$$

Построим грузовые эпюры для арки с криволинейной осью (рис. 9.31, а, б, в).

При вычислении перемещений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$  используем интеграл Мора:

$$\delta_{11} = (1 / EI) \int_s \overline{M}_1 \overline{M}_1 ds ; \Delta_{1F} = (1 / EI) \int_s \overline{M}_1 M_F ds .$$

Применяя правило Симпсона, или численное интегрирование, например, математический пакет типа MathCad, получим следующие выражения для  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$ :

$$EI \delta_{11} = 212,114 \text{ м}^3 ; EI \Delta_{1F} = -3756,11 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Распорная реакция

$$H = X_1 = -(-3756,11) / 212,114 = 17,71 \text{ кН}.$$

Если при определении  $X_1$  учитывать поперечные и продольные усилия (численный метод при определении интегралов Максвелла – Мора), то значение распора в двухопорной арке составляет:

$$H = -(-3755,24) / 211,972 = 17,72 \text{ кН}.$$

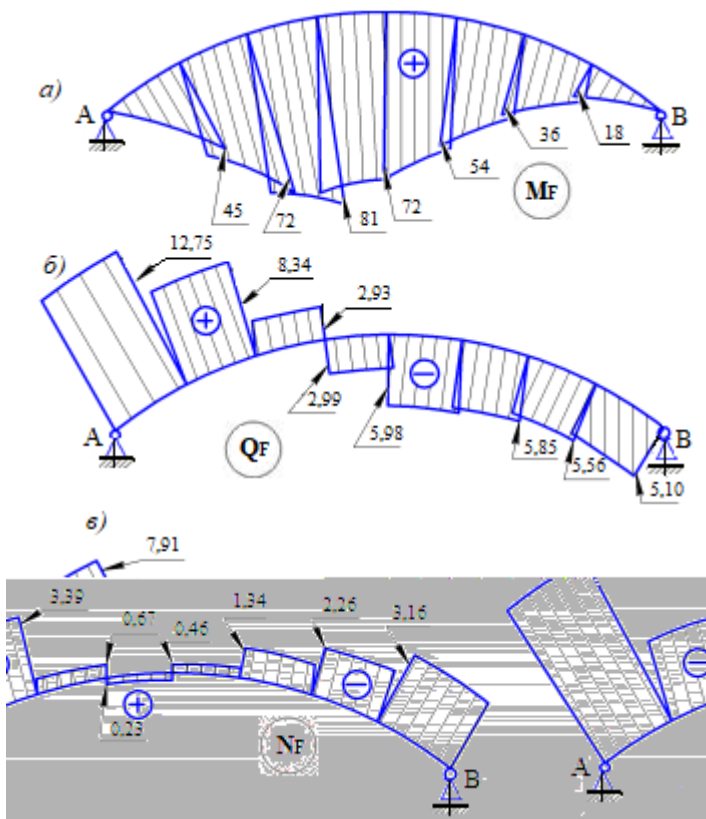


Рис. 9.31. Грузовые эпюры в О. С. для арки с криволинейной осью

Таким образом, при определении распора достаточно учитывать только изгибающий момент.

Построим окончательные эпюры внутренних силовых факторов для двухшарнирной арки, используя следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 M &= M_F - Hy; \\
 Q &= Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \\
 N &= -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi).
 \end{aligned}
 \tag{9.31}$$

Окончательные эпюры моментов изображены на рис. 9.32.

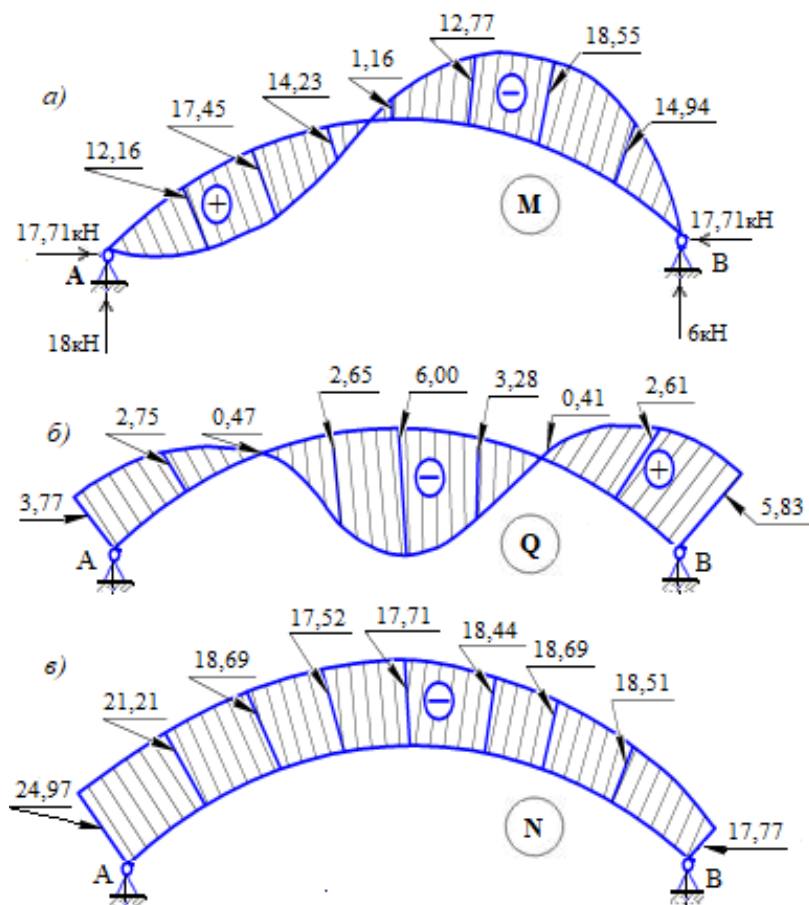


Рис. 9.32. Окончательные эпюры внутренних силовых факторов для двухшарнирной арки

## 9.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.2.** Для сечения  $K$  двухшарнирной арки (рис. 9.33) определить  $M_K$ ,  $Q_K$  и  $N_K$ . Ось арки очерчена по параболе.  $EI = \text{const}$ . Для определения перемещений при вычислении интегралов Мора применить правило Симпсона.

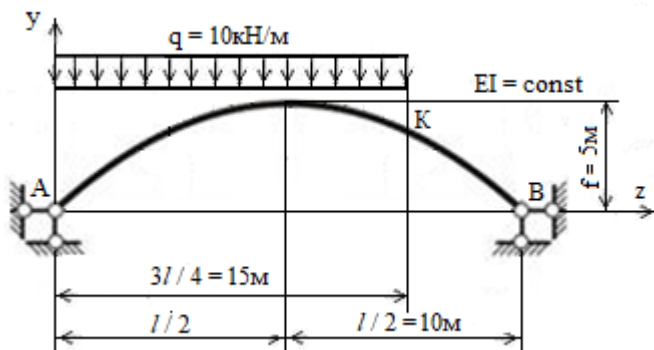


Рис. 9.33. Расчетная схема двухшарнирной арки

**Задача 9.3.** Для бесшарнирной арки (рис. 9.34) построить эпюру  $M$ . Ось арки очерчена по окружности.  $R = 11$  м,  $EI = \text{const}$ .

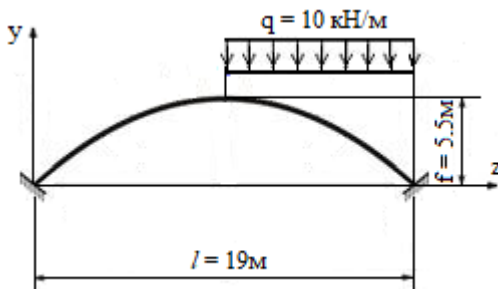


Рис. 9.34. Расчетная схема бесшарнирной арки

**Задача 9.4.** Проверить прочность газопровода высокого давления, если давление газа в трубопроводе  $q = 0,6$  МПа; внутренний радиус трубы  $R = 0,08$  м; материал трубы – сталь 20; толщина стенки  $t = 0,0045$  м; допускаемое напряжение  $[\sigma] = 165$  МПа.

## 9.5. Контрольные вопросы

1. Какие типы статически неопределимых арок применяются в строительстве?
2. С помощью каких методов рассчитываются статически неопределимые арки?
3. Какие основные системы метода сил имеет двухшарнирная арка?
4. Какие основные системы метода сил имеет бесшарнирная арка?
5. В чем состоит сущность непосредственного интегрирования при определении коэффициентов канонических уравнений?
6. Каким правилом можно пользоваться при вычислении коэффициентов канонических уравнений для упрощения расчетов?
7. В чем заключается особенность расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок кругового очертания?
8. В чем состоит сущность расчета кольцевых систем от сосредоточенной силы?
9. Особенности расчета кольцевых систем от равномерно распределенной нагрузки.

## Глава 10. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 10.1. Сущность метода. Степень кинематической неопределенности и основная система. Канонические уравнения. Свойства единичных реакций

При расчете статически неопределимых систем методом перемещений за лишние неизвестные принимаем упругие перемещения при следующих допущениях:

- пренебрегаем влиянием продольных и поперечных сил на деформации стержней, учитываем лишь деформации изгиба;
- сближение концов упругого стержня при его изгибе не учитываем.

Общее число неизвестных метода перемещений (степень кинематической неопределенности системы) определяется по формуле

$$n_k = n_y + n_l, \quad (10.1)$$

где  $n_y$  – число неизвестных углов поворота узлов, в которых концы по крайней мере двух из сходящихся в них стержней жестко связаны между собой; равно количеству жестких узлов;

$n_l$  – число неизвестных линейных перемещений жестких узлов.

Рассмотрим статически неопределимую раму (рис. 10.1, а).

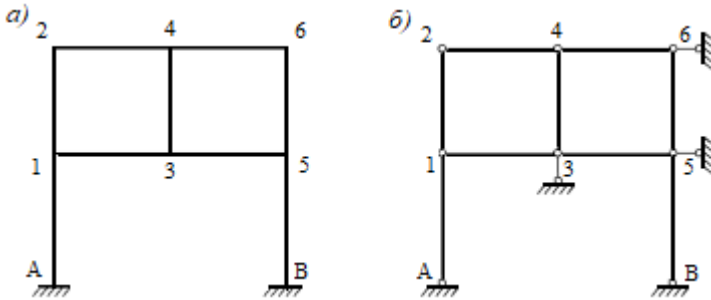


Рис. 10.1. Расчетная схема рамы методом перемещений

Количество жестких узлов  $n_y = 6$ . Для определения количества независимых линейных перемещений заданную раму превращаем в шарнирную. Для этого во все жесткие узлы, а также в опорные крепления вводим шарниры. Для того чтобы шарнирная система была гео-

метрически неизменяемой, вводим дополнительные линейные связи, препятствующие перемещению жестких узлов. Таким образом, для заданной рамы  $n_n = 3$  (рис. 10.1, б). Окончательно получим:

$$n_k = n_y + n_n = 6 + 3 = 9.$$

При указанных выше допущениях рассмотрим два вида рам:

- *рамы, шарнирная схема которых неизменяема*. Каждый узел такой рамы прикрепляется последовательно к другим узлам стержнями, не лежащими на одной прямой, линейные смещения узлов отсутствуют. За неизвестные перемещения принимаются углы поворота жестких узлов (рис. 10.2, а).

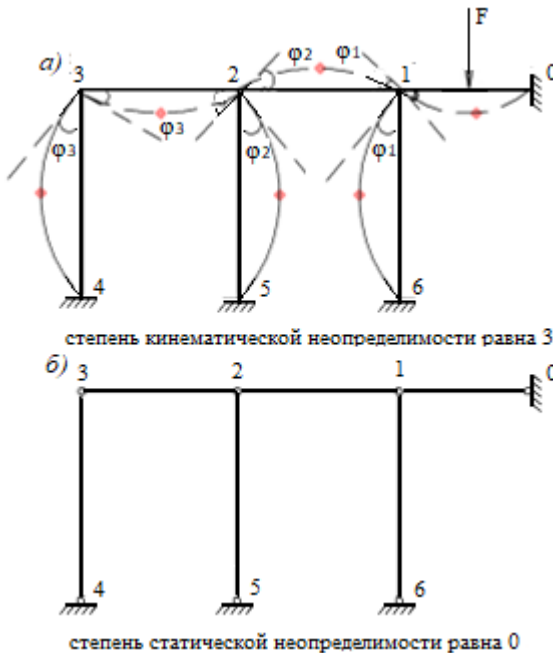


Рис. 10.2. Рама с шарнирно-неизменяемой схемой

Шарнирная схема рамы (рис. 10.2, б) является геометрически неизменяемой. При этом степень статической неопределенности рамы равна нулю;

- рамы, имеющие линейные смещения узлов (рис. 10.3, а). Шарнирная схема такой рамы является изменяемой (рис. 10.3, б).

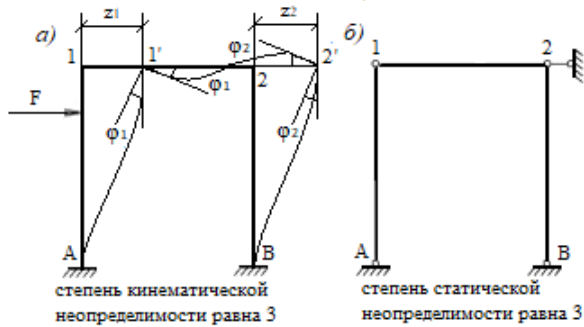


Рис. 10.3. Расчетная схема статически неопределимой рамы

Степень статической неопределенности шарнирной схемы рамы (рис. 10.3, б) равна 3.

Основная система (О. С.) метода перемещений получается из заданной путем наложения на ее узлы связей двух типов (плавающие заделки накладываются на все жесткие узлы, одиночные стержни устанавливаются по направлению возникающих линейных перемещений узлов) и придания этим связям таких же перемещений, какие имеются в узлах заданной системы.

При расчете методом перемещений система расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок путем введения в нее дополнительных связей (угловых и линейных).

Сравним метод сил и метод перемещений (рис. 10.4).

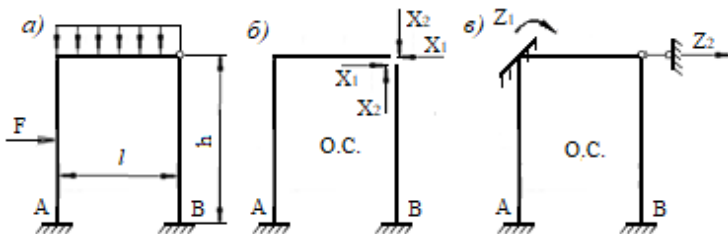


Рис. 10.4. О. С. метода сил и метода перемещений

1. О. С. метода сил получается удалением лишних связей (рис. 10.4, б), а О. С. метода перемещений – введением лишних связей (рис. 10.4, в).

2. Переход от заданной системы к О. С. метода сил связан со снижением степени ее статической неопределенности, переход к О. С. метода перемещений – наоборот.

3. Плавающие заделки, введенные в О. С. метода перемещений, оказывают препятствие лишь повороту жесткого узла и не препятствуют его линейному перемещению. Реакции таких связей – моменты, приложенные в жестких узлах системы.

Рассмотрим связи, уничтожающие линейные перемещения. Предпочтение следует отдавать связям, соединяющим узлы с массивом, а не друг с другом (рис. 10.5).

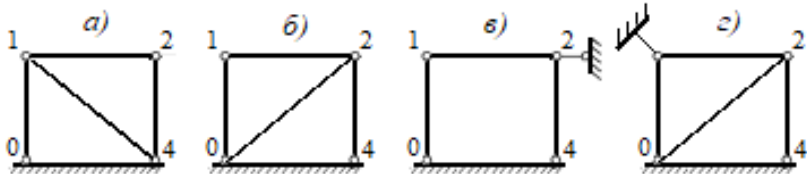


Рис. 10.5. Расчетные схемы шарнирных систем без линейных перемещений

Общее число неизвестных метода перемещений – *степень кинематической неопределенности системы*. Таким образом, для получения О. С. во все жесткие узлы вводим подвижные заделки, препятствующие повороту узлов, и стержни, препятствующие линейным перемещениям узлов (рис. 10.6).

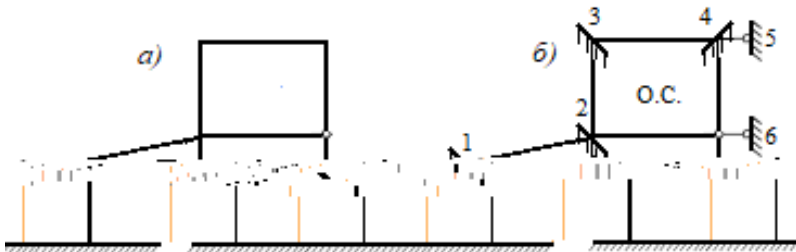


Рис. 10.6. Расчетная схема рамы методом перемещений

Степень кинематической неопределенности системы

$$n = n_v + n_n = 4 + 2 = 6.$$

В основе уравнений метода перемещений лежит отрицание реактивных усилий (сил или моментов) во введенных заделках и стержнях основной системы, т. е.  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 0$  и т. д. Индексы реакций соответствуют индексам неизвестных.

Рассмотрим конкретный пример (рис. 10.7).

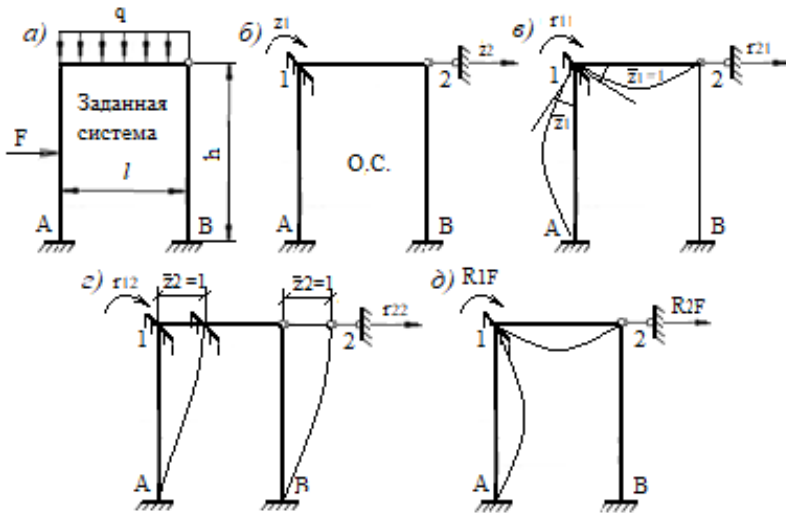


Рис. 10.7. Расчет рамы методом перемещений

Степень кинематической неопределенности заданной системы

$$n = n_v + n_n = 1 + 1 = 2.$$

Представим в развернутой форме первое уравнение метода перемещений ( $R_1 = 0$ ) для О. С.:

$$R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1F}, \quad (10.2)$$

где  $R_{11}$  – реактивный момент от поворота заделки на угол  $Z_1$ ;

$R_{12}$  – реактивный момент в заделке от линейного смещения узлов 1 и 2 на  $Z_2$ .

Можно записать:

$$R_{11} = r_{11} Z_1, \quad R_{12} = r_{12} Z_2,$$

где  $r_{11}$  – реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол  $Z_1 = 1$ ;

$r_{12}$  – реактивный момент в заделке от смещения узла 2 на  $Z_2 = 1$ .

Тогда первое каноническое уравнение имеет вид

$$r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1F} = 0.$$

По аналогии ( $R_2 = 0$ ) второе каноническое уравнение

$$r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2F} = 0,$$

где  $r_{21}$  – реактивное усилие во введенном линейном стержне при повороте заделки на  $Z_1 = 1$ ;

$r_{22}$  – реактивное усилие во введенном линейном стержне от смещения узлов 1 и 2 на  $Z_2 = 1$ ;

$R_{2F}$  – реактивное усилие во введенном линейном стержне от заданной внешней нагрузки.

Следует учитывать, что  $r_{12} = r_{21}$  – второстепенные члены канонических уравнений.

Аналогично составляются канонические уравнения метода перемещений при любом числе неизвестных.

## **10.2. Построение эпюр моментов для основной системы.**

### **Способы вычисления и проверки реактивных усилий.**

#### **Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Проверка расчетов**

Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо в О. С. построить единичные эпюры моментов от неизвестных единичных перемещений по направлению введенных связей и грузовую эпюру от заданной внешней нагрузки. Построение эпюр производится по таблице готовых решений (табл. 10.1). После их построения переходим к определению коэффициентов и свободных членов. Все коэффициенты, а также свободные члены разделяем на две группы:

- коэффициенты, представляющие собой реактивные моменты в подвижных заделках;

- коэффициенты, представляющие собой реактивные силы в дополнительных стержнях, ограничивающие линейные перемещения узлов.

Таблица 10.1. Готовые решения эпюр моментов для статически неопределимых балок

№ п/п	Схема балки	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
1			$M_A = -\frac{F \cdot l \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2);$ $M_C = \frac{F \cdot l \cdot u^2 \cdot v}{2} \cdot (3 - u);$ $R_A = \frac{F \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2);$ $R_B = \frac{F \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u).$
2			$M_A = -\frac{q \cdot l^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l;$ $R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$
3			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{3 \cdot EI}{l^2}$
4			$M_A = -\frac{3 \cdot EI}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{3 \cdot EI}{l^3}$
5			$M_A = -F \cdot l \cdot u \cdot v^2;$ $M_B = F \cdot l \cdot u^2 \cdot v;$ $M_C = 2 \cdot F \cdot l \cdot u^2 \cdot v^2;$ $R_A = F \cdot v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u);$ $R_B = F \cdot u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v).$
6			$M_A = -M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$
7			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{l};$ $M_B = \frac{2 \cdot EI}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{6 \cdot EI}{l^2}$
8			$M_A = M_B = -\frac{6 \cdot EI}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{12 \cdot EI}{l^3}$

В первом случае коэффициенты определяются из равновесия жестких узлов, которые вырезаются на соответствующих эпюрах моментов в О. С.

Во втором случае реактивные усилия во введенных опорных стержнях определяются с помощью разреза элементов системы в О. С. и составления уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть.

Такой способ определения коэффициентов и свободных членов называется статическим.

Правило знаков для реакций подвижных заделок и опорных стержней: реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

Для случая, когда рамная конструкция имеет непараллельные стойки, удобно пользоваться интегральным способом определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, в частности, правилом Верещагина для перемножения эпюр.

После определения коэффициентов и свободных членов необходимо выполнить проверку правильности их вычисления. Эта проверка аналогична проверке при расчете конструкций методом сил. Для этого строится суммарная единичная эпюра в О. С. по формуле

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n. \quad (10.3)$$

Умножив эпюру (10.3) последовательно на каждую из единичных эпюр, получим сумму коэффициентов при неизвестных в соответствующем каноническом уравнении, например, для первого канонического уравнения имеем:

$$r_{1S} = \Sigma \int \overline{M}_1 \overline{M}_s dS / EI = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}. \quad (10.4)$$

Для второго канонического уравнения:

$$r_{2S} = \Sigma \int \overline{M}_2 \overline{M}_s dS / EI = r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}. \quad (10.5)$$

Аналогично проверяются коэффициенты остальных канонических уравнений.

Такая проверка называется построчной. Существует и другая проверка. Перемножим эпюру  $\overline{M}_s$  на  $\overline{M}_s$ , получим:

$$r_{SS} = \Sigma \int \overline{M}_s \overline{M}_s dS / EI = (r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn}) + \\ + 2 (r_{12} + \dots + r_{2n} + \dots) = \Sigma r. \quad (10.6)$$

Таким образом, результат перемножения эпюры  $\overline{M}_s$  самой на себя равняется сумме всех коэффициентов при неизвестных в системе канонических уравнений – универсальная проверка.

Для проверки свободных членов (грузовых коэффициентов) канонических уравнений воспользуемся следующей зависимостью:

$$R_{SF} = -\Sigma \int \overline{M}_s M_F' dS / EI = R_{1F} + R_{2F} + \dots + R_{nF}, \quad (10.7)$$

где  $M_F'$  – грузовая эпюра от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или О. С. метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно тех, в которых определяются реакции.

После определения коэффициентов и свободных членов методом исключения решаем систему канонических уравнений и определяем неизвестные  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

Окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе строим, используя зависимость

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_F. \quad (10.8)$$

Для контроля правильности построения окончательной эпюры  $M$  применяем две проверки.

1. Статическая проверка.

Вырезаем жесткие узлы системы и рассматриваем их равновесие:

$$\Sigma M = 0.$$

2. Кинематическая проверка.

Эту проверку выполняем по аналогии с методом сил, т. е.

$$\Sigma \int \overline{M}_s M dS / EI = 0,$$

где  $\overline{M}_s$  – суммарная единичная эпюра метода сил.

Расхождение в расчетах не должно превышать 5 %.

По эпюре  $M$ , как в методе сил, строится эпюра  $Q$ . По эпюре  $Q$  способом вырезания узлов строится эпюра  $N$ . Окончательно выполняется статическая проверка, которая позволяет определить правильность построения эпюр поперечных и продольных сил для заданной системы.

**10.3. Использование симметрии для упрощения расчетов  
сложных рам. Сопоставление метода перемещений и метода сил.  
Выбор рационального метода расчета.  
Смешанный (комбинированный) метод расчета рам**

При расчете симметричных рам методом перемещений, так же как и при расчете методом сил, можно использовать группировку неизвестных. Рассмотрим симметричную раму (рис. 10.8).

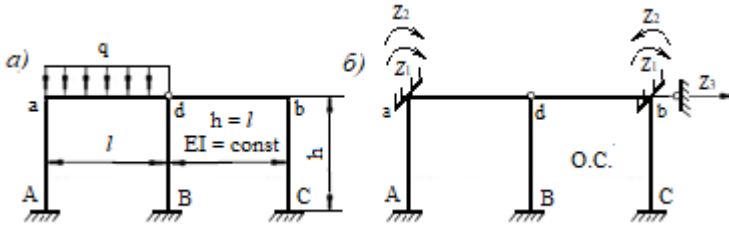


Рис. 10.8. Расчет симметричной рамы методом перемещений

Неизвестный угол поворота узла  $a - Z_a = Z_1 + Z_2$ ; узла  $b - Z_b = Z_1 - Z_2$  (рис. 10.8, б). Рама является трижды кинематически неопределимой. По таблице готовых решений (см. табл. 10.1) строим единичные и грузовую эпюры (рис. 10.9).

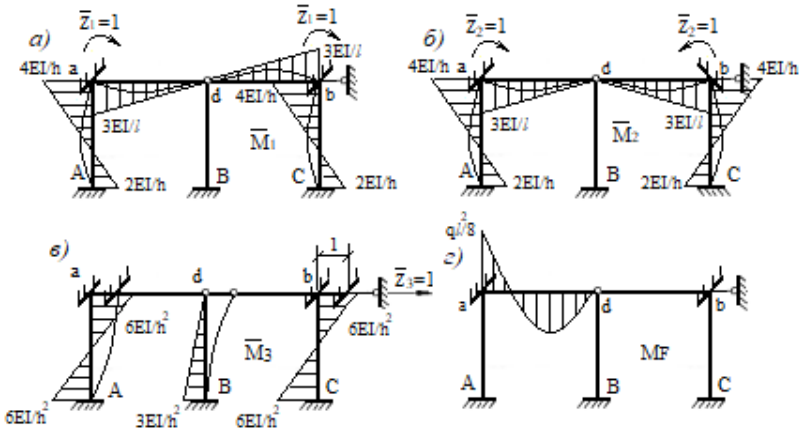


Рис. 10.9. Единичные и грузовая эпюры для рамы

Так как эпюра  $\overline{M_2}$  является симметричной, а эпюры  $\overline{M_1}$  и  $\overline{M_3}$  – кососимметричными, то система канонических уравнений метода перемещений

$$\begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1F} &= 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} &= 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} &= 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

распадается на две независимые системы уравнений:

$$\begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{13} Z_3 + R_{1F} &= 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{33} Z_3 + R_{3F} &= 0; \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$r_{22} Z_2 + R_{2F} = 0, \quad (10.11)$$

так как  $r_{12} = r_{21} = r_{23} = r_{32} = 0$  за счет перемножения симметричных и кососимметричных эпюр.

Вырезая узлы рамы (см. рис. 10.9, а, б, в, г), рассмотрим их равновесие, определим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 2(4EI/h + 3EI/l) = 14EI/l; \\ r_{22} &= 2(4EI/h + 3EI/l) = 14EI/l; \\ r_{13} = r_{31} &= -6EI/h^2 - 6EI/h^2 = -12EI/l^2; \\ r_{33} &= 27EI/h^3 = 27EI/l^3, \end{aligned}$$

так как по условию  $h = l$ .

По грузовой эпюре (см. рис. 10.9, г) определим:

$$\begin{aligned} R_{1F} &= -ql^2/8; \\ R_{2F} = R_{3F} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляем коэффициенты и свободные члены в системы канонических уравнений (10.10), (10.11), определим неизвестные  $Z_1, Z_2, Z_3$ .

По формуле (10.8) строим окончательную эпюру моментов, по которой строим эпюру  $Q$ , используя зависимость

$$Q = \pm ql/2 + (M^n - M^s)/l.$$

По эпюре  $Q$ , вырезая узлы и рассматривая их равновесие, строим эпюру  $N$ . Выполняем статическую и кинематическую проверку.

При сопоставлении методов сил и перемещений для расчета рам необходимо учитывать следующие факторы:

- метод сил следует применять для рам при ломаном и криволинейном очертании стержней, при большом числе линейных смещений;
- метод перемещений следует предпочесть при расчете рам, образованных из прямолинейных стержней, при большом числе линейных связей и ограниченном числе линейных смещений.

При смешанном методе расчета сложных рам О. С. образуется по двум принципам:

- путем отбрасывания связей в одной части системы;
- путем введения дополнительных связей в другой части системы (рис. 10.10).

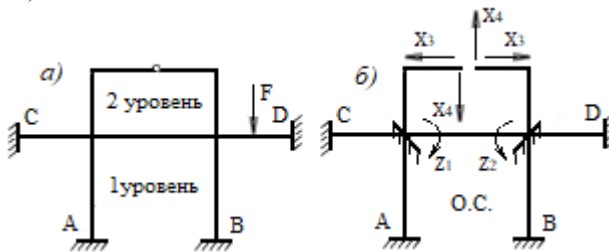


Рис. 10.10. Смешанный метод расчета плоских рам

Подсчитаем для первого и второго уровней рамы степень статической и кинематической неопределенности. Результаты расчета сведем в табл. 10.2.

Таблица 10.2. Расчет степени статической и кинематической неопределенности

Уровни рамы	Степень статической неопределенности	Число неизвестных угловых и линейных перемещений
Первый	9	2
Второй	2	12
Итого	11	14

Из табл. 10.2 следует, что при расчете первого уровня заданной рамы проще использовать метод перемещений, а при расчете второго уровня – метод сил. О. С. для расчета рамы изображена на рис. 10.10, б. Применение смешанного метода в данной системе позволяет свести задачу к решению четырех канонических уравнений вместо 11 – методом сил и 14 – методом перемещений. За неизвестные принимаются углы поворота жестких узлов первого уровня и усилия, возникающие в шарнире второго уровня.

Канонические уравнения смешанного метода в О. С. подразумевают отрицание реакций, возникающих во введенных подвижных заделках по направлению неизвестных перемещений  $Z_1$  и  $Z_2$ , а также перемещений по направлению неизвестных усилий  $X_1$  и  $X_2$ .

Система канонических уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} X_3 + r_{14} X_4 + R_{1F} &= 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} X_3 + r_{24} X_4 + R_{2F} &= 0; \\ \delta_{31} Z_1 + \delta_{32} Z_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{34} X_4 + \Delta_{3F} &= 0; \\ \delta_{41} Z_1 + \delta_{42} Z_2 + \delta_{43} X_3 + \delta_{44} X_4 + \Delta_{4F} &= 0. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Рассмотрим первое каноническое уравнение и определим смысл каждого слагаемого:

$r_{11} Z_1$  – реакция в О. С. в первой заделке при ее повороте на угол  $Z_1$ ;

$r_{12} Z_2$  – реакция в О. С. в первой заделке от поворота второй заделки на угол  $Z_2$ ;

$r_{13} X_3$  – реакция в О. С. в первой заделке от сил  $X_3$ ;

$r_{14} X_4$  – реакция в О. С. в первой заделке от сил  $X_4$ ;

$R_{1F}$  – реакция в О. С. в первой заделке от заданной внешней нагрузки.

Аналогичный смысл имеют слагаемые второго канонического уравнения.

Рассмотрим третье каноническое уравнение:

$\delta_{31} Z_1$  – перемещение в О. С. по направлению  $X_3$  от поворота первой заделки на  $Z_1$ ;

$\delta_{32} Z_2$  – перемещение в О. С. по направлению  $X_3$  от поворота второй заделки на  $Z_2$ ;

$\delta_{33} X_3$  – перемещение в О. С. по направлению  $X_3$  от сил  $X_3$ ;

$\delta_{34} X_4$  – перемещение в О. С. по направлению  $X_3$  от сил  $X_4$ ;

$\Delta_{3F}$  – перемещение в О. С. по направлению  $X_3$  от заданной внешней нагрузки.

Аналогичный смысл имеют слагаемые четвертого канонического уравнения.

Коэффициенты при неизвестных в системе канонических уравнений смешанного метода разделим на четыре группы:

– коэффициенты, которые представляют собой реакции, возникающие от единичных перемещений ( $r_{12} \dots$ );

– коэффициенты, которые представляют собой реакции, возникающие от единичных усилий ( $r_{13} \dots$ );

– коэффициенты, которые представляют собой перемещения, возникающие от единичных перемещений ( $\delta_{31} \dots$ );

– коэффициенты, которые представляют собой перемещения, возникающие от единичных усилий ( $\delta_{34} \dots$ ).

Методы определения коэффициентов всех групп были рассмотрены выше. Для рассмотренной системы канонических уравнений (10.12) при О. С. (см. рис. 10.10, б) коэффициенты  $\delta_{34} = \delta_{43} = 0$ , так как неизвестные  $X_3$  являются симметричными, а  $X_4$  – кососимметричными. Свободные члены канонических уравнений  $R_{1F} = \Delta_{3F} = \Delta_{4F} = 0$ .

Рассмотренный пример (см. рис. 10.10, а) можно решать способом группировки неизвестных. О. С. для заданной рамы изображена на рис. 10.11.

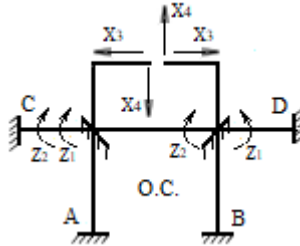


Рис. 10.11. О. С. смешанного метода при группировке неизвестных первого уровня

Система канонических уравнений (10.12) распадается на две системы:

1) с симметричными неизвестными:

$$r_{11} Z_1 + r_{13} X_3 + R_{1F} = 0; \quad (10.13)$$

$$\delta_{31} Z_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0 \quad (\Delta_{3F} \neq 0);$$

2) с кососимметричными неизвестными:

$$r_{22} Z_2 + r_{24} X_4 + R_{2F} = 0; \quad (10.14)$$

$$\delta_{42} Z_2 + \delta_{44} X_4 + \Delta_{4F} = 0 \quad (\Delta_{4F} \neq 0).$$

Коэффициенты системы канонических уравнений смешанного метода связаны между собой следующими соотношениями:

$$r_{ki} = r_{ik}; \quad \delta_{ki} = \delta_{ik}; \quad r_{ki} = -\delta_{ik}. \quad (10.15)$$

## 10.4. Примеры расчета

**Задача 10.1.** Для рамы (рис. 10.12, а) построить эпюру  $M$ .

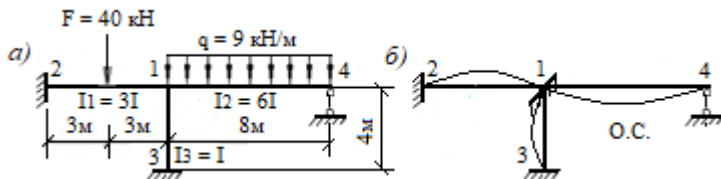


Рис. 10.12. Расчетная схема рамы методом перемещений

**Решение.**

1. Определим степень кинематической неопределенности:

$$n = n_y + n_n = n_y + 3Д - 2Ш - C_{\text{оп}} = 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 1,$$

где  $Д = 3$  – количество дисков;

$Ш = 2$  – количество одиночных шарниров;

$C_{\text{оп}} = 5$  – количество опорных связей в шарнирной раме, расчетная схема которой получена постановкой шарниров в жесткие узлы и опорные закрепления.

2. О. С. рамы изображена на рис. 10.12, б.

3. Каноническое уравнение метода перемещений

$$r_{11} Z_1 + R_{1F} = 0.$$

4. Коэффициенты жесткости каждой балки в О. С.:

$$i_3 = EI / l = i; \quad i_2 = EI \cdot 6 / 2l = 3i; \quad i_1 = EI \cdot 3 \cdot 2 / 3l = 2i.$$

5. Строим единичную и грузовую эпюры в О. С. (рис. 10.13, а, б).

6. Для определения коэффициента свободного члена канонического уравнения вырезаем узел 1 на единичной (рис. 10.13, а) и грузовой (рис. 10.13, б) эпюрах и рассматриваем его равновесие.

В результате получим:

$$r_{11} = 8i + 9i + 4i = 21i;$$

$$R_{1F} = 30 - 72 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тогда

$$Z_1 = 42 / 21i.$$

7. Строим исправленную эпюру  $\overline{M}_1 Z_1$  (рис. 10.13, в) в О. С.

8. Строим окончательную эпюру моментов (рис. 10.13, з) по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + M_F.$$

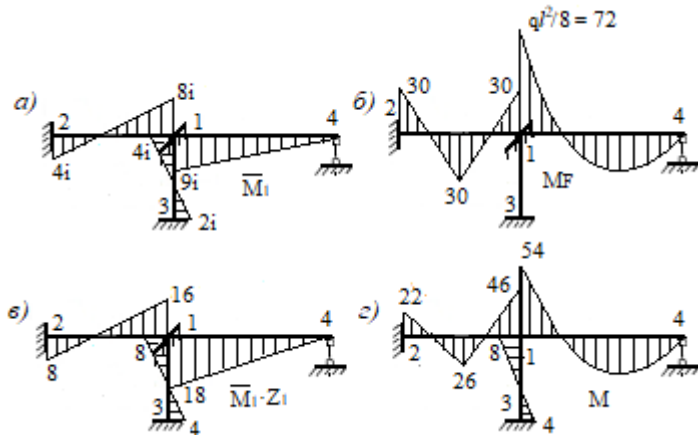


Рис. 10.13. Единичная, грузовая, исправленная и окончательная эпюры моментов

**Задача 10.2.** Для рамы (рис. 10.14, а) построить эпюру  $M$ .

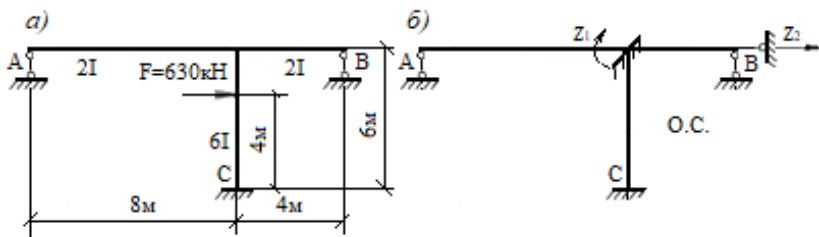


Рис. 10.14. Расчетная схема рамы

**Решение.**

1. Определим степень кинематической неопределимости:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = n_y + 3\text{Д} - 2\text{Ш} - C_{\text{оп}} = 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1 + 1 = 2.$$

2. О. С. рамы изображена на рис. 10.14, б.

3. Канонические уравнения метода перемещений:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

4. Коэффициенты жесткости каждой балки в О. С.:

$$i_1 = E \cdot 2I / 8 = i; \quad i_2 = E \cdot 2I / 4 = 2i; \quad i_3 = E \cdot 6I / 6 = 4i.$$

5. Строим единичные и грузовую эпюры в О. С. Для построения эпюр используем таблицу готовых решений (см. табл. 10.1) (рис. 10.15).

6. Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений вырезаем узел 1 на единичных (рис. 10.15, а, б) и грузовой (рис. 10.15, в) эпюрах и рассматриваем его равновесие. В результате получим:

$$r_{11} = 3i / 2 + 8i / 3 + 3i = 43i / 6; \quad r_{12} = r_{21} = -6EI / l^2 = -2i / 3;$$

$$r_{22} = 12EI / l^3 = 2i / 9; \quad R_{1F} = 560 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Свободный член второго канонического уравнения определим из равновесия вырезанного ригеля по формуле

$$R_{2F} = -Fu^2(1 + 2\nu) = 630 \cdot (2/3)^2 \cdot (1 + 2 \cdot 1/3) = -467 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

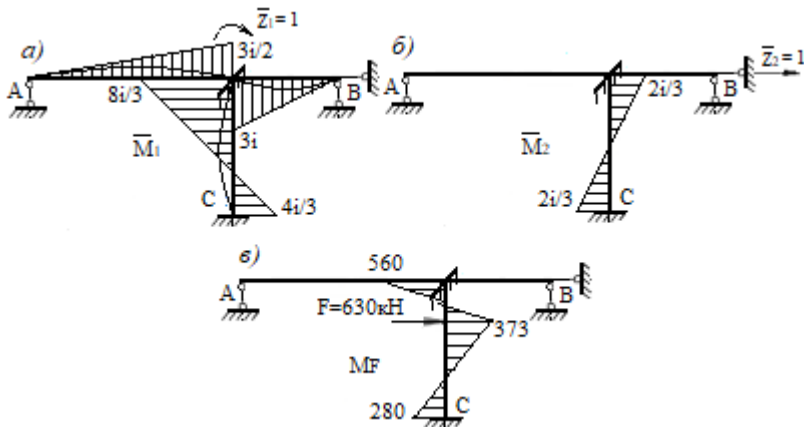


Рис. 10.15. Единичные и грузовая эпюры, построенные по таблице готовых решений

7. Определим неизвестные  $Z_1$  и  $Z_2$  из системы канонических уравнений:

$$43i / 6Z_1 - 2i / 3Z_2 + 560 = 0;$$

$$-2i / 3Z_1 + 2i / 9Z_2 - 467 = 0;$$

$$Z_1 = 162,8 / I;$$

$$Z_2 = 2590 / i.$$

8. Строим исправленные эпюры  $\overline{M}_1 Z_1$  и  $\overline{M}_2 Z_2$  в О. С.  
Исправленные эпюры изображены на рис. 10.16, а, б.

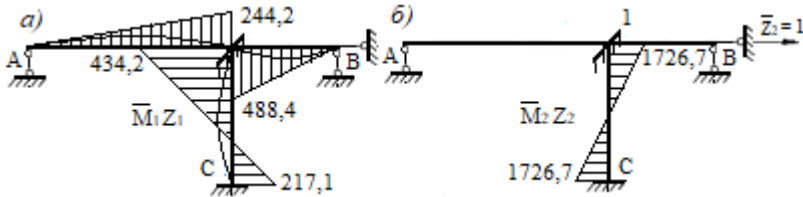


Рис. 10.16. Исправленные эпюры метода перемещений

9. Строим окончательную эпюру моментов (рис. 10.17) по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + M_F.$$

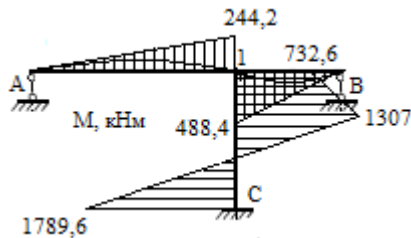


Рис. 10.17. Окончательная эпюра моментов для рамы

**Задача 10.3.** Для рамы (рис. 10.18) построить методом перемещений окончательную эпюру  $M$ . В процессе решения задачи выполнить проверку правильности нахождения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

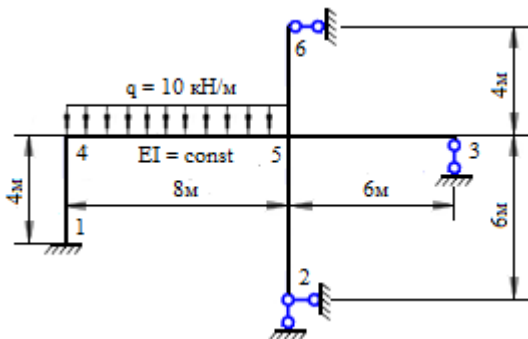


Рис. 10.18. Расчетная схема рамы методом перемещений

**Решение.**

1. Определим степень кинематической неопределенности заданной системы:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = n_y + 3\text{Д} - 2\text{Ш} - C_{\text{оп}} = 2 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 6 = 1 + 2 = 3.$$

2. О. С. рамы изображена на рис. 10.19.

3. Система канонических уравнений метода перемещений:

$$r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1F} = 0;$$

$$r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0;$$

$$r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0.$$

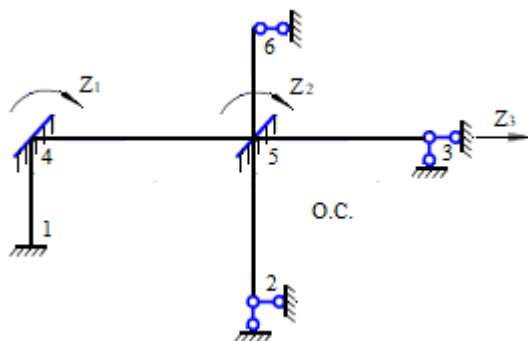


Рис. 10.19. О. С. рамы методом перемещений

4. Определим коэффициенты жесткости каждой балки в О. С.:

$$i_1 = EI / 4; \quad i_2 = EI / 8; \quad i_3 = EI / 6.$$

5. Строим единичные и грузовую эпюры в О. С. Для построения эпюр используем таблицу готовых решений (см. табл. 10.1) (рис. 10.20).

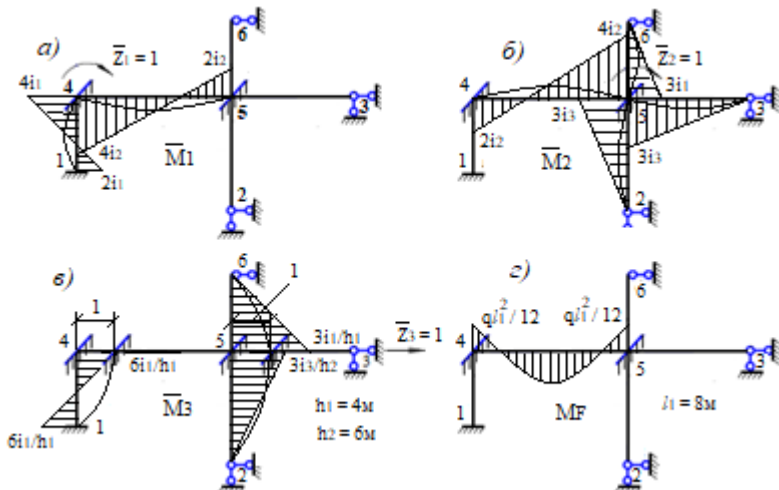


Рис. 10.20. Единичные и грузовая эпюры метода перемещений

6. Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений методом перемещений вырезаем узлы и ригельную часть рамы на единичных и грузовой эпюрах.

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_2 = 3EI / 2 \text{ (рис. 10.21, а); } r_{12} = 2i_2 = EI / 4 \text{ (рис. 10.21, б);}$$

$$r_{13} = -6i_1 / h_1 = -3EI / 8 \text{ (рис. 10.21, в).}$$

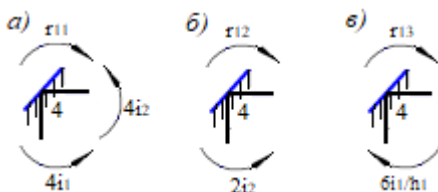


Рис. 10.21. Определение коэффициентов первого канонического уравнения статическим способом (вырезание узлов)

$$r_{22} = 3i_1 + 4i_2 + 3i_3 + 3i_3 = 3EI/4 + 4EI/8 + 3EI/6 + 3EI/6 = 9EI/4$$

(рис. 10.22, а);

$$r_{23} = 3i_1/h_1 - 3i_3/h_2 = 3EI/4 \cdot 4 - 3EI/6 \cdot 6 = 5EI/48$$

(рис. 10.22, б);

$$r_{33} = 12i_1/h_1^2 + 3i_1/h_1^2 + 3i_3/h_2^2 = 143EI/576$$

(рис. 10.22, в).

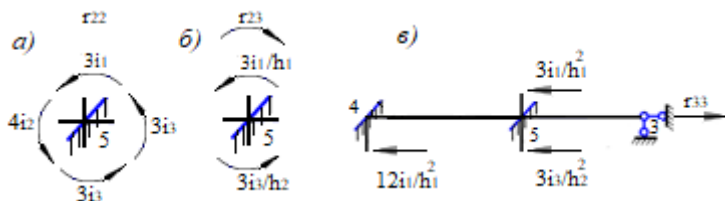


Рис. 10.22. Определение коэффициентов второго и третьего канонических уравнений статическим способом (вырезание узлов)

$$R_{1F} = -q l_1^2 / 12 = -10 \cdot 8^2 / 12 = -640 / 12 = -160 / 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(рис. 10.23, а);

$$R_{2F} = q l_1^2 / 12 = 10 \cdot 8^2 / 12 = 640 / 12 = 160 / 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(рис. 10.23, б);

$$R_{2F} = 0.$$

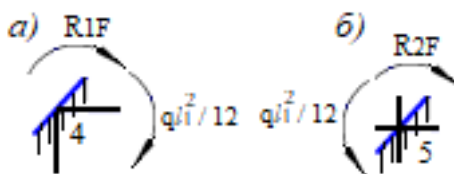


Рис. 10.23. Определение свободных членов канонических уравнений статическим способом (вырезание узлов)

Выполним проверку правильности определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для этого построим суммарную единичную эпюру, используя выражение

$$r_{SS} = \Sigma \int \overline{M}_S \overline{M}_S dS / EI = (r_{11} + r_{22} + r_{33}) + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = \Sigma r.$$

Суммарная эпюра изображена на рис. 10.24.

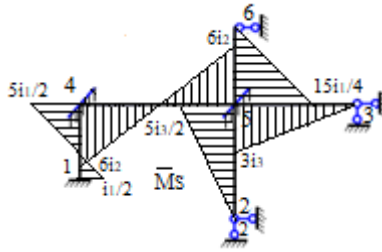


Рис. 10.24. Суммарная единичная эпюра

Выполним универсальную проверку.

$$\begin{aligned}
 r_{SS} = \Sigma \overline{M}_S \overline{M}_S dS / EI = & \{ 4 \cdot [(5i_1 \cdot 5i_1) / 2 \cdot 2 + (i_1 i_1) / 2 \cdot 2 - \\
 & - 2 \cdot (5i_1 i_1) / 2 \cdot 2] / 6 + 8 \cdot [2 \cdot (6i_2 \cdot 6i_2) - 2 \cdot (6i_2 \cdot 6i_2)] / 6 + \\
 & + 6 \cdot 5i_3 \cdot 2 \cdot 5i_3 / 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3i_3 \cdot 2 \cdot 3i_3 / 2 \cdot 3 + \\
 & + 4 \cdot 15i_1 \cdot 2 \cdot 15i_1 / 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \} = 4i_1 + 4i_2 + 3i_1 + 4i_2 + 3i_3 + 3i_3 + \\
 & + 12i_1 / h_1^2 + 3i_1 / h_1^2 + 3i_3 / h_2^2 + 2 \cdot (2i_2 - 6i_1 / h_1 + 3i_1 / h_1 - 3i_3 / h_2) = \\
 & = r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2 \cdot (r_{12} + r_{13} + r_{23}).
 \end{aligned}$$

Строим эпюру  $M_F'$  от заданной внешней нагрузки в О. С. метода перемещений, удалив лишние связи (рис. 10.25).

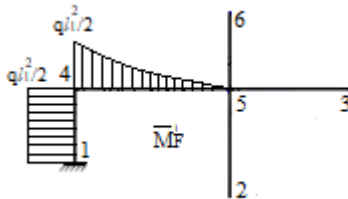


Рис. 10.25. О. С. метода сил для заданной рамы

$$\begin{aligned}
 R_{SF} = -\Sigma \overline{M}_S M_F' dS / EI = & -\{ [8 \cdot (-2q l_1^2 \cdot 6i_2 / 2 + q l_1^2 \cdot 6i_2 / 2) / 6 + \\
 & + [(5i_1 - i_1) \cdot 4 / 2] \cdot q l_1^2 / 2 \} = R_{1F} + R_{2F} + R_{3F} = \\
 & = -160 / 3 + 160 / 3 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Проверки выполняются. Следовательно, коэффициенты и свободные члены определены верно.

7. Канонические уравнения метода перемещений принимают вид

$$3EI Z_1 / 2 + EIZ_2 / 4 - 3EI Z_3 / 8 = 160 / 3;$$

$$EIZ_1 / 4 + 9EI Z_2 / 4 + 5EI Z_3 / 48 = -160 / 3;$$

$$-3EI Z_1 / 8 + 5EI Z_2 / 48 + 143EI Z_3 / 576 = 0.$$

Решая систему канонических уравнений методом исключения, получим:  $Z_1 = 73,5 / EI$ ;  $Z_2 = -37,6 / EI$ ;  $Z_3 = 126,8 / EI$ .

8. Строим исправленные эпюры  $\overline{M}_1 Z_1$ ;  $\overline{M}_2 Z_2$ ;  $\overline{M}_3 Z_3$  (рис. 10.26, а, б, в).

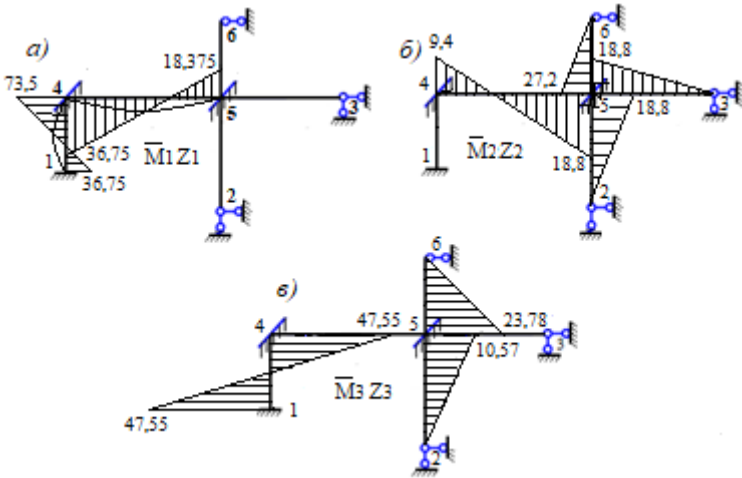


Рис. 10.26. Исправленные эпюры в О. С.

9. Окончательную эпюру моментов (рис. 10.27) строим по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_F.$$

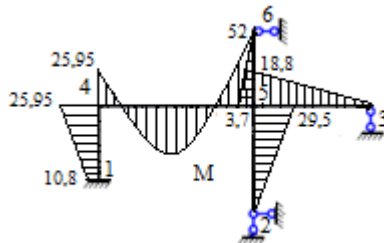


Рис. 10.27. Окончательная эпюра моментов

10. Выполним статическую проверку (рис. 10.28).

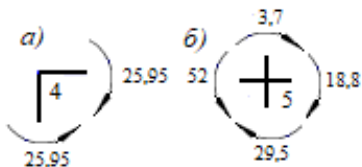


Рис. 10.28. Статическая проверка окончательной эпюры моментов

### 10.5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 10.4.** Для симметричной рамы (рис. 10.29) методом перемещений построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .  $EI = \text{const}$ .

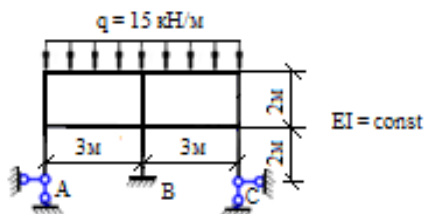


Рис. 10.29. Расчетная схема симметричной рамы

**Задача 10.5.** Для рамы (рис. 10.30), используя смешанный метод расчета, построить эпюру  $M$ .

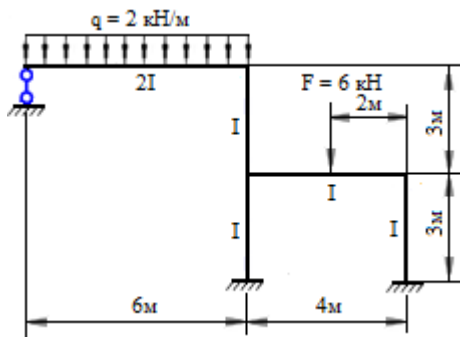


Рис. 10.30. Схема рамы для расчета смешанным методом

## 10.6. Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность метода перемещений?
2. Что такое кинематическая неопределимость системы и как ее определить?
3. Выбор  $O. C.$  для расчета стержневой конструкции методом перемещений.
4. Чем отличается метод перемещений от метода сил?
5. Что принимают за лишние неизвестные при расчете методом перемещений?
6. Сколько  $O. C.$  можно построить для заданной рамы по методу перемещений?
7. Построение единичных и грузовой эпюр по методу перемещений.
8. Каков физический смысл канонических уравнений метода перемещений?
9. В чем заключается сущность единичных реакций в  $O. C.$  метода перемещений?
10. Каким способом определяют реакции элементов  $O. C.$  метода перемещений?
11. Как вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений статическим способом?
12. Алгоритм расчета рам методом перемещений.
13. Какие проводятся проверки правильности выполнения расчета методом перемещений?
14. При расчете каких рам целесообразно использовать симметрию системы?
15. При расчете каких рам целесообразно применять комбинированный способ?
16. Как выбирают расчетную схему при расчете рамы по смешанному методу?
17. При расчете каких рам целесообразно применять смешанный метод?

## Глава 11. РАСЧЕТ ПОДПОРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

### 11.1. Типы подпорных стен

Более 80 % сооружений контактируют с грунтом. Грунт – скопление очень большого числа мелких твердых песчинок (частиц), обладающих весом, трением и сцеплением. Пространство между песчинками частично заполнено жидкостью и газом.

Грунт может находиться снизу сооружения, сбоку и над сооружением. В первом случае грунт воспринимает все то, что передает ему сооружение. Во втором случае сооружение не дает возможности грунту осыпаться и позволяет создать более крутые откосы. Эти сооружения называют подпорными стенами. В случае нахождения грунта сверху (гидромелиоративные тоннели, трубы) оболочка сооружения сложным образом взаимодействует с грунтом.

*Подпорными стенами* называются сооружения, ограждающие грунты или сыпучие тела от обрушения. Подпорные стены применяются в дорожном строительстве (ограждения земляных откосов насыпей и выемок (рис. 11.1, а)), в мостах (береговые опоры – устои (рис. 11.1, б)), в гидротехническом строительстве (ограждения набережных и стен шлюзов (рис. 11.1, в)), в гражданском строительстве (стены подвальных помещений (рис. 11.1, г)).

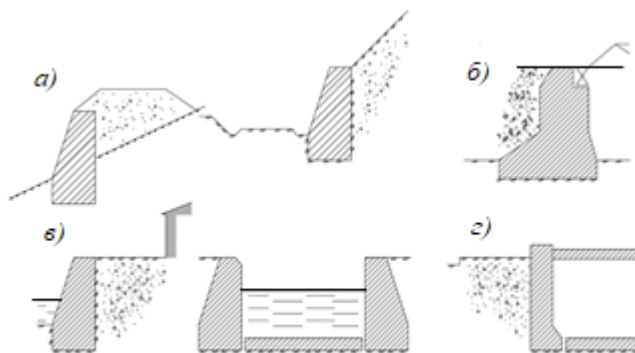


Рис. 11.1. Типы подпорных стен

В зависимости от соотношения размеров стены по высоте и ширине различают массивные, тонкие и шпунтовые стены, стены подвальных помещений.

Массивные подпорные стены имеют форму массивов с одинаковыми размерами по ширине и высоте. Их устойчивость на сдвиг и опрокидывание обеспечивается собственным весом  $G$ . Они выполняются из бутовой кладки или бетона. Массивная стена рассчитывается на сдвиг по плоскости основания, а на опрокидывание – относительно внешнего ребра (рис. 11.2).

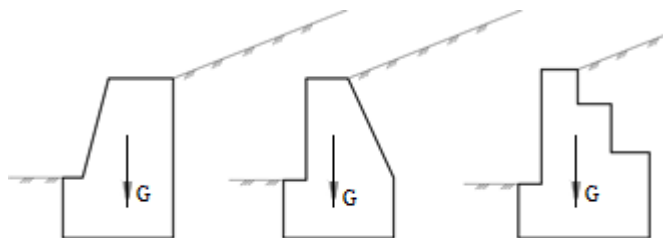


Рис. 11.2. Массивные подпорные стены

Тонкие угловые стены состоят из ограждения и фундаментной плиты. Собственный вес таких стен невелик. Их устойчивость обеспечивается весом грунта  $G_{гр}$  над фундаментной плитой. Они выполняются из железобетона (рис. 11.3, а).

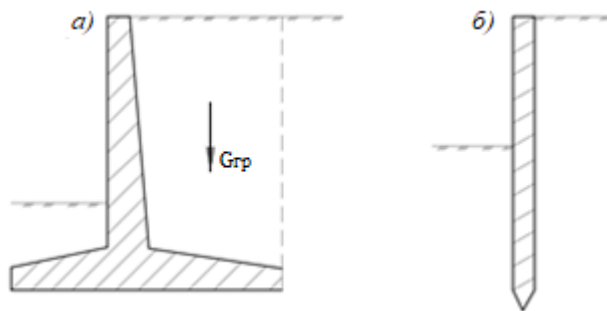


Рис. 11.3. Тонкие и шпунтовые подпорные стены

Шпунтовые стены состоят только из ограждения, получаются забивкой в грунт деревянного, железобетонного или металлического шпунта. Такие стены имеют сравнительно большую высоту (несколько метров) и незначительную ширину (несколько сантиметров). Их вес  $G$  весьма мал, а потому при расчетах не учитывается. Их устойчивость обеспечивается только защемлением стены в грунте. Опрокидыванию

и смещению такой стены препятствуют силы сопротивления грунта, которые зависят от глубины забивки шпунта (рис. 11.3, б). Шпунт может забиваться вплотную друг к другу или с определенным шагом. В этом случае за шпунт закладываются закладные детали – горбыли, доски, железобетонные плиты.

Стены подвалов образуются подвальным помещением и представляют собой балку на двух опорах, нагруженную горизонтальной нагрузкой от бокового давления грунта (рис. 11.4). В таких стенах, в отличие от расчета на сдвиг, расчет на опрокидывание не производят, так как это невозможно за счет плиты перекрытия.

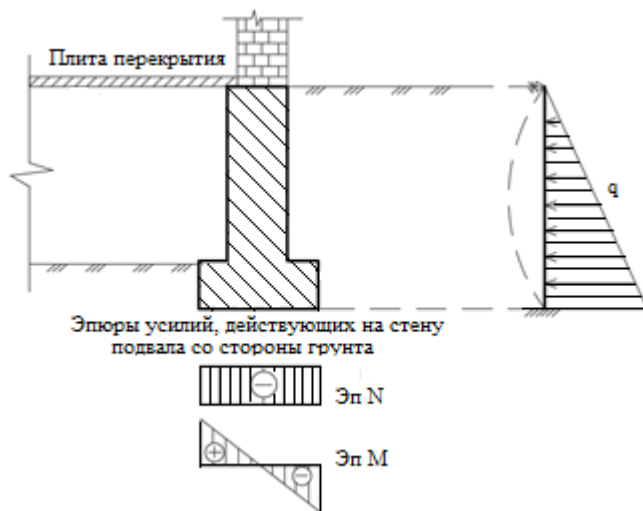


Рис. 11.4. Стены подвальных помещений

Необходимо уделять особое внимание прочности стены, особенно в зданиях малой этажности, потому что возникающие растягивающие напряжения со стороны подвала не гасятся сжимающей нагрузкой от верхних этажей здания.

## 11.2. Физические характеристики грунтов и сыпучих тел

Для вычисления усилий и напряжений в сечениях подпорной стены предварительно необходимо определить собственный вес стены и силы давления грунта (засыпки) на грани стены. На поверхности контакта с сооружением грунт оказывает на него давление, величина которого зависит от физических характеристик, категории и состояния грунта. Для определения сил давления грунта на грани подпорной стены необходимо знать следующие физические характеристики грунта:

1. Объемный вес  $\gamma$ ,  $\text{кН/м}^3$ , – вес  $1 \text{ м}^3$  грунта. Колеблется от  $15,7 \text{ кН/м}^3$  для сухого песка до  $18,6 \text{ кН/м}^3$  для нормальной глины.

2. Пористость  $\eta$ , %, – объем пор по отношению ко всему объему, занимаемому грунтом. Для утрамбованного песка  $\eta = 20$  %, для рыхлого  $\eta \approx 50$  %, для сухой глины  $\eta$  меняется от 25 до 40 %.

3. Объемный вес взвешенного в воде грунта  $\gamma_0$ ,  $\text{кН/м}^3$ , – вес  $1 \text{ м}^3$  грунта во взвешенном состоянии. Так как единица объема сыпучего грунта содержит  $\eta$  % пустот, то потеря в весе при погружении его в воду будет равна весу вытесненной воды:

$$\gamma_в (1 - \eta / 100), \quad (11.1)$$

где  $\gamma_в$  – объемный вес воды.

Тогда

$$\gamma_0 = \gamma - \gamma_в (1 - \eta / 100). \quad (11.2)$$

4. Угол естественного откоса  $\phi$  – наибольший возможный угол, образуемый свободной поверхностью сыпучего тела с горизонтальной поверхностью. Этот угол характеризует трение между частицами сыпучего тела на его поверхности. Величина угла  $\phi$  в большой степени зависит от влажности грунта:

- для сухого песка  $\phi = 30 \dots 35^\circ$ ;

- для влажного песка  $\phi = 40^\circ$ ;

- для мокрого песка  $\phi = 25^\circ$ .

5. Угол внутреннего трения  $\rho$  – угол трения между частицами внутри массы грунта. При этом углы  $\phi$  и  $\rho$  мало отличаются между собой, но угол  $\phi$  определяется легко, а для определения угла  $\rho$  требуются более сложные вычисления. Коэффициент трения грунта по грунту определяется по формуле

$$f = \text{tg } \phi. \quad (11.3)$$

6. Угол трения между грунтом и гранью стены  $\varphi_0$  характеризует трение по поверхности соприкосновения грунта со стеной. Величина его принимается как доля от угла внутреннего трения  $\rho$ :

$$\varphi_0 = (0,25 \dots 0,5) \rho. \quad (11.4)$$

Силы сцепления в сыпучем теле малы и в расчетах подпорных стен не учитываются. Сыпучее тело воспринимает только сжимающие нормальные напряжения и касательные, не превышающие сил внутреннего трения.

Вывод: *давление грунта на стенку зависит от профиля стенки и ее материала (веса), профиля земляной массы и физико-механических свойств грунтов: объемного веса  $\gamma_{гр}$ , пористости  $\eta$ , угла внутреннего трения грунта  $\rho$ , угла естественного откоса  $\varphi$ , угла внутреннего трения между грунтом и гранью стены  $\varphi_0$ .*

### 11.3. Боковое давление грунта на подпорную стену. Предельные давления: активное и пассивное

Ограждая грунты и сыпучие тела от обрушения, подпорные стены испытывают от них давления, на которые и должны быть рассчитаны. При расчете подпорных стен необходимо определить боковое давление грунта на стену. Давление грунта на стену зависит от ее смещения (рис. 11.5).

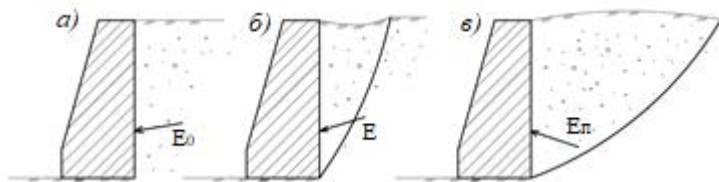


Рис. 11.5. Виды давления грунта

Так, если на неподвижную стену действует давление  $E_0$  (рис. 11.5, а), называемое *естественным*, то при смещении стены в сторону от грунта оно падает до некоторого предельного значения  $E$  (рис. 11.5, б), после чего сразу же наблюдается обрушение грунта за стеной. При смещении стены в сторону грунта давление на нее возрастает до некоторого предельного значения  $E_p$  (рис. 11.5, в), после чего сразу же наблюдается выпирание грунта. В обоих случаях  $E$  и  $E_p$  определяют

границы перехода грунта из предельного равновесия в движение (обрушение).

Давление грунта, стремящегося сдвинуть или опрокинуть стену, получило название активного (распора)  $E$ . А сопротивление земли при выпирании ее стенкой получило название пассивного давления, или отпора  $E_{п.}$ .

Вывод: *если не произошло обрушения или выпирания грунта, естественное давление на стену больше активного давления и меньше пассивного.*

$$E < E_0 < E_{п.}$$

Расчет давления грунта на подпорную стену производится на основе теории предельного равновесия. Эта теория позволяет определить не давление, которое оказывает грунт на подпорную стену в состоянии устойчивого равновесия (покоя)  $E_0$ , а так называемое активное давление  $E$ , возникающее в условиях предельного равновесия стены и грунта вместе с расположенной на нем нагрузкой, т. е. в момент перехода всей системы от покоя к движению, когда подпорная стена под давлением массы грунта начинает отодвигаться.

Пассивное давление грунта фундаментной части улучшает условия работы стены, оказывая дополнительное сопротивление сдвигу и опрокидыванию, поэтому его можно не учитывать и относить в запас устойчивости. Заметим, что пассивное давление по теории Кулона позволительно определять лишь в случаях, когда угол трения грунта о стену  $\varphi_0$  меньше третьей части угла внутреннего трения грунта  $\rho$ .

В других случаях пассивное давление дает весьма приближенный результат и рекомендуется лучше вводить в расчет активное давление, увеличивая тем самым устойчивость стены.

#### **11.4. Силы, действующие на подпорные стены**

После выявления вида равновесия грунтов становится понятным, какие силы будут действовать на подпорную стену. Грунт, расположенный справа от стены, не может сам по себе образовать вертикальный откос  $AB$ , поэтому он опирается на подпорную стену и производит на нее активное давление  $E$ . Аналогично будет обстоять дело и с левой стороны. Кроме сил давления грунта, на подпорную стену действует сила собственного веса  $G$  (рис. 11.6). Эти силы через подошву стены передаются грунту, вызывая с его стороны реактивную силу  $R$ .

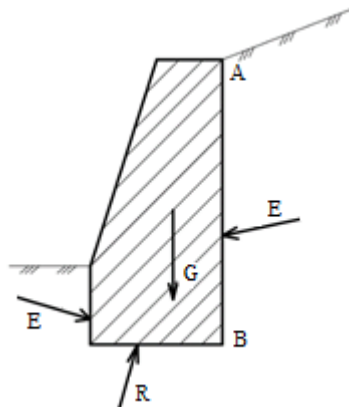


Рис. 11.6. Силы, действующие на подпорные стены

Расчет подпорных стен заключается в определении действующих на стену сил давлений грунта  $E$  и  $E_{п}$ . Зная величины этих давлений, а также собственный вес стены, можно определить силу  $R$  давления стены на грунт по ее подошве. Определение всех сил, действующих на стену, необходимо для расчетов на прочность стены, прочность основания в подошве, устойчивость стены против опрокидывания, на сдвиг.

### 11.5. Активное давление грунта $E$ на подпорную стену и методы его определения

Активное давление грунта  $E$  значительно меньше давления его в состоянии покоя  $E_0$ . Значит, рассматривается *не естественное давление грунта на стену, а давление его в условиях предельного равновесия*, на границе перехода грунта от равновесия к движению (обрушению). Таким образом, расчет давления ведется по теории предельного равновесия, потому что при деформации основания или при начавшемся сдвиге стены давление на нее снижается до величины активного. Давление грунта может быть определено аналитическим или графическим путем. В настоящем пособии рассмотрим разные методы определения активного давления: аналитический (метод Кулона) и графические (построение Кульмана, теоремы Ребхана и построение Понселе).

## 11.6. Метод Кулона

Наиболее простым и доступным методом определения давления грунта на подпорную стену является метод Кулона, основанный на следующих допущениях:

- грунт считается однородной сыпучей массой, воспринимающей только сжимающие и сдвигающие усилия. Сопротивление сдвигу принимается равным силам внутреннего трения. Силами сцепления обычно пренебрегают;

- принимается, что в состоянии предельного равновесия начинается сползание части сыпучего тела, так называемой призмы обрушения, сползающей по самой стене и по поверхности скольжения  $BH$ , проходящей через основание  $B$  задней грани стены. Эта поверхность – прямая линия (рис. 11.7);

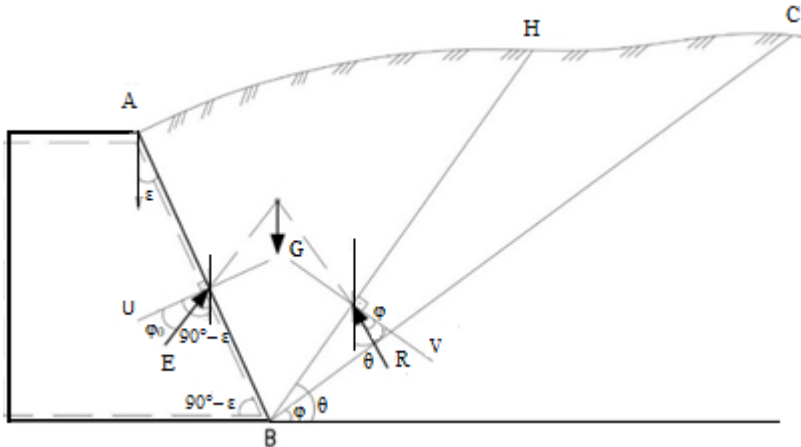


Рис. 11.7. Схема к определению давления грунта  $E$  на грань стены  $AB$

- призма обрушения  $ABH$  рассматривается как абсолютно твердое тело, что позволяет заменить действующие на нее массовые и поверхностные силы их равнодействующими  $G$ ,  $E$  и  $R$ . Направления сил давления грунта  $E$  и их равнодействующих  $R$  по отношению к задней грани стены и к плоскости скольжения определяются углами, равными в состоянии предельного равновесия углам трения  $\phi_0$  и  $\phi$ . Силы  $E$  и  $R$  отклоняются от нормалей к плоскостям скольжения в сторону противоположную движению;

- угол  $\theta$ , который образует плоскость скольжения с горизонтом ( $\theta > \varphi$ ), определяется из условия, при котором активное давление на подпорную стену должно быть наибольшим;

- подпорная стена и призма обрушения (вес и прочие условия давления грунта) находятся в одинаковых условиях по всей длине стены. Поэтому для расчета достаточно выделить участок стены длиной в 1 м.

Определим давление грунта  $E$  сыпучего тела на грань  $AB$ . Обозначим вес призмы обрушения через  $G$ , кН. Этот вес равен:

$$G = \gamma_{\text{гр}} A_{\text{фиг. } ABH} \cdot 1 \text{ м.} \quad (11.5)$$

Представим себе грунт, находящийся в естественном состоянии. Плоскостью  $BH$ , проходящей через нижнюю точку грани стены  $B$  и наклоненной к горизонту под углом  $\theta$ , отделим призму  $ABH$  (см. рис. 11.7). На нее действуют силы: собственный вес призмы  $G$ , реакция грунта  $R$ , отклоненная от нормали к плоскости  $BH$  на некоторый угол  $\varphi$ , реакция стены, равная определяемому давлению  $E$ , отклоненная от нормали к стене на угол  $\varphi_0$ .

Силу  $G$  разложим на две составляющие  $E$  и  $R$  (рис. 11.8). Зная  $G$  и направления сил  $E$  и  $R$ , построим силовой треугольник  $abc$ .

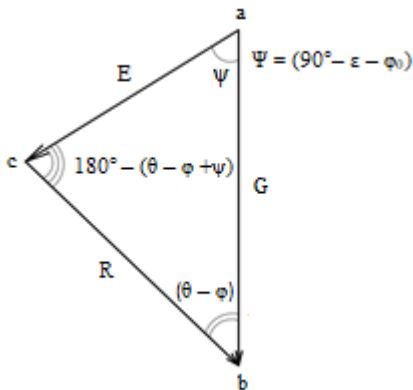


Рис. 11.8. Треугольник сил  $abc$

Отложив в масштабе вектор  $ab = G$ , проведем из точки  $a$  линию, параллельную  $E$  ( $ac \parallel E$ ), а из точки  $b$  линию, параллельную  $R$  ( $bc \parallel R$ ), до пересечения их в точке  $c$ . Получим треугольник  $abc$ , в котором определим вектор  $ac = E$ .

Отклонения сил  $E$  и  $R$ , вызванные трением по плоскостям  $AB$  и  $BH$ , назначены с учетом сползания призмы  $ABH$  вниз. Поскольку три силы находятся в равновесии, то силовой треугольник замкнут (см. рис. 11.8). Будем теперь отодвигать стену от грунта до тех пор, пока некоторая призма грунта  $ABH$  не займет предельное состояние. При этом по плоскостям  $AB$  и  $BH$  сопротивление сдвигу достигло предела, после чего достаточно ничтожного смещения стены для начала обрушения призмы. В предельном состоянии угол  $\varphi$  равен углу внутреннего трения, а угол  $\varphi_0$ , в свою очередь, равен углу трения грунта о стену. В этот момент призма  $ABH$  или находится в предельном равновесии, или начинает обрушаться.

Если считать, что углы трения  $\varphi$  и  $\varphi_0$  в предельном равновесии и в начале обрушения одинаковы, а движение призмы в начале обрушения медленным и равномерным, то давления грунта на стену в предельном равновесии и в начале обрушения будут одинаковы, так как в обоих случаях три одинаково направленные силы  $G$ ,  $E$  и  $R$  образуют замкнутый треугольник.

Плоскость  $BH$ , на которой сопротивление грунта сдвигу достигло предела, называется плоскостью обрушения (скольжения), а призма  $ABH$  называется призмой обрушения.

Из геометрических построений на рис. 11.7 видно, что угол между нормалью  $\nu$  и направлением  $G$  равен углу  $\theta$  (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), следовательно, угол между  $R$  и  $G$  равен  $(\theta - \varphi)$ , т. е.  $\angle abc = (\theta - \varphi)$ . Аналогично найдем угол между  $E$  и  $G$ . Угол между нормалью  $u$  и направлением  $G$  равен  $(90^\circ - \varepsilon)$ , следовательно,  $\angle cab = (90^\circ - \varepsilon - \varphi_0) = \psi$ . Тогда  $\angle acb = 180^\circ - (\theta - \varphi + \psi)$ .

Составив уравнение синусов, получим:

$$E / \sin (\theta - \varphi) = G / \sin (180^\circ - (\theta - \varphi + \psi)).$$

Тогда активное давление грунта (кН) в предельном равновесии или в начале обрушения равно:

$$E = G \sin (\theta - \varphi) / \sin (180^\circ - (\theta - \varphi + \psi)), \quad (11.6)$$

где  $\psi = (90^\circ - \varepsilon - \varphi_0)$ .

Формула (11.6) определяет активное давление грунта на стену в зависимости от предполагаемой плоскости обрушения, определяемой углом  $\theta$ . Поскольку давление на стену при ее смещении от грунта падает от естественного  $E_0$  до активного давления  $E$  в предельном состо-

янии, то плоскость обрушения соответствует такому углу  $\theta$ , при котором  $E$  достигает максимума. При некотором значении  $\theta = \theta_0$  получим наибольшее активное давление  $E_{\max}$ .

Если при таких (неблагоприятных) условиях устойчивость и прочность стены будут обеспечены, то они будут обеспечены и при любом направлении плоскости сползания. Значение угла  $\theta_0$  определяется из условия

$$dE / d\theta = 0. \quad (11.7)$$

*Вывод: направление плоскости сползания определяется из условия максимума давления сыпучего тела на грань. Давление грунта на стену при предельном состоянии (или в начале обрушения) меньше, чем до предельного состояния (до начала обрушения).*

Таким образом, методом Кулона определяется не действительное давление грунта на стену, а давление в предельном состоянии грунта, называемое активным давлением.

Но это не означает, что в действительности на стену будет действовать давление, равное вычисленному. При отсутствии смещения стены, что возможно при сооружении ее на скальном основании, давление сыпучего тела может значительно превышать давление, найденное по методу Кулона.

При произвольном опирании поверхности сыпучего тела уравнение (11.7) можно решить графическим путем. Когда поверхность сыпучего тела плоская, уравнение можно решить и аналитически.

### **11.7. Графические методы определения давления грунта $E$ . Построение Кульмана**

Графическое определение плоскости сползания, соответствующей наибольшему активному давлению  $E_{\max}$ , согласно формуле (11.6) сводится к графическому изображению функции  $E = f(\theta)$  и к определению ее максимума. Определим направление плоскости сползания и наибольшее давление сыпучего тела на грань  $AB$  подпорной стены при любом очертании поверхности сыпучего тела без нагрузки на этой поверхности. Построим для этого в косоугольной системе координат  $DBC$  график изменения давления  $E_{\pi}$  в зависимости от направления плоскости сползания  $E_{\pi} = f(\theta)$ .

По оси  $BC$ , соответствующей прямой линии внутреннего трения, будем откладывать в масштабе сил веса призмы обрушения, а по оси  $BD$  в том же масштабе – давления  $E_{п}$  на грань  $AB$ . Проведем произвольно плоскость сползания  $BH_n$  (рис. 11.9). Вес (кН) призмы обрушения  $ABH_n$  будет равен:

$$G_n = \gamma_{гр} A_{\Delta ABH_n}. \quad (11.8)$$

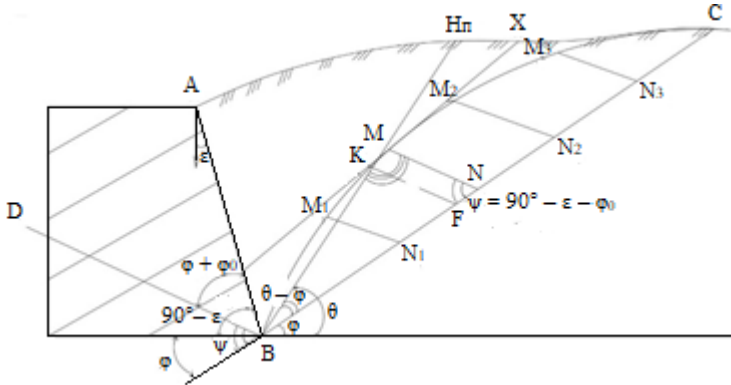


Рис. 11.9. Построение Кульмана:  $BC$  – линия естественного откоса;  $BD$  – базисная (основная) линия

В принятом масштабе сил отложим вес  $G_n$  по оси  $BC$ , получим точку  $N$ . Из точки  $N$  проведем прямую, параллельную основной линии  $BD$ , наклоненной к стене под углом  $(\varphi + \varphi_0)$ , до пересечения с прямой  $BH_n$  в точке  $M$ . Докажем, что отрезок  $NM$  в масштабе сил, принятом для  $G_n$ , равен давлению  $E_{п}$ , когда плоскость сползания совпадает с прямой  $BH_n$ .

Найдем углы  $\Delta MBN$ .

$$\angle B = (\theta - \varphi);$$

$$\angle N = (90^\circ - \varepsilon + \varphi) - (\varphi + \varphi_0) = 90^\circ - \varepsilon + \varphi - \varphi - \varphi_0 = 90^\circ - \varepsilon - \varphi_0 = \psi;$$

$$\angle M = 180^\circ - (90^\circ - \varepsilon - \varphi_0 + \theta - \varphi) = 180^\circ - (\psi + \theta - \varphi).$$

Сопоставляем  $\Delta MBN$  (см. рис. 11.9) и  $\Delta abc$  (см. рис. 11.8). Очевидно, что они подобны, следовательно, отрезок  $MN$  равен давлению  $E_{п}$ , т. е.  $MN = E_{п}$ .

Вывод: чтобы определить давление сыпучего тела на грань  $AB$  при выбранной плоскости обрушения  $BH$ , надо по оси  $BC$  отложить в масштабе сил вес призмы  $ABH$  (отрезок  $BN$ ) и из точки  $N$  провести прямую, параллельную основной линии  $BD$ , до пересечения с прямой  $BH$  в точке  $M$ . Отрезок  $NM$  в масштабе, принятом для силы  $G_n$ , будет равен давлению  $E_n$ .

Дальнейшие построения выполняются в следующем порядке:

- проводятся различные предполагаемые плоскости обрушения  $BH_1, BH_2, \dots, BH_n$  и для каждой из них вычисляются веса призм обрушения  $G_1, G_2, \dots, G_n$ ;

- вычисленные веса  $G_1, G_2, \dots, G_n$  в последовательном порядке откладываются от точки  $B$  на прямой внутреннего трения  $BC$ , получается ряд точек  $N_1, N_2, \dots, N_n$ ;

- из концов отрезков  $N_1, N_2, \dots, N_n$  проводятся прямые, параллельные основной линии  $BD$ , до пересечения каждой из них с соответствующим следом плоскости обрушения  $BH$ , получается ряд точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ;

- полученные точки соединяются плавной кривой, изображающей график изменения давления  $E_n = f(\theta)$ . Касательная к кривой, параллельная прямой  $BC$ , определяет точку касания  $K$ , через которую проходит искомая плоскость обрушения;

- проводится из точки  $K$  прямая, параллельная основной линии  $BD$ , получается точка  $F$ . Отрезок  $KF$  в масштабе оси  $BC$  и дает искомое наибольшее давление  $E_{\max}$  сыпучего тела на грань  $AB$ , а прямая  $BK$  – искомую плоскость сползания.

## 11.8. Теоремы Ребхана

### Теорема 1.

Давление на стену определяется выражением

$$E = G \sin(\theta - \varphi) / \sin(\theta - \varphi + \psi).$$

При изменении угла наклона плоскости сползания  $\theta$  меняется и величина давления  $E$  (формула (11.6)). Для определения максимального давления  $E_{\max}$  возьмем первую производную от давления  $E$  по углу призмы обрушения  $\theta$  и приравняем к нулю.

$$dE / d\theta = dG \sin(\theta - \varphi) / d\theta \sin(\theta - \varphi + \psi) + Gd \sin(\theta - \varphi) / d\theta \sin(\theta - \varphi + \psi) = 0.$$

При этом необходимо иметь в виду, что вес призмы обрушения зависит от угла плоскости обрушения. Решая это выражение по отношению к весу  $G$ , получим (рис. 11.10):

$$G = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta BHN} \cdot 1 \text{ м.} \quad (11.9)$$

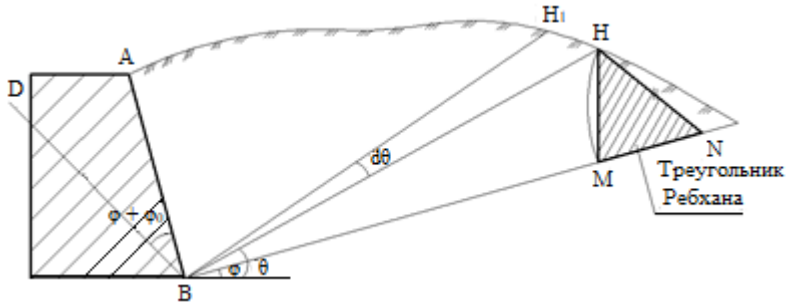


Рис. 11.10. Треугольник Ребхана

Такой же вес (см. рис. 11.7) равен:

$$G = \gamma_{\text{гр}} A_{\text{фиг. АВН}} \cdot 1 \text{ м.} \quad (11.10)$$

Сопоставляя выражения (11.9) и (11.10), приравняв правые части, получим первую теорему Ребхана о максимальном давлении  $E_{\text{max}}$ :

$$A_{\Delta BHN} = A_{\text{фиг. АВН}}.$$

Первая теорема Ребхана – наибольшее давление грунта будет в том случае, если след плоскости обрушения  $BH$  проходит таким образом, что делает фигуру  $ABH$  равновеликой треугольнику  $BHN$ . Площадь призмы обрушения грунта при максимальном давлении равняется площади силового треугольника  $BHN$ , построенного на следе плоскости обрушения  $BH$ .

### Теорема 2.

Из точки  $N$  радиусом  $HN$  проведем дугу до пересечения с линией естественного откоса в точке  $M$  (см. рис. 11.10). Точки  $H$  и  $M$  соединим прямой  $HM$ , получим треугольник Ребхана ( $\Delta HNM$ ).

Рассмотрим треугольники  $BHN$  и  $HNM$ . Они имеют общую одинаковую высоту (перпендикуляр, опущенный из точки  $H$ ) (см. рис. 11.10). Тогда их площади будут иметь следующее соотношение:

$$A_{\Delta HNM} / A_{\Delta BHN} = MN / BN. \quad (11.11)$$

Отсюда

$$HN / BN = E / G.$$

Так как  $MN = HN$ , тогда отрезок  $HN$  есть давление на стенку  $E$ , а отрезок  $BN$  – вес стены  $G$ .

Согласно первой теореме Ребхана  $A_{\Delta BHN} = A_{\text{фиг. АВН}}$  (см. рис. 11.10 и 11.7).

Зная вес грунта  $G = \gamma_{\text{гр}} A_{\text{фиг. АВН}}$ , подставляем его в выражение (11.11), получим формулу для определения давления  $E$ , кН:

$$A_{\Delta HNM} / A_{\Delta BHN} = E / \gamma_{\text{гр}} A_{\text{фиг. АВН}}, \text{ отсюда } E = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta HNM};$$
$$E = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta \text{ Ребхана}}, \quad (11.12)$$

где  $\gamma_{\text{гр}}$  – объемный вес грунта;

$A_{\Delta \text{ Ребхана}}$  – площадь треугольника Ребхана.

Выражение (11.12) – это математическая запись второй теоремы Ребхана.

Вторая теорема Ребхана – наибольшее активное давление грунта равно произведению объемного веса грунта на площадь треугольника Ребхана.

Графически площадь треугольника Ребхана определяется с помощью построения Понселе.

## 11.9. Построение Понселе

Опыты показывают, что фактическая поверхность сползания криволинейна (см. рис. 11.9), например, круглоцилиндрическая или логарифмическая. Однако результаты для активных давлений во многих случаях практически мало отличаются от результатов, получаемых при плоской поверхности сползания.

В случаях, когда поверхность грунта – плоскость, давление на грань  $AB$  можно определить при помощи построения Понселе. Оно справедливо, если грунт за стеной однородный и стена не имеет изломов.

Порядок построения Понселе (рис. 11.11).

1. Из нижней точки  $B$  соприкосновения грунта со стеной проводим *линию естественного откоса*  $BC$  под углом  $\varphi$  к горизонту до пересечения с дневной поверхностью грунта.

2. Из точки  $B$  под углом  $(\varphi + \varphi_0)$  к напорной грани стены  $AB$  проводим *базисную линию*  $BD$ .

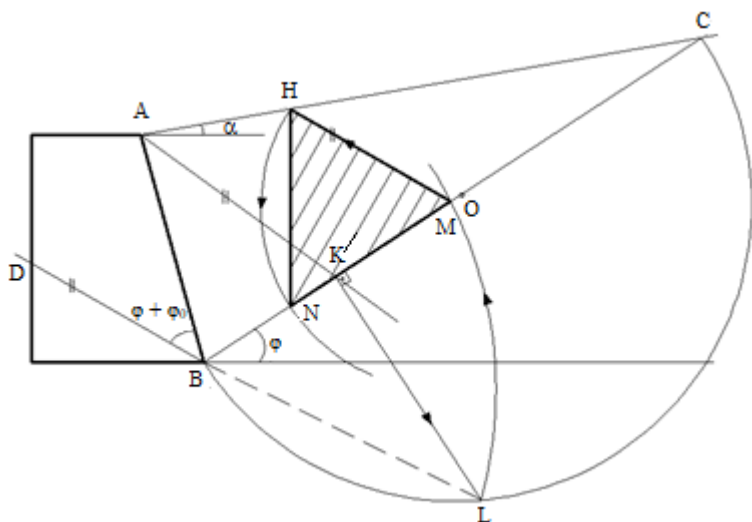


Рис. 11.11. Построение Понселе

3. На отрезке  $BC$ , как на диаметре, строим полуокружность.

4. Из верхней точки  $A$  соприкосновения грунта со стеной проводим линию, параллельную *базисной*, до пересечения с *линией естественного откоса*  $BC$  в точке  $K$ .

5. Из точки  $K$  к *линии естественного откоса*  $BC$  восстанавливаем перпендикуляр и продолжаем его до пересечения с полуокружностью в точке  $L$ .

6. Точки  $B$  и  $L$  мысленно соединяем прямой линией (штрихпунктирная линия).

7. Из точки  $B$  радиусом  $BL$  проводим дугу до пересечения с *линией естественного откоса*  $BC$  в точке  $M$ .

8. Из точки  $M$  проводим прямую, параллельную *базисной*  $BD$ , до пересечения с дневной поверхностью грунта в точке  $H$ .

9. Из точки  $M$  радиусом  $MN$  проводим дугу до пересечения с *линией естественного откоса*  $BC$  в точке  $N$ .

10. Точки  $H$  и  $N$  соединяем прямой линией и получаем треугольник Ребхана –  $\triangle HNM$ .

Тогда согласно второй теореме Ребхана сила максимального активного давления грунта ( $kH$ ) на подпорную стену определяется следующим образом:

$$E_{\max} = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta \text{ Ребхана}}.$$

Вывод: на основании теоремы Ребхана величина давления на грань вычисляется путем умножения площади соответствующего треугольника Ребхана на объемный вес грунта.

### **11.10. Точка приложения и направление силы активного давления грунта $E$ . Некоторые частные случаи давления грунта**

Всякая сила определяется своей величиной, направлением и точкой приложения. Определение давления нам уже известно. Давление грунта может быть определено графическим путем, например, с помощью построения Понселе. Остается решить вопрос о направлении и точке приложения давления.

Известно, что закон изменения интенсивности давления грунта – линейный, следовательно, эпюра интенсивности давления будет иметь вид треугольника (рис. 11.12). Точки приложения сил активного давления определяют, как равнодействующие эпюр интенсивности давлений.

Если известна интенсивность давлений и их направление во всех точках ограждения постоянно, то центр давления определяется центром тяжести эпюры интенсивности давления.

В случае треугольной эпюры интенсивности давления центр давления лежит на  $1/3$  высоты эпюры от основания или  $1/3$  высоты стены снизу. Направление силы активного давления грунта  $E$  определяют с учетом угла трения грунта о стену  $\varphi_0$ .

Сила давления  $E$  откладывается вверх против направления скольжения грунта.

**Частные случаи определения точки приложения и направления  $E$ .**

1. Давление на подпорную стену однородного грунта.

Строится эпюра интенсивности давления грунта  $q = f(H)$  (рис. 11.12).

Сила давления грунта  $E$ , кН, равна объему ( $V = A \cdot 1 \text{ м}$ ) или площади эпюры интенсивности давления:

$$E = A_{\text{эп}} = qH / 2. \quad (11.13)$$

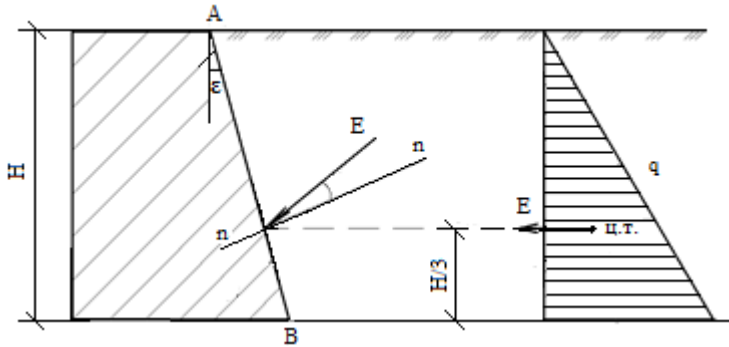


Рис. 11.12. Эюра интенсивности давления грунта  $q = f(H)$ , кН/м

Линия действия силы давления грунта  $E$  проходит через центр тяжести треугольной эюры (рис. 11.12). Точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $AB$  находится на расстоянии  $H/3$  от основания треугольника.

Определяется нижняя ордината эюры интенсивности давления грунта  $q$ , кН/м, по формуле

$$q = 2E / H.$$

2. Давление на подпорную стену от равномерно распределенной нагрузки, расположенной на поверхности грунта.

Строится эюра интенсивности давления грунта  $q_1 = f(H + h_0)$  с учетом дополнительной нагрузки (пригрузки) (рис. 11.13). Для этого пригрузка  $F$ , кН/м<sup>2</sup>, заменяется эквивалентным слоем грунта  $h_0$ . Из равенства весов получается формула для определения высоты эквивалентного слоя грунта  $h_0$  (рис. 11.13, б).

$$1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot F = 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot h_0 \gamma_{\text{гр}2};$$

$$h_0 = F / \gamma_{\text{гр}2} \Phi_1. \quad (11.14)$$

Рассматриваем фиктивную грань стены  $A_1B$ . Для нее выполняется построение Понселе. Определяется площадь треугольника Ребхана ( $A_{\Delta}$  Ребхана) и вычисляется сила активного давления грунта на фиктивную стену  $E_{A_1B}$ .

Определяется нижняя ордината эюры интенсивности давления грунта  $q_1$ , кН/м:

$$q_1 = 2E_{A_1B} / (H + h_0). \quad (11.15)$$

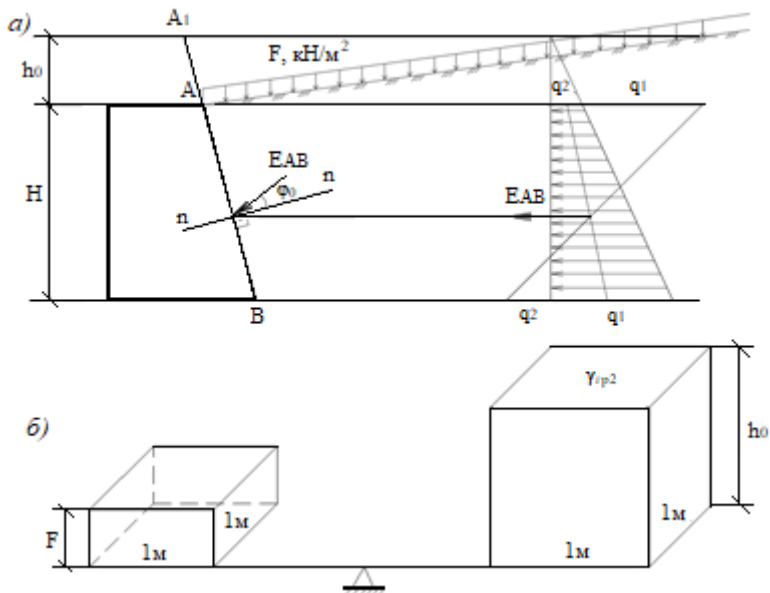


Рис. 11.13. Эпюра интенсивности давления грунта  $q_1 = f(H + h_0)$ , кН/м

Из подобия треугольников определяется верхняя ордината эпюры интенсивности давления грунта  $q_2$ :

$$q_1 / (H + h_0) = q_2 / h_0; \quad q_2 = q_1 h_0 / (H + h_0).$$

Давление грунта  $E_{AB}$  на действительную грань стены  $AB$  вычисляется по эпюре интенсивности давления грунта, на которой выделяется та ее часть, которая соответствует действительной грани (в данном примере – трапеции). Окончательно получим:

$$E_{AB} = (q_1 + q_2) H / 2. \quad (11.16)$$

Графически для трапеции определяется точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $AB$  и ее величина (см. рис. 11.13).

3. Давление слоистого (неоднородного) грунта на подпорную стену.

Строится эпюра интенсивности давления грунта на участок стены  $AB$ ,  $q_1 = f(H_1)$  (рис. 11.14). Для нее выполняется построение Понселе. Вычисляется сила активного давления грунта на грань напорной стены  $E_{AB}$ . Линия действия силы  $E_{AB}$  проходит через центр тяжести

треугольной эпюры и находится на расстоянии  $H_1/3$  от основания эпюры. Определяем нижнюю ординату эпюры интенсивности давления грунта  $q_1$ :

$$q_1 = 2E_{AB} / H_1.$$

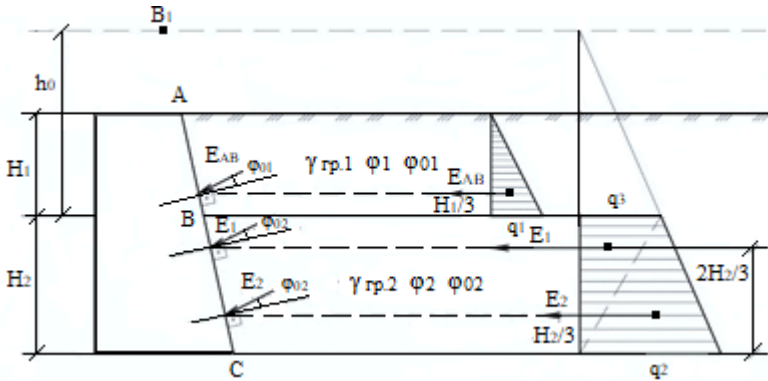


Рис. 11.14. Эпюры интенсивности давления грунта  $q_1 = f(H_1)$  и  $q_2 = f(H_2 + h_0)$ , кН/м

Заменяется верхний слой грунта эквивалентным слоем нижнего. Для этого из равенства весов получается формула для определения высоты эквивалентного слоя грунта  $h_0$ :

$$1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot H_1 \gamma_{гр1} = 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot h_0 \gamma_{гр2};$$

$$h_0 = \gamma_{гр1} H_1 / \gamma_{гр2}, \text{ или } h_0 = \gamma_{гр}^{\text{верх. сл}} H^{\text{верх. сл}} / \gamma_{гр}^{\text{нижн. сл}}. \quad (11.17)$$

Выполняется построение Понселе для фиктивной напорной грани стены  $B_1C$ . Вычисляется сила активного давления грунта на напорную грань стены  $E_{B_1C}$ . Строится эпюра интенсивности давления на фиктивную грань стены  $B_1C$ , с учетом замены верхнего слоя грунта нижним слоем,  $q_2 = f(H_2 + h_0)$  (см. рис. 11.14). Чтобы вычислить давление грунта на действительную грань стены  $BC$ , на эпюре интенсивности давления грунта выделяется та ее часть, которая соответствует действительной грани (в нашем случае – трапеции).

Находятся ординаты эпюры интенсивности давления грунта  $q_2$  и  $q_3$ :

$$q_2 = 2E_{B_1C} / (H_2 + h_0), \text{ кН/м}; \quad q_2 / (H_2 + h_0) = q_3 / h_0;$$

$$q_3 = q_2 h_0 / (H_2 + h_0); \quad E_{BC} = (q_2 + q_3) H_2 / 2, \text{ кН}.$$

Графически для трапеции определяется точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $BC$  и ее величина. Или трапециевидальная часть эпюры  $q_2 = f(H_2 + h_0)$  (см. рис. 11.14) разбивается на две треугольные. Через центры тяжести этих треугольников проходят силы активного давления грунта  $E_1$  и  $E_2$  на расстояниях  $2H_2 / 3$  и  $H_2 / 3$  от основания эпюры:

$$E_1 = q_3 H_2 / 2, \text{ кН};$$

$$E_2 = q_2 H_2 / 2, \text{ кН}.$$

4. Давление водопроницаемого грунта совместно с водой на подпорные стены.

Активное давление на грань  $AC$  определяется отдельно от воды и сыпучего тела с учетом взвешивающего действия воды. Строится эпюра гидростатического давления воды с учетом всей высоты стены  $H = (H_1 + H_2)$ , так как грунт водопроницаемый,  $q = f(H) = f(H_1 + H_2)$  (рис. 11.15).

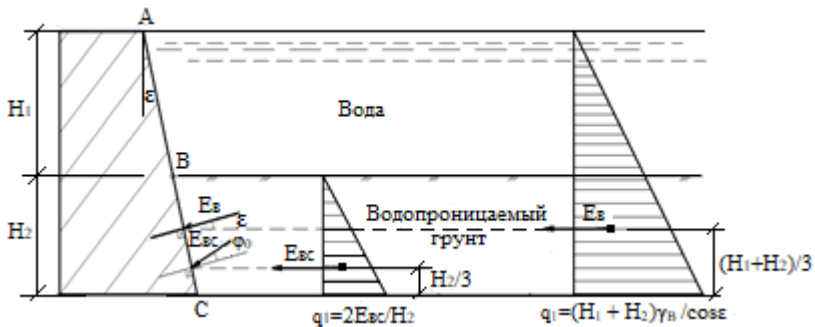


Рис. 11.15. Эпюра гидростатического давления воды  $q = f(H) = f(H_1 + H_2)$  и эпюра интенсивности взвешенного давления грунта  $q_1 = f(H_2)$ , кН/м

Рассматривается напорная грань стены  $AC$ . Для нее вычисляется сила гидростатического давления воды на напорную грань стены  $E_B = E_{AC}^{\text{воды}}$  (рис. 11.16).

Сила давления воды  $E_{\text{факт}}$ , кН, равна площади эпюры гидростатического давления:

$$E_{\text{факт}} = \gamma_B H^2 / 2; \quad (11.18)$$

$$E_B = E_{AC}^{\text{воды}} \gamma_B H^2 / 2 \cos \epsilon. \quad (11.19)$$

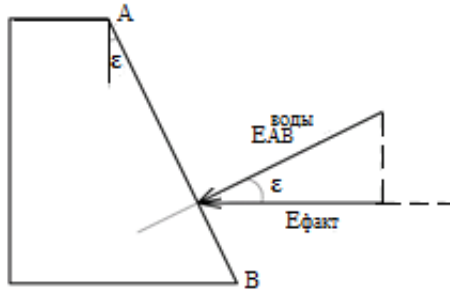


Рис. 11.16. Расчет гидростатического давления воды на напорную грань,  
 $E_{\text{факт}} = E_{AB}^{\text{воды}} \cos \varepsilon$ ;  $E_{AB}^{\text{воды}} = E_{\text{факт}} / \cos \varepsilon$

Обозначив нижнюю ординату эпюры гидростатического давления за  $q$  и зная, что  $q = \gamma H$ , силу гидростатического давления воды  $E_B$ , кН, определим следующим образом:

$$E_B = E_{AC}^{\text{воды}} = qH = q(H_1 + H_2).$$

Тогда из равенства сил давления воды определяется нижняя ордината эпюры интенсивности давления грунта  $q$ :

$$\begin{aligned} \gamma_B (H_1 + H_2)^2 / 2 \cos \varepsilon &= q (H_1 + H_2) / 2; \\ q &= \gamma_B (H_1 + H_2) / \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Линия действия силы давления воды  $E_B$  на напорную грань  $AC$  проходит через центр тяжести эпюры гидростатического давления, а точка приложения ее находится на расстоянии  $(H_1 + H_2) / 3$  от основания эпюры.

Рассматривается грань стены  $BC$ . Для нее выполняется построение Понселе. Определяется площадь треугольника Ребхана ( $A_{\Delta \text{Ребхана}}$ ). Вычисляется сила активного давления грунта на грань стены  $E_{BC}$ :

$$E_{BC} = \gamma_{\text{взв}} A_{\Delta \text{Ребхана}},$$

где  $\gamma_{\text{взв}}$  – объем грунта во взвешенном состоянии, определяется по формуле (11.2):

$$\gamma_{\text{взв}} = \gamma_{\text{гр}} - \gamma_B (1 - \eta / 100).$$

Строится эпюра интенсивности активного давления взвешенного грунта на грань  $BC$   $q_1 = f(H_2)$  (см. рис. 11.15). Сила давления взвешенного грунта  $E_{BC}$ , кН, равна площади эпюры интенсивности давления:

$$E_{BC} = q_1 H_2 / 2.$$

Тогда нижняя ордината эпюры интенсивности давления взвешенного грунта  $q_1$ , кН/м, равна:

$$q_1 = 2E_{BC} / H_2.$$

Линия действия силы  $E_{BC}$  проходит через центр тяжести треугольной эпюры. Точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $BC$  находится на расстоянии  $H_2 / 3$  от основания эпюры.

5. Давление водонепроницаемого грунта под слоем воды на подпорные стены.

Строится эпюра гидростатического давления воды до водоупора, только с учетом высоты стены  $H_1$ , так как грунт водонепроницаемый (рис. 11.17). Для напорной грани стены  $AC$  вычисляется сила гидростатического давления воды на напорную стену  $E_B = E_{AC}^{\text{воды}}$ .

$$E_B = q_1 H_1 / 2, \text{ кН};$$

$$E_B = \gamma_B H_1^2 / 2 \cos \epsilon, \text{ кН}.$$

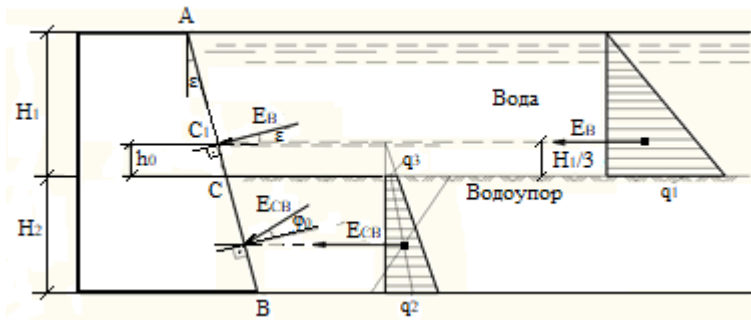


Рис. 11.17. Эпюра гидростатического давления воды  $q_1 = f(H_1)$ , кН/м, и эпюра интенсивности давления грунта  $q_2 = f(H_2 + h_0)$ , кН/м

Тогда из равенства сил давления воды определяется нижняя ордината эпюры интенсивности давления грунта  $q_1$ , кН/м:

$$q_1 = \gamma_B H_1 / \cos \epsilon.$$

Заменяется действие воды эквивалентным слоем нижележащего грунта  $h_0$ :

$$h_0 = \gamma_{\text{верх. сл}} H_{\text{верх. сл}} / \gamma^{\text{верх. сл.}}; \quad h_0 = \gamma_{\text{в}} H_1 / \gamma_{\text{гр2.}}$$

Выполняется построение Понселе для фиктивной напорной грани стены  $C_1B$ . Вычисляется сила активного давления грунта на напорную стену  $E_{C_1B}$ . Строится эпюра интенсивности давления на фиктивную грань стены  $C_1B$ , с учетом замены верхнего слоя воды нижним слоем грунта  $h_0$ ,  $q_2 = f(H_2 + h_0)$  (см. рис. 11.17).

Сила давления грунта  $E_{C_1B}$ , кН, равна площади эпюры интенсивности давления:

$$E_{C_1B} = q_2(H_2 + h_0) / 2.$$

Интенсивность давления грунта в точке  $B$  или нижняя ордината эпюры  $q_2$ , кН/м, определяется по следующему равенству:

$$q_2 = 2E_{C_1B} / (H_2 + h_0).$$

Давление грунта на действительную грань стены  $CB$  вычисляется по эпюре интенсивности давления грунта, на которой выделяется та ее часть, которая соответствует действительной грани (трапеции).

Из подобия треугольников определяется верхняя ордината эпюры интенсивности давления грунта  $q_3$ , кН/м:

$$q_2 / (H_2 + h_0) = q_3 / h_0; \quad q_3 = q_2 h_0 / (H_2 + h_0).$$

Графически для трапеции определяется точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $CB$  и ее величина:

$$E_{CB} = (q_3 + q_2) H_2 / 2, \text{ кН.}$$

6. Давление грунта на подпорные стены при ломаном очертании ограждающей поверхности.

Давление на каждую грань стены определяется независимо друг от друга, считается каждая грань за самостоятельную стену, продолженную до поверхности грунта в плоскости грани (рис. 11.18). Из построенной эпюры интенсивности распределенных давлений выделяется та часть ее, которая приходится на данную грань.

Строится эпюра интенсивности давления грунта на участок стены  $AB$ ,  $q_1 = f(H_1)$  (рис. 11.18). Для нее выполняется построение Понселе. Вычисляется сила активного давления грунта на грань напорной стены  $E_{AB}$ . Линия действия силы  $E_{AB}$  проходит через центр тяжести треугольной эпюры и находится на расстоянии  $H_1 / 3$  от основания эпюры  $q_1 = f(H_1)$ .

Определяется нижняя ордината эпюры интенсивности давления грунта  $q_1$ , кН/м:

$$q_1 = 2E_{AB} / H_1.$$

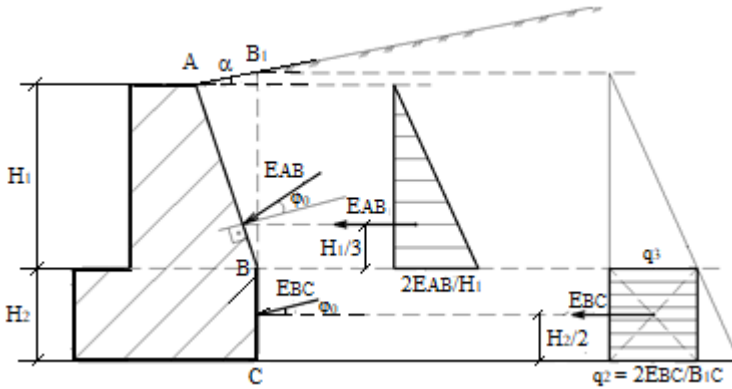


Рис. 11.18. Эпюры интенсивности давления грунта  $q_1 = f(H_1)$  и  $q_2 = f(B_1C)$ , кН/м

Строится треугольная эпюра интенсивности давления грунта на участок условной стены  $B_1C$   $q_2 = f(B_1C)$  (рис. 11.18). Для условной грани стены  $B_1C$  выполняется построение Понселе. Вычисляется сила активного давления грунта на грань напорной стены  $E_{B_1C}$ . Чтобы учесть действие активного давления грунта слева, необходимо на треугольной эпюре  $q_2 = f(B_1C)$  отсечь треугольную ее часть по высоте  $BC = H_2$ . На действительную грань стены  $BC$  действует прямоугольная эпюра интенсивности давления. Линия действия силы  $E_{BC}$  проходит через центр тяжести прямоугольной эпюры и находится на расстоянии  $H_2 / 2$  от основания эпюры  $q_2 = f(B_1C)$ .

Находятся ординаты эпюры интенсивности давления грунта  $q_2$  и  $q_3$ :

$$q_2 = 2E_{B_1C} / B_1C, \text{ кН/м}; \quad q_2 / B_1C = q_3 / BB_1;$$

$$q_3 = q_2 BB_1 / B_1C, \text{ кН/м}.$$

Сила давления грунта  $E_{BC}$ , кН, равна площади эпюры интенсивности давления:

$$E_{BC} = q_3 H_2.$$

Выделенные части эпюр можно объединять в одну эпюру.



Рассмотрим треугольники  $ABH$  и  $HBM$ . Оба треугольника прямоугольные и имеют общую гипотенузу  $BH$ . Такие треугольники равны между собой. Согласно первой теореме Ребхана площади этих треугольников одинаковые, т. е.

$$A_{\Delta ABH} = A_{\Delta HBM}.$$

Из  $\Delta ABH$  имеем:

$$H = AB, \text{ а } AH = HM.$$

Тогда

$$AH = H \operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) / 2;$$

$$AH = HM = H \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi / 2).$$

Подставим  $HM$  в выражение (11.21), получим:

$$E = \gamma_{\text{гр}} H^2 \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2) / 2. \quad (11.22)$$

Нижняя ордината эпюры интенсивности давления грунта для идеальных стен  $q$ , кН/м, равна:

$$q = 2E / 2 = \gamma_{\text{гр}} H \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2). \quad (11.23)$$

Для гладкой вертикальной стены и горизонтальной поверхности грунта (в первом частном случае) можно в формулу (11.22) ввести коэффициент активного давления грунта, который вычисляется по формуле

$$\lambda_a = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2). \quad (11.24)$$

Тогда давление грунта и нижняя ордината эпюры интенсивности равны:

$$E = \gamma_{\text{гр}} H^2 \lambda_a / 2; \quad q = \gamma_{\text{гр}} H \lambda_a. \quad (11.25)$$

2. Определение активного давления грунта  $E$  и ординаты эпюры интенсивности давления  $q$  для реальных стен (рис. 11.20).

Стена наклонена ( $\varepsilon \neq 0$ ), поверхность грунта за стеной – наклонная плоскость ( $\alpha \neq 0$ ), угол трения грунта о стену  $\varphi_0 \neq 0$ , т. е. стена шероховатая и на наклонной поверхности засыпки расположена вертикальная, равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $F$ , кН/м<sup>2</sup>.

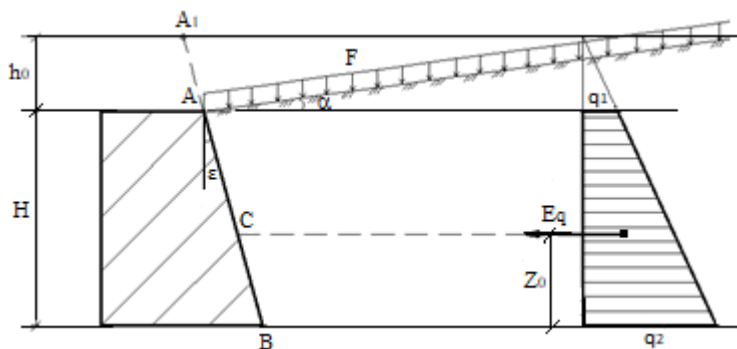


Рис. 11.20. Схема к определению давления грунта от равномерно распределенной нагрузки. Эпюра интенсивности давления грунта  $q_2 = f(H + h_0)$

Давление грунта  $E_q$ , кН, на наклонную шероховатую грань стены  $AB$  определяется по формуле

$$E_q = \gamma_{\text{гр}} H(H + h_0 K_q) K, \quad (11.26)$$

где  $h_0 = F / \gamma_{\text{гр}}$  – высота эквивалентного слоя грунта, которым условно заменяется нагрузка  $F$ , м;

$K_q$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_0$  – коэффициенты, влияющие на величину давления  $E$  и интенсивность распределения давления  $q$ , вычисляются по нижеприведенным формулам:

$$K_q = \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha / \cos (\varepsilon - \alpha); \quad (11.27)$$

$$K = [\cos (\varphi - \alpha) / (1 + K_0 K_1) \cdot \cos \varepsilon]^2 / \cos (\varepsilon + \varphi_0); \quad (11.28)$$

$$K_1 = \sin (\varphi - \alpha) / \cos (\varepsilon - \alpha); \quad (11.29)$$

$$K_0 = \sqrt{\sin (\varphi + \varphi_0) \cdot \cos (\varepsilon - \alpha) / \cos (\varepsilon + \varphi_0) \cdot \sin (\varphi - \alpha)}. \quad (11.30)$$

Следовательно, интенсивность давления грунта (кН/м) на подпорную стену при распределенной вертикальной нагрузке (см. рис. 11.20) равна:

$$q_1 = \gamma_{\text{гр}} h_0 K_q K; \quad (11.31)$$

$$q_2 = \gamma_{\text{гр}} (H + h_0 K_q) K. \quad (11.32)$$

Чтобы определить координату точки приложения силы давления грунта  $E_q$ , надо установить, как эта сила распределяется по грани  $AB$ , т. е. установить форму эпюры интенсивности давления (эпюры напряжений грунта). Так как давления сыпучего тела распределены по напорной грани  $AB$  по линейному закону, то для построения эпюры интенсивности в виде трапеции достаточно знать давления в точках  $A$  и  $B$  (ординаты эпюры  $q_1$  и  $q_2$ ).

Центр давления можно определить по центру тяжести эпюры интенсивности давления (см. рис. 11.20). Расстояние от центра тяжести эпюры интенсивности до ее нижнего основания (м) определяется по формуле, применяемой для трапеции:

$$Z_0 = H \cdot 2(q_1 + q_2) / 3(q_1 + q_2). \quad (11.33)$$

Вывод:  $E_q$  будет приложена к грани  $AB$  в точке  $O$ . Таким образом, величина силы давления  $E_q$  на грань стены  $AB$  определяется по формуле (11.26), точка ее приложения лежит на одном уровне с центром тяжести эпюры интенсивности и отстоит от низа грани стены на расстоянии, вычисляемом по формуле (11.33). А направление силы давления образует угол  $\varphi_0$  с нормалью к грани стены  $AB$ .

Следует отметить, если предварительно определить ординаты эпюры интенсивности давлений  $q_1$  и  $q_2$  (выражения (11.31), (11.32)), то давление грунта  $E_q$ , кН, можно вычислить по формуле

$$E_q = (q_1 + q_2) H / 2.$$

Сила активного давления грунта равна площади трапецеидальной эпюры интенсивности давления.

### 11.12. Пассивное давление грунта (отпор)

Пассивным давлением грунта (отпором)  $E_p$  называется сила его воздействия на грань стены при незначительном ее смещении в сторону грунта. Пассивное давление увеличивается с перемещением стены, до тех пор пока не произойдет выпирание грунта. Определим это пассивное давление, исходя из плоской поверхности выпирания (рис. 11.21), т. е. по методу Кулона, аналогично определению активного давления с сохранением всех его допущений.

При перемещении грани  $AB$  в сторону грунта образуется призма выпирания  $ABH$ , которая смещается как твердое тело по грани  $AB$  и плоскости выпирания  $BH$  вверх.

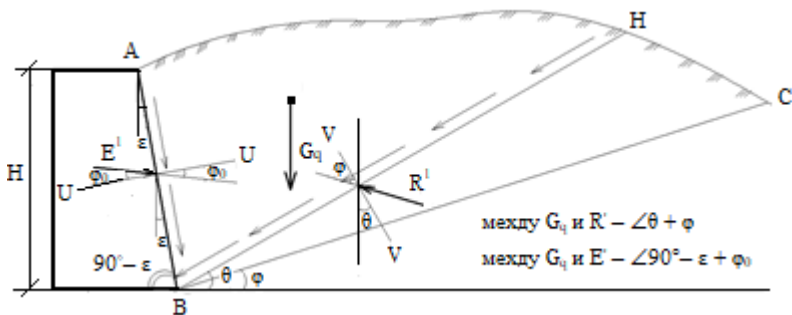


Рис. 11.21. Схема к определению пассивного давления грунта

В предельном состоянии (когда стена смещается слегка в сторону грунта) равнодействующая  $E'$  нормального давления на грань  $AB$  и сил трения будет отклонена от нормали  $U-U$  на величину угла трения  $\varphi_0$ . Сила же  $R'$  отклонена от нормали  $V-V$  к плоскости выпирания  $BH$  на угол  $\varphi$ . Вес призмы выпирания сила  $G$  является равнодействующей силы давления  $E'$  на грань  $AB$  и  $R'$  на плоскость  $BH$ . Силовым треугольником при таком действии сил показан на рис. 11.22.

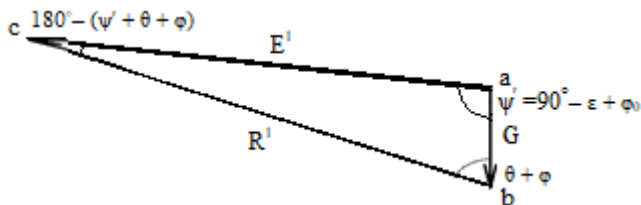


Рис. 11.22. Силовой треугольник  $abc$

Из силового треугольника по теореме синусов находим:

$$E' = G \sin(\theta + \varphi) / \sin(\theta + \varphi + \psi'), \quad (11.34)$$

где  $\psi' = (90^\circ - \varepsilon + \varphi_0)$ .

Сравнив формулу (11.34) для отпора с формулой (11.6) для активного давления грунта  $E = G \sin(\theta - \varphi) / \sin(\theta - \varphi + \psi)$ , отметим, что формулу (11.34) можно получить из формулы (11.6) изменением знаков углов  $\varphi$  и  $\varphi_0$  на  $-\varphi$  и  $-\varphi_0$ . Это объясняется изменением направления сил трения по плоскости  $AB$  и  $BH$ .

Вывод: при пассивном давлении грунта (отпоре) силы  $R'$  и  $E'$  отклоняются в другую сторону от нормалей к плоскости выпирания  $BH$

и плоскости ограждения  $AB$ . Заменяв в общих формулах активного давления (11.26)–(11.30) углы  $\varphi$  и  $\varphi_0$  на  $-\varphi$  и  $-\varphi_0$ , получим общие формулы отпора грунта:

$$E'q = \gamma_{\text{гр}} H (H + h_0 K_q) K' / 2; \quad (11.35)$$

$$q_2 = \gamma_{\text{гр}} (H + h_0 K_q) K'; \quad (11.36)$$

$$K_q = \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha / \cos (\varepsilon - \alpha);$$

$$K'_1 = \sin (-\varphi - \alpha) / \cos (\varepsilon - \alpha); \quad (11.37)$$

$$K' = [\cos (\varphi + \varepsilon) / (1 + K'_0 K'_1) \cdot \cos \varepsilon]^2 / \cos (\varepsilon - \varphi_0); \quad (11.38)$$

$$K'_0 = \sqrt{\sin (\varphi + \varphi_0) \cdot \cos (\varepsilon - \alpha) / \cos (\varepsilon - \varphi_0) \cdot \sin (\varphi + \alpha)}. \quad (11.39)$$

Точка приложения силы отпора определяется так же, как и распора.

Так же можно получить формулы пассивного давления грунта для идеальных стен из формул (11.22) и (11.23):

$$E' = \gamma_{\text{гр}} H^2 \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2) / 2; \quad (11.40)$$

$$q' = \gamma_{\text{гр}} H \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2). \quad (11.41)$$

Все вопросы, связанные с активным давлением, могут быть распространены и на пассивное давление. Следует отметить, что все графические приемы определения активного давления после замены углов  $\varphi$  и  $\varphi_0$  на  $-\varphi$  и  $-\varphi_0$  применимы для определения отпора (рис. 11.23).

$$E' = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta HMN}, \text{ кН.}$$

Отличительная особенность этого построения состоит в том, что треугольник Ребхана имеет большую площадь. Пассивное давление, как видно из рис. 11.23, будет больше, чем активное. Выразим эту величину через отношение

$$\begin{aligned} E' / E &= [\gamma_{\text{гр}} H^2 \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2) / 2] / [\gamma_{\text{гр}} H^2 \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2) / 2] = \\ &= \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2) / \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2) = \operatorname{tg}^4 (45^\circ + \varphi / 2). \end{aligned}$$

Если принять грунт с углом естественного откоса  $\varphi = 30^\circ$ , то получим:

$$E' / E = \operatorname{tg}^4 (45^\circ + \varphi / 2) = \operatorname{tg}^4 (45^\circ + 30^\circ / 2) = \operatorname{tg}^4 60^\circ = (\sqrt{3})^4 = 9.$$

В данном случае пассивное давление  $E' = 9E$ .

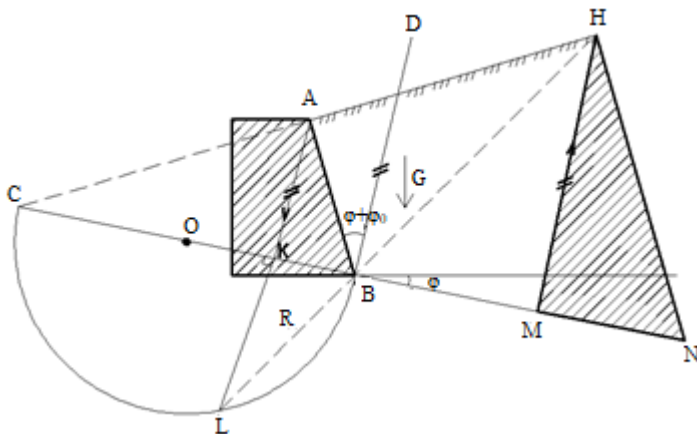


Рис. 11.23. Треугольник Ребхана;  $A_{DMN}$  – площадь треугольника Ребхана

### 11.13. Расчет подпорных стен на прочность и устойчивость

Подпорные стены рассчитываются по двум группам предельных состояний: по первой группе выполняются расчеты на устойчивость стен против опрокидывания, на устойчивость стен против сдвига, на прочность стен и основания (несущая способность); по второй группе выполняются расчеты по деформациям и по трещиностойкости. Наибольший интерес представляет расчет подпорной стены в предположении самых неблагоприятных условий ее работы, которые приводят подпорную стену к первому предельному состоянию.

#### 11.13.1. Устойчивость подпорных стен против опрокидывания

Первым предельным состоянием будет нарушение устойчивости и прочности подпорной стены. Предельное состояние определяется внешними силами, а также сопротивлением материала стены и ее основания. Основными внешними силами, действующими на подпорную стену, являются силы давления грунта  $E$  и собственный вес стены  $G$ .

Проверка стены на опрокидывание производится в предположении, что она под действием сил давления грунта может повернуться вокруг ребра наружной грани. Определяется суммарный момент сил, препятствующих опрокидыванию, и сил, стремящихся опрокинуть ее. Эти два момента сопоставляются.

Отношение величины суммарного момента, удерживающего стену от опрокидывания, к моменту, опрокидывающему ее, называется коэффициентом устойчивости на опрокидывание:

$$K_{\text{опр}} = \Sigma M_{\text{удер}} / \Sigma M_{\text{опр}} \geq 1,5. \quad (11.42)$$

Наибольшее значение коэффициента запаса устойчивости при классе капитальности подпорной стены и основном сочетании нагрузок следующее:

Класс	I	II	III-IV
$K_{\text{опр}}$	1,4	1,3	1,2

Произведем проверку стены на опрокидывание вокруг ребра  $C$ . Силы давления грунта  $E_1$  и  $E_2$  стремятся опрокинуть стену, а силы собственного веса стены  $G_1$  и  $G_2$  удерживают ее от опрокидывания, которое может произойти относительно наружного ребра  $C$ .

Отметим, что силу  $E_2$  следует определять, как силу активного давления грунта, а не как силу отпора, что идет в запас устойчивости и прочности стены. Момент сил  $G_1$  и  $G_2$  – удерживающий, а момент сил  $E_1$  и  $E_2$  относительно точки  $C$  – опрокидывающий (рис. 11.24). Причем от  $E_1$  – положительный, от  $E_2$  – отрицательный.

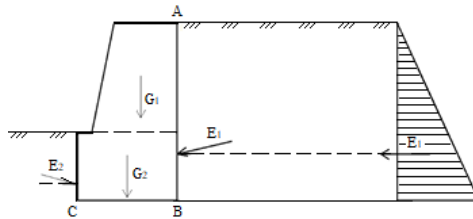


Рис. 11.24. Расчетная схема к определению устойчивости подпорных стен

Моменты сил  $E_1$  и  $E_2$  можно заменить моментами сил их составляющих (горизонтальных и вертикальных). Заметим, что вертикальные составляющие сил активного давления могут быть удерживающими и опрокидывающими. Это зависит от наклона грани и характеристики грунта.

Удерживающие моменты относительно ребра  $C$  определяются по формуле

$$M_c^{\text{удер}} = G_1 C_1 + G_2 C_2 + E_1 \sin \varphi_0 \cdot C_3, G_2,$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – плечи от вертикальных составляющих  $G_1, G_2, E_1$  до ребра  $C$  соответственно.

Опрокидывающие моменты относительно ребра  $C$  определяются по формуле

$$M_c^{\text{опр}} = E_1 \cos \varphi_0 \cdot y_1 - E_2 \cos \varphi_0 \cdot y_2,$$

где  $y_1, y_2$  – плечи от горизонтальных составляющих  $E_1, E_2$  до ребра  $C$  соответственно.

Коэффициент запаса устойчивости стены на опрокидывание определится по формуле (11.42). Коэффициент устойчивости стены на опрокидывание можно увеличить различными способами. Некоторые из них приведены на рис. 11.25, причем объем кладки стены во всех случаях одинаковый.

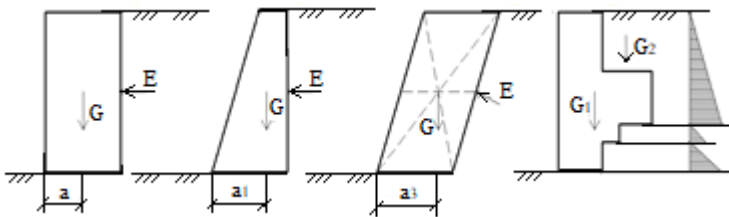


Рис. 11.25. Конструктивные решения для увеличения устойчивости подпорных стен

Во втором случае устойчивость стены обеспечивается за счет увеличения плеча  $a$  у силы  $G$ . В третьем случае за счет наклона стены вправо удерживающий момент увеличивается, а опрокидывающий – уменьшается. В четвертом случае удерживающий момент увеличивается за счет веса грунта  $G_2$ , опрокидывающий – уменьшается за счет уменьшения силы давления грунта  $E$ .

### 11.13.2. Устойчивость стены против сдвига

Проверки стены на сдвиг сводятся к определению соответствующих коэффициентов запаса, определяемых отношением сил трения в сечении к сумме горизонтальных составляющих сил сдвига. Если стена не монолитная, а состоит из кладки отдельных элементов, такие проверки выполняют по сечениям.

Отношение величины силы, удерживающей стену от сдвига, к величине силы, сдвигающей стену, называется коэффициентом устойчивости стены против сдвига, который определяется по формуле

$$K_{\text{сдвиг}} = \Sigma F_{\text{удер}} / \Sigma F_{\text{сдвиг}} \geq 1,3 \text{ – по техническим условиям.} \quad (11.43)$$

Из рис. 11.24 видно, что силы веса стены удерживают ее от сдвига, а силы давления грунта сдвигают стену. Удерживающая сила

$$\Sigma F_{\text{удер}} = f \Sigma Y (G_1; G_2),$$

где  $f$  – коэффициент трения стены по стене либо стены по грунту в плоскости подошвы фундамента.

Для глинистых грунтов принимается  $f = 0,25$ ; для песка  $f = 0,4$ . Сила, сдвигающая стену, равна горизонтальной проекции сил активного давления грунта, уменьшенной на величину силы трения, развивающейся за счет вертикальных составляющих давления земли:

$$\Sigma F_{\text{сдвиг}} = \Sigma X (E_1; E_2) - F_{\text{тр}};$$

$$\Sigma F_{\text{сдвиг}} = \Sigma X (E_1; E_2) - f \Sigma Y (E_1; E_2).$$

Из рис. 11.25 видно, что в первом и во втором случаях коэффициенты сдвига  $K_{\text{сдвиг}}$  равны, в третьем случае коэффициент сдвига  $K_{\text{сдвиг}}$  будет больше за счет уменьшения силы, сдвигающей стену. В четвертом случае коэффициент сдвига  $K_{\text{сдвиг}}$  увеличивается за счет увеличения удерживающей силы и уменьшения сдвигающей силы.

### 11.13.3. Прочность подпорной стены

Проверка прочности подпорной стены состоит в определении нормальных напряжений в характерных сечениях самой стены, нормальных напряжений в грунте по подошве фундамента и сопоставлении полученных напряжений с допускаемыми (расчетными сопротивлениями грунта основания). Чтобы вычислить нормальные напряжения, необходимо определить в горизонтальных сечениях стены и по подошве фундамента продольные силы  $N$ , поперечные силы  $Q$  и эксцентриситеты  $e$  нормальных сил относительно центра тяжести сечений стены, что позволит вычислять изгибающие моменты  $M = Ne$  в сечениях.

Выполним проверку прочности стены в характерных сечениях и прочности основания в подошве. Находим нормальные напряжения  $\sigma$  в сечении  $m-m$ . Определим все силы, действующие выше плоскости этого сечения (рис. 11.26). На грань  $An$  действуют сила активного давления грунта  $E$  и собственный вес этой части стены  $G$ . Сложим их геометрически, получим реактивную силу  $R$  давления стены в ее сечении (или по подошве).  $R$  пересекает плоскость сечения  $m-m$  на расстоянии эксцентриситета  $e$  от его центра тяжести  $O$ .

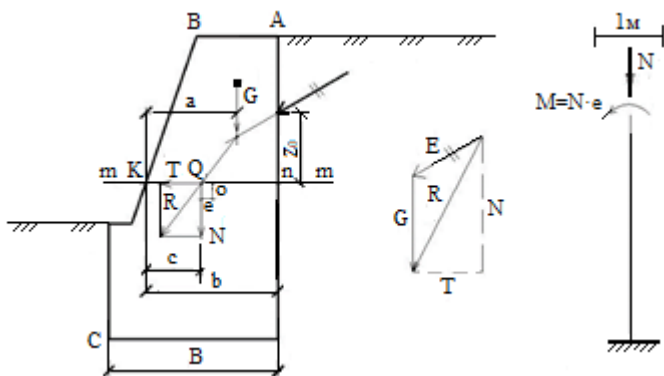


Рис. 11.26. Расчетная схема к определению прочности подпорных стен:  
*b* – ширина сечения; *e* – эксцентриситет продольной силы *N* относительно оси сечения

Силу *R* разложим на составляющие *N* и *T*. От силы *N* возникают нормальные напряжения, от действия силы *T* – касательные. Величину нормальных напряжений  $\sigma$ , кН/м<sup>2</sup>, определим по формуле для внецентренного сжатия (грунт на растяжение не работает):

$$\sigma = N / A \pm M / W. \quad (11.44)$$

Плечо равнодействующей *R* по отношению к точке *O* (перпендикуляр от точки *O* до *R*) определять не надо, потому что легче выразить моменты от составляющих сил *N* и *T*. От силы *T* момент равен нулю ( $M = 0$ ), а от *N*

$$M = N e. \quad (11.45)$$

Так как сечение стены имеет размеры  $A_{m-n} = b \cdot 1$  м, то момент сопротивления (м<sup>3</sup>)

$$W = hb^2 / 6; W_{m-n} = 1b^2 / 6, \quad (11.46)$$

где *b* – ширина сечения;

*h* – глубина (ширина стены), *h* = 1 м.

Тогда нормальные напряжения в крайних волокнах вычисляем по формуле

$$\sigma_{\max, \min} = N / b \pm 6N e / b^2 = -N (1 \pm 6e / b) / b. \quad (11.47)$$

$$\sigma_{\max} = -N (1 + 6e / b) / b; \quad \sigma_{\min} = -N (1 - 6e / b) / b.$$

Продольная сила  $N$  в этом выражении равна сумме проекций всех сил, действующих выше сечения  $m-m$  на нормаль к сечению, т. е.

$$N = G + E_y.$$

Величину эксцентриситета  $e$  можно определить в каждом случае графическим путем (см. рис. 11.26) или аналитическим способом. Графическое определение эксцентриситета  $e$  выполняется путем построения многоугольника давления. Многоугольником давления называется геометрическое место точек приложения в стене равнодействующих вышележащих сил. Ниже приводится аналитический способ. Составим момент всех сил, действующих выше сечения  $m-m$ , относительно точки  $K$  (см. рис. 11.26):

$$\Sigma M_K = G a + E_y b - E_x z_0; \quad M = N e. \quad (11.48)$$

Этот момент можно заменить моментами сил  $N$  и  $T$ . По теореме Вариньона о моменте равнодействующей, плечо равнодействующей  $N$  по отношению к точке  $K$  (см. рис. 11.26) можно определить по следующему выражению:

$$\Sigma M_K = N c.$$

Тогда

$$c = \Sigma M_K / N. \quad (11.49)$$

Эксцентриситет  $e$ , м, точки приложения силы  $N$  определяется как разность:

$$e = b / 2 - c, \text{ или } e = c - b / 2. \quad (11.50)$$

Из графического построения будет видно, где приложена продольная сила  $N$ , слева или справа от точки  $O$ .

При определении эксцентриситета  $e$  в плоскости подошвы стены момент всех сил относительно точки  $C$  можно определить следующим образом:

$$\Sigma M_C = M_{\text{удер}} - M_{\text{опр}}.$$

Плечо равнодействующей  $c$ , м, по отношению к точке  $C$  равно:

$$c = (M_{\text{удер}} - M_{\text{опр}}) / N. \quad (11.51)$$

Если равнодействующая всех сил не выходит за пределы ядра сечения основания (прямоугольника) ( $e < b / 6$ ), то напряжения в подош-

ве будут иметь одинаковый знак (рис. 11.27). Для определения этих крайних напряжений применяется формула (11.47). Если равнодействующая всех сил выходит за пределы ядра сечения основания ( $e > b / 6$ ), то напряжения, вычисленные по формуле (11.47), будут иметь различные знаки.

Так как грунт не воспринимает растягивающих напряжений, то формула внецентренного сжатия неприменима. В этом случае считают, что грунт основания у правой грани стены работает на растяжение и эпюра напряжений по подошве принимается по рис. 11.27. Величину  $\sigma$  и длину основания этой эпюры  $x$  определим из двух уравнений равновесия:

$$\Sigma Y = \sigma x / 2 - N = 0; \tag{11.52}$$

$$\Sigma M_c = -\sigma x x / 2 \cdot 3 + Nc = 0.$$

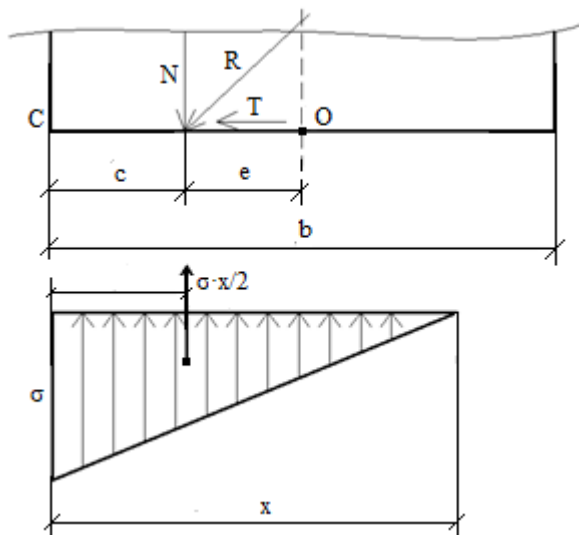


Рис. 11.27. Эпюра напряжений под подошвой подпорной стены

Решив совместно систему уравнений статики (11.52), найдем:

$$x = 3c; \quad \sigma_{\max} = 2N / 3c. \tag{11.53}$$

В случае когда  $e > b / 6$ , максимальные напряжения под подошвой определяются по формуле (11.53).

### 11.13.4. Методика расчета подпорных стен

1. Определяются величины давлений грунта на грани стены. Если задача решается аналитически, то сначала находят интенсивность давления грунта, зависящего от заложения и других условий. Проще всего давление найти графически, с помощью построения Понселе. Затем, зная закон изменения интенсивности давления грунта (линейный), определяют точки приложения сил активного давления как равнодействующие эпюр интенсивности давлений.

2. Определяются силы, удерживающие откос, – это собственный вес стены.

3. Производятся проверки устойчивости стены против опрокидывания относительно крайней грани и на сдвиг по подошве основания.

4. Выполняются проверки прочности стены в характерных сечениях и прочности основания в подошве. Для этого определяют нормальные напряжения в этих сечениях и подошве основания с последующим сравнением с допустимыми.

### 11.14. Примеры расчета

**Задача 11.1.** Подпорная стена (рис. 11.28) поддерживает песчаный грунт. Определить давление грунта на участок  $BC$  грани  $AB$ , если угол внутреннего трения  $\varphi = 35^\circ$ , угол трения грунта о стену  $\varphi_0 = 8^\circ$ , угол плоскости засыпки по отношению к горизонту  $\alpha = 20^\circ$ , стена наклонена на угол  $\varepsilon = 10^\circ$ , объемный вес грунта  $\gamma_{гр} = 16 \text{ кН/м}^3$ , полезная нагрузка  $F = 8 \text{ кН/м}^2$ .

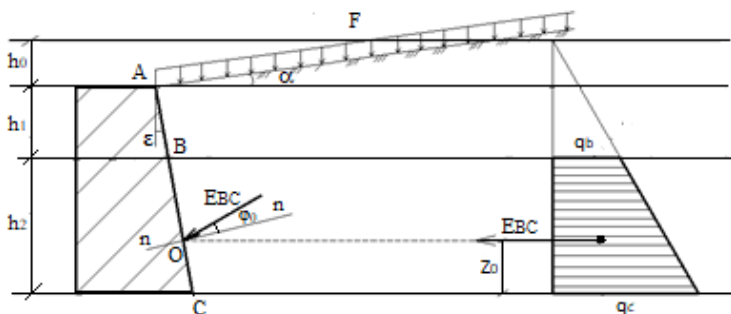


Рис. 11.28. Схема к определению давления грунта от нагрузки на поверхности засыпки.  
Эпора интенсивности давления грунта  $q_c = f(h_2 + h_1 + h_0)$

**Решение.**

1. Приведем нагрузку к эквивалентному слою грунта, которым она условно заменяется:

$$h_0 = F / \gamma_{\text{гр}} = 8 / 16 = 0,5 \text{ м.}$$

2. По формулам (11.27)–(11.30) определяем коэффициенты:

$$K_q = \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha / \cos (\varepsilon - \alpha) = \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ / \cos (10^\circ - 20^\circ) = 0,94;$$

$$K_1 = \sin (\varphi - \alpha) / \cos (\varepsilon - \alpha) = \sin (35^\circ - 20^\circ) / \cos (10^\circ - 20^\circ) = 0,263;$$

$$K_0 = \sqrt{\sin (\varphi + \varphi_0) \cdot \cos (\varepsilon - \alpha) / \cos (\varepsilon + \varphi_0) \cdot \sin (\varphi - \alpha)} = \\ = \sqrt{\sin (35^\circ + 8^\circ) \cdot \cos (10^\circ - 20^\circ) / \cos (10^\circ + 8^\circ) \cdot \sin (35^\circ - 20^\circ)} = 1,65;$$

$$K = [\cos (\varphi - \alpha) / (1 + K_0 K_1) \cdot \cos \varepsilon]^2 / \cos (\varepsilon + \varphi_0) = \\ = [\cos (35^\circ - 10^\circ) / (1 + 1,65 \cdot 0,263) \cdot \cos 10^\circ]^2 / \cos (10^\circ + 8^\circ) = 0,434.$$

3. Определяем ординаты эпюры интенсивности давлений в точках *B* и *C* по формулам (11.31), (11.32):

$$q_B = \gamma_{\text{гр}} (h_1 + h_0 K_q) K = 16 \cdot (2,5 + 0,5 \cdot 0,94) \cdot 0,434 = 20,6 \text{ кН/м}^2;$$

$$q_C = \gamma_{\text{гр}} ((h_1 + h_2) + h_0 K_q) K = 16 \cdot (6,5 + 0,5 \cdot 0,94) \cdot 0,434 = 48,4 \text{ кН/м}^2.$$

4. Вычисляем площадь эпюры интенсивности давления на участке *BC*, равную силе давления грунта на эту часть грани *BC*:

$$E_{BC} = (q_B + q_C) h_2 / 2 = (20,6 + 48,4) \cdot 4,8 / 2 = 138 \text{ кН/м.}$$

5. Находим координату центра тяжести эпюры интенсивности давления (трапеции) по формуле

$$Z_0 = h_2 \cdot 2 (q_B + q_C) / 3 (q_B + q_C) = 4 \cdot 2 \cdot (20,6 + 48,4) / 3 \cdot (20,6 + 48,4) = \\ = 1,73 \text{ м.}$$

Сила давления грунта  $E_{BC}$  приложена в точке *O* на участке стены *BC* под углом  $\varphi_0 = 8^\circ$  к нормали *n-n*.

**Задача 11.2.** Произвести расчет подпорной стены профиля (рис. 11.29) при следующих данных: объемный вес кладки  $\gamma_{\text{кл}} = 27 \text{ кН/м}^3$ , объемный вес грунта засыпки  $\gamma_{\text{гр}} = 17 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения грунта  $\rho$  и угол естественного откоса  $\varphi = 40^\circ$  ( $\rho \approx \varphi$ ), угол трения грунта о стену  $\varphi_0 = 5^\circ$ , угол плоскости засыпки по отношению к горизонту

$\alpha = 5^\circ$ , высота стены  $h + H = 8$  м,  $h = 3$  м,  $H = 5$  м, ширина подошвы основания  $B = 4$  м, ширина стены по верху  $b = 3$  м, коэффициент трения стены по основанию  $f = 0,5$ .

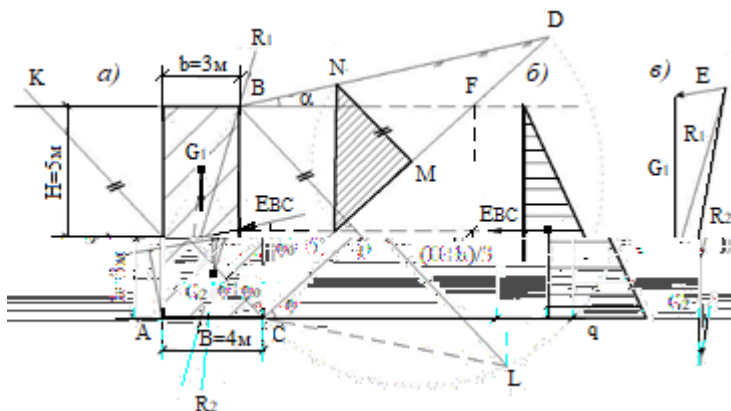


Рис. 11.29. Схема к расчету подпорной стены: *а* – построение Понселе; *б* – эпюра интенсивности давления  $q = f(H + h)$ ; *в* – силовой многоугольник

**Решение 1.** Подпорную стену и поверхность грунта изображаем в масштабе (рис. 11.29, *а*).

Определяем величину давления на грань стены *BC* с помощью построения Понселе:

1. Из точки *C* к линии горизонта проводим линию естественного откоса *CD* под углом  $\varphi$  до пересечения с дневной поверхностью грунта.

2. Из точки *C* с обратной стороны напорной грани *BC* под углом  $(\varphi + \varphi_0)$  проводим базисную линию *CK*.

3. На отрезке *CD*, как на диаметре, строим полуокружность.

4. Из верхней точки *B* проводим линию, параллельную базисной, до пересечения с линией естественного откоса *CD* в точке *F*.

5. Из точки *F* к базисной линии *AC* восстанавливаем перпендикуляр и продолжаем его до пересечения с полуокружностью в точке *L*.

6. Точки *C* и *L* мысленно соединяем прямой линией (штрихпунктирная линия).

7. Из точки *C* радиусом *CL* проводим дугу до пересечения с линией естественного откоса *CD* в точке *M*.

8. Из точки  $M$  проводим прямую, параллельную прямой  $BL$ , до пересечения с дневной поверхностью грунта в точке  $N$ .

9. Из точки  $M$  радиусом  $MN$  проводим дугу до пересечения с линией естественного откоса  $CD$  в точке  $P$ .

10. Точки  $N$  и  $P$  соединяем прямой линией и получаем треугольник Ребхана –  $\Delta NMP$ .

На основании теоремы Ребхана силу активного давления грунта  $E$ , кН, на грань  $BC$  вычисляем как произведение площади соответствующего треугольника на объемный вес грунта:

$$E = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta \text{Ребхана}}.$$

Вычисляем площадь треугольника Ребхана по данным чертежа (см. рис. 11.29):

$$A_{\Delta \text{Ребхана}} = A_{\Delta NMP} = b h / 2 = 4 \cdot 4 / 2 = 8 \text{ м}^2.$$

Определим подпорное давление на грань  $BC$ :

$$E_{BC} = \gamma_{\text{гр}} A_{\Delta \text{Ребхана}} = 17 \cdot 8 = 136 \text{ кН/м}.$$

**Решение 2.** Строим эпюру интенсивности давления грунта  $q = f(H + h)$  (см. рис. 11.29, б);  $\varphi_0 = 5^\circ$ .

Сила давления грунта  $E_{BC}$  равна площади эпюры интенсивности давления:

$$E_{BC} = A_{\text{эп}} = q(H + h) / 2.$$

Линия действия силы давления грунта  $E_{BC}$  проходит через центр тяжести треугольной эпюры (см. рис. 11.29, б). Точка приложения силы давления грунта на напорную грань  $BC$  находится на расстоянии  $(H + h) / 3$  от основания треугольника.

1. Определяем нижнюю ординату эпюры интенсивности давления грунта:

$$q = 2E_{BC} / (H + h) = 2 \cdot 136 / 8 = 34 \text{ кН/м}^2.$$

Приложим силу активного давления грунта  $E_{BC}$  на грань стены  $BC$  с учетом ее отклонения от нормали на угол трения по стенке  $\varphi_0$  (см. рис. 11.29).

2. Находим собственные веса элементов стены и определяем их точки приложения (см. рис. 11.29, а). Точки приложения всех сил находим графически:

$$G_1 = b H \gamma_{\text{кл}} = 3 \cdot 5 \cdot 27 = 405 \text{ кН/м};$$

$$G_2 = B h \gamma_{\text{кл}} = 4 \cdot 3 \cdot 27 = 324 \text{ кН/м}.$$

3. Проверку стены на опрокидывание выполняем предполагая, что она под воздействием силы давления грунта  $E_{BC}$  может повернуться вокруг ребра наружной грани точки  $A$ .

Определяем суммарный момент сил, препятствующих опрокидыванию, и сил, стремящихся опрокинуть стену.

$$\Sigma M_A^{\text{удер}} = G_1 C_1 + G_2 C_2 + E_{BC} \sin \varphi_0 \cdot B = 405 \cdot 2,5 + 324 \cdot 2 + 136 \cdot \sin 5^\circ \cdot 4 = 1707,91 \text{ кН} \cdot \text{м/м}; \cos 5^\circ = 0,996; \sin 5^\circ = 0,087.$$

$$\Sigma M_A^{\text{опр}} = E_{BC} \cos \varphi_0 (H + h) / 3 = 136 \cdot \cos 5^\circ \cdot 8 / 3 = 361,29 \text{ кН} \cdot \text{м/м}.$$

$$K_{\text{опр}} = \Sigma M_{\text{удер}} / \Sigma M_{\text{опр}} = 1707,91 / 361,29 > 1,5.$$

Условие выполняется.

4. Проверка стены на сдвиг сводится к определению удерживающих сил трения в сечении и горизонтальных составляющих сил сдвига.

$$\Sigma F_{\text{удер}} = (G_1 + G_2 + E_{BC} \sin \varphi_0) f = (405 + 324 + 136 \cdot 0,087) \cdot 0,4 = 296,33 \text{ кН/м};$$

$$\Sigma F_{\text{сдвиг}} = E_{BC} \cos \varphi_0 - f E_{BC} \sin \varphi_0 = 136 \cdot 0,996 - 0,4 \cdot 136 \cdot 0,087 = 130,71 \text{ кН/м}.$$

$$K_{\text{сдвиг}} = \Sigma F_{\text{удер}} / \Sigma F_{\text{сдвиг}} = 296,33 / 130,71 = 2,27 > 1,3.$$

Условие выполняется.

5. Рассчитываем стену на прочность основания в подошве. Для этого определяем нормальные напряжения  $\sigma$ , кН/м<sup>2</sup>, по формуле

$$\sigma = -N (1 \pm 6e / b) / b.$$

Определяем продольную силу в сечении:

$$N = G_1 + G_2 + E_{BC} \sin \varphi_0 = 405 + 324 + 136 \cdot 0,087 = 740,85 \text{ кН/м}.$$

Величину эксцентриситета  $e$  можно определить графическим путем. Для этого строим силовой многоугольник, как показано на рис. 11.29, в. Определим значение  $e$  аналитически.

По теореме Вариньона о моменте равнодействующей сил, плечо равнодействующей  $N$  по отношению к точке  $A$  определяется по формуле

$$C = \Sigma M_A / N = (\Sigma M_{удер} - \Sigma M_{опр}) / N = (1707,71 - 361,29) / 740,85 = 1,82 \text{ м.}$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad NC = G_1 C_1 + G_2 C_2 + E_{BC} \sin \varphi_0 \cdot B - \\ - E_{BC} \cos \varphi_0 (H + h) / 3;$$

$$740,85C = 405 \cdot 2,5 + 324 \cdot 2 + 136 \cdot \sin 5^\circ \cdot 4 - 136 \cdot \cos 5^\circ \cdot 8 / 3;$$

$$740,85C = 1707,71 - 361,29.$$

Равенство соблюдается.

Эксцентриситет точки приложения силы  $N$  определяется как разность:

$$e = b / 2 - C = 4 / 2 - 1,82 = 0,18 \text{ м.}$$

Из графического построения видно, что эксцентриситет  $e = 0,2$  м.

Напряжения в крайних волокнах рассматриваемого сечения равны:

$$\sigma_A = -N(1 + 6e / b) / b = -740,85 \cdot (1 + 6 \cdot 0,18 / 4) / 4 = \\ = -235,22 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_C = -N(1 - 6e / b) / b = -740,85 \cdot (1 - 6 \cdot 0,18 / 4) / 4 = \\ = -135,21 \text{ кН/м}^2.$$

### 11.15. Контрольные вопросы

1. Что такое подпорная стена? Типы подпорных стен.
2. Что называется активным и пассивным давлением грунта? Как они определяются?
3. Какими методами можно определять активное давление грунта на подпорную стену?
4. Какие различия существуют между углом внутреннего трения и углом естественного откоса грунта?
5. По какому закону изменяется давление грунта по высоте подпорной стены?
6. Для чего используются графические построения Кульмана и Понселе при расчете подпорных стен?
7. Как определяется активное давление грунта при помощи графического построения Ребхана?
8. В чем заключается сущность пассивного давления грунта? Как оно определяется?

9. В чем состоит смысл понятия «коэффициент бокового давления грунта»? Чему он равен для условий компрессионного сжатия?

10. Что такое интенсивность давления грунта на стену и как она изменяется по высоте подпорной стены?

11. Как связано боковое давление грунта на стену с направлением и величиной ее перемещения?

12. Как учитывается при расчете влияние сплошной, равномерно распределенной нагрузки, находящейся в пределах призмы обрушения?

13. Как проверяется устойчивость подпорных стен против сдвига и опрокидывания по методу предельных состояний?

14. Как проверяется прочность массивных подпорных стен из камня и бетона и прочность грунтового основания под подошвой фундамента по методу предельных состояний?

15. Какими мерами можно повысить устойчивость стены против опрокидывания?

16. Какими мерами можно повысить устойчивость стены против сдвига по подошве без увеличения массы стены?

В прил. 1–4 приведены размеры и геометрические характеристики сортамента стали для различных профилей.

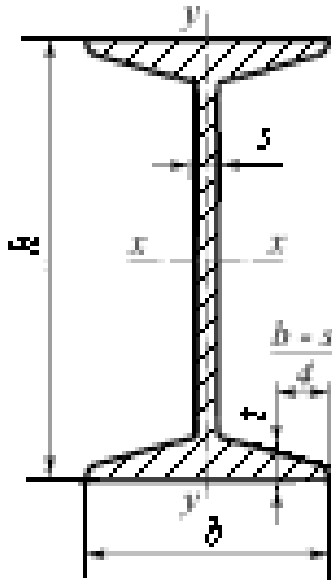
## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Игнатюк, В. И. Строительная механика. Статика и устойчивость стержневых систем : учеб. пособие / В. И. Игнатюк, В. В. Тур. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2020. – 236 с.
2. Борисевич, А. А. Строительная механика : учебник для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2007. – 821 с.
3. Борисевич, А. А. Строительная механика : учеб. пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Изд. 2-е, перераб. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.
4. Игнатюк, В. И. Строительная механика : пособие / В. И. Игнатюк, И. С. Сыровквашко ; БрГТУ. – Брест, 2014. – 100 с.
5. Игнатюк, В. И. Строительная механика : пособие / В. И. Игнатюк, И. С. Сыровквашко ; БрГТУ. – 2-е изд., доп. – Брест, 2015. – 152 с.
6. Игнатюк, В. И. Строительная механика : пособие / В. И. Игнатюк, И. С. Сыровквашко ; БрГТУ. – 3-е изд., доп. – Брест, 2017. – 188 с.
7. Строительная механика / под ред. А. В. Даркова. – Москва : Высш. шк., 1976. – 600 с.
8. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. И. Шапошников. – Москва : Высш. шк., 1986. – 607 с.
9. Киселев, В. А. Строительная механика. Общий курс / В. А. Киселев. – Москва : Стройиздат, 1986. – 520 с.
10. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах / Н. Н. Анохин. – Москва : Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
11. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы / Н. Н. Анохин. – Москва : Изд-во АСВ, 2000. – 336 с.
12. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 2. Статически неопределимые системы / Н. Н. Анохин. – Москва : Изд-во АСВ, 2000. – 464 с.
13. Леонтьев, Н. Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – Москва : Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

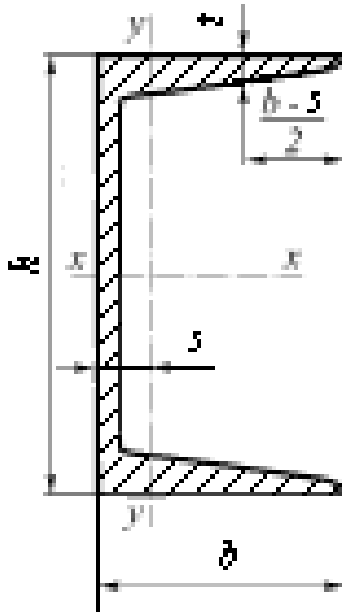
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)



$h$  – высота двутавра;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $J$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции

Номер дву- тавра	Масса l м, кг	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

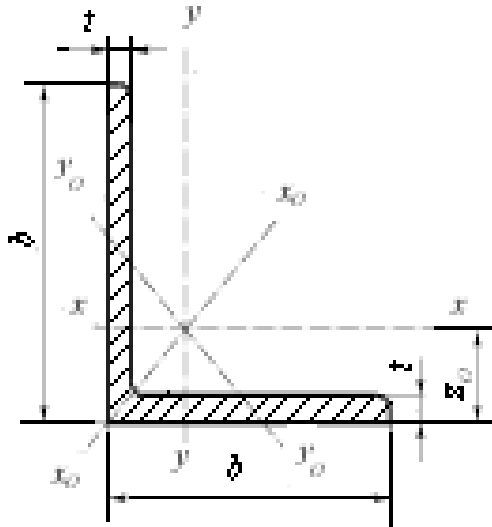
Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)



- $h$  – высота швеллера;
- $b$  – ширина полки;
- $s$  – толщина стенки;
- $t$  – средняя толщина полки;
- $A$  – площадь поперечного сечения;
- $J$  – момент инерции;
- $W$  – момент сопротивления;
- $S$  – статический момент полусечения;
- $i$  – радиус инерции;
- $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	16,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–86)

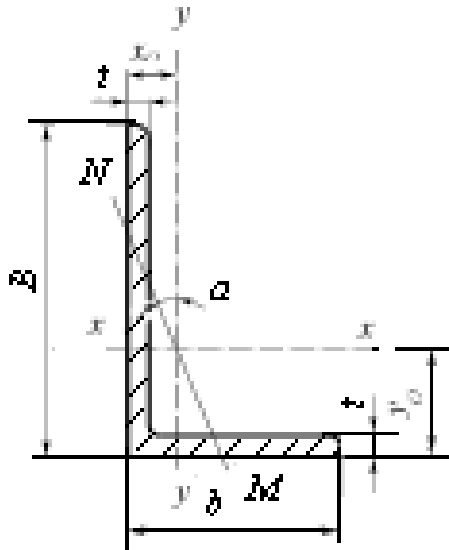


- $b$  – ширина полки;
- $t$  – толщина полки;
- $A$  – площадь поперечного сечения;
- $J$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A, мм	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0 max</sub> , см	J <sub>xy</sub>  , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	34,3	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	11,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3

12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,52	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510–86)



- $B$  – ширина большой полки;
- $b$  – ширина меньшей полки;
- $t$  – толщина полки;
- $A$  – площадь поперечного сечения;
- $J$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $\alpha$  – угол наклона главной центральной оси

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			A, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	tg α	J <sub>xy</sub>  , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см
		B	b	t											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,2
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,93	6,71

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ.....	5
1.1. Задачи строительной механики в связи с развитием строительной индустрии. Связь строительной механики с другими дисциплинами учебного плана.....	5
1.2. Краткий исторический очерк развития строительной механики.....	6
1.3. Основные элементы сооружений. Способы соединения элементов в единую систему и прикрепления ее к основанию. Понятие о расчетной схеме. Типы опор. Классификация сооружений.....	8
Глава 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ.....	14
2.1. Системы геометрически неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые, статически определимые и статически неопределимые.....	14
2.2. Образование неизменяемых систем. Необходимое и достаточное условия геометрической неизменяемости. Число степеней свободы и число лишних связей, их определение.....	16
2.3. Понятие о диске. Соединение двух и трех дисков. Анализ структуры стержневых систем.....	18
2.4. Примеры расчета.....	24
2.5. Задачи для самостоятельного решения.....	27
2.6. Контрольные вопросы.....	28
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ.....	29
Глава 3. ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ.....	29
3.1. Расчет систем на подвижную нагрузку. Типы подвижных нагрузок. Основные свойства линий влияния. Построение линий влияния для однопролетных балок.....	29
3.2. Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния.....	34
3.3. Определение экстремальных усилий от подвижной нагрузки по линиям влияния. Критерии невыгодного положения системы грузов при полигональных и треугольных линиях влияния.....	37
3.4. Примеры расчета.....	39
3.5. Задачи для самостоятельного решения.....	41
3.6. Контрольные вопросы.....	42
Глава 4. БАЛОЧНЫЕ И КОНСОЛЬНО-БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ.....	43
4.1. Понятие о ферме. Образование ферм. Статическая определимость и геометрическая неизменяемость ферм. Классификация ферм.....	43
4.2. Допущения, принятые при расчете ферм. Признаки нулевых стержней. Аналитический расчет ферм: способ вырезания узлов, способ моментных точек, способ проекций.....	49
4.3. Расчет ферм с простой решеткой на подвижную нагрузку. Построение линий влияния опорных реакций, усилий в стержнях ферм, расположенных в пролете фермы и на консолях.....	54
4.4. Примеры расчета.....	59
4.5. Задачи для самостоятельного решения.....	65
4.6. Контрольные вопросы.....	66
Глава 5. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ И ПРОСТЫЕ РАМЫ.....	67
5.1. Определение многопролетных статически определимых балок. Типы балок. Условия геометрической неизменяемости, кинематический анализ многопролетных балок и простых рам.....	67

5.2. Аналитический расчет на неподвижную нагрузку при непосредственном ее приложении. Построение эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил.....	72
5.3. Линии влияния для многопролетных балок и простых рам при непосредственном приложении нагрузки. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.....	76
5.4. Примеры расчета.....	80
5.5. Задачи для самостоятельного решения.....	89
5.6. Контрольные вопросы.....	90
<b>Глава 6. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ</b> .....	<b>91</b>
6.1. Образование трехшарнирных арок и рам. Условие геометрической неизменяемости, кинематический анализ трехшарнирных арок и рам.....	91
6.2. Типы трехшарнирных систем. Особенности работы. Определение опорных реакций. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.....	93
6.3. Построение линий влияния реакций опор и внутренних силовых факторов в трехшарнирных системах.....	100
6.4. Примеры расчета.....	104
6.5. Задачи для самостоятельного решения.....	115
6.6. Контрольные вопросы.....	116
<b>Глава 7. ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ</b> .....	<b>117</b>
7.1. Перемещения возможные и действительные. Работа внешних сил. Теорема о взаимности работ и перемещений. Суммарная работа статически действующих внешних сил.....	117
7.2. Работа внутренних сил. Зависимость между работой внешних и внутренних сил. Работа внутренних сил при изменении температуры.....	122
7.3. Потенциальная энергия. Свойства потенциальной энергии. Формулы перемещений: теорема Кастильяно, упрощенная запись теоремы Кастильяно, формула Мора.....	130
7.4. Особенности вычисления интегралов Мора: перемножение эпюр по правилу Верещагина. Формула Симпсона для вычисления интегралов Мора.....	135
7.5. Перемещения узлов ферм. Определение перемещений в балках и рамах при осадке опор. Определение перемещений в рамах от изменения температуры по формуле Мора и правилу Верещагина.....	140
7.6. Примеры расчета.....	148
7.7. Задачи для самостоятельного решения.....	152
7.8. Контрольные вопросы.....	154
<b>СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ</b> .....	<b>155</b>
<b>Глава 8. МЕТОД СИЛ</b> .....	<b>155</b>
8.1. Свойства статически неопределимых систем. Степень статической неопределимости. Лишние связи. Сущность метода сил. Основная система. Требования, предъявляемые к основной системе.....	155
8.2. Составление канонических уравнений. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Решение канонических уравнений. Проверка правильности расчетов.....	158
8.3. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Контроль правильности их построения.....	162

8.4. Использование в расчетах статически неопределимых рам методом сил компьютерных программ Excel, MathCad, специальных программ MetSil.....	165
8.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах. Расчет статически неопределимых систем на действие температуры и осадку опор.....	168
8.6. Упрощение расчета сложных симметричных статически неопределимых рам: выбор рациональной основной системы, групповые неизвестные, преобразование нагрузок, способ упругого центра.....	174
8.7. Расчет неразрезных балок и статически неопределимых ферм методом сил.....	183
8.8. Примеры расчета.....	189
8.9. Задачи для самостоятельного решения.....	195
8.10. Контрольные вопросы.....	197
Глава 9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ И ТРУБЫ.....	198
9.1. Расчет статически неопределимых арок. Типы основных систем. Расчет арок на неподвижную нагрузку. Вычисление коэффициентов интегрированием и численным способом.....	198
9.2. Особенности расчета параболических двухшарнирных и бесшарнирных арок. Расчет круговых арок и колец при радиальной нагрузке.....	207
9.3. Примеры расчета.....	225
9.4. Задачи для самостоятельного решения.....	230
9.5. Контрольные вопросы.....	231
Глава 10. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	232
10.1. Сущность метода. Степень кинематической неопределимости и основная система. Канонические уравнения. Свойства единичных реакций.....	232
10.2. Построение эпюр моментов для основной системы. Способы вычисления и проверки реактивных усилий. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Проверка расчетов.....	237
10.3. Использование симметрии для упрощения расчетов сложных рам. Сопоставление метода перемещений и метода сил. Выбор рационального метода расчета. Смешанный (комбинированный) метод расчета рам.....	241
10.4. Примеры расчета.....	246
10.5. Задачи для самостоятельного решения.....	255
10.6. Контрольные вопросы.....	256
Глава 11. Расчет подпорных сооружений.....	257
11.1. Типы подпорных стен.....	257
11.2. Физические характеристики грунтов и сыпучих тел.....	260
11.3. Боковое давление грунта на подпорную стену. Предельные давления: активное и пассивное.....	261
11.4. Силы, действующие на подпорные стены.....	262
11.5. Активное давление грунта $E$ на подпорную стену и методы его определения.....	263
11.6. Метод Кулона.....	264
11.7. Графические методы определения давления грунта $E$ . Построение Кульмана.....	267
11.8. Теоремы Ребхана.....	269
11.9. Построение Понселе.....	271
11.10. Точка приложения и направление силы активного давления грунта $E$ . Некоторые частные случаи давления грунта.....	273

11.11. Аналитический расчет подпорных стен .....	282
11.12. Пассивное давление грунта (отпор).....	285
11.13. Расчет подпорных стен на прочность и устойчивость .....	288
11.13.1. Устойчивость подпорных стен против опрокидывания .....	288
11.13.2. Устойчивость стены против сдвига .....	290
11.13.3. Прочность подпорной стены .....	291
11.13.4. Методика расчета подпорных стен.....	295
11.14. Примеры расчета.....	295
11.15. Контрольные вопросы .....	300
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	302
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	303

Учебное издание

**Афанасенко** Евгений Викторович  
**Афанасенко** Денис Евгеньевич  
**Дуброва** Юрий Николаевич

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Н. А. Матасёва*  
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 30.09.2021. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 18,37. Уч.-изд. л. 15,72.  
Тираж 160 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».  
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.  
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».  
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.