

526

K. 43234.

563503

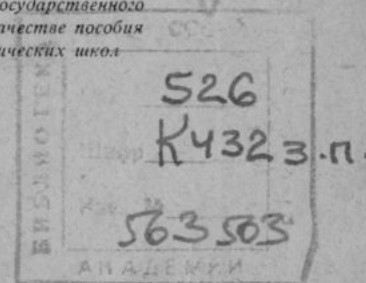
проз мрзв
РУКОВОДСТВА И ПОСОБИЯ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ И ВТУЗ'ОВ

Проф. В. И. КИРКОР

ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Научно-Технической Секцией Государственного
Ученого Совета допущено в качестве пособия
для высших и средних технических школ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ 1925 ★ ЛЕНИНГРАД

Т. Райншмидт

г. Гари.

1926г.

ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНОЕ
ПРОЕКТИРОВАНИЕ

ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ



ПРЕДИСЛОВИЕ.

Проводимая в настоящее время землеустроительная кампания выдвинула проблему создания и популяризации таких методов работы, которые дали бы возможность достигнуть максимальных результатов для каждого работающего в этой области техника при соблюдении некоторых определенных требований в смысле качества работы.

Настоящий труд представляет собою изложение и обоснование методов, примененных мною лично и под моим руководством другими лицами на землеустроительных работах по разверстанию на хуторские и отрубные участки частично в 1910, 1911 и 1912 г. в Харьковской губернии, а главным образом в 1922 году в Гомельской губернии, и является несколько расширенным курсом лекций, прочитанных мною в 1922/1923 учебном году на 2-годичных землемерно-таксаторских курсах при Горецком сел.-хоз. институте для слушателей этих курсов и значительной группы отбывших геодезическую практику студентов института, являющихся экстернами при этих курсах¹⁾.

Заметно отличающаяся в положительную сторону от средних норм быстрота исполнения землеустроительных работ, полученная на практике при пользовании предлагаемыми методами даже при разверстании сравнительно небольших дач, и достаточная точность работы, вытекающая из пользования

¹⁾ С открытием при Горецком сел.-хоз. институте в 1923 г. землеустроительного факультета курс этот читается мною на данном факультете.

методами, почти исключительно основанными только на данных измерения в натуре, а равно также значительный интерес, проявленный слушателями к этому курсу, дали мне смелость предложить свои услуги для пополнения недостаточной, по моему мнению, литературы по данному вопросу.

Главные особенности настоящего курса таковы:

1) предлагаемые методы не требуют, как правило, пользования таблицами логарифмов, а ограничиваются более полным использованием таблиц Гаусса или сходных с ними таблиц других авторов, что, по моему мнению, значительно упрощает и ускоряет работу;

2) методы эти могут применяться как при наличии арифмометра, так и при отсутствии такового, при чем в этом последнем случае остается только надобность в таблицах умножения чисел для нахождения произведений при вычислении площадей полигонов по координатам вершин;

3) для более сознательного пользования предлагаемыми методами дается некоторое знакомство с теорией приближенных вычислений, почти исключительно в пределах алгебраических действий;

4) данный курс охватывает собою математическую сторону всей землеустроительной работы за исключением лишь той ее части, которая основана непосредственно на теории ошибок, и части чисто геодезической;

5) предлагаются методы как для разверстания на мелкие участки (хутора, отруба и пр.), так и для разбивки на крупные площади (раздел земли между однопланными селениями, частями селений, разверстание на поселки и пр.);

6) для полного усвоения данного курса требуется знакомство с элементарной математикой в объеме программы школы II ступени, но чисто практические сведения по вопросам проектирования могут быть почерпнуты из данного курса и лицами со значительно меньшей математической подготовкой, при чем в этом последнем случае читателю необхо-

димо будет пропустить полностью главу 2-ю, а из главы 3-й — §§ 35—39 и сверх того все напечатанное мелким шрифтом в остальных главах; при этом для более наглядного и более легкого усвоения курса и вообще при первом чтении предлагаемого руководства можно рекомендовать пропустить теоретическую часть, но это, конечно, отнюдь не говорит о малой полезности теоретической части, без усвоения которой возможен лишь чисто ремесленный подход к вопросам проектирования; глава 3-я не стоит в какой-либо связи с последующими главами, и последние можно читать и без нее;

7) при составлении означенного руководства во всех предлагаемых примерах применены были меры русской системы — сажени, десятины и пр., но в дальнейшем выяснилась необходимость перейти к метрической системе, что и выполнено заменой сажень метрами и пр., но с неменьшим успехом и даже с пользой для типичности предлагаемых примеров читатель может принимать автоматически, без перечисления по единичному отношению, во всех случаях сажени, вместо метров.

В. Киркор.

Гор. Горки, Смоленской губ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПОЛЬЗОВАНИЕ ТАБЛИЦАМИ ГАУССА.

§ 1. Общие соображения.

Обычно в землемерно-землеустроительной практике пользуются таблицами Гаусса почти только для нахождения приращений координат; в действительности же эти таблицы дают возможность землемеру обойтись без пользования таблицами логарифмов во всех встречающихся ему на практике случаях, но при этом методы пользования будут существенно отличаться в зависимости от того, будет ли иметь техник в своем распоряжении арифмометр или нет, каковые случаи мы и рассмотрим отдельно.

§ 2. Пользование таблицами при наличии арифмометра.

Таблицы Гаусса заключают в себе приближенную, взятую с определенной точностью, величину произведений натуральных значений $\sin$ и $\cos$ на числа 10, 20, 90, и поэтому, не имея надобности пользоваться таблицами для произведения различных вычислений (что с большими удобствами может быть проделано при помощи арифмометра), мы можем из этих таблиц получать лишь натуральные величины $\sin$ и $\cos$ для различных углов от 0 до 90°. Величины эти можно, конечно, получить из любого столбца

путем деления произведения на то число, на которое величина $\sin$ или $\cos$ умножалась для получения этого произведения, но наиболее просто получить эти натуральные величины из столбца 1-го, так как в нем даются произведения $\sin$ или $\cos$ на 10: нужно перенести только один знак влево в данном произведении, и тогда величины $\sin$ и $\cos$ будут получаться в виде десятичной дроби с 4 десятичными знаками.

Пример 1. Найти натуральную величину $\sin 17^\circ 10'$. По таблицам находим, что произведение $\sin 17^\circ 10'$ на 10 равно 2,952, а следовательно, $\sin 17^\circ 10' = 0,2952$.

Пользуясь натуральными величинами $\sin$ и $\cos$ любых углов, можно без труда производить всевозможные встречающиеся в землемерно-землеустроительной практике вычисления, доказательством чего могут служить приводимые ниже примеры.

Пример 2. Найти приращения по обеим координатным осям для линии.

$$\frac{CB : 27^\circ 32'}{234,2}$$

Для этой линии

$$\Delta x = 234,2 \times \cos 27^\circ 32' = 234,2 \times 0,8867 = 207,67$$

и

$$\Delta y = 234,2 \times \sin 27^\circ 32' = 234,2 \times 0,4623 = 108,27,$$

где

$$\cos 27^\circ 32' = 0,8867$$

и

$$\sin 27^\circ 32' = 0,4623$$

взяты из таблиц Гаусса.

При вычислении приращений для целого полигона полезно вычисления эти располагать в форме следующей таблицы, несколько отличающейся от принимаемой обычно в таких случаях.

Румбы.	Горизонтальное продолжение.	Натуральные величины.		Приращения.							
		$\cos r.$	$\sin r.$	Вычисленные.				Исправленные.			
				+	Δx	+	Δy	+	Δx	+	Δy
CB : 27° 32'	234,2	0,8867	0,4623	+	207,67	+	108,27				

абы не прибегать при этом в целях контроля к вычислению приращений также и по таблицам логарифмов, нами рекорется выписанные из таблиц натуральные значения $\cos$ обязательно потом проверять, а самые вычисления приращений для данного полигона производить дважды и по возможным различными лицами, что при исполнении работы землемертартией, а не отдельными техниками, легко достижимо. ожно также в целях контроля произвести вычисление щений второй раз без арифмометра, непосредственно блицам Гаусса.

ля экономии же времени при вычислении приращений ифмометре необходимо ставить на последнем длину ликак множимое, и пользоваться этим множимым при опреии обоих приращений.

Пример 3. Найти натуральную величину $\tg 27^\circ 32'$. енный $\tg 27^\circ 32'$ равняется

$$\frac{\sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{0,4623}{0,8867} = 0,5214,$$

$$\sin 27^\circ 32' = 0,4623$$

$$\cos 27^\circ 32' = 0,8867$$

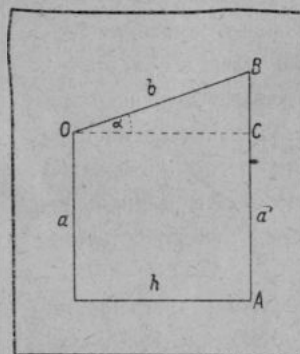
из таблиц Гаусса, а величина $\tg 27^\circ 32'$ взята с округ-а до 4-х знаков, так как 5-й, 6-й и пр. знаки, как уви-

дим в следующей главе, не будут соответствовать точно этому числу.

Пример 4. Даны одно из оснований $a=110,25$ (см. черт. 1), высота $h=85,25$ и угол между боковыми сторонами $\alpha=27^\circ 32'$, прямоугольной трапеции; требуется найти второе основание a' и боковую сторону b .

Решая $\triangle OBC$ и принимая во внимание, что $OC=h$, имеем:

$$b = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{85,25}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{85,25}{0,8867} = 96,14,$$



Черт. 1.

где

$$\cos 27^\circ 32' = 0,8867$$

взяты из таблиц Гаусса.

$$\begin{aligned} a' &= AC + BC = a + b \sin \alpha \\ &= 110,25 + 96,14 \times 0,4623 \\ &= 110,25 + 44,45 = 154,70 \end{aligned}$$

где

$$\sin 27^\circ 32' = 0,4623$$

взяты также из таблиц Гаусса. Таким образом, как и в предыдущем примере, получим:

Пример 5. Дано $a=110,25$ м¹) (см. черт. 1), $\alpha=27^\circ$ и $Q=1,1292$ гектара для прямоугольной трапеции; требуется вычислить a' , если известно, что данное вычисление производится по формуле (вывод которой будет дан позже):

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставляя в выражение для a' , вместо a , Q и $\operatorname{tg} \alpha$ значения и переводя Q в кв. метры, получаем:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{110,25^2 + 22584 \times 0,5214},$$

¹) м во всех случаях будет обозначать у нас метр.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 27^\circ 32' = 0,5214 \text{ (см. пример 3).}$$

Вычисление это целиком производится на арифмометре, для чего предварительно находится величина $\operatorname{tg} \alpha$ и умножается на $2Q$, а потом без сбрасывания произведения прибавляется к нему a^2 и из полученной суммы извлекается квадратный корень, дающий искомый результат; и таким образом:

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{110,25^2 + 22584 \times 0,5214} = \\ &= \sqrt{110,25^2 + 11775,2976} = \\ &= \sqrt{23930,3601} = 154,69 \text{ м.} \end{aligned}$$

Пример 6. Найти длину линии l и ее румб, если даны приращения этой линии:

$$\Delta x = 252,13 \text{ и } \Delta y = 139,49.$$

Из геодезии известно, что

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{252,13^2 + 139,49^2};$$

откуда, выполняя вычисление целиком на арифмометре подобно тому, как и в предыдущем примере, получим:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{252,13^2 + 139,49^2} = \sqrt{63569,5369 + 139,49^2} = \\ &= \sqrt{83026,9970} = 288,14, \end{aligned}$$

где 63569,5369 представляет собою $252,13^2$, а затем без сбрасывания с арифмометра этого числа к нему прибавляется $139,49^2$ и из полученной суммы 83026,9970 извлекается квадратный корень.

Известно далее, что $\Delta y = l \sin r$, откуда $\sin r = \frac{\Delta y}{l} =$

$$= \frac{139,49}{288,14} = 0,4841.$$

Деление 139,49 на 288,14 произведено здесь на арифмометре по таблицам же Гаусса находим, что

$$\sin 28^{\circ} 57' = 0,4840, \text{ а } \sin 28^{\circ} 58' = 0,4843;$$

следовательно, угол r можно принять равным $28^{\circ} 57'$.

Правильность вычисления проверяется нахождением величины Δx по l и r , пользуясь известной формулой геодезии.

$$\Delta x = l \cos r;$$

$$\text{откуда } \Delta x = 288,14 \times 0,8750 = 252$$

здесь

$$\cos 28^{\circ} 57' = 0,8750$$

взяты из таблиц Гаусса, а умножение 288,14 на 0,8750 произведено арифмометре. Результат 252,12 достаточно близок к данной нам величине $\Delta x = 252,13$.

Название румба по правилам геодезии будет здесь СВ таким образом искомая линия будет

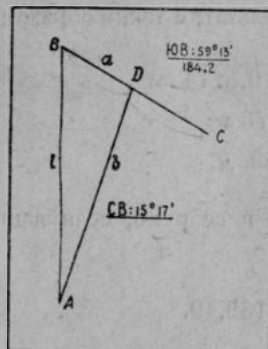
$$\frac{\text{СВ: } 28^{\circ} 57'}{288,14}$$

Задача 1. Найти точку пересечения D линии BC —

$$\frac{\text{ЮВ: } 59^{\circ} 13'}{184,2}$$

с линией, исходящей из данной точки A под заданным румбом — СВ: $15^{\circ} 17'$ (см. черт. 2). Сверх того даны координаты точки A :

$$x = 115,23, \quad y = 28,45,$$



Черт. 2.

и точки B :

$$x = 295,39, \quad y = 32,78.$$

(Такого рода задачи встречаются часто при разбивке общей площади дачи разверстания на крупные участки.)

Для решения этой задачи найдем прежде всего меру и румб линии AB , проходящей между двумя точками A и B с заданными координатами. Приращения для линии AB будут, как известно из курса геодезии, равняться разностям координат конечной и начальной ее точек, т.е. точки B и точки A , следовательно

$$\Delta x = 295,39 - 115,23 = 180,16,$$

$$\Delta y = 32,78 - 28,45 = 4,33.$$

И далее по методу примера 6-го настоящего § находим, что

$$AB = l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{180,16^2 + 4,33^2} = \\ = \sqrt{32457,6256 + 4,33^2} = \sqrt{32476,3745} = 180,21,$$

а

$$\sin r = \frac{\Delta y}{l} = \frac{4,33}{180,21} = 0,0240;$$

откуда

$$\sin r = \sin 1^{\circ} 23'$$

(здесь $\sin r$ несколько больше 0,0240 и ближе к 0,0241, чем к 0,0239, и поэтому следует по таблицам брать $r = 1^{\circ} 23'$, а не $1^{\circ} 22'$).

Так как

$$l \cos r = 180,21 \times \cos 1^{\circ} 23' = 180,16 = \Delta x,$$

то вычисление сделано верно, и линия AB будет:

$$\frac{\text{СВ: } 1^{\circ} 23'}{180,21}$$

Теперь известны румбы всех линий интересующего нас $\triangle ABD$, а, следовательно, по правилам геодезии могут быть вычислены по ним все углы и, в частности,

$$\begin{aligned}\angle A &= 15^\circ 17' - 1^\circ 23' = 13^\circ 54', \\ \angle B &= 1^\circ 23' + 59^\circ 13' = 60^\circ 36', \\ \angle BDA &= 180^\circ - (59^\circ 13' + 15^\circ 17') = \\ &= 180^\circ - 74^\circ 30' = 105^\circ 30'.\end{aligned}$$

Зная сторону AB треугольника и все его углы, можем вычислить неизвестные нам стороны BD и AD по формуле тригонометрии:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

т.-е.

$$\frac{BD}{l} = \frac{\sin A}{\sin(BDA)},$$

откуда

$$\begin{aligned}BD &= \frac{l \sin A}{\sin(BDA)} = \frac{180,21 \times \sin 13^\circ 54'}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{180,21 \times 0,2402}{\sin 74^\circ 30'} = \\ &= \frac{43,29}{0,9636} = 44,92,\end{aligned}$$

и

$$\frac{AD}{l} = \frac{\sin B}{\sin(BDA)},$$

откуда

$$\begin{aligned}AD &= \frac{l \sin B}{\sin(BDA)} = \frac{180,21 \times \sin 60^\circ 36'}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{180,21 \times 0,8712}{\sin 74^\circ 30'} = \\ &= \frac{157,00}{0,9636} = 162,93.\end{aligned}$$

Величины $\sin$ углов здесь по прежнему взяты из таблиц Гаусса, а $\sin 105^\circ 30' = \sin (180 - 74^\circ 30') = \sin 74^\circ 30'$.

§ 3. Пользование таблицами при отсутствии арифмометра.

Основное назначение таблиц Гаусса — дать возможность при их посредстве производить без помощи логарифмических таблиц умножение $\sin$ и $\cos$ различных углов на любые числа, и так как приращения координат и представляют собою произведения длины линии на $\cos$ или $\sin$ румба этой линии, то операция нахождения приращений координат и составляет главное назначение этих таблиц; но вместе с тем таблицы могут быть использованы и вообще для умножения чисел на $\sin$ и $\cos$ различных углов, что, к сожалению, очень часто забывается на практике и о чем приходится поэтому в данном курсе напоминать.

Пример 1. Найти при условиях задачи 1-й предыдущего § площадь $\triangle ABD$.

Как известно из курса тригонометрии, площадь $\triangle$ равна половине произведения двух сторон его на $\sin$ угла между ними; поэтому

$$\begin{aligned}\text{пл. } \triangle ABD &= \frac{1}{2} BD \times AB \times \sin B = \left(\frac{1}{2} \times 44,92 \right) \times \\ &\times (180,21 \times \sin 60^\circ 36') = 22,46 \times 157,00 = 3526 \text{ м}^2 = \\ &= 0,3526 \text{ га}.\end{aligned}$$

Здесь произведение $180,21$ на $\sin 60^\circ 36'$ находится непосредственно по таблицам Гаусса, а произведение $22,46$ на $157,00$ может быть найдено при помощи таблиц умножения.

Обычно таблицы умножения чисел могут быть использованы и для деления; поэтому и таблицы Гаусса могут быть применены также для производства деления чисел на величины $\sin$ и $\cos$, на что имеется указание и в землеустроительной литературе¹⁾, при чем данная операция будет представлять

¹⁾ См. брошюру Сафонова и Семененко „Техника землеустройства“.

собою действие обратное умножению числа на $\sin$ или $\cos$ и может быть отождествлена с нахождением длины линии l по одному из ее приращений и величине румба r , так как

$$l = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad l = \frac{\Delta y}{\sin \alpha}.$$

Пример 2. Найти длину линии l , если известно $\Delta x = 153,72$ и величина румба $r = 16^\circ 38'$.

Рассуждения ведем следующим образом: если бы нам пришлось искать приращение по оси X для известной нам линии l , то мы искали бы это приращение по частям, взяв сначала приращение, соответствующее сотням метров, затем — десяткам, потом — единицам и, наконец, — долям метра; здесь пред нами задача обратная, и прежде всего зададим себе вопрос, какое количество сотен метров должна иметь линия l , если приращение ее Δx при румбе $r = 16^\circ 38'$ составляет 153,72; на соответствующей странице таблиц находим, что для данного румба при $l = 100$ м приращение будет равно 95,82, т.е. меньше данного; но уже при $l = 200$ м оно будет 191,63, то-есть больше данного; из этого заключаем, что в искомой линии l 200 метров содержаться не может, а содержится 100 м с некоторым излишком, составляющим величину, меньшую чем 100 м, и содержащим поэтому только десятки, единицы и доли метра.

Легко видеть, что приращение, соответствующее этому излишку против 100 м линии l , получится путем отнятия из всего приращения линии l той его части, которая соответствует 100 м линии, т.е. 95,82, и приращение это будет таким образом равно $153,72 - 95,82 = 57,90$.

Полученное в остатке число 57,90 представляет собою, как только что доказано, приращение, соответствующее десяткам, единицам и долям метра искомой линии l ; зададим себе вопрос, какое число десятков метров содержится в искомой линии l . На той же странице таблиц находим, что наш остаток 57,90 заключается между 57,49, являющимся приращением

линии в 60 метров, и 67,07, являющимся приращением для 70° а из этого заключаем, что наша линия l содержит 6 десятков метров и некоторый излишек, составляющий величину, меньшую 10 метров, и содержащий поэтому только единицы и доли метра. Приращение, соответствующее этому излишку, получается путем отнятия из приращения для десятков, единиц и долей метра — 57,90 — приращения для десятков — 57,49, т.е. будет равно $57,90 - 57,49 = 0,41$, и представляет собою приращение, соответствующее единицам и долям метра.

Поставим далее себе вопрос, какое количество единиц метра заключается в искомой линии l . По таблицам находим, что 1 метру соответствует приращение 0,96, т.е. больше величины нашего остатка, из чего заключаем, что число единиц метра для нашей искомой линии будет 0, а по боковым табличкам *Cent.* находим, что приращению в 0,41 соответствует 0,43 метра, и таким образом искомая линия $l = 160,43$ метра.

Вычитание во время этой операции следует производить на счетах, поставив на них величину приращения, отнимая затем последовательно от него приращения определяемых частей линии и отмечая в то же время найденные цифры.

Для представления же всей изложенной операции в форме равенства мы в своем изложении будем считать, что в этом случае имеет место разложение приращения 153,72 всей линии l на 3 слагаемых — 95,82, 57,49 и 0,41, выбранных таким образом, что от деления на $\cos 16^\circ 38'$ первого из них получаются только сотни, от деления второго только десятки, от деления третьего только дробная часть, и представим всю эту операцию следующим образом:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\Delta x}{\cos \alpha} = \frac{153,72}{\cos 16^\circ 38'} = \frac{95,82 + 57,49 + 0,41}{\cos 16^\circ 38'} = \\ &= \frac{95,82}{\cos 16^\circ 38'} + \frac{57,49}{\cos 16^\circ 38'} + \frac{0,41}{\cos 16^\circ 38'} = \\ &= 100 + 60 + 0,43 = 160,43. \end{aligned}$$

Пример 3. Решить пример 4-й предыдущего §. Там мы имели, что

$$b = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{85,25}{\cos 27^\circ 32'}$$

и

$$a' = a + b \sin \alpha = 110,23 + b \sin 27^\circ 32';$$

применяя для деления 85,25 на $\cos 27^\circ 32'$ метод предыдущего §, получим:

$$b = \frac{85,25}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{79,81 + 5,32 + 0,12}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{79,81}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{5,32}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{0,12}{\cos 27^\circ 32'} = 90 + 6 + 0,13 = 96,13;$$

после чего, подставляя величину b в формулу для выражения a' получим:

$$a' = 110,23 + 96,13 \times \sin 27^\circ 32' = 110,23 + 44,43 = 154,66,$$

где умножение 96,13 на $\sin 27^\circ 32'$ произведено посредством таблиц Гаусса.

Пример 4. Найти натуральную величину $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$.

$$\operatorname{tg} 27^\circ 32' = \frac{\sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{0,4623}{\cos 27^\circ 32'};$$

после умножения числителя и знаменателя на 1000, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 27^\circ 32' &= \frac{462,3}{1000 \times \cos 27^\circ 32'} = \frac{1}{1000} \times \frac{462,3}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= \frac{1}{1000} \times \frac{266,02 + 177,35 + 17,73 + 0,89 + 0,31}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= \frac{1}{1000} \left(\frac{266,02}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{177,35}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{17,73}{\cos 27^\circ 32'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,89}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{0,31}{\cos 27^\circ 32'} \right) = \frac{1}{1000} \times \\ &\times (300 + 200 + 20 + 1 + 0,35) = \frac{1}{1000} \times 521,35 = 0,52135. \end{aligned}$$

И в этом случае деление на $\cos$ произведено по способу, указанному в примере 2 настоящего §, а умножение числителя и знаменателя дроби можно было бы произвести и на 100 вместо 1000, но тогда понизится точность вычисления (что показано будет в следующей главе).

Пример 5. Вычислить второе основание прямоугольной трапеции a' по формуле и по условиям примера 5-го предыдущего §.

Там было дано для величины a' выражение:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{110,23^2 + 22584 \operatorname{tg} 27^\circ 32'},$$

которое после соответствующих преобразований даст

$$\begin{aligned} &\sqrt{110,23^2 + \frac{22584 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'}} = \\ &= \sqrt{110,23^2 + \frac{100 \times 225,84 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'}} = \\ &= \sqrt{110,23^2 + 100 \frac{225,84 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'}}, \end{aligned}$$

где вместо 22584 взято такое же по величине произведение $100 \times 225,84$, и множитель числителя 100 поставлен перед всей дробью, при чем операция эта проделана только для упрощения умножения на $\sin 27^\circ 32'$.

Для получения результата вычислим прежде всего величину выражения

$$\frac{225,84 \times \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'};$$

после выполнения умножения в числителе по таблицам Гаусса выражение это окажется равным

$$\frac{104,40}{\cos 27^\circ 32'},$$

а это, в свою очередь, при вычислении по методу примера 2-го настоящего § даст

$$\begin{aligned} \frac{88,67 + 8,87 + 6,21 + 0,65}{\cos 27^{\circ}32'} &= \frac{88,67}{\cos 27^{\circ}32'} + \\ + \frac{8,87}{\cos 27^{\circ}32'} + \frac{6,21}{\cos 27^{\circ}32'} + \frac{0,65}{\cos 27^{\circ}32'} &= \\ = 100 + 10 + 7 + 0,73 &= 117,73. \end{aligned}$$

После этого a' окажется равным

$$\sqrt{110,23^2 + 100 \times 117,73} = \sqrt{110,23^2 + 11773}.$$

Дальнейшее вычисление будем вести, пользуясь таблицами квадратов чисел, являющимися весьма важным приложением к таблицам Гаусса, и так как по этим таблицам можно находить квадраты чисел только до 10 единиц и извлекать квадратные корни также не выше этого предела, то необходимо прежде всего умножить подкоренное выражение и разделить оба его члена на 100^2 , после чего окажется:

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{110,23^2 + 11773} = \sqrt{100^2 \left(\frac{110,23^2}{100^2} + \frac{11773}{100^2} \right)} = \\ &= 100 \sqrt{\left(\frac{110,23}{100} \right)^2 + \frac{11773}{10000}} = 100 \sqrt{1,1023^2 + 1,1773}, \end{aligned}$$

где 1,1023 и величина всего квадратного корня удовлетворяет этому требованию; после возведения 1,1023 в квадрат по правилам, приложенным к указанным таблицам квадратов чисел, будем иметь для $1,102^2$ число 1,2144 и для 0,0003 поправку, равную 0,0006₆, и выражение наше примет следующий вид:

$$a' = 100 \sqrt{1,2144 + 0,0006_6 + 1,1773} = 100 \sqrt{2,3928_6};$$

далее, извлекая квадратный корень по правилам для тех же таблиц, будем иметь, что 2,3901 подкоренного выражения

соответствует 1,546 в квадратном корне, а остаток подкоренного выражения 0,0027₆ даст для квадратного корня поправку в 0,0009, и вычисление представится в таком виде:

$$a' = 100 \sqrt{2,3901 + 0,0027_6} = 100 \times 1,5469 = 154,69.$$

Замечание. При некотором навыке все вычисления этого примера проводятся весьма быстро, тогда как, если бы мы вздумали приводить наше выражение к виду удобному для логарифмирования и производить вычисление при помощи таблиц логарифмов, то такой способ вычисления потребовал бы от нас значительно большего времени, и от усложнения операции сделалась бы значительно более вероятной возможность допустить при вычислениях какую-либо ошибку.

Пример 6. Вычислить длину линии l и ее румб при условиях примера 6 предыдущего §, т.е.

$$\Delta x = 252,13$$

и

$$\Delta y = 139,49.$$

Длину линии l будем искать при помощи таблиц квадратов чисел методом, аналогичным примененному в предыдущем примере, т.е.

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{252,13^2 + 139,49^2} = \\ &= \sqrt{100^2 \left(\frac{252,13^2}{100^2} + \frac{139,49^2}{100^2} \right)} = \\ &= 100 \sqrt{\left(\frac{252,13}{100} \right)^2 + \left(\frac{139,49}{100} \right)^2} = \\ &= 100 \sqrt{2,5213^2 + 1,3949^2} = \\ &= 100 \sqrt{6,3554 + 0,0015_3 + 1,9432 + 0,0025_2} = \\ &= 100 \sqrt{8,3026_5} = 100 \sqrt{8,3002 + 0,0024_5} = \\ &= 100 \times 2,8814 = 288,14; \end{aligned}$$

а найдя длину линии можно произвести вычисление натуральной величины $\sin r$ путем деления Δy на l , при чем операция самого деления может быть выполнена посредством таблиц умножения, и тогда

$$\sin r = \frac{\Delta y}{l} = \frac{139,49}{288,14} = 0,4841 = \sin 28^\circ 57',$$

откуда видно, что

$$r = 28^\circ 57'.$$

Проверка вычисления производится и здесь точно так же, как в примере 6-м предыдущего §, т.е. вычисляется Δx по l и r , с той только разницей, что умножение l на $\cos r$ производится непосредственно по таблицам Гаусса; и так как

$$\Delta x = l \cos r = 288,14 \times \cos 28^\circ 57' = 252,13,$$

то вычисление произведено правильно, и искомая линия будет:

$$\frac{CB: 28^\circ 57'}{288,14}.$$

Замечание. Вычисление данного примера, взятое само по себе, не дает преимуществ по сравнению с методом вычисления при помощи таблиц логарифмов, но желая сосредоточить все внимание техника на пользовании одним лишь пособием — таблицами Гаусса — и не отвлекать его на совершенно иной метод — пользования таблицами логарифмов, мы все же рекомендуем именно этот метод.

Пример 7. Произвести вычисления, требуемые в задаче первой предыдущего §, т.е. найти длину линии

$$AB = l = \sqrt{180,16^2 + 4,33^2}$$

(см. черт. 2), румб ее r , для которого

$$\sin r = \frac{\Delta y}{l} = \frac{4,33}{l},$$

длину линии BD по формуле

$$BD = \frac{l \sin A}{\sin (BDA)}$$

и длину линии AD по формуле

$$\frac{l \sin B}{\sin (BDA)}.$$

Линия l и угол r находятся по методу предыдущего примера, т.е.

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{180,16^2 + 4,33^2} = \sqrt{100^2 \left(\frac{180,16^2}{100^2} + \frac{4,33^2}{100^2} \right)} = \\ &= 100 \sqrt{\left(\frac{180,16}{100} \right)^2 + \left(\frac{4,33}{100} \right)^2} = 100 \sqrt{1,8016^2 + 0,0433^2} = \\ &= 100 \sqrt{3,2436 + 0,0021_6 + 0,0018 + 0,0000_3} = \\ &= 100 \sqrt{3,2475_9} = 100 \sqrt{3,2472 + 0,0003_9} = \\ &= 100 \times 1,8021 = 180,21, \end{aligned}$$

и

$$\sin r = \frac{\Delta y}{l} = \frac{4,33}{180,21} = 0,0240 = \sin 1^\circ 23',$$

откуда

$$r = 1^\circ 23';$$

далее так же, как в задаче первой предыдущего §, имеем:

$$\begin{aligned} \angle A &= 13^\circ 54', \\ \angle B &= 60^\circ 36', \\ \angle BDA &= 105^\circ 30', \end{aligned}$$

и выражения для длины линий BD и AD преобразуются по правилам умножения и деления на $\sin$, показанным в предыдущих примерах:

Землеустроительное проектирование.

$$\begin{aligned}
 BD &= \frac{l \sin A}{\sin(BDA)} = \frac{180,21 \times \sin 13^\circ 54'}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{43,29}{\sin(180^\circ - 74^\circ 30')} = \\
 &= \frac{43,29}{\sin 74^\circ 30'} = \frac{38,55 + 3,85 + 0,89}{\sin 74^\circ 30'} = \frac{38,55}{\sin 74^\circ 30'} + \\
 &+ \frac{3,85}{\sin 74^\circ 30'} + \frac{0,89}{\sin 74^\circ 30'} = 40 + 4 + 0,92 = 44,92,
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 AD &= \frac{l \sin B}{\sin(BDA)} = \frac{180,21 \sin 60^\circ 36'}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{157,00}{\sin(180^\circ - 74^\circ 30')} = \\
 &= \frac{157,00}{\sin 74^\circ 30'} = \frac{96,36 + 57,82 + 1,93 + 0,89}{\sin 74^\circ 30'} = \\
 &= \frac{96,36}{\sin 74^\circ 30'} + \frac{57,82}{\sin 74^\circ 30'} + \frac{1,93}{\sin 74^\circ 30'} + \frac{0,89}{\sin 74^\circ 30'} = \\
 &= 100 + 60 + 2 + 0,92 = 162,92.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8. Найти горизонтальное проложение линии 252,1, для которой взяты были следующие углы наклона:

0 — 115	м.	3°15'
115 — 140	"	9°30'
140 — 170	"	3°45'
225 — 252,1	"	4°15'

известно, проекцию соответствующей части линии на местности и равняется произведению этой части линии на $\cos$ соответствующего угла наклона, то величина этой проекции и может быть найдена по таблицам Гаусса; но для удобства нами предлагается находить не само горизонтальное проложение линии, а — так же, как и по таблицам Веселовского — лишь величину поправки на наклонение линии.

В нашем примере угол наклона в $3^\circ 15'$ соответствует отрезку в 115 м, угол наклона в $9^\circ 30'$ — отрезку в $140 - 115 = 25$ м, угол в $3^\circ 45'$ — отрезку в $170 - 140 = 30$ м и угол в $4^\circ 15'$ — отрезку в $252,1 - 225 = 27,1$ м.

По таблицам Гаусса находим, что получается поправка:

для угла наклона в $3^\circ 15'$	на 100 м	100 — 99,84 = 0,16 м
" " " " " "	10	10 — 9,98 = 0,02 "
" " " " " "	5	5 — 4,99 = 0,01 "
" " " " $9^\circ 30'$	20	20 — 19,73 = 0,27 "
" " " " " "	5	5 — 4,93 = 0,07 "
" " " " $3^\circ 45'$	30	30 — 29,94 = 0,06 "
" " " " $4^\circ 15'$	20	20 — 19,95 = 0,05 "
" " " " " "	7	7 — 6,98 = 0,02 "
" " " " " "	0,1	0 "
а на всю линию	в 252,1 м	0,66 м,

и горизонтальное проложение данной линии окажется равным

необходимые нам вычисления всегда можно производить без применения таблиц логарифмов, пользуясь таблицами Гаусса, кроме которых во втором случае требуются еще таблицы умножения чисел; а для того, чтобы пользование этими последними не препятствовало установлению твердого навыка в пользовании таблицами Гаусса, нами рекомендуются таблицы умножения, построенные по тому же принципу, что и таблицы Гаусса, где берутся в определенном порядке различные множимые, располагаемые в форме вертикальной строки на месте минут таблиц Гаусса, и даются в соответствующей строке их произведения на 10, 20, 30 90.

Но при этом могла бы встретиться трудность такого рода: в землеустроительной практике приходится производить умножение больших чисел главным образом при нахождении площадей многоугольников по координатам вершин, где сомножители берутся с сотыми долями; поэтому, меняя множимое в каждой строке лишь на 0,01, нам для введения в таблицы всех множимых от 0 до 500,00 потребуется для изменения множимого на 1 единицу—100 строк, а для изменения его на 500 единиц—50.000 строк, или считая, как и в таблицах Гаусса, на странице 60 строк $\frac{50.000}{60} = 833 \frac{1}{3}$ страниц, что делает идею таких таблиц громоздкой¹⁾.

Но если мы примем во внимание (и это будет доказано в следующей главе), что приращения вычисляются у нас с точностью меньшей, чем до 0,01, и при линии, превышающей 700 м, погрешность в этом вычислении уже может достигнуть 0,03, то нетрудно будет прийти к выводу, что следует

¹⁾ Таковым недостатком страдают таблицы Дьякова. Если же ограничиться множимым взятым в меньших пределах, например, в пределах 0 до 100,00, как в таблицах Орлова, то окажется, что пределы эти могут удовлетворить лишь небольшому количеству случаев практики.

ограничиться при работе без арифмометра записыванием приращений с округлением до 0,05, и тогда такой способ записывания при соответствующим образом видоизмененном способе увязки полигонов даст нам возможность иметь координаты и их разности округленными до 0,05, а это обстоятельство делает необходимым менять множимое в таблицах только через каждые 0,05, что сократит количество строк в 5 раз и страниц окажется лишь $833 \frac{1}{3} : 5 = 166 \frac{2}{3}$.

Общий вид этих таблиц можно иллюстрировать тремя выписанными строками их для трех соседних значений множимого: 240,00, 240,05 и 240,10.

Мно- жимое	10	20	30	40	50	60	70	80	90	Мно- жимое
240,00	2400,0	4800,0	7200,0	9600,0	12000,0	14400,0	16800,0	19200,0	21600,0	240,00
240,05	2400,5	4801,0	7201,5	9602,0	12002,5	14403,0	16803,5	19204,0	21604,5	240,05
240,10	2401,0	4802,0	7203,0	9604,0	12005,0	14406,0	16807,0	19208,0	21609,0	240,10

По этим же таблицам можно произвести деление любого числа на всякое пятизначное число до 500,00.

Такие таблицы умножения вместе с таблицами Гаусса и вместе с таблицами квадратов чисел, могут служить исчерпывающим пособием для исполнителя при землеустроительных работах и дать ему полную возможность выполнять эти работы почти без применения графических методов, даже без наличия арифмометра.

Следующим выводом, который напрашивается в данной главе, будет тот, что введенная в программу средней школы элементарная математика не дает при проведении вычислений с приближенно взятыми числами достаточного понимания су-

щества работы, и чтобы эта работа не сделалась ремесленной, требуется для техника некоторое знакомство с теорией приближенных вычислений, которую в пределах данной потребности целиком можно обосновать на элементарной математике и широко применить на примерах из землеустроительной практики; к этому мы и перейдем в следующей главе.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.

§ 5. Приближенные числа и источники их происхождения в землемерном деле.

В землемерном деле точно так же, как и в других областях техники, приходится иметь дело преимущественно с числами приближенными.

Источники происхождения этих приближенных чисел весьма различны, но их можно разделить на 2 основных категории: к первой относятся случаи получения приближенных чисел в результате измерения величин, а ко второй — получение таковых в результате вычислений.

В землемерной практике приходится производить измерение линий и углов на местности, линий, углов и площадей на плане; в результате этих измерений получаются числа приближенные, в большей или меньшей степени отличающиеся от соответствующих им точных чисел.

В курсах геодезии выясняется природа этих чисел в связи с теорией ошибок, и указываются способы, как эти приближенные числа можно получить наиболее близкими к точной мере определяемых ими величин; рекомендуется также не пользоваться измерениями на плане, дающими особенно неудовлетворительный результат, и мы в настоящем курсе не будем останавливаться поэтому на данном источнике получения при-

ближенных чисел и займемся лишь второй категорией случаев, когда приближенные числа получаются в результате вычислений.

К числу таких случаев относится прежде всего деление 2 точных чисел, когда это деление не может совершиться без остатка и когда результат, как это требуется в землемерном деле, должен быть выражен числом с десятичной дробью.

Дается, например, площадь участка, имеющего форму прямоугольника, равная 4954 м^2 , и одна из сторон его $= 85,14 \text{ м}$; при определении второй стороны получаем

$$\frac{4954}{85,14} = 58,186516...$$

в виде бесконечной десятичной дроби. Так как брать тысячные, десятитысячные и пр. низшие доли не имеет практического интереса, то нам приходится все десятичные знаки, начиная с 3-го, отбросить (а в действительности совсем не получать) и взять или приближенное число 58,18, меньшее чем искомое частное, или 58,19 — большее такового, округляя результат до двух десятичных знаков.

Вторым источником получения приближенных чисел при вычислении в землемерном деле будет то обстоятельство, что тригонометрические функции $\sin$, $\cos$ и пр. за исключением очень немногих частных случаев (например, для $\sin$ только $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 90^\circ = 1$) не могут быть, как известно из курса тригонометрии, выражены конечными десятичными дробями; и когда нам требуется получить их натуральную величину, то мы так же, как и в предыдущем случае, вынуждены брать результат с округлением до некоторого, вызываемого практической потребностью, числа десятичных знаков и в частности для $\sin$ и $\cos$ по таблицам Гаусса — до 4 десятичных знаков. Получаемая из этих таблиц натуральная величина $\sin$ или $\cos$ будет таким образом также числом приближенным, взятым с недостатком или избытком.

Например, $\cos 0^\circ 10'$ оказывается по таблицам Гаусса равным 1,0000, тогда как величина его, взятая с большим количеством десятичных знаков, будет 0,999 999 998 824 778 473....., и приближенное число 1,0000 дает величину $\cos 0^\circ 10'$, следовательно, с отбрасыванием остальных знаков кроме четырех.

Третьим источником получения приближенных чисел в землемерном деле будет извлечение квадратного корня, каковая операция также, как известно из курса алгебры, только в исключительных случаях дает целое число или конечную десятичную дробь, а обычно — бесконечную десятичную дробь.

При определении, например, гипотенузы прямоугольного треугольника по катетам 87,12 и 95,14 получаем ее равной

$$\sqrt{87,12^2 + 95,14^2} = 129,0019 \dots,$$

а с округлением до 2 десятичных знаков 129,00.

Четвертым источником получения приближенных чисел будут различные алгебраические действия с участием приближенных же чисел или соответствующие этому сложные вычислительные операции, проводимые по таблицам Гаусса.

§ 6. Необходимость знакомства с теорией приближенных вычислений.

Во всех тех случаях, когда приближенное число получается непосредственным вычислением, как это имело место в первом и третьем случае § 5, для получения приближенного числа, более близкого к точному значению выраженной им величины, требуется лишь соблюдать известное правило округления, т.-е. при отбрасывании всех десятичных знаков, начиная с некоторого, увеличивать последнюю из остающихся цифр на единицу в том случае, если отбрасываемая часть больше половины, и оставлять ее без изменения, если отбрасываемая часть меньше половины (а в точности половине равняться при бесконечной десятичной дроби она не может), и

таким образом вместо чисел 58,186 516... и 129,0019... берутся приближенные числа 58,19 и 129,00.

В тех же случаях, когда искомое приближенное число находится непосредственно по таблицам, как это имело место в случае 2-м предыдущего §, для $\sin$ и $\cos$ различных углов, таковое правило округления проводится при самом составлении таблиц.

В обоих рассмотренных случаях пользование приближенными числами не вызывает каких-либо трудностей, но совсем иначе обстоит с теми приближенными числами, которые получаются в результате вычислений.

Здесь исполнитель сталкивается с трудностями противоположного вида: или в погоне за увеличением точности работы вводит много лишних знаков, почти совсем не повышающих точности результата и весьма усложняющих вычисление (примером чего можно привести вычисление tg по $\sin$ и $\cos$ по методу примера 2 §, если брать для него больше 4 знаков), или по незнанию с вопросом получит при казалось бы точных вычислениях весьма грубый результат (примером чего может быть производство деления на $\sin$ или tg малых углов или же $\cos$ или cotg углов, близких к 90° , о чем будет подробно изложено в дальнейшем); и вот, чтобы избежать обеих указанных опасностей и тем достигнуть возможного упрощения вычислений, с одной стороны, и гарантии получения необходимой точности, с другой — требуется для исполнителя землемерно-землеустроительных работ некоторое знакомство с теорией приближенных вычислений — тем более, что в этих пределах указанная теория является совсем несложной и целиком основывается на элементарной математике.

§ 7. Действительные погрешности.

Разница между приближенной величиной числа и его точным значением называется действительной погрешностью при-

ближенного числа¹⁾. Действительная погрешность может быть положительной и отрицательной. В частности для приведенных в § 5 примеров действительными погрешностями будут:

$$58,19 - 58,186\,516\dots = 0,003\,483\dots$$

в первом случае,

$$\begin{aligned} 1,0000 - 0,999\,999\,998\,824\,778\,473\dots &= \\ &= 0,000\,000\,001\,175\,221\,52\dots \end{aligned}$$

во втором,

$$129,00 - 129,0019\dots = -0,0019\dots$$

в третьем случае.

Указать величину действительной погрешности, да и то с известным приближением, нам удалось сравнительно легко при делении точных чисел, но выполнение этого уже оказалось значительно более трудным при извлечении квадратного корня из точного числа с большим числом десятичных знаков и тем более трудным при нахождении величины тригонометрической функции со многими знаками.

В общем и целом при принятых методах вычисления найти величину действительной погрешности не представляется возможным, а обычно не представляется возможным даже определить и ее знак, т.-е. найти, будет ли приближенное число больше или меньше соответствующего ему точного числа.

При определении, например, по таблицам Гаусса величины $\sin 31^\circ 36'$ мы получаем ее приближенное значение $= 0,5240$, но при этом не только не можем узнать, пользуясь именно этим пособием, какова действительная величина погрешности данного приближенного числа, но не можем даже

¹⁾ Правильнее определять действительную погрешность, как разность между точным значением числа и его приближенной величиной, но введенное нами определение упрощает изложение доказательств в § 30 и главе 3-й, вследствие чего мы им и воспользовались.

найти, будет ли полученное число 0,5240 больше или меньше точной величины $\sin 31^\circ 36'$; представляется лишь возможным определить, в каких границах должна заключаться эта погрешность, на основании чего и приходится выносить суждение относительно точности приближенного числа.

§ 8. Граница погрешности.

Границей погрешности приближенного числа будем принимать возможно меньшее из таких положительных чисел, которые безусловно больше абсолютного значения действительной погрешности.

Если бы мы не знали в первом и третьем случаях § 5, какова будет цифра третьего десятичного знака, то за величину границы погрешности приближенных чисел 58,19 и 129,00 можно было бы принять 0,005, так как согласно примененного нами правила округления абсолютная величина всякой действительной погрешности в случаях, аналогичных этим двум, должна быть меньше 0,005; и в то же время взять в качестве границы погрешности какое-либо число меньшее 0,005 было бы невозможно, так как легко представить себе случай, когда отбрасываемая при округлении приближенного числа часть может быть сколько угодно близка к 0,005 и при принятии в качестве границы погрешности какого-либо меньшего числа может оказаться за его пределами.

Особенно наглядным будет представляться необходимость именно такого подхода к определению величины границы погрешности для случая второго § 5 и в частности, например, для $\sin 31^\circ 36'$.

По самому способу составления таблиц Гаусса мы знаем, что в данном случае приближенная величина $\sin 31^\circ 36'$, равная 0,5240, получилась путем округления до 4 десятичных знаков величины бесконечной десятичной дроби с соблюдением правил округления, т.-е. при этом должна была получиться

действительная погрешность, меньшая по своему абсолютному значению, чем 0,00005; но в то же время могло случиться, что абсолютное значение этой погрешности было сколь угодно близким к 0,00005, и поэтому в данном случае границей погрешности приближенного числа 0,5240 будет 0,00005, т.-е.

$\frac{1}{2}$ единицы последнего знака, что можно распространить на все аналогичные случаи и установить равенство границы погрешности приближенного числа половине единицы последнего знака этого числа как общее правило при всех простых определениях по таблицам Гаусса, когда результат непосредственно выписывается из таблицы без производства каких-либо арифметических действий.

§ 9. Точность приближенного числа.

Границей погрешности приближенного числа определяется его точность.

Если величина границы погрешности будет, напр., равна 0,01, то говорят, что вычисление произведено с точностью до одной сотой.

Из рассуждений § 8 мы можем, следовательно, сделать тот вывод, что величина $\sin$ и $\cos$ определяется по таблицам Гаусса с точностью до 0,00005, величина квадратного корня, взятого с двумя десятичными знаками, определяется с точностью до 0,005, величина приращения при всяком угле для линии в 40, 50, ..., 90, 100, 200 и 300 метров по основным таблицам, а для долей метра по боковым табличкам (*Cent*) Гаусса, определяется с точностью до 0,005 метра и т. п.

Чтобы найти точность произведенного вычисления или, как говорят, произвести оценку этой точности, необходимо поэтому найти величину границы погрешности, что очень просто для первых 3-х случаев § 5, но становится затруднительным и нуждается в некотором теоретическом подходе для

случая 4-го, когда приближенное число получается в результате выполнения тех или иных алгебраических действий с участием в них приближенных чисел; к этому мы в дальнейшем и перейдем.

§ 10. Границы приближенного числа и определение по ним границы его погрешности.

Полученное в результате вычисления приближенное число всегда будет отличаться, как показано в § 7, от соответствующего точного числа на величину действительной погрешности. Если обозначить приближенное число через a , соответствующее ему точное число через A , а величину действительной погрешности через ΔA , то будем иметь равенство: $a - A = \Delta A$, где ΔA может быть как положительной величиной (и тогда точное число A окажется меньшим, чем приближенное a), так и отрицательной величиной (и тогда точное число A будет больше приближенного).

Из таблиц Гаусса мы имеем, например, приближенную величину $\sin 31^\circ 36' = 0,5240$, по сравнению с которой точная величина $\sin 31^\circ 36'$ может быть больше или меньше на некоторую величину, являющуюся действительной погрешностью числа 0,5240 и меньшую, чем 0,00005.

В некоторых случаях бывает необходимо знать, в каких границах должно заключаться точное число. Для отдельных случаев установить эти границы очень легко, и такими границами, например, для $\sin 31^\circ 36'$ будут 0,52405 и 0,52395. Действительно нам известно, что точное число $\sin 31^\circ 36'$ не может равняться ни той, ни другой из них, ибо является бесконечной десятичной дробью и не может быть выражено конечным числом десятичных знаков, и сверх того известно, что оно не может перейти через эти границы, так как тогда было бы получено в таблицах для $\sin 31^\circ 36'$ при округлении не 0,5240, а 0,5241 или 0,5239.

Следовательно, точная величина $\sin 31^\circ 36'$ заключается именно в границах между 0,52405 и 0,52395, и поэтому имеют место неравенства:

$$0,52405 > \sin 31^\circ 36' > 0,52395.$$

Число 0,52405 называется верхней границей приближенной величины $\sin 31^\circ 36'$ и получается прибавлением к величине приближенного числа 0,5240 границы его погрешности 0,00005, а число 0,52395 называется нижней границей той же величины и получается отнятием от приближенного числа 0,5240 границы той же погрешности. Обозначая верхнюю границу приближенного числа a через a_1 , нижнюю его границу через a_2 , а границу погрешности через E_a , получим для данного частного случая равенства:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a \\ a_2 &= a - E_a \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти равенства будут иметь место также и в общем случае.

Действительно, как бы велико по сравнению с приближенным числом a ни было соответствующее ему точное число A , оно не может отличаться от a на величину границы погрешности E_a , и поэтому число $a + E_a$ будет при всяких возможных случаях всегда больше A , превышая его иногда лишь на весьма малую величину, вследствие чего оно будет являться верхней границей приближенного числа a , и имеет место равенство

$$a_1 = a + E_a$$

и для этого общего случая.

Точно также, как бы ни было мало по сравнению с приближенным числом a точное число A , оно не может отличаться от a на величину границы погрешности E_a , и поэтому $a - E_a$ во всех случаях будет меньше точного числа A , приближаясь к нему в некоторых случаях на величину очень малую, вследствие чего оно будет являться нижней границей приближенного числа a , т.-е. имеет место равенство:

$$a_2 = a - E_a$$

исходя же из самого определения понятия границы приближенного числа, можно написать и для общего случая неравенства:

$$a_1 > a > a_2. \quad (1)$$

Полученные равенства:

$$a_1 = a + E_a \text{ и } a_2 = a - E_a \quad (2)$$

имеют пока теоретический интерес, так как мы будем прежде всего стремиться на практике найти величину границы погрешности E_a , чтобы узнать по ней точность вычисления, и получать таким способом величину верхней или нижней границы приближенного числа нам не придется; но эти равенства будут нам необходимы в том случае, когда придется решать обратную задачу, т.е. будут даны величины a_1 и a_2 , и потребуется по ним найти приближенное число a и границу погрешности E_a .

Действительно, если принять в равенствах (2) за неизвестные a и E_a , считая a_1 и a_2 за числа данные, то при решении этой системы 2 уравнений с двумя неизвестными получим:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \text{ и } E_a = \frac{a_1 - a_2}{2}. \quad (3)$$

Пример 1. $a_1 = 349,61$ и $a_2 = 349,57$; требуется найти a и E_a . Пользуясь только что выведенными равенствами (3), получаем:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{349,61 + 349,57}{2} = 349,59$$

и

$$E_a = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{349,61 - 349,57}{2} = 0,02.$$

Следует отметить, что в этом случае, когда по величинам a_1 и a_2 определяется a и E_a , нет формальной необходимости принимать обязательно за a арифметическое среднее между a_1 и a_2 , и вызывается это только требованием практической целесообразности, так как в этом случае число a одинаково удалено от обеих своих границ, и граница погрешности E_a будет наименьшей; но в приведенном примере мы могли бы принять за величину a любое число в границах между 349,61 и 349,57, например — 349,61, 349,60, 349,59, 349,58 и бесчисленное количество других чисел, взятых в этих же пределах более чем с 2 десятичными знаками, но при этом пострадала бы точность приближенного числа a , так как возросла бы граница погрешности E_a .

Действительно, принимая a равным, например, 349,61, т.е. верхней границе приближенного числа, мы можем ручаться лишь за точность приближенного числа a до 0,04, вместо прежних 0,02, так как в этом случае E_a сделалось бы равным 0,04, ибо нижняя граница a_2 была бы удалена от a на это число единиц.

Принимая a равным 349,60, мы будем иметь для случаев, когда точное число A больше 349,60, границу погрешности равной

$$349,61 - 349,60 = 0,01,$$

а для случая, когда число A меньше 349,60, границу погрешности равной

$$349,60 - 349,57 = 0,03,$$

а вообще, так как нам неизвестно, будет ли число A больше или меньше 349,60, а дано лишь, что оно находится в пределах между 349,61 и 349,57, мы можем принимать E_a лишь равной 0,03, и т. д.

Таким образом для случаев, когда приходится определять a и E_a по a_1 и a_2 , в целях увеличения точности приближенного числа a необходимо принимать за a арифметическое среднее между a_1 и a_2 , но иногда при этом получаются лишние десятичные знаки против того количества знаков, с которыми следует брать число a , и тогда в целях округления величины a от этого правила приходится до некоторой степени отступать.

§ 11. Округление величины приближенного числа.

Означенный вопрос имеет две стороны: определение влияния этой операции на величину границы погрешности, а следовательно, и на точность приближенного числа, и установление правила, до какого числа знаков в различных случаях следует производить округление.

При рассмотрении первой части вопроса могут быть два случая: когда известна величина отбрасываемой части и когда такая величина неизвестна, а установлено лишь, что округление должно быть произведено до определенного числа знаков. Примером первого случая, может быть требование округлить до 2 десятичных знаков число 129,0019...; полученный при этом результат 129,00 будет отличаться от прежнего числа

129,0019... на величину 0,0019..., которая составит действительную погрешность числа 129,00, если прежнее число 129,0019... было точным, и увеличит границу погрешности числа 129,00, по сравнению с таковой же числа 129,0019..., на 0,0019..., если последнее было приближенным, ибо при этом нам будет неизвестно, в какую сторону — выгодную для нас, или невыгодную, — мы изменили округляемое число, а при определении новой границы погрешности нам необходимо иметь в виду худший случай; вообще же вводится действительная погрешность от округления, равная 0,0019..., что можно представить в форме равенства:

$$E_{129,00} = E_{129,0019...} + 0,0019...$$

где $E_{129,0019}$ может равняться нулю, если число 129,0019... было точным.

Примером второго случая будет нахождение влияния на приближенное число a' , определяемое по формуле

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} a}$$

(см. пример 5 § 2), округления его до 2 десятичных знаков, если последующих знаков при этом вовсе не будем и получать.

Найти величину действительной погрешности от округления здесь при таких условиях не будет возможным, и нам придется ограничиться определением величины только *ее границы*, а таковая величина будет $= 0,005$, т.-е. половина единицы последнего знака, если только мы выбрали последнюю цифру корня надлежащим образом. Обозначая здесь через $E_{a'}$ общую границу погрешности приближенного числа a' , через $E_{a'}$ ту часть его границы погрешности, которая получилась от приближенности подкоренного выражения, и через $E_{a'}$ ту ее часть, которая получилась от введения погрешности округления, получим равенство:

$$E_{a'} = E_{a'} + E_{a'}.$$

Применяя такие же рассуждения к общему случаю округления, найдем для всякого числа a равенство:

$$E_a = E_{a'} + E_{a'}, \quad (1)$$

где $E_{a'}$ есть граница погрешности от округления, а в отдельных случаях действительная погрешность округления, если таковая известна.

Но при этом может случиться, что самая погрешность будет выражаться более или менее громоздко и для удобства пользования потребуются округлить ее величину. В таких случаях следует иметь в виду, что при округлении величина ее не должна быть уменьшена, ибо тогда может случиться, что отдельные погрешности перешагнут через эту границу, что по самому определению границы погрешности быть не должно.

Если, например, $E = 0,000345$ и нужно ее округлить таким образом, чтобы была в ней только одна значущая цифра, то следует взять 0,0004.

По тем же соображениям верхнюю границу числа можно округлять только в сторону увеличения, а нижнюю только в сторону уменьшения.

Переходя к вопросу установления общего критерия, до какого числа десятичных знаков следует производить округления, укажем прежде всего, что и этот вопрос также имеет две стороны: формальную, вызываемую необходимостью установить общий для всех язык в области записи приближенных чисел, и чисто практическую, затрагивающую только рациональность работы отдельного исполнителя.

Формальная сторона вопроса обрисовывается нижеследующими примерами.

Пример 1. Пусть какая-то линия, будучи вычислена по плановым данным, даст ровно двести пятьдесят м. Как написать эту линию на плане?

Если эту меру написать на плане в виде числа 250, не установив предварительно общего для всех условия, как это

следует понимать, то для всякого лица, которое с этим планом в дальнейшем столкнется, будет неясно, почему оказались не написанными десятые доли метра, — потому ли, что методы определения длины линии были настолько грубы, что не давали на то права, или потому, что при достаточно точном вычислении число десятых долей метра оказалось равным нулю. Поэтому, чтобы в данном отношении не было какой-либо неясности, установлено общее для всех подобных случаев правило писать приближенные числа таким образом, чтобы можно было уже по одному их внешнему виду определить всякому знакомому с этим правилом лицу, за какую точность в этих числах можно поручиться, а именно — требуется писать приближенное число так, чтобы в нем все цифры были точными, и лишь последняя могла бы быть сомнительной, допуская погрешность не более чем на одну единицу этого знака. При наличии такого правила данное число будет написано или в виде 250 (если оно было вычислено с точностью до одного метра), или в виде 250,0 (если вычисление было произведено с точностью до 0,1).

Пример 2. Как записать на плане линию 152,16 м, вычисленную с точностью до 0,02 м.

Согласно только что данного правила эта линия не может быть записана в виде 152,16, так как хотя сомнительной будет здесь только последняя цифра, но граница погрешности более 0,01, и эту линию, вообще говоря, следует записать с округлением до 0,1, т.-е. 152,2; но нет формальных препятствий к тому, чтобы записать ее с округлением до 0,05, так как при таком округлении будем брать 152,15 м и введем действительную погрешность от округления равную

$$152,16 - 152,15 = 0,01,$$

которая вместе с границей погрешности в вычислении величины 152,16, равной по условию 0,02, даст границу общей погрешности числа 152,15, равную $0,02 + 0,01 = 0,03$, т.-е. менее, чем 0,05.

Пример 3. Как записывать на плане всякие линии, граница погрешности которых вместе с погрешностью от округления их до 0,05 не будет превышать 0,05?

Условимся все вычисленные с этой точностью линии записывать таким образом, чтобы интервал между последующими значениями линии был равен 0,05, т.-е., например, 237,1, 237,15, 237,2, и поскольку такая запись будет применяться на планах в большом числе случаев и для целой категории линий, никто не может быть введен в заблуждение относительно точности вычисления этих линий.

Пример 4. Какова должна быть граница погрешности числа, выражающего длину вычисленной с двумя десятичными знаками линии, чтобы после округления этого числа до 0,05 граница его общей погрешности не могла превышать 0,05 и можно было вследствие этого воспользоваться методом примера 3-го настоящего §?

Для решения данного примера найдем сначала, какова будет граница погрешности от округления до 0,05 всякого числа, записанного с двумя десятичными знаками.

Эта граница должна равняться наивысшей из возможных в данном случае действительных погрешностей от округления; число сотых долей в округляемом числе может быть различным, но все случаи разбиваются на 3 следующих группы:

- 1) сотых долей 0 или 5,
- 2) " " 1, 4, 6 или 9,
- 3) " " 2, 3, 7 или 8.

Легко видеть, что в первом случае действительная погрешность от округления будет 0, во втором — 0,01, а в третьем — 0,02, и граница такой погрешности будет поэтому равна 0,02.

Отсюда находим, что для получения границы общей погрешности не свыше 0,05, при наличии границы погрешности от округления в 0,02, нужно иметь границу погрешности от вычисления

округляемого числа не выше $0,05 - 0,02 = 0,03$, что и дает ответ на поставленный вопрос.

Пример 5. Как нужно записывать на плане координаты точек окружной межи, если границы погрешности вычисленных приращений линий превышают $0,01$ м, достигая $0,03$ м?

Такая точность приращения требует согласно положений, развитых в примерах 1—4-м настоящего §, записывания их с округлением до $0,05$ м. Самые приращения записыванию на план не подлежат, и для них это обстоятельство формального значения не имеет, но по исправленным приращениям вычисляются координаты точек, каковым координатам и передаются погрешности приращений; вследствие этого записывать на плане координаты точек необходимо с округлением до $0,1$ м, независимо от того, как они записаны были исполнителем в его координатных ведомостях, представляющих интерес главным образом для него самого. Приведенными примерами формальная сторона вопроса исчерпывается вполне.

Переходя к стороне чисто практической, затрагивающей только рациональность работы отдельных техников, будем иметь в виду записывание результатов промежуточных вычислений, являющихся как бы домашним делом каждого исполнителя и не попадающих в таком виде на план для всеобщего употребления.

Примером этого рода результатов могут быть вычисленные приращения линий и многое другое.

В таких случаях исполнителю приходится учитывать, что он выигрывает и что теряет от того, если будет вычислять и записывать для себя различные числа с большим количеством десятичных знаков, чем то требуется точностью произведенного вычисления.

Выиграшем здесь является то обстоятельство, что в результаты промежуточных вычислений вводится меньшая погрешность, от округления; проигрыш определяется усложнением производимых вычислений.

Нижеследующие примеры дадут более конкретное направление этому вопросу.

Пример 6. Как следует записывать приращения и координаты в ведомостях, если вычислительные работы производятся при помощи арифмометра и если граница погрешностей отдельных приращений превышает $0,01$ и достигает $0,03$ м?

Прежде всего для решения этого вопроса отметим, что формальной необходимости записывать приращения округленными до $0,05$, как того требует точность их вычисления, здесь нет, так как координатные ведомости необходимы только самому исполнителю и тому лицу, которое его будет потом проверять, для занесения результатов промежуточных вычислений.

Вместе с тем следует иметь в виду, что при работе с арифмометром производство умножений для нахождения площади полигона по координатам его вершин не даст сколько-нибудь заметной разницы в сложности работы как в том случае, если координаты и их разности будут взяты округленными до $0,1$ так и в том, когда эти последние будут записаны без округления, с сотыми долями метра.

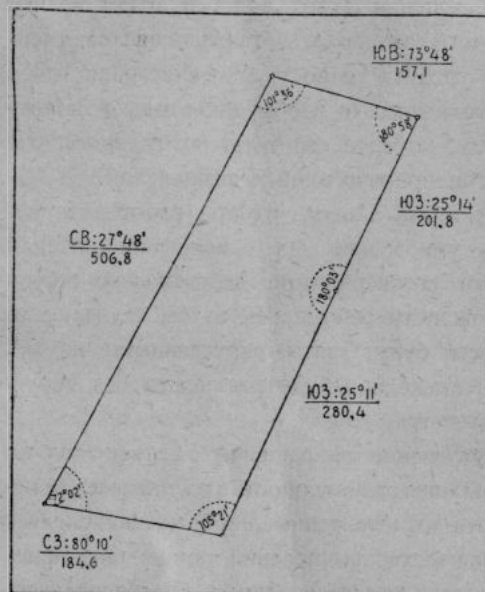
Кроме того, при записывании приращений с сотыми долями достигается несколько большая равномерность в распределении невязки, и поэтому, суммируя все изложенные соображения, следует рекомендовать при производстве вычислений помощью арифмометра записывать приращения как вычисленные, так и исправленные, а следовательно и координаты точек, с сотыми долями метра.

Пример 7. Как следует записывать приращения и координаты в ведомостях, если вычисления производятся без посредства арифмометра и границы погрешности приращений превышают $0,01$, доходя до $0,03$ м, как в предыдущем примере.

Считаясь с тем, то по соображениям, изложенным в § 4, нахождение произведений при вычислении площади полигона по координатам его вершин в весьма значительной степени облегчается в том случае, если координаты и их разности записаны с округлением до $0,05$, следует исполнителю пре-

небольшим неудобством не совсем равномерного распределения невязки и брать приращения, а следовательно и координаты, округленными до 0,05 м.

Пример 8. Вычислить приращения и исправить их при условиях работы примера 7 настоящего § для многоугольника (см. черт. 3), данные которого расположены в нижеследующей координатной ведомости.



Черт. 3.

Результаты вычислений внесены в ведомость, которая составлена в соответствии с приложением к инструкции для производства землемерных работ при землеустройстве 1913 г. образцом, но с некоторыми отступлениями, вызываемыми требованиями настоящего примера, а именно:

- Черт. 3.
- 1) введена графа „округленные приращения“,
- 2) распределение невязки производится частями, кратными 0,05.

Следует заметить, что в данном случае графа „вычисленные приращения“ введена только для большей наглядности представления вычислительного процесса; на практике же в ней не будет надобности, и представится возможным вычисленные приращения заносить в координатную ведомость сразу в округленном виде.

[illegible]

Но при этом следует отмечать, для принятия затем в соображение при распределении невязки, каким образом произведено округление — постановкой сверху над приращением значка + (если округление произведено с уменьшением абсолютного значения величины приращения) и значка — (если округление произведено с увеличением такового). Произведя распределение невязки согласно правил, установленных в курсе геодезии, но с принятием во внимание характера округления приращений, и найдя затем исправленные приращения, этим закончим исполнение задания настоящего примера ¹⁾.

Пример 9. При вычислении формулы

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha}$$

(см. прим. 5 § 2) помощью арифмометра нам потребуется предварительно найти величину $\operatorname{tg} \alpha$ для $\alpha = 27^\circ 32'$ посредством деления взятой по таблицам Гаусса величины $\sin \alpha$ на $\cos \alpha$.

С каким количеством знаков следует брать приближенное значение $\operatorname{tg} \alpha$, если граница его погрешности $= 0,000\ 086$, а приближенная величина $\operatorname{tg} \alpha = 0,521\ 371\ 3 \dots$?

В данном случае с чисто деловой точки зрения может быть сомнение лишь в том, следует ли брать приближенную величину $\operatorname{tg} \alpha$ с 4 или 5 десятичными знаками, т.-е. принять ли $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ равным 0,5214 или 0,52137.

Действительная погрешность от округления $E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ (см. о принятых обозначениях при округлении в начале настоящего §) будет в первом случае равна

$$0,5214 - 0,521\ 371\ 3 \dots = 0,000\ 028\ 6 \dots = \\ = 0,000\ 029 \text{ (с округлением),}$$

¹⁾ При этом следует отметить, что с таким же осознанием мы могли бы записывать в ведомости координат вычисленные приращения с сотыми долями метра, без округления их до 0,05 м, и производить затем округление вместе с увязкой.

а во втором случае будет равна

$$0,521\ 371\ 3 \dots - 0,52137 = 0,000\ 001\ 3 \dots = \\ = 0,000\ 002$$

(с округлением по данному в настоящем § правилу округления погрешностей).

Таким образом, уже производя округление до 4 знаков, мы вводим погрешность, составляющую только треть погрешности от вычисления, вследствие чего это округление не даст особенно заметного отрицательного влияния на точность последующих вычислений, внося в то же время значительное упрощение в вычислительный процесс. Руководствуясь этими соображениями, следует рекомендовать взять в этом случае приближенную величину $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ равной 0,5214.

Граница общей погрешности этого числа определится по формуле (1) настоящего §:

$$E_a = E_{1a} + E_{2a}$$

путем подстановки вместо a приближенной величины $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$, после чего будем иметь, заменяя $E_{1 \operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ и $E_{2 \operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ их значениями:

$$E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'} = E_{1 \operatorname{tg} 27^\circ 32'} + E_{2 \operatorname{tg} 27^\circ 32'} = \\ = 0,000\ 086 + 0,000\ 029 = 0,000\ 115$$

или с округлением: 0,00012.

Точность вычисленной величины $\operatorname{tg} 27^\circ 32' = 0,5214$ будет таким образом меньше чем до 0,0001, и формального права сохранить 4 знака мы не имеем; но так как величина tg нужна нам лишь для промежуточных вычислений, то руководствуясь чисто практическим интересом, следует брать этот tg именно с четырьмя десятичными знаками.

Пример 10. С каким округлением следует записать на плане вычисленные в примере 4 § 2 линии (см. черт. 1)

$$b = 96,14 \text{ и } a' = 154,70,$$

если b вычислено с точностью до 0,01 и a' с точностью до 0,014?

Точность первой из этих линий позволяет записать ее в таком же виде, как она получилась в результате вычисления, точность второй требует округлить при записывании ее величину до 0,05 (см. пример 3 настоящего §). Вообще же по соображениям, которые будут подробно развиты в дальнейшем, нужно записать эти обе линии с одинаковым округлением, и таковое должно быть поэтому принято до 0,05, после чего будем окончательно иметь:

$$b = 96,15, \quad a' = 154,70.$$

При самых же вычислениях, дабы не вводить при этом погрешности от округления, мы будем у себя записывать и принимать при дальнейших вычислениях приближенные величины a' и b без округления.

Приведенные в настоящем § примеры обрисовывают с требуемой полнотой вопрос округления приближенных чисел как с формальной, так и с практической стороны.

НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ПУТЕМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ЕГО ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ.

§ 12. Сложение.

В § 10 мы видели, что по величинам a_1 и a_2 верхней и нижней границы приближенного числа a можно легко найти по формулам (3) этого § не только величину числа a , но и границу его погрешности E_a .

Остановимся поэтому на имеющем некоторый практический интерес вопросе, как в отдельных случаях, при различных алгебраических действиях, можно найти верхнюю и нижнюю границу результата, если известна верхняя и нижняя граница величины всех приближенных чисел, участвующих в этих действиях, определение каковых грани

в простейших случаях производится очень легко по формулам (2) § 10.

Начнем со сложения и возьмем прежде всего для уяснения вопроса конкретный пример.

Пример 1. Найти верхнюю и нижнюю границу определяемого по таблицам Гаусса приращения по оси x линии

$$\text{СВ: } 7^\circ 15' \\ \hline 250,0$$

и по ним точность этого приращения.

Означенное приращение Δx , как известно, вычисляется таким образом:

$$\Delta x = 250,0 \times \cos 7^\circ 15' = (200 + 50) \cos 7^\circ 15' = 200 \cos 7^\circ 15' + 50 \cos 7^\circ 15'.$$

Составляющие его слагаемые находятся по таблицам Гаусса непосредственно, и выражающие их числа — 198,40 и 49,60 — имеют границы погрешности 0,005, что дает возможность сразу написать по формулам (2) § 10 их верхние и нижние границы:

$$\begin{aligned} a_1 &= 198,40 + 0,005 = 198,405, \\ b_1 &= 49,60 + 0,005 = 49,605, \\ a_2 &= 198,40 - 0,005 = 198,395, \\ b_2 &= 49,60 - 0,005 = 49,595, \end{aligned}$$

где через a обозначено приращение для 200 м, а через b приращение для 50 м; верхние и нижние границы обозначены, как в § 10.

Возникает вопрос, какова должна быть прежде всего верхняя граница всего приращения Δx линии в 250,0 м или, что то же самое, суммы приращений для линий в 200 м и 50 м.

Известно, что сумма будет иметь наибольшее значение в том случае, если входящие в нее слагаемые будут иметь такое значение.

Поэтому сумма приращений для 200 м и 50 м будет близка к своей верхней границе в том именно случае, когда каждое из этих приращений будет близко к своей верхней границе, и сумма верхних границ этих приращений даст верхнюю границу приращения всей линии в 250 м, т.-е., вводя обозначение для границ суммы c_1 и c_2 , будем иметь:

$$c_1 = a_1 + b_1 = 198,405 + 49,605 = 248,01$$

и таким же образом получим:

$$c_2 = a_2 + b_2 = 198,395 + 49,595 = 247,99.$$

воспользуемся неравенствами (1) § 10, написав их для вычитаемого наоборот:

$$\begin{aligned} a_1 &> A > a_2, \\ b_2 &< B < b_1. \end{aligned}$$

После почленного вычитания эти неравенства дадут следующие неравенства:

$$a_1 - b_2 > A - B > a_2 - b_1. \quad (1)$$

Здесь для приближенного значения разности $A - B$ можно принять $a_1 - b_2$ за верхнюю границу, $a_2 - b_1$ за нижнюю границу, так как эти неравенства являются неравенствами вида (1) § 10.

И таким образом можно считать доказанным следующее правило: верхняя граница разности приближенных чисел a и b получается вычитанием из верхней границы уменьшаемого нижней границы вычитаемого; нижняя граница разности получается вычитанием из нижней границы уменьшаемого верхней границы вычитаемого.

Пример 1. Найти верхнюю и нижнюю границу определяемого непосредственно по таблицам Гаусса приращения линии

$$\frac{CB: 15^\circ 32'}{299,20}$$

по ос. X и затем найти точность этого приращения.

$$\text{Приращение } \Delta x = 299,20 \cos 15^\circ 32' = (300 - 0,80) \cos 15^\circ 32' = 300 \cos 15^\circ 32' - 0,80 \cos 15^\circ 32'.$$

Обозначая здесь

$$300 \cos 15^\circ 32' = 289,04 \text{ через } a$$

и

$$0,80 \cos 15^\circ 32' = 0,77 \text{ через } b$$

и принимая во внимание, что граница погрешности при обоих определениях будет 0,005, пользуясь формулами (2) § 10, найдем:

$$\begin{aligned} a_1 &= 289,04 + 0,005 = 289,045, \\ a_2 &= 289,04 - 0,005 = 289,035, \\ b_1 &= 0,77 + 0,005 = 0,775, \\ b_2 &= 0,77 - 0,005 = 0,765. \end{aligned}$$

Подставляя затем значения этих величин в неравенства (1) настоящего §, получим:

$$\begin{aligned} 289,045 - 0,765 &> 300 \cos 15^\circ 32' - \\ - 0,80 \cos 15^\circ 32' &> 289,035 - 0,775, \end{aligned}$$

или

$$288,28 > \Delta x > 288,26,$$

откуда по формулам (3) § 10 имеем, что приближенная величина

$$\Delta x = \frac{288,28 + 288,26}{2} = 288,27,$$

а граница погрешности приращения

$$E_{\Delta x} = \frac{288,28 - 288,26}{2} = 0,01,$$

т.е. приращение Δx определено с точностью до 0,01.

§ 14. Умножение.

Для умножения приближенных чисел рассмотрим отдельно два случая: 1) когда множитель есть число точное и 2) когда оба сомножителя числа приближенные.

Приступим к выводу правила нахождения верхней и нижней границы приближенного произведения для случая первого. Пусть приближенное число a будет множимым и точное число B будет множителем.

Пусть далее по принятому в § 10 обозначению a_1 будет верхней и a_2 нижней границей числа a и A — его точным значением; тогда, применяя к множимому a неравенства (1) § 10, получим:

$$a_1 > A > a_2,$$

а по умножении всех частей этих неравенств на B получим новые неравенства:

$$a_1 B > AB > a_2 B, \quad (1)$$

которые, в свою очередь, будут неравенствами вида (1) § 10 для произведения AB ; из чего заключаем, что $a_1 B$ есть верхняя и $a_2 B$ нижняя граница приближенного произведения aB , и выводим следующее правило:

Землеустроительное проектирование.

при умножении приближенного числа на точное верхняя граница произведения получается умножением верхней границы, а нижняя умножением нижней границы на число точное.

Пример 1. Найти верхнюю и нижнюю границу определяемого при посредстве арифмометра приращения по оси y линии

$$\begin{array}{r} \text{ЮВ: } 28^\circ 32' \\ \hline 348,5 \end{array}$$

и затем точность этого приращения, считая число 348,5 точным.

Приращение Δy получается, как известно, умножением длины линии 348,5 на натуральную величину $\sin 28^\circ 32' = 0,4777$.

Первое из этих чисел принимается при нашей операции за точное, а второе, как определяемое по таблицам Гаусса, является числом приближенным, с границей погрешности 0,00005 (см. § 8).

Верхняя и нижняя граница a_1 и a_2 приближенной величины $\sin 28^\circ 32'$, который мы обозначим через a , по формулам (2) § 10 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a = 0,4777 + 0,00005 = 0,47775, \\ a_2 &= a - E_a = 0,4777 - 0,00005 = 0,47765; \end{aligned}$$

подставляя теперь в неравенства (1) настоящего § вместо A , a_1 и a_2 соответственно величины $\sin 28^\circ 32'$, 0,47775 и 0,47765, а вместо B 348,5, получим:

$$0,47775 \times 348,5 > \sin 28^\circ 32' \times 348,5 > 0,47765 \times 348,5 \quad (2)$$

или по выполнении действий:

$$166,50 > 348,5 \sin 28^\circ 32' > 166,46,$$

где 166,50 есть верхняя, а 166,46 нижняя граница приращения Δy , и первое получилось округлением в сторону увеличения, а второе в сторону уменьшения соответствующих частей неравенств (2) согласно требований § 11.

Отсюда по формулам (3) § 10 легко находятся Δy и $E_{\Delta y}$ а именно:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{166,50 + 166,46}{2} = 166,48, \\ E_{\Delta y} &= \frac{166,50 - 166,46}{2} = 0,02. \end{aligned}$$

Таким образом данное приращение вычислено с точностью до 0,02 м, и при сравнении с точностью того же приращения, найденного непосредственно по таблицам (см. пример 2 § 12) Гаусса, обнаруживается, что точность в обоих случаях оказалась одинаковой.

Переходя к более общему случаю умножения 2 приближенных чисел, введем обозначения применительно к принятым в § 10: a , a_1 , a_2 и A — для приближенного числа, его верхней и нижней границы и точной величины одного из сомножителей, и b , b_1 , b_2 и B — для таковых же значений другого сомножителя.

После чего, применяя к каждому из этих сомножителей неравенства (1) § 10, получим:

$$\begin{aligned} a_1 &> A > a, \\ b_1 &> B > b, \end{aligned}$$

из которых почленным перемножением найдем согласно правила о неравенствах новые неравенства:

$$a_1 b_1 > AB > a_2 b_2 \quad (2)$$

вида (1) § 10; из чего заключаем, что $a_1 b_1$ будет верхней и $a_2 b_2$ нижней границей приближенного значения ab произведения AB .

Таким же образом можем получить неравенства вида (1) § 10 для произведения из какого-нибудь числа сомножителей;

Откуда выводим правило:

при умножении приближенных чисел верхняя граница произведения получается перемножением верхних границ, а нижняя — нижних границ сомножителей.

Пример 2. Найти верхнюю и нижнюю границу и затем точность приближенного произведения $b \sin a$, определяемого помощью арифмометра, где $b = 96,14$ есть приближенное число, взятое с точностью до 0,01, а

$$\sin a = \sin 27^\circ 32' = 0,4623$$

берется из таблиц Гаусса.

Найдем сначала верхние и нижние границы приближенных чисел 96,14 и 0,4623.

Так как точность, а следовательно, и граница погрешности первого из них равна 0,01, то по формулам (2) § 10 имеем его верхнюю и нижнюю границы:

$$\begin{aligned} b_1 &= 96,14 + 0,01 = 96,15, \\ b_2 &= 96,14 - 0,01 = 96,13. \end{aligned}$$

Так как, далее, граница погрешности приближенной величины $a = \sin 27^\circ 32'$ равна 0,00005 (см. § 8), то его верхняя и нижняя границы a_1 и a_2 получатся по формулам (2) § 10:

$$a_1 = a + E_a = 0,4623 + 0,00005 = 0,46235$$

и

$$a_2 = a - E_a = 0,4623 - 0,00005 = 0,46225.$$

После чего, применяя к произведению $b \sin \alpha$ только что выведенное правило, получим, что верхняя граница приближенного произведения $b \sin \alpha$ будет:

$$b_1 a_1 = 96,15 \times 0,46235 = 44,455$$

(с округлением в сторону увеличения), а нижняя граница:

$$b_2 a_2 = 96,13 \times 0,46225 = 44,436$$

(с округлением в сторону уменьшения).

Здесь лишний знак взят для того, чтобы при получении величины приближенного произведения нам не пришлось округлять его ровно на 0,005.

После этого искомое приближенное произведение $b \sin \alpha$ получится по формулам (3) § 10, т.е. будет равняться:

$$\frac{44,455 + 44,436}{2} = 44,4455,$$

$$\text{или с округлением} = 44,45;$$

граница же погрешности этого произведения будет равняться большей из двух разностей:

$$44,455 - 44,45 = 0,005$$

и

$$44,45 - 44,436 = 0,014, \text{ т.е. } 0,014,$$

и таким образом точность найденного произведения будет до 0,014.

§ 15. Деление.

Пусть мы имеем приближенное число a , для которого по принятым в § 10 обозначениям верхняя и нижняя граница и точное значение соответственно будут a_1 , a_2 и A , и число b , для которого при том же порядке обозначений соответственные значения будут: b_1 , b_2 и B .

Приступим к выводу правила нахождения верхней и нижней границы приближенного частного $\frac{a}{b}$.

Применяя в отдельности к a и b неравенства (1) § 10 и записывая их для b в обратном порядке, получим неравенства:

$$\begin{aligned} a_1 &> A > a_2 \\ b_2 &< B < b_1, \end{aligned}$$

откуда на основании правил о неравенствах почленным делением их получим неравенства:

$$\frac{a_1}{b_2} > \frac{A}{B} > \frac{a_2}{b_1} \quad (1)$$

вида (1) § 10, вследствие чего заключаем, что для приближенного частного $\frac{a}{b}$ будет $\frac{a_1}{b_2}$ верхней, а $\frac{a_2}{b_1}$ нижней границей; и таким образом получаем правило:

при делении приближенных чисел верхняя граница частного получается делением верхней границы делимого на нижнюю границу делителя, а нижняя граница частного, наоборот, делением нижней границы делимого на верхнюю границу делителя.

Пример 1. Найти верхнюю и нижнюю границу $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ (см. прим. 3 § 2 и затем пример 9 § 11), вычисленного при помощи арифмометра, и затем его точность.

$$\operatorname{tg} 27^\circ 32' = \frac{\sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{0,4623}{0,8867},$$

где $\sin 27^\circ 32' = 0,4623$ и $\cos 27^\circ 32' = 0,8867$. Обозначим приближенную величину $\sin 27^\circ 32'$ через a и $\cos 27^\circ 32'$ через b ; тогда при обозначениях § 10 верхняя и нижняя граница a и b будут соответственно

$$a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } b_1 \text{ и } b_2.$$

Они легко находятся по формулам (2) § 10, а именно:

$$a_1 = a + E_a = 0,4623 + 0,00005 = 0,46235,$$

$$a_2 = a - E_a = 0,4623 - 0,00005 = 0,46225,$$

$$b_1 = b + E_b = 0,8867 + 0,00005 = 0,88675,$$

$$b_2 = b - E_b = 0,8867 - 0,00005 = 0,88665.$$

После чего, применяя к данному примеру только что выведенное правило, получим:

$$\text{верхняя граница частного } \frac{a}{b} \text{ равна } \frac{a_1}{b_2} = \frac{0,46235}{0,88565} = 0,52146$$

(с округлением в сторону увеличения),

$$\text{нижняя граница частного } \frac{a}{b} \text{ равна } \frac{a_2}{b_1} = \frac{0,46225}{0,88675} = 0,52128$$

(с округлением в сторону уменьшения).

Откуда по формулам (3) § 10 имеем:

$$\text{tg } 27^\circ 32' = \frac{a}{b} = \frac{0,52146 + 0,52128}{2} = 0,52137,$$

или с округлением 0,5214, а граница погрешности $\text{tg } 27^\circ 32'$, т.-е.

$$E_{\text{tg } 27^\circ 32'}$$

будет равна большей из разностей:

$$\frac{a_1}{b_2} - \text{tg } 27^\circ 32' = 0,52146 - 0,5214 = 0,00006,$$

и

$$\text{tg } 27^\circ 32' - \frac{a_2}{b_1} = 0,5214 - 0,52128 = 0,00012,$$

т.-е. $E_{\text{tg } 27^\circ 32'} = 0,00012$, и значение $\text{tg } 27^\circ 32'$ получено нами, следовательно, с точностью до 0,00012.

§ 16. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня.

Пусть мы имеем приближенное число a^1 , для которого верхняя и нижняя границы, а равно также точное значение соответственно будут: a_1 , a_2 и A .

Применяя в этом случае неравенства (1) § 10, получим:

$$a_1 > A > a_2 \quad (1)$$

¹⁾ Во всех случаях подразумевается, что вводимые нами в общем виде числа будут положительными.

и, возведя затем все части этих неравенств в квадрат, получим согласно правил о неравенствах новые неравенства:

$$a_1^2 > A^2 > a_2^2 \quad (2)$$

вида (1) § 10, из чего заключаем, что a_1^2 есть верхняя и a_2^2 — нижняя граница приближенной степени a^2 числа a , и выводим правило: верхняя граница второй степени приближенного числа получается возведением в квадрат верхней границы, а нижняя — нижней границы приближенного числа.

Следует заметить, что то же самое мы могли бы получить как следствие формулы (2) § 14.

Переходя к выводу правила нахождения величины верхней и нижней границы квадратного корня, воспользуемся предыдущими обозначениями этого § и извлечем квадратный корень из всех частей неравенств (1); после чего на основании правил о неравенствах получим:

$$\sqrt{a_1} > \sqrt{A} > \sqrt{a_2}. \quad (3)$$

Данные неравенства принадлежат к виду неравенств (1) § 10, из чего заключаем, что $\sqrt{a_1}$ есть верхняя граница величины $\sqrt{a}$, а $\sqrt{a_2}$ — нижняя граница, или другими словами: верхняя граница квадратного корня получается извлечением такового корня из верхней границы, а нижняя — из нижней границы подкоренного выражения.

Пример 1. Найти верхнюю и нижнюю границу гипотенузы c прямоугольного $\triangle$, если катеты его $a = 252,13$ и $b = 139,49$ вычислены первый с точностью до 0,02, а второй до 0,01, и вычисление c производится помощью арифмометра.

По правилам геометрии имеем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{252,13^2 + 139,49^2}.$$

Найдем сначала верхнюю и нижнюю границу подкоренного выражения, для чего применим неравенства (2) настоящего § отдельно к a^2 и b^2 , будем иметь, принимая обозначения § 10:

$$a_1^2 > a^2 > a_2^2$$

и

$$b_1^2 > b^2 > b_2^2$$

и, прилагая затем к этим неравенствам правило о нахождении верхней и нижней границы суммы приближенных чисел, получим:

$$a_1^2 + b_1^2 > a^2 + b^2 > a_2^2 + b_2^2. \quad (4).$$

Величины a_1 , a_2 , b_1 и b_2 находятся по формулам (2) § 10:

$$a_1 = a + E_a = 252,13 + 0,02 = 252,15,$$

$$a_2 = a - E_a = 252,13 - 0,02 = 252,11,$$

$$b_1 = b + E_b = 139,49 + 0,01 = 139,50,$$

$$b_2 = b - E_b = 139,49 - 0,01 = 139,48,$$

где E_a взята равной 0,02, ибо такова точность вычисления a ,
и E_b " " 0,01, " " " " " b

Возводя затем a_1 , a_2 , b_1 и b_2 в квадрат, найдем:

$$a_1^2 = 63579,6225 = (\text{с округл.}) 63580,$$

$$a_2^2 = 63559,4521 = (\text{ " " }) 63559,$$

$$b_1^2 = 19460,2500 = (\text{ " " }) 19461,$$

$$b_2^2 = 19454,6704 = (\text{ " " }) 19454.$$

Подставляя в неравенства (4) вместо величин a_1^2 , a_2^2 , b_1^2 и b_2^2 их числовые значения, получим:

$$63580 + 19461 > a^2 + b^2 > 63559 + 19454,$$

или по выполнении действий:

$$83041 > a^2 + b^2 > 83013.$$

Воспользовавшись правилом нахождения верхней и нижней границы квадратного корня и применив к данному случаю неравенства (3) настоящего §, будем иметь:

$$\sqrt{83041} > \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{83013},$$

или при извлечении квадратных корней с округлением верхней границы в сторону увеличения, а нижней в сторону уменьшения и после замены $\sqrt{a^2 + b^2}$ на c получим:

$$288,169 > c > 288,119;$$

и таким образом 288,169 и 288,119 будут верхней и нижней границей для числа c , откуда по формулам (3) § 10 получим:

$$c = \frac{288,169 + 288,119}{2} = 288,144 \text{ и с округлением } 288,14,$$

а E_c будет равна большей из разностей (см. § 11):

$$289,169 - 288,14 = 0,029$$

и

$$288,14 - 288,119 = 0,021,$$

т.-е. равна 0,029, с каковой точностью и будет вычислена величина c .

ТОЧНОСТЬ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЕДИНИЦАХ И ОСОБЕННОСТИ ТАБЛИЦ ГАУССА.

§ 17. Погрешности абсолютные и относительные.

Все те погрешности, о которых мы говорили до сих пор, называются погрешностями абсолютными, так как выражаются всегда в абсолютных единицах—метрах, сантиметрах и проч.

Но часто бывает удобнее иметь дело с погрешностями относительными, выражающимися в долях самого определяемого числа.

Так в § 5 приведено было приближенное число 129,00, взятое с абсолютной погрешностью 0,0019...; для этого же числа относительной погрешностью будет $\frac{0,0019...}{129,00}$, т.-е. отношение погрешности абсолютной к точной величине самого числа.

Но по соображениям практическим и считаясь с незначительностью изменения относительной погрешности от замены точного числа его приближенной величиной, мы всегда будем брать относительную погрешность как частное от деления абсолютной погрешности на приближенное число, т.-е. для данного случая и с округлением:

$$\frac{0,0019...}{129,00} = 0,000015;$$

также как и 0,0019... погрешность $\frac{0,0019...}{129,00}$ будет действительной погрешностью приближенного числа, взятой притом с округлением.

Обычно же мы не только не будем знать величины действительной относительной погрешности, но даже нам неизвестен будет и ее знак, и мы так же, как и для погрешности абсолютной, вынуждены

будем ограничиться знакомством с тем, в каких границах эта погрешность должна заключаться.

В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с погрешностями абсолютными, и мы так же, как и до сих пор, будем часто называть их для краткости просто погрешностями.

§ 18. Граница относительной погрешности.

Применив общее определение относительной погрешности предыдущего § к границе относительной погрешности, будем считать ее частным от деления границы абсолютной погрешности на величину приближенного числа.

Вводя для относительной погрешности обозначения через e со знаком, показывающим, для какого приближенного числа она берется, будем иметь для числа a согласно данного определения соотношение

$$e_a = \frac{E_a}{a}, \quad (1)$$

из которого можно наоборот, по a и e_a определить величину E_a по формуле:

$$E_a = a e_a, \quad (2)$$

и таким образом, зная приближенное число и одну из границ погрешностей, мы всегда можем найти другую из них.

§ 19. Точность в относительных единицах.

До сих пор точность приближенного числа мы определяли величиной его границы абсолютной погрешности и выражали ее в абсолютных единицах—метрах, сантиметрах и пр., но часто бывает удобнее определять точность границей относительной погрешности и выражать ее таким образом в относительных единицах.

В первом случае мы будем применять наименование „точность в абсолютных единицах“, которое часто для краткости так же, как и до сих пор, будем заменять просто термином „точность“, а во втором случае будем применять название „точность в относительных единицах“.

Эта последняя значительно лучше характеризует приближенное число, что обнаруживается из приводимого ниже примера.

ПРИМЕР 1. Сравнить точность в относительных единицах для определяемых из таблиц Гаусса $\sin 0^\circ 01'$ и $\sin 89^\circ 59'$.

Принимая во внимание, что граница абсолютной погрешности $\sin$ того и другого угла одинакова и равна 0,00005 (см. § 8) и что приближенная величина $\sin 0^\circ 01' = 0,0003$, а $\sin 89^\circ 59' = 1,0000$, найдем по формуле (1) предыдущего § границы относительных погрешностей e для обоих углов, а именно:

$$e_{\sin 0^\circ 01'} = \frac{E_{\sin 0^\circ 01'}}{\sin 0^\circ 01'} = \frac{0,00005}{0,0003} = \frac{1}{6}$$

и

$$e_{\sin 89^\circ 59'} = \frac{E_{\sin 89^\circ 59'}}{\sin 89^\circ 59'} = \frac{0,00005}{1,0000} = 0,00005 = \frac{1}{20000},$$

откуда следует, что точность в относительных единицах приближенной величины $\sin 0^\circ 01'$ по таблицам Гаусса будет $\frac{1}{6}$, а для $\sin 89^\circ 59' = \frac{1}{20000}$, т.е. в первом случае погрешность может быть близкой к $\frac{1}{6}$ части определяемой величины, а во втором она меньше $\frac{1}{20000}$ соответствующей величины, и таким образом $\sin 89^\circ 59'$ находится по таблицам Гаусса несравненно более точно, чем $\sin 0^\circ 01'$, хотя точность для того и другого в абсолютных единицах и одинакова.

§ 20. Точность чисел, получаемых по различным строкам и столбцам таблиц Гаусса.

В примере 1 предыдущего § приведено различие в точности для двух самых крайних строк таблиц Гаусса; нетрудно показать, что таковое различие проводится постепенно для $\sin$ различных углов от 0° до 90° .

Действительно, для любого угла α в пределах от 0° до 90° , имеем по формуле (1) § 18 равенство:

$$e_{\sin \alpha} = \frac{E_{\sin \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{0,00005}{\sin \alpha},$$

где

$$E \sin \alpha = 0,00005 \text{ (см. § 8);}$$

так как величина $\sin \alpha$ постепенно увеличивается при изменении угла α от 0° до 90° , то величина $e \sin \alpha = \frac{0,00005}{\sin \alpha}$ будет при этом постепенно уменьшаться, и таким образом по таблицам Гаусса наиболее грубый результат получается для $\sin 0^\circ 01'$, а затем точность с увеличением угла постепенно увеличивается и делается наибольшей для $\sin 89^\circ 59'$.

Так как $\sin$ всякого угла $= \cos$ дополнительного угла, то для приближенной величины $\cos$, определяемого по таблицам Гаусса получаем обратный вывод, т.е. эта точность является наибольшей для $\cos 0^\circ 01'$, а наименьшей — для $\cos 89^\circ 59'$ и постепенно убывает при переходе от 0° к 90° .

Как будет показано ниже, точность других столбцов таблиц Гаусса целиком зависит по той же строке от точности, определяющего величину $\sin$ столбца 1-го, и поэтому мы можем сделать тот вывод, что вообще точность всех приближенных чисел, получаемых по таблицам $\sin$ для малых углов или, что то же самое, таблицам $\cos$ для углов, близких к 90° , является весьма низкой, каковое обстоятельство нам придется принять во внимание во избежание получения чрезвычайно грубых погрешностей при делении на $\sin$ малых углов, о чем и будет изложено в дальнейшем.

Переходя к оценке точности в относительных единицах приближенных чисел, получаемых из различных столбцов таблиц Гаусса, обратим прежде внимание на то обстоятельство, что для произведения на $\sin$ или $\cos$ различных углов чисел, равных

$$40, \quad 50 \dots 80, \quad 90, \quad 100, \quad 200 \quad \text{и} \quad 300,$$

определяемых по столбцам

$$4\text{-му}, \quad 5\text{-му}, \quad 8\text{-му}, \quad 9\text{-му}, \quad 1\text{-му}, \quad 2\text{-му} \quad \text{и} \quad 3\text{-му},$$

получается точность в абсолютных единицах одинаковая и равная 0,005 (см. § 8), несмотря на различную величину определяемых по этим столбцам приближенных чисел, что делает точность в относительных единицах весьма различной.

Действительно, для угла α по таблицам $\sin$ (то же самое можно сказать и относительно таблицы $\cos$) величина определяемого произведения будет равна:

$$40 \sin \alpha, \quad 50 \sin \alpha \dots 90 \sin \alpha, \quad 100 \sin \alpha, \quad 200 \sin \alpha \quad \text{и} \quad 300 \sin \alpha$$

а граница относительной погрешности по формулам (1) § 18 будет соответственно равна:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{0,005}{40 \sin \alpha} & \frac{0,005}{50 \sin \alpha} & \dots & \frac{0,005}{80 \sin \alpha} & \frac{0,005}{90 \sin \alpha} & & \\ & \frac{0,005}{100 \sin \alpha} & & \frac{0,005}{200 \sin \alpha} & \text{и} & \frac{0,005}{300 \sin \alpha} & \end{array} \quad (1),$$

из чего заключаем, что таковая будет наибольшей для величины $\sin$ приращения $40 \sin \alpha$, определяемого по столбцу 4-му, и наименьшей для приближенного числа $300 \sin \alpha$, определяемого по столбцу 3-му, изменяясь постепенно между ними в отношении

$$4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 20 : 30,$$

и таким образом *третий столбец таблиц Гаусса дает самый точный, а четвертый — самый грубый результат.*

Переходя к оценке точности в относительных единицах приближенных чисел, получаемых по табличкам Cent, примем прежде всего во внимание, что по этим табличкам производится определение произведений на $\cos$ или $\sin$ различных углов для чисел обычно с двумя значащими цифрами, выражающих дробную часть численного сомножителя, и что поэтому сравнивать точность получаемых по этим табличкам произведений с таковыми же для основных таблиц Гаусса несколько затруднительно; и ограничимся поэтому только частными случаями.

Взяв по табличкам Cent произведения на $\sin \alpha$ чисел, равных

$$0,40, \quad 0,50, \quad 0,60 \dots, \quad 0,90,$$

получим соответственно:

$$0,40 \sin \alpha, \quad 0,50 \sin \alpha, \quad 0,60 \sin \alpha \dots, \quad 0,90 \sin \alpha.$$

Границы абсолютных погрешностей всех этих произведений будут одинаковы и равны половине единицы последнего знака, т.е. 0,005; откуда границы относительных погрешностей будут по формуле (1) § 18 соответственно равны:

$$\frac{0,005}{0,40 \sin \alpha}, \quad \frac{0,005}{0,50 \sin \alpha}, \quad \frac{0,005}{0,60 \sin \alpha} \dots \frac{0,005}{0,90 \sin \alpha};$$

сравнивая их с таковыми же ряда (1) настоящего §, видим, что таблички *Cent* для этих случаев дают приближенные числа в 100 раз менее точными в относительных единицах, чем основные таблицы Гаусса, хотя в абсолютных единицах точность у них была одинаковой.

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ.

§ 21. Необходимость непосредственного определения границы погрешности.

В §§ 12 и 16 было показано, что граница погрешности приближенного числа может быть определена во всех тех случаях, когда приближенное число получается в результате различного рода алгебраических действий, при чем требовалось для этого предварительно найти верхнюю и нижнюю границы приближенного числа.

Но этот способ определения границы погрешности, будучи вполне применимым для отдельных случаев и особенно для случаев сложных вычислений, имеет тот недостаток, что полученные от этого применения выводы неудобны для обобщений, и вследствие этого нами будет дан другой способ определения границы погрешности, при котором эти последние получаются непосредственным вычислением на основании простых и удобных для запоминания правил; для вывода этих правил нам придется воспользоваться всеми полученными в §§ 12—16 формулами относительно верхней и нижней границы результата различных алгебраических действий, в чем и заключалось главное назначение этих формул.

§ 22. Сложение.

Для определения верхней и нижней границ суммы приближенных слагаемых нами в § 12 были даны неравенства (1):

$$a_1 + b_1 + c_1 + \dots > A + B + C + \dots > a_2 + b_2 + c_2 + \dots \quad (1);$$

исключим из этих неравенств величины верхних и нижних границ слагаемых — $a_1, b_1, c_1, \dots$ и $a_2, b_2, c_2, \dots$, заменив их равными им величинами, но определенными через приближенные числа $a, b, c, \dots$

и границы погрешностей $E_a, E_b, E_c, \dots$ согласно формул (2) § 10, а именно:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, & a_2 &= a - E_a, \\ b_1 &= b + E_b, & b_2 &= b - E_b, \\ c_1 &= c + E_c, & c_2 &= c - E_c, \end{aligned}$$

после чего наши неравенства переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} (a + E_a) + (b + E_b) + (c + E_c) + \dots &> A + B + C + \dots > \\ &> (a - E_a) + (b - E_b) + (c - E_c) + \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (a + b + c + \dots) + (E_a + E_b + E_c + \dots) &> A + B + C + \dots > \\ &> (a + b + c + \dots) - (E_a + E_b + E_c + \dots) \quad (2). \end{aligned}$$

Таким образом оказалось, что левая часть этих неравенств, представляющая собою верхнюю границу приближенной суммы $(a + b + c + \dots)$, равна этой сумме $+(E_a + E_b + E_c + \dots)$, а правая часть, представляющая собою нижнюю границу приближенной суммы $(a + b + c + \dots)$ равна этой сумме $-(E_a + E_b + E_c + \dots)$. Если при этом вспомним, что верхняя граница всякого приближенного числа равняется этому числу $+$ граница погрешности, а нижняя граница равна приближенному числу $-$ граница погрешности (см. формулу 2 § 10), то станет ясно, что $E_a + E_b + E_c + \dots$ представляет собою границу погрешности приближенной суммы $a + b + c + \dots$.

Этот же вывод можно было бы сделать из самого сравнения неравенств (2) настоящего § с неравенствами (1) § 10: $a_1 > A > a_2$ после преобразования этих неравенств путем замены a_1 и a_2 через $a + E_a$ и $a - E_a$ согласно формул (2) § 10, а именно с неравенствами:

$$a + E_a > A > a - E_a, \quad (3)$$

так как тогда обнаружится, что сумма $E_a + E_b + E_c + \dots$ должна быть границей погрешности приближенной суммы $a + b + c + \dots$. Таким образом получаем равенство:

$$E_{a+b+c\dots} = E_a + E_b + E_c + \dots \quad (4)$$

и выводим весьма простое правило: при сложении приближенных чисел границы их абсолютных погрешностей суммируются.

Пример 1. Решим пример 2 § 12 по новому методу, т.е. найдем границу погрешности приращения по оси у линии $\text{КВ: } 28^\circ 32'$ непосредственно по таблицам Гаусса.

Мы знаем, что

$$\Delta y = 148,5 \sin 28^\circ 32' = (100 + 40 + 8 + 0,5) \sin 28^\circ 32' = 100 \sin 28^\circ 32' + 40 \sin 28^\circ 32' + 8 \sin 28^\circ 32' + 0,5 \sin 28^\circ 32' = 47,77 + 19,11 + 3,82 + 0,24,$$

т.е. Δy представляет собою сумму четырех приращений — для 100 м, 40 м, 8 м и 0,5 м.

Два первых и четвертое приращения находятся по таблицам Гаусса, как известно, с двумя десятичными знаками, приращение же для 8 м может быть взято и с тремя десятичными знаками. Откладывая объяснения этого действия до окончания решения настоящего примера, мы возьмем и приращение для 8 м тоже с двумя десятичными знаками, округлив приведенное в таблицах число 3,821.

Граница погрешности двух первых и четвертого слагаемого будет равняться половине единицы последнего знака, т.е. 0,005, что же касается границы погрешности приращения для 8 м, то таковая будет величиной меньшей, так как в данном случае первая отбрасываемая цифра будет 1, но в других примерах эта цифра может быть и большей и, дабы сделать рассуждение более общим, примем границу погрешности и для приращения 8 м в 0,005, и тогда для каждого из всех четырех слагаемых граница погрешности будет равняться 0,005.

Применяя только что доказанное правило, будем иметь:

$$E_{\Delta y} = E_{100 \sin 28^\circ 32'} + E_{40 \sin 28^\circ 32'} + E_{8 \sin 28^\circ 32'} + E_{0,5 \sin 28^\circ 32'} = 0,005 + 0,005 + 0,005 + 0,005 = 0,02,$$

т.е. приращение вычислено с точностью до 0,02 м.

Если бы мы брали для 8 м приращение с тремя десятичными знаками, то это было бы совершенно нерационально по той причине, что три слагаемых для Δy берутся с двумя десятичными знаками, что делает уже цифру сотых долей в приращении Δy сомнительной, и цифра тысячных долей, введенная в сумму третьим слагаемым, будет случайной и излишней.

Вообще при сложении приближенных чисел нужно стремиться брать их такими, чтобы границы их абсолютных погрешностей были одинаковы, и этому правилу как нельзя более удовлетворяют таблицы Гаусса, когда по ним берутся приращения координат.

Пример 2. Найти точность определяемого непосредственно по таблицам Гаусса приращения для линии в 900 м, считая это число точным.

Уже на предыдущем примере мы убедились, что на границу погрешности приращения координат не имеет влияния, для какого угла и по какой оси мы находим это приращение, и следовательно данный вопрос можно рассмотреть в общем виде.

Если величину искомого приращения будем получать по столбцу 9, то приращение это получится с одним десятичным знаком и граница его погрешности будет равна половине единицы последнего знака, т.е. 0,05.

Результат получится грубым, потому что 9-й столбец таблиц Гаусса, как показано было в § 20, дает приближенные числа недостаточно точными, и если мы воспользуемся столбцом 3-м, как наиболее точным, то можно будет ожидать результата лучшего качества.

Действительно, рассматривая 900 м, как $300 + 300 + 300$, и принимая во внимание, что приращение для 300 м находится с границей погрешности, равной 0,005, получим на основании выведенного в настоящем § правила определения границы погрешности суммы, что граница погрешности приращения координат для линии в 900 м равняется $0,005 + 0,005 + 0,005 = 0,015$, и при таком способе нахождения приращения точность его будет значительно более высокой.

Пример 3. Найти точность определенного непосредственно по таблицам Гаусса приращения координат для линии 858,3 м.

Рассматривая линию 858,3, как сумму $300 + 300 + 200 + 50 + 8 + 0,3$, и считаясь с тем, что искомое приращение будет состоять, таким образом, из 6 слагаемых, а граница погрешности каждого слагаемого равна 0,005, найдем, что согласно выведенного в настоящем § правила граница погрешности приращения всей линии 858,3 м будет равна 6 раз взятой слагаемым границе погрешности 0,005, т.е. $6 \times 0,005 = 0,03$ м, и точность этого приращения окажется до 0,03 м.

Пример 4. Какова наибольшая граница погрешности определяемого непосредственно по таблицам Гаусса приращения линии до 1000 м длиной.

Какова бы в этих пределах ни была длина линии, определение ее приращения распадается не более, чем на 6 операций, подобно тому, как и для примера 3 настоящего §, и граница погрешности ее приращения будет равна 6 раз взятой границе погрешности 0,005, т.е. 0,03. Таким образом, согласно доказанного в примере 4 § 11, приращение всякой линии до 1000 м может быть округлено до 0,05 м, и при этом общая граница его погрешности будет менее 0,05, и

по мотивам примера 7 § 11 следует рекомендовать при производстве вычислений без арифмометра записывать приращения в таблицы координат округленными до 0,05.

§ 23. Вычитание.

Подобно тому, как и при выводе правила нахождения границы погрешности суммы, возьмем неравенства (1) § 13, данные для нахождения верхней и нижней границы разности:

$$a_1 - b_2 > A - B > a_2 - b_1$$

и в них исключим верхние и нижние границы: a_1 , a_2 , b_1 и b_2 , заменив их равными им величинами из формул (2) § 10, т.-е.:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, \\ a_2 &= a - E_a, \\ b_1 &= b + E_b, \\ b_2 &= b - E_b, \end{aligned}$$

после чего получим:

$$(a + E_a) - (b - E_b) > A - B > (a - E_a) - (b + E_b),$$

или:

$$(a - b) + (E_a + E_b) > A - B > (a - b) - (E_a + E_b)$$

и, сравнивая затем последние неравенства с общего вида неравенствами (3) § 22:

$$a + E_a > A > a - E_a,$$

получим, что $E_a + E_b$ является границей погрешности приближенной разности, или иными словами имеем равенство:

$$E_{a-b} = E_a + E_b, \quad (1)$$

откуда выводим правило, что при вычитании приближенных чисел границы их абсолютных погрешностей суммируются.

Или, соединяя вместе с правилом, выведенным в предыдущем §, получим, формулируя его несколько иначе, более общее правило: граница абсолютной погрешности суммы или разности приближенных чисел равна сумме границ

абсолютных погрешностей слагаемых, или уменьшаемого с вычитаемым.

Пример 1. Найти точность определенного непосредственно по таблицам Гаусса приращения координат для линии 299,2 м.

Будем считать, что подобно тому, как и в примере 1 § 13, искомое приращение получается, как разность приращений для 300 м и для 0,8 м.

Так как граница погрешности для каждого из этих приращений равна 0,005, то, по только что выведенному правилу граница погрешности приращения координат для линии 299,2 м будет равна сумме границ погрешностей для линии в 300 м и 0,8 м, т.-е.

$$0,005 + 0,005 = 0,01,$$

и таким образом данное приращение находится с точностью до 0,01 м.

§ 24. Умножение и деление приближенного числа на число точное.

Воспользуемся для получения правила нахождения границы погрешности произведения неравенствами (1) § 14:

$$a_1 B > AB > a_2 B$$

и подставим в них, подобно тому, как мы поступали в §§ 22 и 23, вместо a_1 и a_2 их значения, определяемые по формулам (2) § 10:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, \\ a_2 &= a - E_a, \end{aligned}$$

после чего будем иметь:

$$(a + E_a) B > AB > (a - E_a) B,$$

или:

$$a B + E_a B > AB > a B - E_a B.$$

Сравнивая эти неравенства с общим видом неравенств (3) § 22:

$$a + E_a > A > a - E_a,$$

приходим к выводу, что $E_a B$ будет служить границей погрешности для приближенного произведения, и таким образом получаем:

$$E_{(aB)} = E_a B, \quad (1)$$

т.е.: граница абсолютной погрешности произведения приближенного числа на число точное равняется произведению границы погрешности приближенного числа на число точное, или иначе: при умножении приближенного числа на число точное граница абсолютной погрешности приближенного числа умножается на число точное.

Здесь B может быть каким угодно положительным числом. Приняв его равным $\frac{1}{c}$, будем иметь вместо равенства (1) настоящего § следующее:

$$E\left(a \cdot \frac{1}{c}\right) = (E_a) \frac{1}{c},$$

или иначе:

$$E_{\frac{a}{c}} = \frac{E_a}{c}, \quad (2)$$

откуда выводим правило: граница абсолютной погрешности частного из числа приближенного и точного равняется частному границы абсолютной погрешности числа приближенного на число точное, или иначе: при делении числа приближенного на число точное граница абсолютной погрешности числа приближенного делится на число точное.

Из двух только что выведенных правил получается такое следствие: от умножения на число большее единицы или от деления на число меньшее единицы точность приближенного числа уменьшается (так как граница абсолютной погрешности увеличивается), а от умножения на число меньшее единицы или деления на число большее единицы точность приближенного числа увеличивается (так как уменьшается граница его погрешности).

Пример 1. Определить точность вычисленного при помощи арифмометра приращения координат для линии 148,5, считая число 148,5 точным.

Приступая к решению данного примера прежде всего вспомним, что при нахождении приращений при помощи арифмометра приходится умножать число, выражающее длину линии (в данном примере 148,5), которое обычно берется с одним десятичным знаком, на натуральную величину $\sin$ или $\cos$, которые по таблицам Гаусса

берутся с 4 десятичными знаками; при этом произведение получается с 5 десятичными знаками.

Но так как нам необходимо получать приращения только с двумя десятичными знаками, то вычисленные приращения необходимо округлять, а при этой операции, как было указано в § 11, вводится погрешность от округления.

В § II была дана формула (1):

$$E_a = E_{1a} + E_{2a},$$

где E_a есть граница общей погрешности приближенного числа a , E_{1a} есть та часть этой погрешности, которая получилась только от вычисления величины a , и E_{2a} есть часть, которая получилась только от округления.

Для данного примера приближенному числу a соответствует величина вычисленного и взятого с округлением до 2 десятичных знаков приращения координат линии 148,5.

Приступим к нахождению величин E_1 и E_2 в отдельности.

Для нахождения границы абсолютной погрешности вычисленного приращения можно воспользоваться выведенным в настоящем § правилом нахождения таковой погрешности при умножении числа приближенного на число точное.

Так как в нашем примере приближенным сомножителем является натуральное значение $\sin$ или $\cos$ румба, взятое по таблицам Гаусса с границей погрешности 0,00005, а точным — число = 148,5, то граница абсолютной погрешности вычисленного приращения будет, по этому правилу, равняться границе погрешности $\sin$ или $\cos$ румба, умноженной на 148,5, то-есть

$$E_1 = 0,00005 \times 148,5 = 0,007425,$$

или с округлением, согласно правил округления погрешности (см. § 11),

$$E_1 = 0,008.$$

Величина E_2 при округлении до 2 десятичных знаков равна, как известно, 0,005; и таким образом граница общей абсолютной погрешности вычисленной и округленной величины приращения координат для линии 148,5 оказывается такой:

$$E = E_1 + E_2 = 0,008 + 0,005 = 0,013,$$

и точность найденного приращения будет до 0,013.

Сравнивая эту точность с точностью приращения для той же линии, вычисленного непосредственно по таблицам Гаусса, до 0,02 (см. прим. 1 § 22), делаем тот вывод, что в этом случае вычисление при помощи арифмометра дает более точный результат.

Пример 2. Определить точность вычисленного при помощи арифмометра приращения координат для линии 858,3, считая число 858,3 точным.

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем примере, получим, что граница абсолютной погрешности приращения для линии 858,3 будет равна

$$0,00005 \times 858,3 = 0,042915,$$

или с округлением по правилам округления границы погрешности (см. § 11) 0,043. Прибавляя сюда границу погрешности от округления величины приращения (см. предыдущий пример) = 0,005, получим границу общей погрешности равной

$$0,043 + 0,005 = 0,048.$$

Таким образом приращение для линии 858,3 будет найдено при посредстве арифмометра с точностью до 0,048.

Сравнивая эту точность с точностью определенного непосредственно по таблицам Гаусса приращения для той же линии (см. пример 3 § 22) до 0,03, мы видим, что в этом случае работа помощью арифмометра дает значительно менее точный результат.

В следующем § мы покажем, как путем введения весьма простой поправки к обыкновенным вычислениям приращений при помощи арифмометра мы можем эту работу уточнить, уменьшив границу погрешности от вычисления ровно вдвое, и это даст возможность затем во всех случаях получать при помощи арифмометра результат достаточно точный.

Выведенные в настоящем § правила в некоторых случаях удобнее заменить другими, в которых будет идти речь о границе относительной погрешности, вместо границы погрешности абсолютной.

Граница относительной погрешности произведения aB , e_{aB} (см. форм. 1 § 18) равняется $\frac{E_{aB}}{aB}$; подставляя же вместо E_{aB} ее значение из формулы 1 настоящего §, $E_{aB} = E_a B$, получим:

$$e_{aB} = \frac{E_{aB}}{aB} = \frac{E_a B}{aB} = \frac{E_a}{a} = l_a,$$

где произведено сокращение числителя и знаменателя на B и замена величины $\frac{E_a}{a}$ на e_a , согласно формул (1) § 18.

Таким образом мы получили:

$$e_{aB} = e_a, \quad (3)$$

т.е. граница относительной погрешности произведения из числа приближенного и точного равняется границе относительной погрешности приближенного числа, являющегося сомножителем, или иначе: при умножении приближенного числа на число точное граница относительной погрешности не изменяется.

Заменяя в формуле (3) настоящего § число B на $\frac{1}{c}$, получим формулу:

$$e_{\frac{a}{c}} = e_a, \quad (4)$$

т.е. при делении приближенного числа на число точное граница относительной погрешности не изменяется.

Пример 3. Какова точность в относительных единицах определяемых при помощи арифмометра приращений координат для различных углов?

Как известно, приращения координат представляют собою произведения чисел, выражающих длину линий, которые при вычислениях мы принимаем за точные на $\cos$ или $\sin$ угла, являющиеся числами приближенным; поэтому, применяя к этому случаю только что выведенное правило, получим, что точность в относительных единицах определяемых при посредстве арифмометра приращений координат равна точности в тех же единицах получаемых по таблицам Гаусса натуральных величин $\sin$ и $\cos$.

А так как, далее, величины $\sin$ и $\cos$ получаются из чисел первого столбца таблиц Гаусса, посредством деления их на 10, при какой операции, по только что доказанному правилу, точность в относительных единицах не меняется, то вообще — точность в относительных единицах получаемых при посредстве арифмометра приращений координат равна точности в тех же единицах чисел столбца первого таблиц Гаусса.

Пример 4. Как изменяется точность в относительных единицах получаемых по таблицам Гаусса чисел по всем столбцам с изменением величины углов?

В § 20 было показано, что точность в относительных единицах натуральных величин $\sin$ и $\cos$, получаемых по таблицам Гаусса, различна и меняется с изменением угла, и в частности для $\sin$ точность в этих единицах для малых углов весьма невысока и увеличивается с увеличением угла от 0° до 90° , а для $\cos$ наоборот; и следовательно, точность чисел первого столбца (см. предыдущий пример) в относительных единицах обладает такими же свойствами, т.е. для таблиц $\sin$ малых углов или, что то же самое, таблиц $\cos$ углов, близких к 90° , она весьма невелика, хотя точность в абсолютных единицах по 1-му столбцу для всех углов остается одинаковой (см. § 20).

Переходя к различным столбцам таблиц Гаусса и табличкам Cent , вспомним доказанное в § 20 положение, что для одной и той же строки (а следовательно для того же угла) между точностью в относительных единицах чисел различных столбцов сохраняется определенное постоянное отношение, из чего заключаем, что все то, что сказано было нами относительно изменения точности в относительных единицах чисел столбца первого для различных углов, можно отнести точно также и к остальным столбцам и табличкам Cent , и можно поэтому утверждать вообще, что точность в относительных единицах получаемых по таблицам Гаусса приближенных чисел для $\sin$ малых углов, или, что то же самое, $\cos$ углов близких к 90° , весьма невысока, хотя точность в абсолютных единицах для всех углов остается одинаковой.

§ 25. Нахождение приращений координат при помощи арифмометра более точным способом.

Выводы примеров 1 и 2 предыдущего § дают на первый взгляд как бы противоречивый результат, так как вычисление на арифмометре дает в первом примере более точные, а во втором значительно менее точные данные, чем вычисление непосредственно по таблицам Гаусса.

Действительно, точность в относительных единицах вычисленных при посредстве арифмометра приращений координат равна точности чисел первого столбца таблиц Гаусса (см. пример 3 предыдущего §).

Но в § 20 было показано, что точность чисел этого столбца, значительно превышая точность чисел по столбцам 4—9, силь-

но уступает в то же время точности по столбцам 2-му и особенно 3-му.

Поэтому при вычислении приращений для малых линий, когда при работе непосредственно по таблицам Гаусса значительная часть операции проводится по столбцам менее точным, чем 1-й, а 2-й и 3-й или совсем не приходится пользоваться или пользоваться очень мало, вычисленные при помощи арифмометра приращения являются более точными; при вычислении же приращений для больших линий, когда при работе непосредственно по таблицам Гаусса приходится пользоваться в значительной мере столбцом 3-м, вычисленные при помощи арифмометра приращения начинают сильно уступать по точности первому способу.

Переходя к вопросу установления более точного способа нахождения приращений координат при помощи арифмометра, напомним сказанное в начале § 2, что натуральную величину $\sin$ или $\cos$ отнюдь не обязательно получать именно по первому столбцу таблиц Гаусса, а можно получать по какому-нибудь, с тою только разницей, что тогда получаемое по таблицам число придется делить не на 10, а на то именно число, умножением на которое натуральной величины $\sin$ или $\cos$ составитель и получил данное число, т.е. на 20, 30 . . . 90. Так как более точными столбцами, по сравнению с первым, являются 2-й и 3-й, то и перейдем к конкретному рассмотрению вопроса, которым из этих столбцов нам необходимо будет воспользоваться. Для получения натуральной величины $\sin$ или $\cos$ из столбца 3-го необходимо делить его числа на 30, при чем деление во многих случаях не будет выполнено без остатка, и при округлении результата придется вводить некоторую погрешность, правда небольшую, если результат брать с 5-ю знаками; но, в общем, пользование 3-м столбцом вызывает из-за этого неудобства, и мы будем поэтому пользоваться столбцом 2-м, точность которого хотя и ниже точности столбца 3-го, но вдвое выше точности столбца 1-го и на практике нас вполне удовлетворит.

Для этого нам нужно, рассуждая чисто теоретически, делить числа 2-го столбца на 20, или последовательно на 10 и на 2.

На практике же этого делать не придется, ибо при этом получится число или в точности то же самое, что и по столбцу первому, если число 2-го столбца было четным, или с разницей на пол-единицы последнего знака, если число 2-го столбца было нечетным, и необходимо поэтому только внести поправку, в сторону увеличения или уменьшения, на пол-единицы четвертого знака, т.е. 0,00005, в натуральную величину $\cos$ или $\sin$, получаемую по 1-му столбцу.

Для иллюстрации приведем извлечения таблицы $\sin$ угла в 28° для $37'$, $38'$ и $39'$, добавив графу для исправленной излагаемым способом величины $\sin$.

	10	20	$\sin$.
$37'$	4,789	9,579	0,4789 ₅
$38'$	4,792	9,584	0,4792
$39'$	4,795	9,589	0,4794 ₅

Здесь во второй строке получаемая по первому столбцу величина $\sin$ осталась без изменения; в первой строке она увеличена на 0,00005, так как $20 \sin 28^\circ 37' = 9,579$ превышает более, чем вдвое, $10 \sin 28^\circ 37' = 4,789$; а в третьей строке уменьшена на 0,00005, так как $20 \sin 28^\circ 39' = 9,589$ менее, чем вдвое, превышает $10 \sin 28^\circ 39' = 4,795$.

Применяя этот способ, мы повысим точность получаемых таким образом $\sin$ и $\cos$ вдвое, то-есть они будут с точностью до 0,000025, вместо прежней 0,00005, и вдвое же понизим границу погрешности вычисленной (без округления) при посредстве арифмометра величины приращений.

Для линий не очень большой длины нам не будет надобности применять этот способ, так как точность и без того будет достаточно высокой, но начиная с 300 м, когда точность вычисления приращений посредством арифмометра будет уступать точности вычисления их просто по таблицам Гаусса, мы будем во всех случаях им пользоваться.

Замечание. Все то, что было сказано нами в настоящем § про увеличение точности определения приращений, может быть с успехом распространено на всякое умножение и другие действия с помощью арифмометра на натуральные величины $\sin$ и $\cos$, так как при этом точность величины последних увеличивается вдвое.

§ 26. Умножение приближенных чисел.

Для получения границы погрешности произведения 2-х приближенных чисел воспользуемся неравенствами (3) § 14:

$$a_1 b_1 > AB > a_2 b_2,$$

выведенными для получения верхней и нижней границы приближенного произведения ab , заменив в них a_1 , b_1 , a_2 и b_2 их значениями из формул вида (2) § 10, а именно:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, \\ a_2 &= a - E_a, \\ b_1 &= b + E_b, \\ b_2 &= b - E_b, \end{aligned}$$

после чего получим:

$$(a + E_a)(b + E_b) > AB > (a - E_a)(b - E_b),$$

или по раскрытии скобок:

$$ab + bE_a + aE_b + E_a E_b > AB > ab - bE_a - aE_b + E_a E_b.$$

Входящий в эти неравенства член $E_a E_b$, представляющий собою произведение двух малых величин, мы отбрасываем, пренебрегая им как величиной очень малой, не имеющей влияния на величину результата, и тогда будем иметь неравенства:

$$ab + (bE_a + aE_b) > AB > ab - (bE_a + aE_b).$$

Из сравнения этих неравенств с общим видом неравенств (3) § 22:

$$a + E_a > A > a - E_a,$$

делаем тот вывод, что $bE_a + aE_b$ есть граница абсолютной погрешности приближенного произведения ab , т.е.

$$E_{ab} = bE_a + aE_b. \quad (1)$$

Здесь член bE_a представлял бы собою границу абсолютной погрешности приближенного произведения ab , если бы число b было точным (см. формулу 1 § 24), а член aE_b тоже представлял бы границу абсолютной погрешности того же произведения, если бы число a было точным.

Таким образом из формулы (1) настоящего § можно сделать вывод следующего правила:

Граница абсолютной погрешности приближенного произведения из 2-х сомножителей равна сумме двух границ погрешности того же произведения, взятых в предположении, что или тот, или другой из сомножителей будет числом точным.

Этой формулой (1) мы и будем обычно пользоваться на практике, но значительно более простой вид будет иметь формула, выражающая границу относительной погрешности произведения; действительно:

$$e_{ab} = \frac{E_{ab}}{ab};$$

подставляя сюда вместо E_{ab} ее значение из формулы (1) настоящего §, получим:

$$e_{ab} = \frac{E_{ab}}{ab} = \frac{bE_a + aE_b}{ab} = \frac{bE_a}{ab} + \frac{aE_b}{ab} = \frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{b} = e_a + e_b,$$

или просто:

$$e_{ab} = e_a + e_b. \quad (2)$$

Отсюда выводим правило: граница относительной погрешности приближенного произведения равняется сумме границ относительных погрешностей сомножителей.

Формулу (2) легко можно распространить на любое количество сомножителей, но на этом мы останавливаться не будем.

Пример 1. Найти границу погрешности приближенного произведения $b \sin \alpha$ (см. пример 2 § 14), где $b = 96,14$ с точностью до 0,01, а $\sin \alpha = \sin 27^\circ 32' = 0,4623$, берется по таблицам Гаусса и вычисление производится при помощи арифмометра.

Граница погрешности данного приближенного произведения будет состоять из двух частей: $E_1(b \sin \alpha)$ и $E_2(b \sin \alpha)$ (см. обозначения § 11).

Граница первой погрешности $E_1(b \sin \alpha)$ есть погрешность вычисления, а граница второй погрешности $E_2(b \sin \alpha)$ есть погрешность округления (см. пример 1 § 24).

Найдем сначала $E_1(b \sin \alpha)$, для чего применим к данному случаю формулу (1) настоящего §:

$$E_{ab} = bE_a + aE_b,$$

и заменив в ней число a на $\sin \alpha = 0,4623$ и E_a на $E_{\sin \alpha} = 0,00005$, получим: $E_1(b \sin \alpha) = bE_{\sin \alpha} + \sin \alpha E_b = 96,14 \times 0,00005 + 0,4623 \times 0,01 = 0,004807 + 0,004623 = 0,00943 = 0,0095$ (с округлением).

Так как, далее, приближенное произведение здесь будет $= 44,445522$, то, будучи округленным до 2-х десятичных знаков, оно даст действи-

тельную погрешность от округления, равную $44,45 - 44,445522 = 0,004478$ или с округлением 0,0045, т.-е. $E_2(b \sin \alpha) = 0,0045$.

Граница общей погрешности приближенного произведения $b \sin \alpha = 44,45$ будет выражаться формулой (1) § 11, т.-е.:

$$E(b \sin \alpha) = E_1(b \sin \alpha) + E_2(b \sin \alpha),$$

или после замены $E_1(b \sin \alpha)$ и $E_2(b \sin \alpha)$ их значениями:

$$E(b \sin \alpha) = 0,0095 + 0,0045 = 0,014,$$

т.-е. данное произведение вычислено с точностью до 0,014.

Пример 2. Найти границу погрешности приближенного произведения примера 1 настоящего §, если вычисление производится непосредственно по таблицам Гаусса.

В этом случае погрешность от округления будет отсутствовать, так как по таблицам Гаусса приращения берутся с двумя десятичными знаками.

Граница же погрешности от вычисления будет найдена по формуле (1) настоящего §:

$$E_{ab} = bE_a + aE_b$$

после замены в ней a на $\sin \alpha$, т.-е. по формуле:

$$E(b \sin \alpha) = bE_{\sin \alpha} + \sin \alpha E_b. \quad (3)$$

В этой формуле $bE_{\sin \alpha}$, т.-е. (см. правило 1-е настоящего §) погрешность приближенного произведения $b \sin \alpha$, получаемая в предположении, что b есть число точное, находится при работе непосредственно по таблицам Гаусса по способу примеров 1—3 § 22 и оказывается равной 0,005, взятой столько раз, сколько определений по таблицам необходимо произвести для получения произведения $b \sin \alpha$, и так как для нахождения по таблицам Гаусса произведения $b \sin \alpha = 96,14 \sin 27^\circ 32'$, требуется произвести три определения, то $bE_{\sin \alpha}$ будет равно $0,005 \times 3 = 0,015$.

Что же касается второго слагаемого формулы (3) настоящего §, т.-е. $\sin \alpha E_b$, то оно равно:

$$\sin \alpha E_b = 0,4623 \times 0,01 = 0,004623, \text{ или с округлением } = 0,005.$$

Подставляя во вторую часть формулы (3) настоящего § вместо $bE_{\sin \alpha}$ и $\sin \alpha E_b$ найденные нами их значения, получим:

$$E(b \sin \alpha) = bE_{\sin \alpha} + \sin \alpha E_b = 0,015 + 0,005 = 0,02.$$

Таким образом данное вычисление произведено с точностью до 0,02.

§ 27. Деление приближенных чисел.

Рассмотрим отдельно 2 случая деления: 1) когда делимое число точное, а делитель число приближенное, и 2) когда и делимое и делитель числа приближенные.

1) пусть делимое A будет точным, а делитель b числом приближенным.

Для получения границы погрешности частного воспользуемся неравенствами (1) § 15:

$$\frac{a_1}{b_2} > \frac{A}{B} > \frac{a_2}{b_1},$$

заменяя в них a_1 и a_2 через A , ибо число A , по условию, точное; после чего получим:

$$\frac{A}{b_2} > \frac{A}{B} > \frac{A}{b_1}.$$

В этих неравенствах, служащих для определения верхней и нижней границы приближенного частного $\frac{A}{b}$, заменим b_1 и b_2 через их значения по формулам вида 2 § 10:

$$b_1 = b + E_b, \quad b_2 = b - E_b;$$

после чего получим:

$$\frac{A}{b - E_b} > \frac{A}{B} > \frac{A}{b + E_b}.$$

Выполняя деление числа A на $b - E_b$ по правилам деления многочленов, получим:

$$\begin{array}{r} A \\ -A \pm \frac{AE_b}{b} \left| \frac{b - E_b}{b} + \frac{AE_b}{b^2} \right. \\ \hline + \frac{AE_b}{b} \\ \hline \mp \frac{AE_b}{b} \pm \frac{A(E_b)^2}{b^2} \\ \hline \frac{A(E_b)^2}{b^2} \end{array}$$

остаток $\frac{A(E_b)^2}{b^2}$, как величину очень малую, содержащую в себе множителем квадрат малой величины E_b , отбрасываем.

Таким же образом при делении A на $b + E_b$ получим частное:

$$\frac{A}{b} - \frac{AE_b}{b^2}.$$

Подставляя в неравенства вместо

$$\frac{A}{b - E_b} \text{ и } \frac{A}{b + E_b}$$

полученные в результате деления их значения, имеем неравенства:

$$\frac{A}{b} + \frac{AE_b}{b^2} > \frac{A}{B} > \frac{A}{b} - \frac{AE_b}{b^2}.$$

Сравнивая эти неравенства с неравенствами вида 3 § 22:

$$a + E_a > A > a - E_a,$$

делаем вывод, что $\frac{AE_b}{b^2}$ есть граница погрешности приближенного частного $\frac{A}{b}$, т.-е.

$$E_{\frac{A}{b}} = \frac{AE_b}{b^2}. \quad (1)$$

Значительно более простой вид имеет граница относительной погрешности приближенного частного $\frac{A}{b}$. Действительно,

$$e_{\frac{A}{b}} = \frac{E_{\frac{A}{b}}}{\frac{A}{b}} = \frac{\frac{AE_b}{b^2}}{\frac{A}{b}} = \frac{E_b}{b}$$

(см. формулу 1 § 18); подставляя же в эту формулу вместо $\frac{E_{\frac{A}{b}}}{\frac{A}{b}}$ ее значение из формулы (1) настоящего §, получим:

$$e_{\frac{A}{b}} = \frac{\frac{AE_b}{b^2}}{\frac{A}{b}} = \frac{AE_b}{Ab^2} = \frac{E_b}{b} = e_b,$$

т.-е. просто:

$$e_{\frac{A}{b}} = e_b. \quad (2)$$

Откуда выводим правило: при делении точного числа на приближенное граница относительной погрешности частного равняется таковой же границе делителя.

Зная это правило, можно легко получить формулу (1), которая несколько неудобна для запоминания.

Действительно, имея приближенное частное $\frac{A}{b}$ и границу его относительной погрешности, равную границе той же погрешности делителя, т.е. $\frac{E_b}{b}$, можно по формуле 2 § 18 легко получить границу абсолютной погрешности частного, а именно эта граница будет равняться произведению самого частного на границу его относительной погрешности, или

$$E_{\frac{A}{b}} = \frac{A}{b} \cdot \frac{E_b}{b} = \frac{A E_b}{b^2},$$

что и требовалось.

Из формулы (1) легко вывести важное для нас в дальнейшем следствие.

Обозначая приближенное частное $\frac{A}{b}$ через c , перепишем формулу (1) следующим образом:

$$E_c = c \frac{E_b}{b}$$

или

$$\frac{E_c}{E_b} = \frac{c}{b}, \quad (3)$$

откуда

$$E_c = \frac{c}{b} E_b, \quad (4)$$

т.е. границы абсолютных погрешностей частного и делителя при точном делимом относятся, как частное к делителю.

Пример 1. Площадь трапеции = 0,93 га ¹⁾, средняя линия = 115,55 м с точностью до 0,015 найти высоту трапеции h и границу ее погрешности.

¹⁾ га означает гектар.

Высота, как известно, равняется частному от деления числа, выражающего площадь в квадратных метрах, на число, выражающее среднюю линию, т.е.

$$h = \frac{9300}{115,55} = 80,48,$$

где 80,48 взято с округлением, действительная погрешность которого $E_{2h} = 0,0047$.

Граница погрешности высоты h , зависящая от вычисления (без округления), определяется по формуле (4) настоящего §, и имеем равенство:

$$E_{1h} = \frac{h}{115,55} 0,015 = \frac{80,48 \times 0,015}{115,55} = 0,0105 \text{ (с округлением);}$$

граница же общей погрешности высоты h равняется, согласно формуле (1) § 11, сумме $E_{1h} + E_{2h}$, т.е.

$$E_h = E_{1h} + E_{2h} = 0,0105 + 0,0047 = 0,0152 = 0,016 \text{ (с округлением);}$$

и таким образом высота трапеции $h = 80,48$ будет определена с точностью до 0,016.

Для нахождения границы погрешности частного двух приближенных чисел a и b воспользуемся неравенствами (1) § 15:

$$\frac{a_1}{b_2} > \frac{A}{B} > \frac{a_2}{b_1},$$

выведенными для определения верхней и нижней границы этого приближенного частного, подставив в них вместо a_1, a_2, b_1, b_2 их значения из формул вида (2) § 10, т.е.:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, \\ a_2 &= a - E_a, \\ b_1 &= b + E_b, \\ b_2 &= b - E_b; \end{aligned}$$

после чего получим:

$$\frac{a + E_a}{b - E_b} > \frac{A}{B} > \frac{a - E_a}{b + E_b}. \quad (5)$$

Производя деление $a + E_a$ на $b - E_b$ будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{a + E_a}{a \pm \frac{a E_b}{b}} \left| \frac{b - E_b}{\frac{a}{b} + \frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2}} \right. \\ & \frac{E_a + \frac{a}{b} E_b}{- E_a \pm \frac{E_a E_b}{b}} \\ & \frac{\frac{a}{b} E_b + \frac{E_a E_b}{b}}{- \frac{a}{b} E_b \pm \frac{a (E_b)^2}{b^2}} \\ & \frac{\frac{E_a E_b}{b} + \frac{a (E_b)^2}{b^2}} \end{aligned}$$

Остаток $\frac{E_a E_b}{b} + \frac{a (E_b)^2}{b^2}$ можно отбросить, так как оба слагаемых

в нем содержат два раза взятые сомножителем малые величины E_a и E_b , и вся сумма поэтому будет величиной очень малою, которую можно пренебречь.

Таким же образом получим от деления $a - E_a$ на $b + E_b$ частное равное $\frac{a}{b} - \frac{E_a}{b} - \frac{a E_b}{b^2}$.

Подставляя в неравенства (5) настоящего § вместо

$$\frac{a + E_a}{b - E_b} \text{ и } \frac{a - E_a}{b + E_b}$$

полученные делением их значения, имеем неравенства:

$$\frac{a}{b} + \frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2} > \frac{A}{B} > \frac{a}{b} - \frac{E_a}{b} - \frac{a E_b}{b^2},$$

или:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2} \right) > \frac{A}{B} > \frac{a}{b} - \left(\frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2} \right),$$

и сравнивая последние с общим видом неравенств (3) § 22:

$$a + E_a > A > a - E_a,$$

закключаем, что $\frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2}$ есть граница абсолютной погрешности приближенного частного $\frac{a}{b}$, т.-е.

$$\frac{E_a}{b} = \frac{E_a}{b} + \frac{a E_b}{b^2}. \quad (6)$$

Сравнивая $\frac{E_a}{b}$ с границей погрешности частного приближенного

числа a на точное b (см. форм. 2 § 24) и $\frac{a E_b}{b^2}$ с частным от деления точного числа a на приближенное b (см. формулу 1 настоящего §), выводим правило: граница абсолютной погрешности частного двух приближенных чисел равняется сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел, взятых в предположении, что или делитель, или делимое будет числом точным.

Выведенной формулой (6) мы будем пользоваться в несколько измененном виде:

$$\frac{E_a}{b} = \frac{E_a + \frac{a}{b} E_b}{b}. \quad (7)$$

Но значительно более простое выражение имеет правило нахождения границы относительной погрешности частного тех же приближенных чисел a и b .

Действительно, из определения границы относительной погрешности по формуле 1 § 18 будем иметь:

$$e_a = \frac{\frac{E_a}{b}}{\frac{a}{b}}$$

и, подставляя сюда вместо $\frac{E_a}{b}$ ее значение из формулы (7) настоящего §, получим:

$$\begin{aligned} e_a &= \frac{\frac{E_a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{E_a + \frac{a}{b} E_b}{b} : \frac{a}{b} = \frac{E_a + \frac{a}{b} E_b}{a} = \frac{E_a}{a} + \frac{\frac{a}{b} E_b}{a} = \\ &= \frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{b} = e_a + e_b, \end{aligned}$$

или просто:

$$\frac{e_a}{b} = e_a + e_b, \quad (8)$$

откуда выводим правило: граница относительной погрешности частного равна сумме границ относительных погрешностей делимого и делителя, или, соединяя это правило с таковым же для нахождения границы относительной погрешности приближенного произведения, получим общее для обоих этих алгебраических действий правило: граница относительной погрешности приближенного произведения или частного равняется сумме границ относительных погрешностей сомножителей или делимого с делителем.

Пример 2. Найти точность определения при посредстве арифмометра величины $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ (см. пример 1 § 15).

Как известно,

$$\operatorname{tg} 27^\circ 32' = \frac{\sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{0,4623}{0,8867} = 0,521371 \dots = 0,5214 \text{ (с округле-}$$

нием), где величины $\sin$ и $\cos$ взяты по таблицам Гаусса.

Граница общей погрешности величины вычисленного таким образом $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$, т.е. $E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ состоит из двух частей—границы погрешности вычисления $= E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ и границы погрешности, или же действительной погрешности от округления $= E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$.

$E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ можно вычислить по формуле (7) настоящего §, как границу погрешности приближенного частного, принимая

$$a = \sin 27^\circ 32' = 0,4623$$

и

$$b = \cos 27^\circ 32' = 0,8867,$$

подставляя их значения в эту формулу и принимая $E_{\sin 27^\circ 32'}$ и $E_{\cos 27^\circ 32'}$ равными 0,00005; после чего получим:

$$\begin{aligned} E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'} &= \frac{E_{\sin 27^\circ 32'}}{\cos 27^\circ 32'} + \frac{E_{\cos 27^\circ 32'} \operatorname{tg} 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= \frac{0,00005 + 0,5214 \times 0,00005}{0,8867} = \frac{0,00005 + 0,00002607}{0,8867} = \frac{0,00007607}{0,8867} = \\ &= 0,00008579 \dots = 0,000086 \text{ (с округлением)}. \end{aligned}$$

Так как действительная погрешность от округления $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ до 4-х знаков равняется $0,5214 - 0,521371 \dots = 0,000028 \dots = 0,000029$ (с округлением), то общая граница погрешности найденной величины $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$, получаемая как сумма $E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$ и $E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'}$, будет равняться:

$$\begin{aligned} E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'} &= E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'} + E_{\operatorname{tg} 27^\circ 32'} = 0,000086 + 0,000029 = \\ &= 0,000115, \text{ или с округлением } 0,00012, \end{aligned}$$

и таким образом величина $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$ найдена с точностью до 0,00012.

Пример 3. Найти границу погрешности частного от деления точного числа 258,15 на $\sin 65^\circ 17'$, если деление выполняется посредством таблиц Гаусса.

Данный пример представит собою образец сложного вычисления границы погрешности, не подводимого под какое-либо одно действие.

По методу, изложенному в примерах 2-м и 3-м § 3, означенное частное $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$ находится следующим образом: 258,15 разлагается на 4 слагаемых: 181,68, 72,67, 3,63 и 0,17, которые представляют собою произведения на $\sin 65^\circ 17'$:

первое—числа	200
второе	80
третье	4
четвертое	0,19,

и таким образом

$$\begin{aligned} \frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'} &= \frac{181,68 + 72,67 + 3,63 + 0,17}{\sin 65^\circ 17'} = \\ &= \frac{200 \sin 65^\circ 17' + 80 \sin 65^\circ 17' + 4 \sin 65^\circ 17' + 0,19 \sin 65^\circ 17'}{\sin 65^\circ 17'} = \\ &= 200 + 80 + 4 + 0,19 = 284,19. \end{aligned}$$

Заменяя числа 181,68; 72,67; 3,63 и 0,17 на $200 \sin 65^\circ 17'$ и т. д., мы вместо точных чисел, составляющих части числа 258,15, вводим приближенные числа, получаемые по таблицам Гаусса.

Граница погрешности каждого из этих чисел равна, как было показано в § 8, 0,005, а следовательно, граница погрешности всего числителя, состоящего из четырех слагаемых, будет равна

$$0,005 \times 4 = 0,02.$$

Таким образом, заменяя числа 181,68; 72,67 и проч. величинами $200 \sin 65^\circ 17'$; $80 \sin 65^\circ 17'$ и пр., мы вводим в числитель погрешность, граница которой $= 0,02$.

От изменения же числителя на 0,02 вся дробь $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$ изменится на $\frac{0,02}{\sin 65^\circ 17'}$ и таким образом

$$\frac{0,02}{\sin 65^\circ 17'} = 0,02201 = (\text{с округлением}) 0,023$$

будет границей погрешности частного $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$; заметим, что в этом примере 0,02 есть граница погрешности определяемого непосредственно по таблицам Гаусса произведения частного 284,19 на $\sin 65^\circ 17'$ взятого в предположении, что число 284,19 точное.

Пример 4. Найти общее выражение границы погрешности вычисляемого непосредственно по таблицам Гаусса частного $\frac{A}{\sin \alpha} = b$, если A есть число точное и деление выполняется при помощи таблиц Гаусса.

Применяя в данном случае рассуждения предыдущего примера, найдем, что граница погрешности частного $\frac{A}{\sin \alpha} = b$ будет равна дроби, знаменатель которой будет $\sin \alpha$, а числитель есть граница погрешности определяемого непосредственно по таблицам Гаусса произведения $b \sin \alpha$ при b точном, т.-е. имеем равенство:

$$E_{\frac{A}{\sin \alpha}} = \frac{E_{b \sin \alpha}}{\sin \alpha} \quad (9)$$

По аналогии с этим равенством для частного $\frac{A}{\cos \alpha} = c$ напомним такое же равенство

$$E_{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{E_{c \cos \alpha}}{\cos \alpha} \quad (10)$$

Пример 5. Найти точность частного $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$ (см. прим. 3 настоящего §), где число 258,15 приближенное, с точностью до 0,02 и деление производится непосредственно по таблицам Гаусса.

К данному примеру применимы все рассуждения примера 3-го настоящего §, с той только поправкой, что число 258,15 в данном

случае будет приближенным, и поэтому граница погрешности числителя дроби

$$\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'} = \frac{181,68 + 72,67 + 3,63 + 0,17}{\sin 65^\circ 17'}$$

будет заключать в себе кроме 0,02, введенных от замены чисел точных: 181,68 и пр. приближенными: $200 \sin 65^\circ 17'$ и пр., еще 0,02, являющихся границей погрешности числа 258,15, и таким образом граница погрешности частного $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$ будет равна $\frac{0,04}{\sin 65^\circ 17'}$ (с округлением) 0,0045,

и частное $\frac{258,15}{\sin 65^\circ 17'}$ будет вычислено с точностью до 0,045.

Пример 6. Обобщить способ определения границы погрешности предыдущего примера на случай частного $\frac{a}{\sin \alpha} = b$, где a число приближенное и частное находится непосредственно по таблицам Гаусса.

Применяя рассуждения предыдущего примера и обозначения примера 4 настоящего §, найдем, что искомая граница погрешности будет равна дроби, знаменатель которой есть $\sin \alpha$, а числитель сумма границы погрешности приближенного числа a и границы погрешности вычисленного непосредственно по таблицам Гаусса произведения $b \sin \alpha$, взятого в предположении, что b число точное, т.-е.:

$$E_{\frac{a}{\sin \alpha}} = \frac{E_a + E_{b \sin \alpha}}{\sin \alpha} \quad (11)$$

По аналогии с этим для приближенного частного $\frac{a}{\cos \alpha} = c$ будем иметь равенство:

$$E_{\frac{a}{\cos \alpha}} = \frac{E_a + E_{c \sin \alpha}}{\cos \alpha} \quad (12)$$

§ 28. Точность частного от деления на $\sin$ или tg малых углов.

Поставленный вопрос является обособленным в отдельный § вследствие своей большой практической важности примером на деление приближенных чисел.

Прежде всего заметим, что при делении любого числа на tg приходится умножать это число на $\cos$ и делить на $\sin$, и таким образом деление на tg сводится к делению на $\sin$; остановимся поэтому только на точности частного от деления приближенного числа на $\sin$ малых углов.

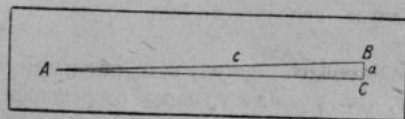
Начнем с отдельного частного случая.

Пример 1. Найти длину гипотенузы $AB=c$ прямоугольного треугольника ABC (см. черт. 4), если $BC=a=0,53$ м есть число точное, и угол $A=0^\circ 15'$. Вычисления производятся помощью арифмометра.

Найдем сначала величину AB ; из тригонометрии известно, что

$$AB = \frac{BC}{\sin A},$$

или, по замене BC и $\sin A$ их значениями, при чем $\sin A=0,0044$, находим по таблицам Гаусса



Черт. 4.

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{0,53}{0,0044} = 120,45,$$

с отбрасыванием при округлении 0,0045..., и $E_{2c}=0,005$ (см. обозн. § 11).

Так как для определения величины AB требуется найти частное точного числа 0,53 и приближенного 0,0044, то граница погрешности c от вычисления, т.-е. E_c , может быть найдена по формуле 4 предыдущего §: $E_c = \frac{c}{b} E_b$

после подстановки, вместо b , $\sin A=0,0044$ и, вместо E_b , — ее значения

$$= E_{\sin 0^\circ 15'} = 0,00005,$$

т.-е.:

$$E_c = \frac{c}{\sin A} E_{\sin A} = \frac{120,45}{0,0044} \times 0,00005 = \frac{0,0060225}{0,0044} = 1,3687 \dots$$

или с округлением 1,37.

Общая же граница погрешности гипотенузы c получается по формуле (1) § 11:

$$E_c = E_{1c} + E_{2c} = 1,37 + 0,005 = 1,375 \text{ или с округлением } 1,38, \text{ т.-е.:}$$

$E_c=1,38$; гипотенуза c определена с точностью до 1,38 м, и таким образом определение является чрезвычайно грубым.

Пример 2. Решить предыдущий пример при условии, что $BC=a=0,53$ есть число приближенное, взятое с точностью до 0,005.

В этом случае $AB=c=\frac{a}{\sin A}$ будет представлять собою частное 2-х приближенных чисел a и $\sin A$, и согласно правила нахождения границы погрешностей частного таких чисел (см. § 27) эта граница будет равняться сумме границ погрешностей, взятых в предположении, что или делитель или делимое будут числами точными.

В прошлом примере мы нашли границу погрешности приближенного частного $\frac{a}{\sin A}$ при a точном, и для того, чтобы получить таковую границу для рассматриваемого случая, необходимо к границе погрешности предыдущего примера добавить границу погрешности частного $\frac{a}{\sin A}$, взятую в предположении, что $\sin A$ есть число точное. $E_{\frac{a}{\sin A}}$ при $\sin A$ точном (см. формулу 2 § 24) $= \frac{E_a}{\sin A}$ и для данного случая $= \frac{0,005}{0,0044} = 1,14$ (с округлением); и таким образом граница общей погрешности определится следующим образом:

$$E_c = E_{\frac{a}{\sin A}} = 1,14 + 1,38 = 2,52,$$

и мы можем лишь гарантировать для гипотенузы $AB=c$ в нашем случае точность до 2,52 м.

Легко видеть, что столь большая граница погрешности явилась следствием двух причин: 1) что величина $\sin A$ очень мала и при делении на нее даже сравнительно небольшой границы погрешности числа a получилось в частном весьма крупное для границы погрешности число и 2) что точность $\sin 0^\circ 15'$ в относительных единицах очень невелика, и граница относительной погрешности $\sin A$, будучи границей погрешности всего результата примера 1 настоящего § (см. формулу 2 § 27), дает весьма значительную границу абсолютной погрешности, ибо частное во много раз превосходит величину $\sin A$, и то, что не было сколько-нибудь заметным для $\sin A$, дает значительную величину для частного.

Пример 3. Решить пример 1-й настоящего § при условии, что вычисления производятся непосредственно по таблицам Гаусса.

Разница в процессе определения величины $AB=c$ будет для данного случая только в выполнении деления $\frac{0,53}{\sin 0^\circ 15'}$, каковое частное непосредственно по таблицам Гаусса, как указано было в примере 3 § 3, находится следующим образом:

$$\frac{0,53}{\sin 0^\circ 15'} = \frac{0,44 + 0,09}{\sin 0^\circ 15'} = \frac{100 \sin 0^\circ 15' + 20 \sin 0^\circ 15'}{\sin 0^\circ 15'} = 100 + 20 = 120 \text{ м.}$$

Граница погрешности частного в этом случае, подобно тому, как в примере 4 § 27, будет равняться границе погрешности определяемого непосредственно по таблицам Гаусса произведения частного $= 120 \text{ м}$ на $\sin 0^\circ 15'$, т.е. 0,01 (см. пример 3 § 22), деленной на величину $\sin 0^\circ 15'$, то-есть

$$\frac{0,01}{\sin 0^\circ 15'} = \frac{0,01}{0,0044} = 2,28 \text{ (с округлением);}$$

и таким образом точность величины частного в этом случае будет еще ниже, чем в примере 1-м настоящего §.

Пример 4. Решить пример 2-й настоящего § при условии, что вычисление будет производиться непосредственно по таблицам Гаусса.

В данном случае мы можем лишь, повторив все соображения примера 2-го, найти, что граница погрешности частного (оттого, что делимое 0,53 делается числом приближенным с точностью до 0,005) увеличится на 1,14 м, и следовательно на эту величину нужно увеличить границу абсолютной погрешности частного примера 3 настоящего §; и общая граница погрешности определяемой непосредственно по таблицам Гаусса гипотенузы $AB=c$ (см. черт. 4) будет равна

$$1,14 + 2,28 = 3,42 \text{ м.}$$

Переходя к рассмотрению в общем виде поставленного в настоящем § вопроса, мы видим, что независимо от того, каким образом мы будем производить вычисления — на арифмометре, или непосредственно по таблицам Гаусса — получаемая для частного $\frac{a}{\sin \alpha}$ (где α есть малый угол) граница погрешности будет весьма велика, и это обстоятельство вызывается двумя причинами: 1) тем, что даже самая незначительная граница погрешности приближенного числа a при делении на $\sin$ малого угла, являющийся весьма небольшой величиной, даст слишком большое для границы погрешности частное, и первое

слагаемое границы погрешности $E_{\frac{a}{\sin \alpha}}$ (см. пример 2) выходит по-

этому из допустимых при вычислении пределов, и 2) тем, что граница относительной погрешности $\sin$ малого угла, как показано было в § 20, весьма велика, а эта граница служит, как мы видели в § 24,

границей относительной погрешности всего частного $\frac{a}{\sin A}$ при a точном, и даст для этого частного, вследствие значительной его величины, весьма крупную границу абсолютной погрешности, отчего и второе слагаемое границы погрешности $E_{\frac{a}{\sin \alpha}}$ (см. пример 2) также выходит

из допустимых при вычислении пределов; вообще же, поэтому, независимо от того, будет ли число a точным или приближенным, граница погрешности частного $\frac{a}{\sin \alpha}$ будет чрезвычайно велика в обоих случаях

и производить деление какого бы то ни было числа на $\sin$ малого угла при пользовании таблицами Гаусса совершенно недопустимо, что мы и будем в дальнейшем иметь в виду при решении различных вопросов проектирования.

Замечание: На первый взгляд может показаться странным, почему та часть таблиц Гаусса, которая соответствует $\sin$ малых углов, составлена таким неудовлетворительным образом, что ею нельзя пользоваться при делениях на $\sin$ малых углов; и поэтому мы напомним здесь сказанное в § 8, что для всех углов таблицы Гаусса дают совершенно одинаковую точность в абсолютных единицах (и это обстоятельство является чрезвычайно важным и удобным при нахождении приращений координат и вообще при умножении на $\sin$ и $\cos$, что собственно, как следует из самого названия таблиц Гаусса, и имелось в виду при их составлении); и только вследствие того, что мы применили эти таблицы для различных других надобностей, в них обнаружилось слабое место, но это ничуть не мешает нам в дальнейшем пользоваться этими таблицами во всем объеме, и только лишь придется в немногих отдельных случаях отбросить те методы решения вычислительных вопросов, которые приводят к необходимости находить частное на $\sin$ или $\tan$ малых углов.

§ 29. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня.

Возведение в квадрат приближенного числа a есть частный случай умножения 2 приближенных чисел, и поэтому для нахождения

границы погрешности второй степени числа a воспользуемся формулой (1) § 26:

$$E_{ab} = bE_a + aE_b,$$

заменив в ней число b на a , после чего получим:

$$E_{a^2} = aE_a + aE_a = 2aE_a$$

или просто

$$E_{a^2} = 2aE_a. \quad (1)$$

Этой формулой мы и будем обычно пользоваться на практике, но значительно более просто выражается граница относительной погрешности второй степени числа a .

Действительно, $e_{a^2} = \frac{E_{a^2}}{a^2}$ (см. форм. 1 § 18) и, подставляя затем вместо E_{a^2} ее значение из формулы (1) настоящего §, получим:

$$e_{a^2} = \frac{E_{a^2}}{a^2} = \frac{2aE_a}{a^2} = \frac{2E_a}{a} = 2e_a,$$

или просто

$$e_{a^2} = 2e_a. \quad (2)$$

т.е. имеем правило: при возведении в квадрат приближенного числа граница его относительной погрешности удваивается.

Зная это правило, мы в любой момент можем найти формулу (1) настоящего §, путем определения границы абсолютной погрешности через границу погрешности относительной, по формуле (2) § 18.

Действительно,

$$E_{a^2} = a^2 e_{a^2} = a^2 2e_a =$$

(см. формулу 2)

$$= 2a^2 \times \frac{E_a}{a} = 2aE_a$$

Переходя к нахождению границы погрешности квадратного корня, воспользуемся неравенствами (3) § 16:

$$\sqrt{a_1} > \sqrt{A} > \sqrt{a_2},$$

данными для нахождения верхней и нижней границы квадратного корня, и подставим в них вместо a_1 и a_2 их значения из формул вида (3) § 22, т.е.

$$\begin{aligned} a_1 &= a + E_a, \\ a_2 &= a - E_a; \end{aligned}$$

После чего имеем неравенства:

$$\sqrt{a + E_a} > \sqrt{A} > \sqrt{a - E_a}. \quad (2)$$

Извлечем квадратный корень из $a + E_a$ по правилам извлечения квадратных корней из многочленов:

$$\begin{array}{r} \sqrt{a + E_a} = \sqrt{a} + \frac{E_a}{2\sqrt{a}} \\ \mp a \\ \hline 2\sqrt{a} + \frac{E_a}{2\sqrt{a}} \quad E_a \\ \frac{E_a}{2\sqrt{a}} \mp E_a \mp \frac{(E_a)^2}{4a} \\ \hline \frac{-(E_a)^2}{4a} \end{array}$$

Остаток $-\frac{(E_a)^2}{4a}$, заключая в себе множителем квадрат малой величины E_a , будет представлять собою очень малую величину, которой можно пренебречь, считая таким образом:

$$\sqrt{a + E_a} = \sqrt{a} + \frac{E_a}{2\sqrt{a}};$$

этим же способом найдем, что

$$\sqrt{a - E_a} = \sqrt{a} - \frac{E_a}{2\sqrt{a}}.$$

Заменяя в неравенствах (2) величины $\sqrt{a + E_a}$ и $\sqrt{a - E_a}$ их значениями, полученными в результате извлечения квадратных корней, будем иметь:

$$\sqrt{a} + \frac{E_a}{2\sqrt{a}} > \sqrt{A} > \sqrt{a} - \frac{E_a}{2\sqrt{a}};$$

сравнивая эти неравенства с неравенствами общего вида (3) § 22, приходим к выводу, что $\frac{E_a}{2\sqrt{a}}$ есть граница погрешности приближенного корня $\sqrt{a}$, т.е.:

$$E_{\sqrt{a}} = \frac{E_a}{2\sqrt{a}}. \quad (3)$$

Этой формулой мы и будем обычно пользоваться на практике, но значительно более простое выражение имеет граница *относительной* погрешности квадратного корня.

Действительно, из определения этой границы имеем:

$$e_{\sqrt{a}} = \frac{E_{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}};$$

подставляя в это равенство вместо $E_{\sqrt{a}}$ ее значение из формулы (3) настоящего §, получим:

$$e_{\sqrt{a}} = \frac{E_{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{E_a}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{E_a}{2\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{E_a}{2a} = \frac{1}{2} \frac{E_a}{a} = \frac{1}{2} e_a,$$

или просто:

$$e_{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} e_a, \quad (4)$$

т.е. имеем правило: при извлечении квадратного корня из приближенного числа граница относительной погрешности подкоренного выражения делится пополам.

Зная это правило, можно по формуле 2 § 18 получить формулу (3), если бы это нам потребовалось; действительно,

$$E_{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \cdot e_{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} e_a =$$

(см. формулу 4)

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a} \frac{E_a}{a} = \frac{E_a}{2\sqrt{a}},$$

что и требовалось.

Пример 1. Катетами прямоугольного треугольника будут $a = 135,15$ с точностью до 0,02 и $b = 184,35$ с точностью до 0,03; найти точность вычисленной при помощи арифмометра гипотенузы.

Гипотенуза c вычисляется, как известно, по формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, и поэтому в данном случае мы имеем дело с вычислением границы погрешности выражения $\sqrt{a^2 + b^2}$, в котором применены действия — возведение в степень и извлечение корня.

Граница погрешности всякого выражения, взятого с округлением, равняется по формуле (1) § 11 сумме погрешности от вычисления и погрешности от округления величины корня, т.е.

$$E_c = E_{\sqrt{a^2 + b^2}} = E_1 \sqrt{a^2 + b^2} + E_2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Так как в данном случае $c = 228,583 \dots$, то действительная погрешность от округления величины c до одной сотой $E_2 \sqrt{a^2 + b^2}$ равняется

$$228,583 \dots - 228,58 = 0,003 \dots = 0,004 \text{ (с округлением).}$$

Применяя же для вычисления границы погрешности корня $\sqrt{a^2 + b^2}$ формулу (3) настоящего §, получаем:

$$\begin{aligned} E_c &= E_1 \sqrt{a^2 + b^2} + E_2 \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_{(a^2 + b^2)}}{2\sqrt{a^2 + b^2}} + 0,004 = \\ &= \frac{E_{(a^2 + b^2)}}{2c} + 0,004; \end{aligned}$$

применяя далее к $E_{(a^2 + b^2)}$ правило о нахождении границы погрешности суммы, получаем:

$$E_c = \frac{E_{(a^2 + b^2)}}{2c} + 0,004 = \frac{E_{a^2} + E_{b^2}}{c} + 0,004;$$

а воспользовавшись для нахождения E_{a^2} и E_{b^2} формулой (1) настоящего §, будем иметь:

$$E_c = \frac{E_{(a^2 + b^2)}}{2c} + 0,004 = \frac{2a E_a + 2b E_b}{2c} + 0,004 = \frac{a E_a + b E_b}{c} + 0,004,$$

подставляя же вместо E_a и E_b их значения, данные условием, найдем окончательно:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{a E_a + b E_b}{c} + 0,004 = \frac{135,15 \times 0,02 + 184,35 \times 0,03}{228,58} + \\ &+ 0,004 = \frac{2,703 + 5,5305}{228,58} + 0,004 = \frac{8,2335}{228,58} + 0,004 = 0,037 + \\ &+ 0,004 = 0,041, \end{aligned}$$

т.е. гипотенуза вычислена с точностью до 0,041.

Пример 2. Найти точность вычисленной посредством арифмометра величины $a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha}$ (см. пример 5 § 2) при $a = 110,25$ м, числе точном, $Q = 1,1292$ га = 11292 м², $\alpha = 27^\circ 32'$.

Величина a' определена в примере 5 § 2 и оказалась равной 154,69, с округлением на 0,004 . . . , т.е. $E_{a'} = 0,005$.

Вычисление границы погрешности $E_{2a'}$ проведем следующим образом:

Найдем сначала границу погрешности $\operatorname{tg} \alpha$ (см. пример 2 § 27).

$$E_{\operatorname{tg} \alpha} = E_{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = E_1 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + E_2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

(см. формулу 1 § 11)

$$= \frac{E_{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} E_{\cos \alpha}}{\cos \alpha} +$$

(см. формулу 7 § 27)

$$\begin{aligned} + E_{2 \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{0,00005 + \operatorname{tg} 27^\circ 32' \times 0,00005^1)}{0,8867} + 0,000029^2) = \\ &= \frac{0,00005 + 0,5214 \times 0,00005^3)}{0,8867} + 0,000029 = \frac{0,00005 + 0,000027}{0,8867} + \\ + 0,000029 &= \frac{0,000077}{0,8867} + 0,000029 = 0,000087 + 0,000029 = 0,000116 = \\ &= 0,00012 \text{ (с округлением);} \end{aligned}$$

затем найдем границу погрешности подкоренного выражения $a^2 + 2 Q \operatorname{tg} \alpha$:

$$E_{(a^2 + 2 Q \operatorname{tg} \alpha)} = E_{a^2} + E_{2 Q \operatorname{tg} \alpha} \text{ (граница погрешности суммы) } = E_2 Q \operatorname{tg} \alpha^4)$$

$$= 2 Q E_{\operatorname{tg} \alpha} \text{ (формула 1 § 24) } =$$

$$= 2 \times 11292 \times E_{\operatorname{tg} \alpha} = 22584 \times 0,00012 = 2,8 \text{ (с округлением);}$$

и, наконец, найдем границу погрешности a' :

$$E_{a'} = E_{1a'} + E_{2a'} =$$

¹⁾ 0,8867 есть величина $\cos \alpha = \cos 27^\circ 32'$

²⁾ Величина действительной погрешности округления.

³⁾ 0,5214 есть величина $\operatorname{tg} 27^\circ 32'$.

⁴⁾ $E_{a^2} = 0$, так как a^2 число точное.

(см. формулу 1 § 11)

$$\begin{aligned} &= E_1 \sqrt{a^2 + 2 Q \operatorname{tg} \alpha} + 0,005^1) = \\ &= \frac{E_{(a^2 + 2 Q \operatorname{tg} \alpha)}}{2 \sqrt{a^2 + 2 Q \operatorname{tg} \alpha}} + 0,005 = \end{aligned}$$

(см. формулу 3 настоящего §)

$$\begin{aligned} &= \frac{2,8}{2 a'} + 0,005 = \frac{2,8}{2 \times 154,69} + 0,005 = \frac{2,8}{309,38} + 0,005 = \\ &= 0,01 + 0,005 = 0,015; \end{aligned}$$

таким образом a' вычислена с точностью до 0,015.

Пример 3. Найти границу погрешности числа 1,8016², если вычисление производится посредством таблиц квадратов чисел (см. пример 7 § 3) и число 1,8016 будем рассматривать как точное.

Напомним, что вычисление по этим таблицам должно быть произведено следующим образом:

$$1,8016^2 = (1,801 + 0,0006)^2 = 3,2436 + 0,0021_6 = 3,2457_6,$$

т.е. берется квадрат числа 1,801, равный 3,2436, и к нему прибавляется поправка на разность 0,0006 между данным числом 1,8016 и 1,801; для вычисления же этой поправки берется квадрат числа, большего на единицу последнего знака, чем 1,801, т.е.

$$1,802^2 = 3,2472,$$

находится разница между этими соседними квадратами

$$3,2472 - 3,2436 = 0,0036,$$

и принимается допущение, что при увеличении числа в пределах между 1,801 и 1,802 будет пропорционально этому увеличению изменяться и квадрат числа, т.е. при увеличении 1,801 на 0,6 единицы последнего разряда изменяется квадрат его на 0,6 от разности

$$3,2472 - 3,2436 = 0,0036;$$

и таким образом получается:

$$1,8016^2 = 3,2436 + 0,6 (3,2472 - 3,2436) = 3,2457_6 \quad (5).$$

Переходя к определению точности результата, прежде всего посмотрим, какая погрешность получается от допущения о пропор-

¹⁾ Граница погрешности от округления.

циональности и введем для удобства рассуждения общие обозначения, взяв вместо 1,801 число a , и вместо 0,0006 — Δa ; тогда будем иметь:

$$(a + \Delta a)^2 = a^2 + 2a\Delta a + (\Delta a)^2.$$

Отбрасывая здесь $(\Delta a)^2$ как величину весьма малую (в нашем примере $0,0006^2 = 0,00000036$), получаем:

$$(a + \Delta a)^2 = a^2 + 2a \times \Delta a;$$

таким образом от увеличения числа на Δa квадрат его увеличивается на

$$(a + \Delta a)^2 - a^2 = a^2 + 2a \Delta a - a^2 = 2a \Delta a,$$

а это увеличение пропорционально Δa , ибо содержит последнее множителем.

Таким образом сделанное допущение о пропорциональности вызывает погрешность в нашем случае равную лишь 0,00000036, которой мы пренебрегаем по ее малости.

Найдем теперь границу погрешности числа 3,2457₆; для этого преобразуем прежде всего выражение (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} 1,8016^2 &= 3,2436 + 0,6 (3,2472 - 3,2436) = 3,2436 + 0,6 \times 3,2472 - \\ &- 0,6 \times 3,2436 = (1 - 0,6) \times 3,2436 + 0,6 \times 3,2472 = \\ &= 0,4 \times 3,2436 + 0,6 \times 3,2472; \end{aligned}$$

после чего имеем, что для получения квадрата числа 1,8016 можно брать 0,4 от квадрата 1,801 и 0,6 от квадрата 1,802, являющихся квадратами ближайших, взятых с 3 десятичными знаками, значений числа 1,8016.

Так как для каждого из чисел 3,2436 и 3,2472 граница погрешности будет равна половине единицы последнего знака, т.е. 0,00005, то общая граница погрешности числа

$$1,8016^2 = 3,2457_6$$

будет равняться сумме границ погрешностей слагаемых, то-есть

$$\begin{aligned} E_{3,2457_6} &= E_{(0,4 \times 3,2436 + 0,6 \times 3,2472)} = E_{0,4 \times 3,2436} + \\ &+ E_{0,6 \times 3,2472}; \end{aligned}$$

откуда, применяя правило нахождения границы погрешности произведения приближенного числа на точное, будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{3,2457_6} &= 0,4 E_{3,2436} + 0,6 E_{3,2472} = 0,4 \times 0,00005 + 0,6 \times \\ &\times 0,00005 = (0,4 + 0,6) \times 0,00005 = 0,00005. \end{aligned}$$

Таким образом для данного частного случая квадрат числа 1,8016 найден по таблицам квадратов чисел с такой же точностью, с какой находится квадрат 1,801 и вообще всякого числа с 3 десятичными знаками.

Пример 4. Определить точность величины квадратов чисел с 4 десятичными знаками, вычисляемых по соответствующим таблицам, приложенным к таблицам Гаусса.

Обобщая рассуждения предыдущего примера, мы видим, что пользование боковым столбцом Р. Р., основанное на принятии пропорциональности изменения квадратов чисел с изменением самих чисел, имеющих общую целую часть и 3 общих десятичных знака, не вводит сколько-нибудь заметной погрешности.

Далее, легко находим, что если цифра 4-го знака числа равна 1, то квадрат его составляется из 0,9 от квадрата соседнего меньшего числа с 3 десятичными знаками и 0,1 от соседнего большего числа с таким же числом десятичных знаков; если цифра равна 2, то искомым квадрат составляется из 0,8 от квадрата соседнего меньшего числа с 3 десятичными знаками и 0,2 от квадрата большего и т. д.

Во всех этих случаях граница погрешности квадрата числа с 4 десятичными знаками будет поэтому так же, как и в предыдущем примере, равна 0,00005, т.е. этот квадрат определится с такой же точностью, как квадрат числа с 3 десятичными знаками.

Пример 5. Найти границу погрешности числа l , выражающего длину линии, определяемой по ее приращениям

$$\Delta x = 180,16$$

и

$$\Delta y = 4,33,$$

если Δx и Δy будем рассматривать как числа точные, и вычисление будет производиться по таблицам квадратов чисел (см. пример 7 § 3).

Напомним прежде всего, что вычисление величины l выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(180,16)^2 + (4,33)^2} = \\ &= \sqrt{100^2 \left(\frac{180,16^2}{100^2} + \frac{4,33^2}{100^2} \right)} = 100 \sqrt{\left(\frac{180,16}{100} \right)^2 + \left(\frac{4,33}{100} \right)^2} = \\ &= 100 \sqrt{1,8016^2 + 0,0433^2} = \\ &= 100 \sqrt{3,2436 + 0,0021_6 + 0,0018 + 0,0000_3} = \\ &= 100 \sqrt{3,2475_9} = 100 \sqrt{3,2472 + 0,0003_6 + 0,0000_3} = \\ &= 100 \sqrt{1,8021^2 + 0,0000_3} = 100 \times 1,8021 = 180,21. \end{aligned}$$

Данная операция распадается на 2 основных части:

1) нахождение величины подкоренного числа как суммы квадратов чисел 1,8016 и 0,0433 и

2) нахождение по величине подкоренного числа квадратного корня.

Найдем прежде всего границу погрешности подкоренного числа

По доказанному в предыдущем примере, граница погрешности каждого из определяемых по таблицам квадратов — чисел 1,8016 и 0,0433 — будет 0,00005, и тогда граница погрешности суммы их, равной 3,2475, будет равна

$$0,00005 + 0,00005 = 0,0001,$$

(см. § 22), т.е.

$$E_{3,2475} = 0,0001.$$

Такова граница погрешности подкоренного числа 3,2475.

При извлечении квадратного корня получаем число 1,8021, считая что квадратом его будет

$$3,2472 + 0,0003_8 = 3,2475_6.$$

Но данное число 3,2475, как определяемое приближенно по таблицам квадратов чисел, не будет в точности равняться 1,8021², а содержит в себе погрешность, граница которой, согласно рассуждений предыдущего примера, будет 0,00005.

Заменяя поэтому число 3,2475 величиной 1,8021², мы вводим погрешность, граница которой равна 0,00005, и тогда общая граница погрешности подкоренного числа 1,8021² + 0,0000₃ будет 0,0001 + 0,00005 = 0,00015, т.е.

$$E_{(1,8021^2 + 0,0000_3)} = 0,00015.$$

Перейдем теперь к определению границы погрешности корня. Источником погрешности служит здесь прежде всего наличие остатка в подкоренном выражении, показывающего, что величина 1,8021 взята здесь с округлением.

Граница погрешности округления будет равняться половине единицы последнего знака корня, т.е. 0,00005, и поэтому

$$E_{21,8021} = 0,00005.$$

Вторым источником погрешности будет то обстоятельство что подкоренное число включает в себе погрешность, граница которой

0,00015, и поэтому корень из этого числа не может в точности равняться 1,8021, а в нем будет заключаться погрешность от вычисления $E_1 \sqrt{1,8021^2 + 0,0000_3}$, которую можно найти по формуле (3) настоящего §, т.е.

$$\begin{aligned} E_{11,8021} &= E_1 \sqrt{1,8021^2 + 0,0000_3} = \frac{E_{(1,8021^2 + 0,0000_3)}}{2 \sqrt{1,8021^2 + 0,0000_3}} = \\ &= \frac{0,00015}{2 \times 1,8021} = 0,000042 \text{ (с округлением).} \end{aligned}$$

Общая же граница погрешности корня $E_{1,8021}$ определится по формуле (1) § 11, т.е.

$$\begin{aligned} E_{1,8021} &= E_{11,8021} + E_{21,8021} = 0,000042 + 0,00005 = 0,000092 = \\ &= 0,0001 \text{ (с округлением).} \end{aligned}$$

После чего, принимая во внимание, что

$$l = 100 \times 1,8021,$$

находим, что

$$E_l = E_{100 \times 1,8021} = 100 E_{1,8021} = 100 \times 0,0001 = 0,01,$$

т.е. вычисление произведено с точностью до 0,01.

Пример 6. Решить предыдущий пример в общем виде, если l заключается в пределах между 100 и 1000.

Вычисление здесь, точно так же, как и в предыдущем примере, будет производиться следующим образом:

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{100^2 \left[\frac{(\Delta x)^2}{100^2} + \frac{(\Delta y)^2}{100^2} \right]} = 100 \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{100} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{100} \right)^2},$$

или

$$\frac{l}{100} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{100} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{100} \right)^2},$$

т.е. под корнем будут квадраты

$$\frac{\Delta x}{100} \text{ и } \frac{\Delta y}{100},$$

а дальнейшее все выполняется по таблицам квадратов чисел.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем примере, установим, что граница погрешности подкоренного выражения

$$\left(\frac{\Delta x}{100} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{100} \right)^2$$

слагается из границы погрешности $\left(\frac{\Delta x}{100}\right)^2$, равной 0,00005, границы погрешности $\left(\frac{\Delta y}{100}\right)^2$, также равной 0,00005, к которым добавляется граница погрешности 0,00005 от пользования таблицами для извлечения корня, и что поэтому граница погрешности подкоренного выражения $= 0,00005 + 0,00005 + 0,00005 = 0,00015$; после чего граница погрешности корня $\frac{l}{100}$ от вычисления определяется по формуле (3) таким образом:

$$E_{\frac{l}{100}} = \frac{0,00015}{2 \times \frac{l}{100}} = \frac{50 \times 0,00015}{l} = \frac{0,0075}{l},$$

а граница погрешности $E_{\frac{l}{100}}$ от округления величины корня до 4 знаков равняется 0,00005, после чего находим общую границу погрешности $\frac{l}{100}$:

$$E_{\frac{l}{100}} = E_{\frac{l}{100}} + E_{\frac{l}{100}} = \frac{0,0075}{l} + 0,00005$$

и общую границу погрешности l :

$$E_l = 100 E_{\frac{l}{100}} = 100 \left(\frac{0,0075}{l} + 0,00005 \right),$$

или по выполнению умножения:

$$E_l = \frac{0,75}{l} + 0,005, \quad (5)$$

где

$$E_{1l} = \frac{0,75}{l} \text{ и } E_{2l} = 0,005.$$

Пример 7. Решить пример 5 настоящего § при условии, что Δx и Δy будут числа приближенные и $E_{\Delta x} = 0,02$, а $E_{\Delta y} = 0,03$.

В этом случае граница погрешности подкоренного выражения увеличивается еще на границу погрешности

$$\left(\frac{\Delta x}{100}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{\Delta y}{100}\right)^2,$$

так как эти числа будут приближенными.

По правилам нахождения границы погрешности степеней и частного от деления на точное число получим:

$$E_{\left(\frac{\Delta x}{100}\right)^2} = 2 \times \frac{\Delta x}{100} E_{\frac{\Delta x}{100}} = 2 \times \frac{\Delta x}{100} \times \frac{E_{\Delta x}}{100} = 2 \times \frac{\Delta x \times 0,02}{100^2} = \frac{2 \times 18,16 \times 0,02}{100^2} = \frac{7,264}{100^2} = 0,00073 \text{ (с округлением);}$$

и

$$E_{\left(\frac{\Delta y}{100}\right)^2} = 2 \times \frac{\Delta y}{100} E_{\frac{\Delta y}{100}} = 2 \times \frac{\Delta y}{100} \times \frac{E_{\Delta y}}{100} = \frac{2 \times \Delta y \times 0,03}{100^2} = \frac{2 \times 4,33 \times 0,03}{100^2} = \frac{0,2598}{100^2} = 0,00003 \text{ (с округлением).}$$

В общем же граница погрешности подкоренного выражения увеличится в рассматриваемом случае на

$$E_{\left(\frac{\Delta x}{100}\right)^2} + E_{\left(\frac{\Delta y}{100}\right)^2} = 0,00073 + 0,00003 = 0,00076$$

и сделается поэтому равной $0,00015 + 0,00076 = 0,00091$, и тогда граница погрешности корня:

$$\sqrt{1,8121^2 + 0,00091}$$

от вычисления изменится и определится следующим образом:

$$E_{1,8021} = E_l \sqrt{1,8021^2 + 0,00091} = \frac{E_{(1,8021 + 0,00091)}}{2 \sqrt{1,8021^2 + 0,00091}} = \frac{0,00091}{2 \times 1,8021} = \frac{0,00091}{3,6042} = 0,00026, \text{ (с округлением),}$$

граница же погрешности от округления величины корня $E_{2,8021}$ остается такой же, как и в предыдущем примере, и граница общей погрешности для данного случая будет такова:

$$E_{1,8021} = E_{1,8021} + E_{2,8021} = 0,00026 + 0,00005 = 0,00031.$$

Граница погрешности линии l определяется подобно тому, как и в примере 5 настоящего §, т.е.:

$$E_l = E_{100 \times 1,8021} = 100 E_{1,8021} = 100 \times 0,00031 = 0,031,$$

т.е. l будет вычислена с точностью до 0,031 м.

Пример 8. Определить, какая граница погрешности вводится от пользования таблицами квадратов чисел для возведения в квадрат числа a и извлечения корня из a^2 ?

Обобщая рассуждения примеров 3, 4 и 5 настоящего §, получаем, что от пользования указанными таблицами для возведения в квадрат числа a вводится погрешность, граница которой $= 0,00005$; эта граница составит границу погрешности степени a^2 , если число a точное и прибавляется к границе погрешности a^2 , если a число приближенное.

При пользовании указанными таблицами для извлечения квадратного корня из числа a вводится в подкоренную величину a погрешность, граница которой $= 0,00005$; эта граница составит границу погрешности числа a , если оно было точным, и прибавляется к его границе погрешности, если оно было приближенным.

Что же касается погрешности от округления величины квадратного корня, то таковая, также как и всегда вообще погрешность округляемых чисел, имеет своей границей половину единицы последнего знака.

Пример 9. Вычислить непосредственно по таблицам Гаусса и найти точность величины $a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} a}$ при условиях примера 2 настоящего §, т.-е. $a = 110,25$ м есть число точное,

$$Q = 1,1292 \text{ га} = 11292 \text{ м}^2 \text{ и } a = 27^\circ 32'.$$

Подставив вместо чисел a , Q и a их значения в данное для вычисления выражение, получим:

$$a' = \sqrt{110,25^2 + 22584 \operatorname{tg} 27^\circ 32'}.$$

Прежде всего напомним способ производства самого вычисления этого выражения из примера 5 § 3 и внесем в это вычисление некоторое изменение, вызванное необходимостью увеличить точность результата, что в данном § вполне можно обосновать на изложенных ранее правилах.

Изменение это будет заключаться в следующем: для определения величины

$$22584 \operatorname{tg} 27^\circ 32' = \frac{22584 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'}$$

мы представляли числитель таким образом:

$$100 \times 225,84 \sin 27^\circ 32';$$

теперь же можем утверждать, что точность вычисленной величины числителя будет значительно большей, если мы представим его в виде:

$$10 \times 2258,4 \sin 27^\circ 32'.$$

В самом деле, точность нахождения произведения $225,84 \sin 27^\circ 32'$ по таблицам Гаусса будет до 0,02, так как здесь будет 4 определения по таблицам с границей погрешности в 0,005 при каждом; точность же нахождения произведения

$$2258,4 \sin 27^\circ 32' = (7 \times 300 + 100 + 50 + 8 + 0,4) \sin 27^\circ 32'$$

будет до 0,055, так как здесь будет 11 определений по таблицам с границей погрешности при каждом в 0,005.

Далее, при умножении найденной величины $225,84 \sin 27^\circ 32'$ на 100 граница погрешности $225,84 \sin 27^\circ 32'$ увеличится, согласно правила определения границы погрешности при умножении на точное число, в 100 раз и будет $= 0,02 \times 100 = 2$; при умножении же найденной величины $2258,4 \sin 27^\circ 32'$ на 10, граница погрешности 0,055 увеличится, согласно тех же правил, только в 10 раз и будет равна

$$0,055 \times 10 = 0,55,$$

т.-е. окажется значительно меньшей, чем в первом случае.

С принятием изложенного изменения, вычисление будет произведено следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{22584 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} &= 10 \times \frac{2258,4 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= 10 \times \frac{(7 \times 300 + 100 + 50 + 8 + 0,4) \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= 10 \times \frac{(7 \times 138,68 + 46,23 + 23,11 + 3,70 + 0,19)}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= 10 \times \frac{(970,76 + 46,23 + 23,11 + 3,70 + 0,19)}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= 10 \times \frac{1043,99}{\cos 27^\circ 32'} = 10 \times \frac{3 \times 266,02 + 177,35 + 62,07 + 6,21 + 0,30}{\cos 27^\circ 32'} = \\ &= 10 \times \frac{(3 \times 300 + 200 + 70 + 7 + 0,34) \cos 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = 10 \times 1177,34 = 11773,4. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{110,25^2 + 11773,4} = \sqrt{100^2 \left(\frac{110,25^2}{100^2} + \frac{11773,4}{100^2} \right)} = \\ &= 100 \sqrt{\left(\frac{110,25}{100} \right)^2 + \frac{11773,4}{10000}} = 100 \sqrt{1,1025^2 + 1,17734} = \\ &= 100 \sqrt{1,2144 + 0,0111 + 1,17734} = 100 \sqrt{2,39284} = \\ &= 100 \sqrt{2,3901 + 0,00274 - 0,00003} = 100 \sqrt{1,5469^2 - 0,00003} = \\ &= 100 \times 1,5469 = 154,69. \end{aligned}$$

Приступим теперь к нахождению точности числа a' .

Граница погрешности величины произведения $2258,4 \times \sin 27^\circ 32'$ нами уже найдена выше и оказалась равной 0,055.

Граница погрешности приближенного частного

$$\frac{1043,99}{\cos 27^\circ 32'} = 1177,34$$

при границе погрешности числителя = 0,055 определится по способу примера 6 § 27, т.-е. эта граница погрешности будет равняться дроби, знаменателем которой будет $\cos 27^\circ 32'$, а числителем сумма границ погрешности числа 1043,99 и вычисляемого непосредственно по таблицам Гаусса произведения $1177,34 \cos 27^\circ 32'$.

Погрешность числа 1043,99 есть 0,055; погрешность же произведения $1177,34 \cos 27^\circ 32'$, получаемого семью определениями по таблицам с границей погрешности при каждом из них в 0,005, будет равна

$$7 \times 0,005 = 0,035,$$

и таким образом:

$$E_{\frac{1043,99}{\cos 27^\circ 32'}} = \frac{0,055 + 0,035}{\cos 27^\circ 32'} = \frac{0,09}{\cos 27^\circ 32'} = 0,11 \text{ (с округлением),}$$

а граница погрешности выражения

$$\frac{2258,4 \sin 27^\circ 32'}{\cos 27^\circ 32'} = 10 \times \frac{1043,99}{\cos 27^\circ 32'}$$

будет, согласно правил изменения погрешности при умножении приближенного числа на точное, в десять раз больше $E_{\frac{1043,99}{\cos 27^\circ 32'}}$, т.-е. равняется $0,11 \times 10 = 1,1$.

Такова граница погрешности числа 11773,4.

От уменьшения его в 10000 раз граница его погрешности уменьшилась также в 10000 раз и сделалась, следовательно, равной

$$\frac{1,1}{10000} = 0,00011;$$

к ней, согласно вывода предыдущего примера, прибавляется граница погрешности от пользования таблицей квадратов чисел для возведения 1,1025 в квадрат — 0,00005 и от пользования теми же таблицами для извлечения квадратного корня — 0,00005; и таким образом граница

общей погрешности подкоренного числа $1,5469^2 - 0,00005$ будет определена таким образом:

$$E_{(1,5469^2 - 0,00005)} = 0,00011 + 0,00005 + 0,00005 = 0,00021.$$

Граница же погрешности квадратного корня 1,5469 будет выражаться согласно формулы 3 § 29 и вывода предыдущего примера следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{1,5469} &= E_{1,5469} + E_{21,5469} = E_1 \sqrt{1,5469^2 - 0,00005} + E_2 \sqrt{1,5469^2 - 0,00005} = \\ &= \frac{E_{(1,5469^2 - 0,00005)}}{2 \sqrt{1,5469^2 - 0,00005}} + 0,00005 = \\ &= \frac{0,00021}{2 \times 1,5469} + 0,00005 = \frac{0,00021}{3,0938} + 0,00005 = \end{aligned}$$

= (с округлением) $0,00007 + 0,00005 = 0,00012$.

Наконец, граница погрешности числа a' определится таким образом:

$$E_{a'} = E_{100 \times 1,5469} = 100 E_{1,5469} = 100 \times 0,00012 = 0,012,$$

и величина a' будет вычислена с точностью до 0,012.

Сравнивая вычисление настоящего примера непосредственно по таблицам Гаусса с вычислением того же выражения на арифмометре (см. пример 2 настоящего §), видим, что при вычислении помощью арифмометра точность несколько уступает точности последнего примера, объяснение чего заключается в том, что в примере 2-м $\operatorname{tg} \alpha$ мы вычисляли по столбцу первому и получили поэтому границу погрешности числа $2Q \operatorname{tg} \alpha$ равной 2,5972, тогда как в последнем примере для нахождения произведения $2Q$ на $\sin \alpha$ и частного $2Q \sin \alpha$ на $\cos \alpha$ мы пользовались, главным образом, столбцом 3-м таблицы, и граница погрешности числа $2Q \operatorname{tg} \alpha$ оказалась равной только 1,1.

Из этого же примера, вместе с примерами 3—8 настоящего §, мы получаем основание считать, что *таблицы квадратов чисел являются достаточно хорошим пособием для вычислений, в смысле точности полученного результата.*

ПРИЛОЖЕНИЕ.

§ 30. Граница погрешности $\sin$ и $\cos$ приближенных углов.

Начнем с конкретного случая.

Пусть нам дан угол $\alpha = 27^\circ 32'$, относительно которого известно, что он является приближенной величиной и истинное его значение

может быть больше или меньше $27^\circ 32'$, отличаясь от $27^\circ 32'$ на некоторую величину, но на какую именно, неизвестно, а дано лишь, что во всяком случае погрешность угла α не может достигать $2'$, т.е. $2'$ будут границей погрешности угла α , или

$$E_\alpha = 2';$$

тогда α_1 и α_2 , верхняя и нижняя граница угла α , определяются по формулам (2) § 10, т.е.

$$\alpha_1 = \alpha + E_\alpha = 27^\circ 32' + 2' = 27^\circ 34',$$

$$\alpha_2 = \alpha - E_\alpha = 27^\circ 32' - 2' = 27^\circ 30'.$$

Для определения границы погрешности $\sin \alpha$ мы сначала найдем его верхнюю и нижнюю границу, а для этого воспользуемся неравенствами (1) § 10, — обозначая точную величину α через A :

$$\alpha_1 > A > \alpha_2, \quad (1)$$

и вспомнив из тригонометрии, что с увеличением угла, находящегося в пределах между 0° и 90° , увеличивается и $\sin$ этого угла, напомним на основании неравенств (1) новые неравенства:

$$\sin \alpha_1 > \sin A > \sin \alpha_2, \quad (2)$$

или подставляя вместо α_1 и α_2 их численные значения, имеем:

$$\sin 27^\circ 34' > \sin A > \sin 27^\circ 30'.$$

Отсюда по формулам (3) § 10 получаем:

$$\sin \alpha = \frac{\sin 27^\circ 34' + \sin 27^\circ 30'}{2} = \frac{0,46285 + 0,46165}{2} = 0,46225.$$

и

$$E_{\sin \alpha} = \frac{\sin 27^\circ 34' - \sin 27^\circ 30'}{2} = \frac{0,46285 - 0,46165}{2} = 0,0006.$$

Так как здесь $\sin 27^\circ 34'$ и $\sin 27^\circ 30'$ являются верхней и нижней границей $\sin A$, то, получая их приближенные значения по таблицам Гаусса, мы брали для первого верхнюю, а для второго — нижнюю границу, так как без этого точная величина $\sin 27^\circ 34'$ могла бы оказаться больше взятой по таблицам 0,4628, а $\sin 27^\circ 30'$ меньше 0,4617, и такие числа могли бы и не быть границами $\sin A$.

Переходя теперь к общему случаю решения вопроса для $\sin \alpha$, прежде всего заметим, что изложенный способ определения границы погрешности $E_{\sin \alpha}$ удобней заменить способом непосредственного ее нахождения, а для этого воспользуемся неравенствами 2) настоящего § и заменим в них α_1 и α_2 их значениями из формул вида (2) § 10:

$$\alpha_1 = \alpha + E_\alpha \text{ и } \alpha_2 = \alpha - E_\alpha, \quad (3)$$

после чего получим неравенства:

$$\sin (\alpha + E_\alpha) > \sin A > \sin (\alpha - E_\alpha).$$

Подставляя в последние неравенства вместо $\sin (\alpha + E_\alpha)$ и $\sin (\alpha - E_\alpha)$ их значения как $\sin$ суммы и разности углов по формулам тригонометрии, получим:

$$\sin \alpha \cos E_\alpha + \sin E_\alpha \cos \alpha > \sin A > \sin \alpha \cos E_\alpha - \sin E_\alpha \cos \alpha.$$

Принимая во внимание, что для E_α , равной нескольким минутам, $\cos E_\alpha$ весьма мало отличается от единицы, можно принять $\cos E_\alpha$ равным единице, и тогда наши неравенства переписутся следующим образом:

$$\sin \alpha + \sin E_\alpha \cos \alpha > \sin A > \sin \alpha - \sin E_\alpha \cos \alpha. \quad (4)$$

Сравнивая эти неравенства с неравенствами вида (3) § 22, получим:

$$E_{\sin \alpha} = \sin E_\alpha \cos \alpha. \quad (5)$$

Выведем теперь формулы для непосредственного определения границы погрешности $\cos \alpha$ при α приближенном.

Для этого воспользуемся неравенствами (1) настоящего § и вспомним, что с увеличением угла, находящегося в пределах между 0° и 90° , $\cos$ его уменьшается; вследствие чего будут иметь место неравенства:

$$\cos \alpha_2 > \cos A > \cos \alpha_1;$$

подставляя в них вместо α_2 и α_1 их значения из формул (3) настоящего §, получим:

$$\cos (\alpha - E_\alpha) > \cos A > \cos (\alpha + E_\alpha).$$

Подставляя сюда вместо $\cos (\alpha - E_\alpha)$ и $\cos (\alpha + E_\alpha)$ значения их как $\cos$ разности и суммы углов по формулам тригонометрии, получим:

$$\cos \alpha \cos E_\alpha + \sin \alpha \sin E_\alpha > \cos A > \cos \alpha \cos E_\alpha - \sin \alpha \sin E_\alpha;$$

заменяя здесь, так же как и при выводе формулы (4), $\cos E_\alpha$ единицей, получим

$$\cos \alpha + \sin \alpha \sin E_\alpha > \cos A > \cos \alpha - \sin \alpha \sin E_\alpha. \quad (6)$$

Сравнивая эти неравенства с неравенствами вида (3) § 22, заключаем, что:

$$E_{\cos \alpha} = \sin \alpha \sin E_\alpha. \quad (7)$$

В интересующие нас формулы (5) и (7) входит величина $\sin E_\alpha$, т.е. $\sin$ малого угла; она легко определяется на основании известных из курса тригонометрии свойств $\sin$ малого угла и оказывается равной числу, выражающему минуты угла E_α , умноженному на $\sin 1'$, т.е.

$$\sin E_\alpha = E_\alpha \sin 1'. \quad (8)$$

Подставляя в формулы (5) и (7) вместо $\sin E_\alpha$ его значение из формулы 8, получим:

$$E_{\sin \alpha} = E_\alpha \cos \alpha \sin 1', \quad (9)$$

$$E_{\cos \alpha} = E_\alpha \sin \alpha \sin 1'. \quad (10)$$

Такова граница погрешности $\sin$ и $\cos$ угла α , являющаяся следствием того, что угол α будет приближенным; но если мы будем определять величины $\sin$ и $\cos$ по таблицам Гаусса, где значения их даются с погрешностью, граница которой $= 0,00005$, то к границам погрешностей $\sin$ и $\cos \alpha$ по формулам (9) и (10) необходимо прибавить границу этой погрешности, и будем иметь окончательно:

$$E_{\sin \alpha} = 0,00005 + E_\alpha \cos \alpha \sin 1' \quad (11)$$

$$E_{\cos \alpha} = 0,00005 + E_\alpha \sin \alpha \sin 1'. \quad (12)$$

Если бы нам была дана не граница погрешности угла α , а действительная его погрешность $\Delta \alpha$, то мы были бы в состоянии определить действительные погрешности $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \Delta \sin \alpha &= \sin(\alpha + \Delta \alpha) - \sin \alpha = \sin \alpha \cos \Delta \alpha + \cos \alpha \sin \Delta \alpha - \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha + \sin \Delta \alpha \cos \alpha - \sin \alpha^1) = \sin \Delta \alpha \cos \alpha = \Delta \alpha \cos \alpha \sin 1'^2), \end{aligned}$$

¹⁾ После замены $\cos \Delta \alpha$ на 1.

²⁾ После замены $\sin \Delta \alpha$ по формуле (8).

и

$$\begin{aligned} \Delta \cos \alpha &= \cos(\alpha + \Delta \alpha) - \cos \alpha = \cos \alpha \cos \Delta \alpha - \sin \alpha \sin \Delta \alpha - \cos \alpha = \\ &= -\sin \alpha \sin \Delta \alpha = -\Delta \alpha \sin \alpha \sin 1'^1), \end{aligned}$$

т.е. имеем формулы:

$$\Delta \sin \alpha = \Delta \alpha \cos \alpha \sin 1', \quad (13)$$

$$\Delta \cos \alpha = -\Delta \alpha \sin \alpha \sin 1'. \quad (14)$$

Сравнивая эти формулы с формулами (9) и (10), видим, что действительные погрешности $\sin$ и $\cos$ определяются точно так же, как и границы погрешности этих функций.

Пример 1. Найти границу погрешности определяемых по таблицам Гаусса величин $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ при $\alpha = 27^\circ 32'$ и $E_\alpha = 2'$ (см. приведенный в начале настоящего § пример).

По формуле (11) найдем, что

$$E_{\sin \alpha} = 0,00005 + 2 \cos 27^\circ 32' \sin 1';$$

подставляя в эту формулу 0,0003 вместо $\sin 1'$ и вместо $\cos 27^\circ 32'$ его величину из таблиц Гаусса, получаем:

$$E_{\sin \alpha} = 0,00005 + 2 \times 0,8867 \times 0,0003 = 0,00005 + (\text{с округлением}) 0,00054 = 0,00059 = 0,0006 (\text{с округлением}).$$

Далее по формуле (12) найдем, что:

$$E_{\cos \alpha} = 0,00005 + 2 \sin 27^\circ 32' \sin 1',$$

или после подстановки, вместо $\sin 27^\circ 32'$ его величины из таблиц Гаусса и 0,0003 вместо $\sin 1'$ получим:

$$E_{\cos \alpha} = 0,00005 + 2 \times 0,4623 \times 0,0003 = 0,00005 + (\text{с округлением}) 0,00028 = 0,00033.$$

§ 31. Точность вычисления приращений при помощи пятизначных таблиц логарифмов.

Разберем предварительно такой вопрос: с какой точностью находится логарифм числа из 5 цифр, если мы при этом будем пользоваться пятизначными таблицами логарифмов. Возьмем конкретный пример: пусть требуется найти $\log 375,14$.

¹⁾ После замены $\cos \Delta \alpha$ на 1.

Данная операция сводится, как известно, к получению $\lg 375,1$ и нахождению затем величины поправки для логарифма на разность 0,04 между данным числом 375,14 и 375,1, определяемой по столбцу *P.P.*

Эта поправка находится по тому же правилу, как и поправка на четвертый десятичный знак по столбцу *P.P.* таблиц квадратов чисел (см. § 29), и подобно тому, как и в § 29, мы получим, что $\lg 375,14$ будет равняться 0,6 от $\lg 375,1$ и 0,4 от $\lg 375,2$, т.е.

$$\lg 375,14 = 0,6 \times \lg 375,1 + 0,4 \lg 375,2.$$

Принимая во внимание, что как $\lg 375,1$, так и $\lg 375,2$ находятся с точностью до половины единицы последнего знака, т.е., при пользовании пятизначными таблицами, с точностью до 0,000005, получим точность $\lg 375,14$:

$$\begin{aligned} E_{\lg 375,14} &= E_{(0,6 \lg 375,1 + 0,4 \lg 375,2)} \text{ (см. § 22)} = \\ &= E_{0,6 \lg 375,1} + E_{0,4 \lg 375,2} = \\ \text{(см. § 24)} \\ &= 0,6 E_{\lg 375,1} + 0,4 E_{\lg 375,2} = 0,6 \times 0,000\,005 + 0,4 \times \\ &\quad \times 0,000\,005 = 0,000\,005. \end{aligned}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в § 29, легко показать, что такая же граница погрешности будет для логарифма всякого числа, независимо от того, какая цифра будет стоять на пятом месте.

В курсе „Исчисление конечных разностей“ показывается, что пользование принципом пропорциональности при составлении столбца *P.P.* логарифмических таблиц в едет погрешность меньшую чем 0,000 000 1, и этой погрешностью можно, поэтому, так же как и погрешностью от пользования этим принципом для составления столбца *P.P.* таблиц квадратов чисел, пренебречь.

Таким образом будем считать вообще, что нахождение логарифма числа как с 4, так и с 5 цифрами по пятизначным таблицам производится с точностью до 0,000 005.

Переходя к общему вопросу, начнем с конкретного примера:

Найти точность определяемого помощью пятизначных таблиц логарифмов приращения Δx для линии

$$\frac{CB : 21^\circ 15'}{375,2}.$$

Как известно, Δx получается по формуле:

$$\Delta x = 375,2 \cos 21^\circ 15';$$

откуда находится $\lg (\Delta x)$:

$$\lg (\Delta x) = \lg 375,2 + \lg \cos 21^\circ 15' = 2,57426 + 1,96942 = 2,54368,$$

а по логарифму 2,54368 находится и самая величина $\Delta x = 349,68$ при чем, так как $\lg 349,68 = 2,54367_4$, получается остаток логарифма $2,54368 - 2,54367_4 = 0,00000_6$, являющийся следствием того, что число 349,68 мы взяли с округлением до сотых долей.

Приступим теперь к нахождению границы погрешности числа 349,68.

Определим сначала границу погрешности $\lg (\Delta x)$.

$$\begin{aligned} E_{\lg (\Delta x)} &= E_{\lg (375,2 \cos 21^\circ 15')} = E_{(\lg 375,2 + \\ &+ \lg \cos 21^\circ 15')} = E_{\lg 375,2} + E_{\lg \cos 21^\circ 15'} = \\ \text{(см. § 22)} \\ &= 0,000005 + 0,000005 = 0,00001. \end{aligned}$$

Далее $\lg (\Delta x)$, равный 2,54368, мы разлагали на два слагаемых — $2,54367_4$, являющееся приближенным, взятым по таблицам, логарифмом числа 349,68, и $0,00000_6$, являющееся остатком логарифма, т.е.

$$\lg (\Delta x) = 2,54367_4 + 0,00000_6;$$

принимая здесь, $2,54367_4$ за логарифм числа 349,68, мы вводим погрешность такую же, какая получается при нахождении по таблицам логарифма числа 349,68, т.е. погрешность, граница которой, как показано было в начале настоящего §, равна 0,000 005; и поэтому величина $\lg (\Delta x)$, представленная следующим равенством:

$$\lg (\Delta x) = \lg 349,68 + 0,00000_6,$$

будет заключать в себе кроме прежней погрешности с границей 0,00001, новую с границей 0,000 005, а вместе 0,000 015.

Принимая Δx равным 349,68, мы вводим в Δx погрешность двойного рода: 1) оттого, что число 349,68 взято с округлением и получился вследствие этого остаток логарифма, равный $0,00000_6$, и 2) оттого, что в величине $\lg \Delta x$ заключается погрешность, граница которой равна 0,000 015.

Первая погрешность имеет границей $E_{\Delta x}$ равную половине единицы последнего знака, т.е. 0,005, вторую же можем получить, приняв во внимание то обстоятельство, что с изменением числа 349,68 на 0,1 логарифм его изменяется на 0,00013, и легко поэтому узнать, на сколько изменится число с изменением его логарифма на границу погрешности 0,000 015; а именно:

$$\begin{array}{rcl} 0,1 & \text{соответствует} & 0,00013 \\ E_{\Delta x} & & 0,000 015, \end{array}$$

откуда

$$E_{\Delta x} = \frac{0,1 \times 0,000 015}{0,00013} = (\text{с округлением}) 0,012.$$

Зная границы погрешности Δx от вычисления и от округления получаем:

$$\begin{aligned} E_{\Delta x} &= E_{\Delta x} + E_{\Delta x} = 0,012 + 0,005 = 0,017 = \\ &= 0,02 (\text{с округлением}). \end{aligned}$$

Переходя теперь к общему случаю определения границы погрешности приращения координат и обобщая рассуждения приведенного примера, получим, что при нахождении логарифма приращения будем иметь границу погрешности всегда равную, при пятизначных таблицах, 0,00001, так как и логарифм числа, выражающего длину линии, и логарифм $\cos$ или $\sin$ румба находятся по таблицам с точностью до 0,000 005; определяя затем по логарифму число, вводим в логарифм погрешность, граница которой равна 0,000 005, и общая граница погрешности логарифма будет 0,000 015 во всех случаях.

Точно также всегда может быть погрешность от округления с границей равной 0,005, и разница обнаруживается лишь в величине табличной разности.

В приведенном примере она оказалась равной 0,00013, но по таблицам можно убедиться, что с изменением величины приращения от 100,00 до 1000,00 табличная разность изменяется от 0,00044 до 0,00004, и поэтому величина E_1 для приращения координат будет изменяться в пределах:

$$\begin{aligned} \text{от } \frac{0,1 \times 0,000 015}{0,00044} &= 0,004 (\text{с округлением}) \\ \text{до } \frac{0,1 \times 0,000 015}{0,00004} &= 0,04 (\text{с округлением}), \end{aligned}$$

а граница общей погрешности вычисленной величины приращения в пределах:

$$\begin{aligned} \text{от } 0,004 + 0,005 &= 0,009 = 0,01 (\text{с округлением}) \\ \text{до } 0,04 + 0,005 &= 0,045. \end{aligned}$$

В том случае, если величина приращения меньше 100,00 м и заключается между 10,00 и 100,00 м, она попрежнему будет определяться с пятью знаками, а граница общей погрешности приращения будет изменяться в пределах от 1 до 4,5 последнего знака, но этот знак уже будет представлять тысячные доли метра; округляя же приращения до сотых долей, введем погрешность от округления с границей равной 0,005, и граница общей погрешности будет тогда изменяться в пределах:

$$\begin{aligned} \text{от } 0,001 + 0,005 &= 0,006 \text{ до } 0,0045 + 0,005 = 0,0095 = \\ &= 0,01 (\text{с округлением}). \end{aligned}$$

Еще более точно находятся приращения, если они заключаются между 1,00 и 10,00, но на этом останавливаться мы не будем.

Сравнивая теперь точность нахождения приращений координат посредством таблиц логарифмов с точностью определения их посредством таблиц Гаусса, мы видим, что в первом случае точность изменяется с изменением величины приращения, а во втором — с изменением величины линии; в одних случаях, поэтому, первый способ даст более точный результат, а в других второй.

Принимая же во внимание, что для линии, близкой к 1000,0 м, одно из приращений также может быть близко к 1000,00 м, и вспомнив, что в этом случае по таблицам Гаусса такое приращение находится с точностью до 0,03 м, а по таблицам логарифмов — лишь с точностью до 0,045, находим, что работа по таблицам Гаусса имеет значительное преимущество, так как граница погрешности при этом способе вычислений находится в более узких пределах.

При пользовании же таблицами логарифмов является нерациональным получение с большой точностью одних приращений, когда другие в то же время вычисляются довольно грубо, с погрешностью близкой к 0,05.

Из этого можно сделать тот вывод, что при вычислении приращений координат и при других аналогичных по характеру операциях таблицы Гаусса, в смысле точности результата, являются пособием, более отвечающим характеру работы, чем таблицы логарифмов.

§ 32. Заключение.

Заканчивая настоящую главу, следует указать, что применение теории приближенных вычислений ко всем основным вопросам нашего курса, проведенное на большом количестве самых разнообразных примеров, дало достаточно полный материал, с которым можно приступить к изложению и обоснованию специальной части нашего курса.

В частности, мы установили все особенности таблиц Гаусса, доказав их полную пригодность для самых различных видов вычислений, за исключением лишь тех, при которых приходится производить деление на $\sin$ или $\lg$ малых углов.

Далее, мы установили, с каким количеством знаков следует записывать приближенные числа, чтобы эта запись удовлетворяла и формальным требованиям, и требованиям целесообразности.

Мы дали способы определения точности результата для всех основных видов вычислений, с которыми в дальнейшем придется столкнуться, и пользуясь ими мы можем выносить вполне обоснованное суждение относительно всех тех методов решения различных вопросов, в смысле точности получаемого при этом результата, с которыми нам в следующих главах придется столкнуться.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ВЕШЕНИЕ ЛИНИЙ.

§ 33. Различные способы вешения.

Вешение линий между двумя точками местности A и B , будучи делом чрезвычайно простым в том случае, если с одной из них видна другая, становится уже несколько затруднительным, когда этого нет, но можно между точками A и B найти на линии AB такую точку C , из которой видны обе точки A и B , и делается порою весьма затруднительным, если такой точки C найти невозможно, и нужно установить 2, 3 и более промежуточных на линии точек, чтобы из одной из них была видна одновременно предыдущая и последующая.

Рекомендуемые для таких случаев способы вешения линии AB посредством установки между точками A и B двух, трех и более вех и перенесения их до тех пор, пока вехи эти не окажутся на линии AB , имеют свои значительные неудобства, как-то: 1) такого рода вешение производится, обычно, невооруженным глазом, и данная работа не может отличаться надлежащей точностью, 2) затрачивается на эту операцию довольно много времени. Еще менее удобными являются рекомендуемые способы вешения через лес.

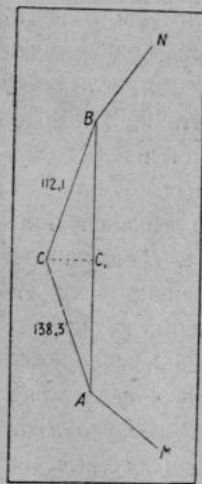
По этим соображениям указанные способы являются мало удобными при работах для землеустройства и уже в инструкции для производства этих работ 1913 г. имеются некоторые указания на применение особого способа вешения, который мы будем называть *математическим способом*, но эти ука-

зания, так же как и литература по данному вопросу, далеко его не исчерпывают, и применение этого способа на практике по указаниям инструкции не дает сколько-нибудь значительного упрощения.

В настоящей главе мы попытаемся осветить по возможности всесторонне данный вопрос, как с теоретической, так и с практической стороны.

§ 34. Описательная сторона применения математического способа вешения.

Обычно при работах по землеустройству, если из пункта A окружной межи или какого-либо иного прокладываемого хода



Черт. 5.

не виден следующий за ним пункт B , имеются все же вполне достаточные основания для того, чтобы установить направление AB без сколько-нибудь значительной ошибки, так как это направление определяется плановыми данными, межниками, показанием местных жителей и пр., и является поэтому полная возможность проложить вдоль линии AB вспомогательный ход помощью угломерного инструмента, обычно, из 2, а в случае необходимости 3 или 4 линий, с измерением углов линий этого хода с линиями, предшествующей AB и последующей, и между собою, и с применением тех же технических требований, которые относились к общему ходу, пунктами которого являются A и B .

Рассмотрим на конкретных примерах наиболее часто встречающиеся на практике отдельные случаи.

Пример 1. Пусть между пунктами A и B (см. черт. 5) проложен ход из линий $AC=138,3$ м и $CB=112,1$ м, при

чем угол $ACB=179^{\circ}15'$, угол линии AC с предшествующей линией общего хода MA , т.-е. $\angle MAC=134^{\circ}15'$, и угол линии CB с последующей линией общего хода BN равен $138^{\circ}19'$.

Необходимо перенести пункт C на линию AB , произведя при полевой обстановке все требуемые для определения длины перпендикуляра CC_1 , опущенного на линию AB , вычисления.

Решение данного вопроса сводится к определению высоты CC_1 треугольника ACB по его боковым сторонам AC и CB , и углу при вершине C .

Найдем сначала для этого углы CBA и BAC , которые для краткости будем просто называть A и B . Сумма этих углов будет, как известно, дополнением до 180° для угла C , т.-е.

$$\angle A + \angle B = 180^{\circ} - \angle C$$

или

$$\angle A + \angle B = 180^{\circ} - 179^{\circ}15' = 45'.$$

Из тригонометрии известно, что $\sin$ углов относятся как противолежащие стороны, т.-е.:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CB}{AC},$$

но так как углы A и B малы, то отношение их $\sin$ будет близким по величине к отношению самих углов, т.-е. можно отношение синусов заменить отношением самих углов, после чего будем иметь:

$$\frac{A}{B} = \frac{CB}{AC},$$

или, заменяя AC и CB их численными значениями:

$$\frac{A}{B} = \frac{112,1}{138,3},$$

т.-е. перед нами арифметическая задача: разделить сумму углов A и B на два слагаемых пропорционально числам 112,1 и 138,3.

Известно, что при этих условиях углы A и B найдутся из равенств:

$$\begin{aligned}\angle B &= \frac{45' \times 138,3}{112,1 + 138,3} = \frac{45' \times 138,3}{250,4} = 24',9 = \\ &= 25' \text{ (с округлением), и} \\ \angle A &= \frac{45' \times 112,1}{112,1 + 138,3} = \frac{45' \times 112,1}{250,4} = 20',1 = \\ &= 20' \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

Здесь проверкой вычислений служит то, что сумма

$$A + B = 45'.$$

После этого может быть вычислена величина CC_1 . Из $\triangle ACC_1$ имеем, что

$$CC_1 = AC \cdot \sin A,$$

а из $\triangle BC_1C$ для проверки имеем, что

$$CC_1 = BC \cdot \sin B.$$

Заменяя в этих равенствах $\sin A$ и $\sin B$, как $\sin$ малых углов, на $A \sin 1'$ и $B \sin 1'$, получим:

$$\begin{aligned}CC_1 &= AC \times A \times \sin 1' = 138,3 \times 20,1 \sin 1' = \\ &= 2779,83 \sin 1' = 2780 \sin 1' \text{ (с округлением).} \\ CC_1 &= BC \times B \times \sin 1' = 112,1 \times 24,9 \sin 1' = \\ &= 2791,29 \sin 1' = 2791 \cdot \sin 1' \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

Величина $\sin 1'$ имеет следующее действительное значение:

$$\sin 1' = 0,000\,290\,888\,20 \dots$$

С соответствующим округлением $\sin 1'$ можно, в случае необходимости, получить и в полевой обстановке, приравни-

вая его длине дуги в $0^\circ 01'$ при радиусе, равном единице, по очень легко выводимой формуле:

$$\sin 1' = \frac{2\pi}{360 \times 60},$$

после подстановки $\frac{22}{7}$ вместо π — т.е.

$$\sin 1' = \frac{2 \times 22}{7 \times 360 \times 60} = \frac{11}{7 \times 5400} = 0,000\,291 \text{ (с округле-}$$

нием), при чем результат получается очень близким к истинному.

Величину $\sin 1'$ можно взять округленной до 5 знаков, т.е. принять ее равной 0,00029. Тогда действительная погрешность от округления будет меньше 0,000001, а границей погрешности может быть принята $= 0,000\,001$; граница же погрешности вычисленной величины CC_1 будет:

$$\begin{aligned}E_{CC_1} &= E_{2791 \sin 1'} = 2791 E_{\sin 1'} = 2791 \times 0,000\,001 = \\ &= 0,003 \text{ м.}\end{aligned}$$

После этого получим:

$$\begin{aligned}CC_1 &= 2780 \times 0,000\,29 = 0,81 \text{ м,} \\ CC_1 &= 2791 \times 0,000\,29 = 0,81 \text{ м.}\end{aligned}$$

Результаты при обоих вычислениях совпадают, и можно принять окончательно CC_1 равным 0,81 м.

В данном случае мы брали углы A и B с десятичными долями минуты, и это было целесообразно, так как доли минуты имеют влияние на величину CC_1 при длинных линиях AC и BC . Что же касается того, с каким округлением следует брать углы A и B для исправления углов MAC и CBN основного хода, то в этом отношении поставим себе задание брать их с таким округлением, с каким будут получаться у нас углы окружной межи, а так как последние, при двукратном измерении их, записываются до $1/2'$, то и углы A и B будем

брать с округлением до $1/2'$, что нами для данного случая и выполнено.

Возвращаясь к поставленному в настоящем примере конкретному вопросу, будем иметь необходимость перенести пункт C по направлению перпендикуляра к AB на расстояние, равное $0,81$ м, т.е. в точку C_1 , и тогда линия AB окажется провешенной.

В дальнейшем будет подробно рассмотрено как в различных случаях необходимо это выполнять, в данном же примере мы на этом останавливаться не будем.

Этим и заканчиваются для этого случая вычисления при полевой обстановке.

При камеральной же обработке результатов полевых измерений нам придется потом исправить углы MAC и CBN , чтобы получить углы нашего истинного хода MAB и ABN , а для этого, как видно из чертежа (5), будем иметь равенства:

$$\begin{aligned}\angle MAB &= \angle MAC - \angle A = 134^\circ 15' - 20' = 133^\circ 55', \\ \angle ABN &= \angle CBN - \angle B = 138^\circ 19' - 25' = 137^\circ 54';\end{aligned}$$

сверх того нужно найти длину линии хода AB .

Из чертежа видно, что длина AB есть сумма проекций линий AC и CB на направление AB , т.е.

$$AB = AC_1 + C_1B = AC \cos A + CB \cos B.$$

Так как при незначительной величине углов A и B проекции линий AC и CB не будут отличаться от длины самих линий AC и CB , то

$$AB = AC + CB = 138,3 + 112,1 = 250,4.$$

Но если бы углы A и B были более значительными, то в вычисленную таким образом величину линии AB нужно было бы ввести поправку, определенную тем же способом, как и поправка на углы наклона.

ПРИМЕР 2. При условиях предыдущего примера в точке C оказались измеренными углы линий AC и CB с направлением CP внутреннего хода (см. черт. 6), т.е. угол ACP , оказавшийся равным $85^\circ 12'$, и угол $PCB = 94^\circ 03'$; найти углы этого направления с провешиваемой линией AB , т.е. углы AEP и PEB , и длину линии EP .

Из чертежа видно, что искомый угол AEP , как внешний по отношению к треугольнику ACE , равняется сумме углов A и ACE , т.е.

$$\angle AEP = \angle ACE + \angle A = 85^\circ 12' + 20' = 85^\circ 32';$$

таким же образом найдем, что

$$\angle PEB = \angle ECB + \angle B = 94^\circ 03' + 25' = 94^\circ 28'.$$

Для проверки имеем:

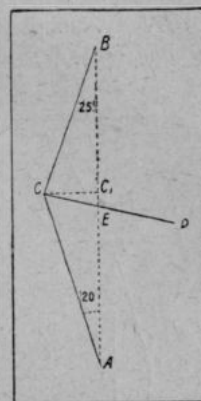
$$\angle AEP + \angle PEB = 85^\circ 32' + 94^\circ 28' = 180^\circ.$$

Сверх того необходимо исправить длину линии CP на отрезок CE .

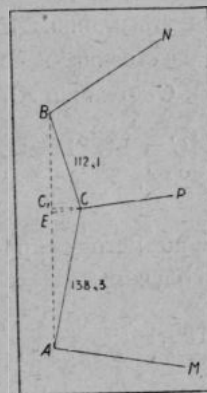
Вычисление его, производимое в камеральной обстановке, можно выполнить следующим образом:

$$CE = \frac{CC_1}{\sin (C_1EC)} = \frac{0,81}{\sin 85^\circ 32'} = 0,81. \\ \text{(с округлением)}$$

ПРИМЕР 3. Решить вопросы примеров 1-го и 2-го, но при условии, что угол ACB , отличаясь также на $45'$ от 180° , больше 180° .



Черт. 6.



Черт. 7.

В этом случае сумма углов A и B будет также $=45'$, и величина каждого из них будет та же, что и в примерах 1-м и 2-м, но для получения исправленных углов MAB и ABN нужно, как видно из чертежа 7, углы A и B прибавить к углам MAC и CBN , а для получения исправленных углов AEP и PEB нужно отнять углы A и B от углов ACP и PCB .

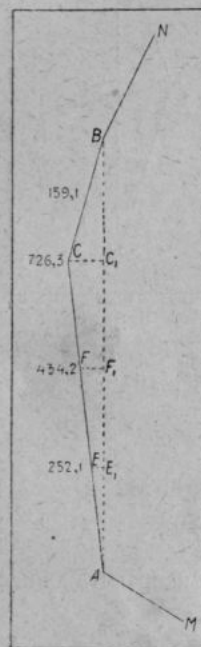
Величины CC_1 и CE при этом останутся прежними.

Пример 4. Пусть между двумя пунктами A и B проложен ход $AEFCB$, состоящий из 4 линий AE , EF , FC и CB ; при чем три первых отрезка образуют одну прямую AC (см. черт. 8), так как при установках инструмента в точках E и F линия была продолжена. Точка E находится на 252,1, а точка F на 434,2 м линии AC ; вся же линия $AC=726,3$ м, а линия $CB=159,1$ м. Найти углы линий AB с линиями AM и BN и расстояния вспомогательных пунктов E , F и C до линии AB .

$$\begin{aligned}\angle C &= 178^\circ 52', \angle MAC = 142^\circ 13', \\ \angle CBN &= 162^\circ 32'.$$

Находя углы A и B по методу примера 1-го настоящего §, получим:

$$\begin{aligned}\angle A &= \frac{(180^\circ - 178^\circ 52') \times 159,1}{726,3 + 159,1} = \frac{68' \times 159,1}{885,4} = 12',2 = \\ &= 12' \text{ (с округлением);} \\ \angle B &= \frac{(180^\circ - 178^\circ 52') \times 726,3}{726,3 + 159,1} = \frac{68' \times 726,3}{885,4} = 55',8 = \\ &= 56' \text{ (с округлением);}\end{aligned}$$



Черт. 8.

проверка дает:

$$\angle A + \angle B = 12',2 + 55',8 = 68' = 180^\circ - 178^\circ 52'.$$

Величина CC_1 получается также по методу примера 1-го настоящего §, т.е.

$$\begin{aligned}CC_1 &= AC \cdot \sin A = AC \times A \times \sin 1' = \\ &= 726,3 \times 12,2 \times 0,00029 = 2,57 \text{ м,}\end{aligned}$$

или для проверки:

$$\begin{aligned}CC_1 &= CB \cdot \sin B = CB \times B \times \sin 1' = \\ &= 159,1 \times 55,8 \times 0,00029 = 2,57 \text{ м.}\end{aligned}$$

Таким же образом, как и CC_1 , найдем EE_1 и FF_1 :

$$\begin{aligned}EE_1 &= AE \sin A = AE \times A \times \sin 1' = \\ &= 252,1 \times 12,2 \times 0,00029 = 0,89 \text{ м,}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}FF_1 &= AF \sin A = AF \times A \times \sin 1' = \\ &= 434,2 \times 12,2 \times 0,00029 = 1,54.\end{aligned}$$

Перенесением пунктов E , F и C на линию AB и произведем вешение линии AB .

Подобно тому, как и в примере 1-м, углы MAB и ABN получатся следующим образом:

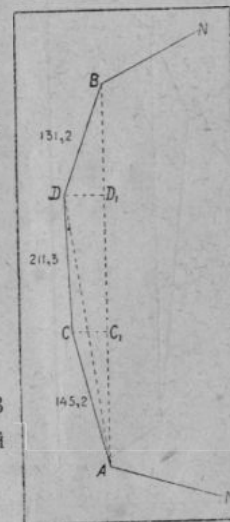
$$\begin{aligned}\angle MAB &= \angle MAC - \angle A = 142^\circ 13' - \\ &- 12' = 142^\circ 01'\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\angle ABN &= \angle CBN - \angle B = 162^\circ 32' - \\ &- 56' = 161^\circ 36'.$$

Пример 5. Между пунктами A и B проложен вспомогательный ход из 3 линий (см. черт. 9):

$$\begin{aligned}AC &= 145,2 \text{ м, } CD = 211,3 \text{ м и } DB = \\ &= 131,2 \text{ м.}\end{aligned}$$



Черт. 9.

$\angle C = 178^\circ 42'$ и $\angle D = 179^\circ 12'$, $\angle MAC = 162^\circ 13'$ и $\angle DBN = 135^\circ 17'$. Требуется перенести вспомогательные пункты C и D на линию AB и вычислить углы A и B для получения затем углов основного хода MAB и ABN .

Для решения данного вопроса приложим сначала метод предыдущих примеров к части вспомогательного хода из каких-либо двух соседних линий, например, AC и CD .

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\angle DAC + \angle CDA &= 180^\circ - \angle C = \\ &= 180^\circ - 178^\circ 42' = 1^\circ 18' = 78', \\ \angle DAC &= \frac{78' \times 211,3}{145,2 + 211,3} = \frac{78' \times 211,3}{356,5} = 46',2, \\ \angle CDA &= \frac{78' \times 145,2}{145,2 + 211,3} = \frac{78' \times 145,2}{356,5} = 31',8.\end{aligned}$$

Углы DAC и CDA нужны нам для промежуточных вычислений, и мы округлять их поэтому не будем.

Взятая для проверки сумма

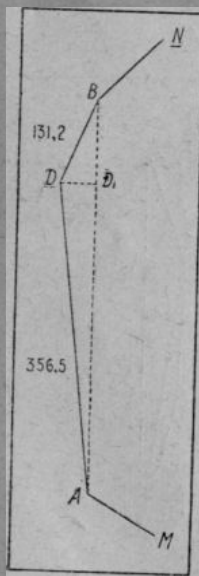
$$\angle DAC + \angle CDA = 46',2 + 31',8 = 78'$$

оказалась верной.

Линия $AD = AC + CD = 145,2 + 211,3 = 356,5$; так как углы DAC и CDA невелики, то поправки в величину суммы $AC + CD$ для получения AD не вводим.

$$\begin{aligned}\angle MAD &= \angle MAC - \angle DAC = 162^\circ 13' - \\ &- 46',2 = 161^\circ 26',8. \quad \angle ADB = \angle CDB - \\ &- \angle CDA = 179^\circ 12' - 31',8 = 178^\circ 40',2.\end{aligned}$$

После этого задача представится согласно черт. 10, и остается вторично применить тот же метод для определения углов A и B , перенесения вспомогательного пункта D на линию AB и исправления углов MAD и DBN .



Черт. 10.

При этом будем иметь:

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B &= 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 178^\circ 40',2 = 1^\circ 19',8 = \\ &= 79',8; \\ \angle A &= \frac{(\angle A + \angle B) \cdot 131,2}{356,5 + 131,2} = \frac{79',8 \times 131,2}{487,7} = 21',5; \\ \angle B &= \frac{(\angle A + \angle B) \cdot 356,5}{356,5 + 131,2} = \frac{79',8 \times 356,5}{487,7} = 58',3.\end{aligned}$$

Для проверки имеем, что

$$\angle A + \angle B = 21',5 + 58',3 = 79',8.$$

Далее:

$$\begin{aligned}DD_1 &= AD \sin A = AD \times A \sin 1' = \\ &= 356,5 \times 21,5 \times 0,00029 = 2,22 \text{ м}\end{aligned}$$

или для проверки:

$$\begin{aligned}DD_1 &= DB \sin B = DB \times B \times \sin 1' = \\ &= 131,2 \times 58,3 \times 0,00029 = 2,22 \text{ м}; \\ \angle MAB &= \angle MAD - \angle A = 161^\circ 26',8 - 21',5 = 161^\circ 5',3 = \\ &= 161^\circ 5' \frac{1}{2}' \text{ (с округлением);} \\ \angle ABN &= \angle DBN - \angle B = 135^\circ 17' - 58',3 = 134^\circ 18',7 = \\ &= 134^\circ 18' \frac{1}{2}' \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

$$\text{Линия } AB = AD + DB = 356,5 + 131,2 = 487,7 \text{ м.}$$

Остается найти расстояние CC_1 , необходимое нам для перенесения вспомогательного пункта C на линию AB (см. черт. 9).

Для этого найдем сначала угол BAC . Этот угол оказывается равным сумме углов DAC и BAD , т.-е.

$$\angle BAC = \angle DAC + \angle BAD = 46',2 + 21',5 = 67',7.$$

Затем уж нетрудно будет определить величину CC_1 (см. черт. 9), а именно:

$$\begin{aligned}CC_1 &= AC \cdot \sin (BAC) = 145,2 \sin 67',7 = \\ &= 145,2 \times 67,7 \times \sin 1' = 2,85 \text{ м.}\end{aligned}$$

Обобщая данные примеры, мы видим, что если вспомогательный ход заключает в себе 4 линии, то можно получить и для этого случая данные для перенесения его пунктов на линию AB и для получения углов основного хода при точках A и B .

§ 35. Обоснование метода вычисления поправочных углов для хода из двух линий.

Вычисленные на основании вышеизложенного метода поправочные углы будут заключать в себе погрешности двоякого рода: источником первого рода погрешностей будет то обстоятельство, что измеренные нами при вспомогательных пунктах углы будут приближенными, и такими же будут дополнения их до 180° , являющиеся суммами поправочных углов; источником второго рода погрешностей будет примененный нами метод упрощенного вычисления поправочных углов.

Не останавливаясь на погрешности первого рода, неизбежной при любом подходе к решению вопроса, займемся второго рода погрешностью, явившейся следствием примененного нами метода.

Указанный метод основан на допущении, что отношение синусов поправочных углов равняется отношению самих углов; в действительности же этого равенства нет, и тем вводится нами в вычисляемые углы некоторая погрешность.

Но величина этой погрешности в различных случаях будет неодинаковой. Действительно, при малых поправочных углах отношение их будет весьма близким к отношению синусов, и величина погрешности окажется незначительной; с увеличением же величины поправочных углов отношение их начинает заметно разниться от отношения синусов, и погрешность делается чувствительной и даже недопустимой.

Прежде всего нам нужно установить, какую погрешность в определении поправочного угла от применения изложенного метода можно считать допустимой, и затем уже найти, до какой величины отклонения угла при вспомогательном пункте от 180° эта погрешность не будет превзойдена.

Поставим себе требование, чтобы наша погрешность для случая, когда вспомогательный ход будет состоять из 2 линий, не превышала средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения при работе малым повторительным теодолитом, обычно применяемым при землеустройстве.

На основании исследования Н. Н. Рождественского (см. "Труды топографо-геодезической комиссии" за 1905 г., выпуск XIX) таковая ошибка равняется $8''{,}66$, что составляет $0{,}144$, и эту ошибку мы будем принимать как границу погрешности вычисления величины поправочных углов A и B (см. черт. 10) изложенным способом.

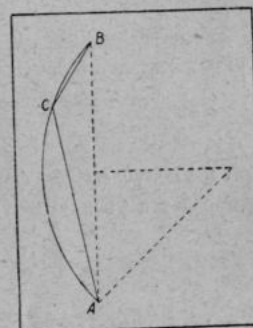
Переходя к определению того предельного отклонения от 180° угла C , при котором будет кончаться применение излагаемого метода, мы прежде всего поставим себе вопрос, при каком соотношении сторон AC и CB погрешность в определении поправочных углов A и B будет наибольшей или, другими словами, какое соотношение сторон AC и CB является наименее выгодным в смысле точности вычисления поправочных углов.

Переходя к теории этого вопроса, введем прежде всего следующие обозначения: пусть сторона CB (см. черт. 11) будет x ; сумма сторон $AC + CB$ будет S , дополнение к углу C до 180° обозначим через γ и угол A через α ; тогда будем иметь, что

$$AC = S - x$$

и

$$\angle B = \gamma - \alpha.$$



Черт. 11.

Пусть, далее, S и γ будут данными нам постоянными величинами, а точка C перемещается таким образом, чтобы соотношение сторон AC и CB изменялось, но угол C сохранил постоянную величину; это перемещение есть движение по дуге сегмента, вмещающего угол C (см. черт. 11) ⁴⁾.

Имеем пропорцию

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CB}{AC},$$

⁴⁾ Строго говоря, при перемещении точки C по дуге сегмента, вмещающего угол C , сумма сторон $AC + CB$ будет несколько изменяться, но при небольших отклонениях угла C от 180° это изменение будет незначительным, и сумму сторон $AC + CB$ при данном доказательстве можно считать постоянной.

или после замены A, B, CB и AC их значениями, согласно принятых обозначений, пропорцию:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} = \frac{x}{S - x}, \quad (1)$$

в которой мы заменяем, по малости углов α и $\gamma - \alpha$, отношение синусов отношением самих углов:

$$\frac{\alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{x}{S - x}.$$

Берем далее производную пропорцию:

$$\frac{\alpha}{(\gamma - \alpha) + \alpha} = \frac{x}{(S - x) + x},$$

или

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x}{S},$$

откуда получаем ту формулу, по которой при изложенном методе вычисляется угол α по углу γ и сторонам ΔACB :

$$\alpha = \frac{x\gamma}{S}. \quad (2)$$

Определим, далее, угол α тригонометрическим путем, для чего воспользуемся формулой (1) настоящего § и перепишем ее таким образом:

$$(S - x) \sin \alpha = x \sin(\gamma - \alpha),$$

или по замене $\sin(\gamma - \alpha)$ его значением:

$$\begin{aligned} (S - x) \sin \alpha &= x [\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha] = \\ &= x \sin \gamma \cos \alpha - x \cos \gamma \sin \alpha, \end{aligned}$$

или

$$(S - x) \sin \alpha + x \cos \gamma \sin \alpha = x \sin \gamma \cos \alpha,$$

или

$$(S - x + x \cos \gamma) \sin \alpha = x \sin \gamma \cos \alpha,$$

откуда по разделении на $\cos \alpha$ получим:

$$(S - x + x \cos \gamma) \operatorname{tg} \alpha = x \sin \gamma,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x \sin \gamma}{S - x + x \cos \gamma}. \quad (3)$$

Здесь знаменатель можно преобразовать следующим образом:

$$S - x + x \cos \gamma = S - x(1 - \cos \gamma) = S - x \cdot 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

и тогда формула (3) напишется так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}, \quad (4)$$

откуда:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}. \quad (5)$$

Таким образом определяется α тригонометрическим путем.

Теперь можно найти из формул (2) и (5) величину $\Delta \alpha$ действительной погрешности угла α от упрощенного вычисления:

$$\Delta \alpha = \frac{x\gamma}{S} - \operatorname{arctg} \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}. \quad (6)$$

Если в последней формуле будет изменяться x , то с ним вместе будет изменяться и $\Delta \alpha$, которое таким образом является функцией от x . Найдем $\max$ и $\min$ этой функции, для чего нужно найти первую и вторую ее производную по x :

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta \alpha)}{dx} &= \frac{d\left(\frac{x\gamma}{S}\right)}{dx} - \frac{d\left(\operatorname{arctg} \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)}{dx} = \\ &= \frac{\gamma}{S} - \frac{d\left(\frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)}{1 + \left(\frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)^2} = \end{aligned}$$

¹⁾ Читатель, не знакомый с элементами высшей математики, должен будет излагаемое доказательство пропустить, проверив вывод его, при желании, на отдельных примерах.

$$\begin{aligned}
& \frac{d(x \sin \gamma)}{dx} \left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{d \left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{dx} x \sin \gamma \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{\left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2}{1 + \frac{x^2 \sin^2 \gamma}{\left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2}} = \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{\sin \gamma \left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) - \left(-2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) x \sin \gamma}{\left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2 + x^2 \sin^2 \gamma} = \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{S \sin \gamma - 2x \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2x \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2} + x^2 \sin^2 \gamma} = \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{S \sin \gamma}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{S \sin \gamma}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right)} = \\
&= \frac{\gamma}{S} - \frac{S \sin \gamma}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}. \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\Delta a)}{dx^2} &= \frac{d \left(\frac{\gamma}{S} \right)}{dx} - \frac{d \left(\frac{S \sin \gamma}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right)}{dx} = \\
&= -\frac{S \sin \gamma}{\left(S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2} =
\end{aligned}$$

¹⁾ По умножении числителя и знаменателя на

$$\left(S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2.$$

²⁾ После замены $\sin \gamma$ на $2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{S \sin \gamma \left(-4 S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 8 x \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{\left(S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2} = \\
&= -\frac{4 S \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} (S - 2x)}{\left(S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Найдем значения x , при которых первая производная Δx будет равняться 0.

$$\frac{d(\Delta a)}{dx} = \frac{\gamma}{S} - \frac{S \sin \gamma}{S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 0,$$

откуда

$$\gamma \left(S^2 - 4x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) - S^2 \sin \gamma = 0,$$

или

$$\gamma S^2 - 4 \gamma x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4 \gamma x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - S^2 \sin \gamma = 0,$$

или

$$4 \gamma x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4 \gamma x S \sin^2 \frac{\gamma}{2} + S^2 (\gamma - \sin \gamma) = 0.$$

Откуда, по разделении всех членов на

$$S^2 \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

имеем:

$$4 \frac{x^2}{S^2} - 4 \frac{x}{S} + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 0$$

или

$$4 \left(\frac{x}{S} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{S} \right) + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\frac{x}{S} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}}{4} = \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}}{2}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Величина

$$\sqrt{1 - \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

зависит от γ .

Исследование подкоренного выражения данной функции показывает, что с возрастанием γ оно постоянно убывает, так как производная его по γ остается отрицательной.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции

$$\sqrt{1 - \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

для случая, когда γ заключается в пределах между 4° и 8° , ибо эти пределы, в чем мы ниже убедимся, и представляют для нас интерес.

Так как функция

$$1 - \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

непрерывно убывает, то наибольшим ее значением для этого промежутка будет значение при $\gamma = 4^\circ$, а наименьшим при $\gamma = 8^\circ$.

Воспользуемся для вычисления величины корня семизначными таблицами натуральных значений $\sin$ и найдем верхнюю границу

$$\sqrt{1 - \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

при $\gamma = 4^\circ$ и нижнюю границу при $\gamma = 8^\circ$.

Прежде всего заметим, что

$$\frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

и сверх того примем во внимание, что в данном выражении γ дано в отвлеченной мере и поэтому переведем 4° и 8° в такую меру.

4° соответствует в отвлеченной мере $\frac{\pi}{45}$, а 8° соответствует $\frac{2\pi}{45}$.

Принимая

$$\pi = 3,141\,592\,654,$$

будем иметь

$$3,141\,592\,66 > \pi > 3,141\,592\,65.$$

Обозначая верхнюю и нижнюю границу, как принято было нами в § 10, и применяя правила нахождения верхней и нижней границы результата, будем иметь для $\gamma = 4^\circ$:

$$\gamma_2 = \frac{3,141\,592\,65}{45} = 0,069\,813\,17,$$

$$(\sin 4^\circ)_1 = 0,069\,756\,5 + 0,000\,000\,05 = 0,069\,756\,55,$$

$$\left(\frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_1 = \frac{(\sin \gamma)_1}{\gamma_2} = \frac{0,069\,756\,55}{0,069\,813\,17} = 0,999\,189\,0,$$

$$\left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_2 = 1 - \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_1 = 1 - 0,999\,189\,0 = 0,000\,811\,0,$$

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)_1 = 0,034\,899\,5 + 0,000\,000\,05 = 0,034\,899\,55,$$

$$\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)_1 = 0,034\,899\,55^2 = 0,001\,218\,0,$$

$$\left(\frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_2 = \frac{\left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_2}{\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)_1} = \frac{0,000\,811\,0}{0,001\,218\,0} = 0,6658,$$

$$\left(1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_1 = 1 - \left(\frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_2 = 1 - 0,6658 = 0,3342,$$

$$\left(\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}}\right)_1 = \sqrt{0,3342} = 0,579.$$

При $\gamma = 8^\circ$ будем иметь:

$$\gamma_1 = \frac{2 \times 3,141\,592\,66}{45} = 0,139\,626\,35,$$

$$(\sin \gamma)_2 = 0,139\,173\,1 - 0,000\,000\,05 = 0,139\,173\,05,$$

$$\left(\frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_2 = \frac{(\sin \gamma)_2}{\gamma_1} = \frac{0,139\,173\,05}{0,139\,626\,35} = 0,996\,753\,4,$$

$$\left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_1 = 1 - \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_2 = 1 - 0,996\,753\,4 = 0,003\,246\,6,$$

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)_2 = 0,069\,756\,5 - 0,000\,000\,05 = 0,069\,756\,45,$$

$$\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)_2 = 0,069\,756\,45^2 = 0,004\,865\,9,$$

$$\left(\frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_1 = \frac{\left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)_1}{\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)_2} = \frac{0,003\,246\,6}{0,004\,865\,9} = 0,6673,$$

$$\left(1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_2 = 1 - \left(\frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_1 = 1 - 0,6673 = 0,3327,$$

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \right)_2 = \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}\right)_2} = \sqrt{0,3327} = 0,576. \end{aligned}$$

Принимая

$$\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

равным 0,578, мы допустим для всего промежутка погрешность $< 0,002$ и будем иметь из формулы (9):

$$\frac{x}{S} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}}}{2} = \frac{1 \pm 0,578}{2},$$

откуда

$$\frac{x_1}{S} = \frac{1 + 0,578}{2} = 0,789 \quad (10)$$

и

$$\frac{x_2}{S} = \frac{1 - 0,578}{2} = 0,211. \quad (11)$$

Оба эти числа будут найдены с точностью до 0,001, так как имеем:

$$E\left(\frac{1 \pm 0,578}{2}\right) = \frac{E(1 \pm 0,578)}{2} = \frac{E_{0,578}}{2} = \frac{0,002}{2} = 0,001.$$

Возвращаясь к ранее поставленному вопросу о нахождении $\max (\Delta \alpha)$ и $\min (\Delta \alpha)$, имеем, что первая производная функции $\Delta \alpha$ будет равняться нулю для γ_1 , находящегося в пределах между 4° и 8° , при $\frac{x_1}{S} = 0,789$ или $\frac{x_2}{S} = 0,211$.

Так как вторая производная функции $\Delta \alpha$ оказалась равной (см. форм. 8)

$$-\frac{4 S \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} (S - 2x)}{(S^2 - 4xS \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2})^2},$$

то при $x = \frac{S}{2}$ она равна нулю, для значения $x < \frac{S}{2}$ будет отрицательной и для значения $x > \frac{S}{2}$ положительной, из чего заключаем, что $\frac{x_2}{S} = 0,211$ соответствует максимуму $\Delta \alpha$, а $\frac{x_1}{S} = 0,789$ — минимуму.

Когда погрешность одного из поправочных углов является положительной, для другого она явится отрицательной, так как сумма этих углов, равная γ , есть постоянная величина. Когда $\Delta \alpha$ будет равняться максимуму, будучи положительной величиной, тогда погрешность для другого поправочного угла достигнет по абсолютному своему значению наибольшей величины, но, будучи отрицательной, находится будет в минимуме.

Словом, при $\frac{x_2}{S} = 0,211$ погрешность поправочного угла, противолежащего стороне x , будет положительная и наибольшая по своей величине, а погрешность поправочного угла, прилежащего к стороне x , — отрицательная и наибольшая по своей абсолютной величине; а при $\frac{x_1}{S} = 0,789$ — наоборот: погрешность противолежащего поправочного

угла отрицательная, а прилежащего — положительная, и обе будут наибольшими по своей абсолютной величине по сравнению с погрешностями при другом соотношении сторон.

Соединяя эти оба случая вместе, получим, что когда одна из сторон хода из 2 линий будет равняться 0,211 от суммы этих линий погрешность определяемых поправочных углов окажется наибольшей, будучи положительной для меньшего из определяемых углов и отрицательной для большего из этих углов.

Возвращаясь к поставленному в начале настоящего § вопросу, мы имеем, что границу погрешности в вычислении величины поправочных углов мы получим, если возьмем наименее выгодное соотношение сторон хода, т.е. приняв одну из сторон этого хода равной 0,211 суммы их.

Теперь уже для различных углов γ мы можем вычислить границу этой погрешности непосредственно, по формуле (6), при чем для вычисления

$$\text{arctg } \alpha = \text{arctg } \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

воспользуемся семизначными таблицами натуральных значений $\sin$ и шестизначной таблицей натуральных величин tg , преобразовав предварительно величину $\text{tg } \alpha$ делением числителя и знаменателя на S и подставив вместо $\frac{x}{S}$ наименее выгодное соотношение $\frac{x}{S} = 0,211$, после чего получим:

$$\text{arctg } \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \text{arctg } \frac{\frac{x}{S} \sin \gamma}{1 - 2 \frac{x}{S} \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \text{arctg } \frac{0,211 \cdot \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

$$\Delta \alpha = \frac{x \gamma}{S} - \text{arctg } \frac{x \sin \gamma}{S - 2x \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 0,211 \gamma - \text{arctg } \frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \quad (12)$$

Положив $\gamma = 7^\circ$, будем иметь:

$$0,211 \gamma = 0,211 \times 7^\circ = 88',62 = 1^\circ 28',62;$$

$$\sin \gamma = \sin 7^\circ = 0,121 869 3;$$

$$0,211 \sin \gamma = 0,211 \sin 7^\circ = 0,211 \times 0,121 869 3 = 0,025 714 4;$$

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \sin^2 3^\circ 30' = 0,061 048 5^2 = 0,003 726 9;$$

$$0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 0,422 \sin^2 3^\circ 30' = 0,422 \times 0,003 726 9 = 0,001 572 8;$$

$$1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 0,001 572 8 = 0,998 427 2;$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{0,025 714 4}{0,998 427 2} = 0,025 754 9.$$

В шестизначных таблицах натуральных величин tg находим значения:

$$\text{tg } 1^\circ 28' = 0,025 603,$$

$$\text{tg } 1^\circ 29' = 0,025 894;$$

Принимая во внимание, что

$$\text{tg } \alpha - \text{tg } 1^\circ 28' = 0,025 754 9 - 0,025 603 = 0,000 151 9$$

и что

$$\text{tg } 1^\circ 29' - \text{tg } 1^\circ 28' = 0,025 894 - 0,025 603 = 0,000 291,$$

получаем, что

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \left(1^\circ 28' + \frac{1519}{2910} \right) = \text{tg } 1^\circ 28',522,$$

и

$$\alpha = 1^\circ 28',522,$$

откуда

$$\Delta \alpha = 1^\circ 28',62 - 1^\circ 28',522 = 0',098.$$

Найдем точность произведенного вычисления, зная, что вычисление это производилось при пользовании 7-значными таблицами натуральных величин $\sin$ и 6-значными таблицами tg :

$$E_{\sin \gamma} = E_{\sin \frac{\gamma}{2}} = 0,000 000 05,$$

$$\begin{aligned} E_{0,211 \sin \gamma} &= \\ &= E_{1(0,211 \sin \gamma)} + E_{2(0,211 \sin \gamma)} = 0,211 E_{\sin \gamma} + 0,000 000 05 = \\ &= 0,211 \times 0,000 000 05 + 0,000 000 05 = \\ &= 0,000 000 011 + 0,000 000 05 = 0,000 000 061; \end{aligned}$$

¹⁾ См. обозначение § 11.

$$E_{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = E_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + E_2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} =$$

(см. форм. (1) § 29)

$$= 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} E_{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} + 0,000\,000\,05 = 2 \times 0,061\,048\,5 \times 0,000\,000\,05 + \\ + 0,000\,000\,05 = 0,000\,000\,007 + 0,000\,000\,05 = 0,000\,000\,057;$$

$$E_{(0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2})} = E_1 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + E_2 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ = 0,422 E_{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} + 0,000\,000\,05 = 0,422 \times 0,000\,000\,057 + \\ + 0,000\,000\,05 = 0,000\,000\,025 + 0,000\,000\,05 = 0,000\,000\,075;$$

$$E_{(1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2})} = E_{0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 0,000\,000\,075;$$

$$E_{\lg \alpha} = E_{\frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} = E_1 \left(\frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right) + \\ + E_2 \frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} =$$

(см. форм. (7) § 27)

$$E_{0,211 \sin \gamma} + \frac{0,211 \sin \gamma}{1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} E_{(1 - 0,422 \sin^2 \frac{\gamma}{2})} = \\ = \frac{0,000\,000\,061 + 0,025\,754\,9 \times 0,000\,000\,075}{0,998\,427\,2} + 0,000\,000\,05 = \\ = \frac{0,000\,000\,061 + 0,000\,000\,002}{0,998\,427\,2} + 0,000\,000\,05 = \\ = 0,000\,000\,064 + 0,000\,000\,05 = 0,000\,000\,12.$$

Такова точность вычисления $\lg \alpha$; что же касается того, с какой точностью находится угол α по шестизначным таблицам натуральных величин тангенса, то в этом вопросе очень много в теоретическом отношении общего с аналогичными операциями по таблицам логарифмов и таблицам квадратов чисел.

Рассуждая точно также, как и в двух других вышеупомянутых случаях, мы получим, что $\lg$ углов как с целыми минутами, так и с долями минуты вычисляются по 6-значным таблицам натуральных значений $\lg$ с точностью до половины единицы последнего знака; и, наоборот, при определении величины угла по его тангенсу, вводится

в натуральную величину тангенса погрешность, граница которой будет равна половине единицы последнего знака, т.е. 0,000 000 5.

Прибавляя эту границу погрешности к найденной границе погрешности определения величины $\lg$ с 7 знаками 0,000 000 12, получим границу общей погрешности в

$$0,000\,000\,5 + 0,000\,000\,12 = 0,000\,000\,62.$$

Доли минуты угла α получились как частное $\frac{0,0001519}{0,0002910} = \frac{1519}{2910}$, но при этом числитель будет представлять собою число приближенное, с границей погрешности 6,2, т.е.

$$E_{1519} = 6,2,$$

и тогда

$$E_{\frac{1519}{2910}} = \frac{E_{1519}}{2910} = \frac{6,2}{2910} = 0,0022.$$

Погрешностью от округления до тысячных долей величины $\frac{1519}{2910}$ можно пренебречь, так как в данном случае она меньше 0,00001.

Таким образом $\Delta \alpha = 0,098$ вычислено у нас с погрешностью, граница которой будет 0,0022, так как вычитаемое $1^\circ 28',522$ было числом приближенным с таковой границей погрешности; поэтому, желая получить верхнюю границу $\Delta \alpha$, мы должны прибавить к вычисленной величине 0,098 границу введенной при этом вычислении погрешности 0,0022, и тогда окончательно получим:

$$(\Delta \alpha)_1 = 0,098 + 0,0022 = 0,1002,$$

или, отбрасывая 0,0002, которые можно отнести свободно к многократно производимым округлениям в процессе вычисления границы погрешности, получим, что при $\gamma = 7^\circ$

$$(\Delta \alpha)_1 = 0,1,$$

т.е. каково бы ни было соотношение между величиной сторон вспомогательного хода из двух линий, если угол между ними отличается на 7° от 180° , погрешность от вычисления поправочных углов при методе математического вешения всегда будет меньше 0,1.

Присоединяя сюда погрешность от округления вычисленного угла, равную 0,05, получим общую границу погрешности поправочного угла для $\gamma = 7^\circ$ в 0,15.

Таким же образом можем найти границы погрешности вычисленных поправочных углов для других значений α и, располагая

результат для углов в 4° , 5° , 6° , 7° и 8° в форме таблицы, будем иметь:

Наименование погрешности угла.	$\gamma = 4^\circ$	$\gamma = 5^\circ$	$\gamma = 6^\circ$	$\gamma = 7^\circ$	$\gamma = 8^\circ$
Граница погрешности от вычисления α	0,02	0,04	0,07	0,10	0,16
Общая граница погрешности. .	0,07	0,09	0,12	0,15	0,21

Припоминая, что средняя ошибка от наведения трубы и колебания изображения равняется 0',144, мы видим, что она близка к границе погрешности поправочного угла при $\gamma = 7^\circ$, и поэтому 7° и прием за предельное отклонение угла при вспомогательном пункте от 180° , при котором можно применять метод математического вешения линии. При более точном подходе к вопросу этот предел нужно было бы на несколько минут понизить, но для удобства запоминания предпочтительно иметь этот предел в виде целого числа градусов.

§ 36. Обоснование метода вычисления поправочных углов для случая, когда вспомогательный ход состоит из трех или четырех линий.

Когда вспомогательный ход состоит из 3 или 4 линий, то в теоретическом отношении вводится одно осложняющее обстоятельство, а именно, то, что при втором и третьем применении метода вычисления поправочных углов приходится иметь дело с линиями, не измеренными в натуре, а взятыми как сумма двух или трех измеренных линий, как, например, линия AD черт. 9.

Переходя к рассмотрению настоящего вопроса, укажем прежде всего, что и при полевой обстановке можно произвести в крайнем случае вычисление поправки на длину линии AD по сравнению с суммой $AC + CD$.

Действительно, пусть линия AC будет l , угол $DAC = \alpha$, тогда проекция AC на AD будет, как известно, $l \cos \alpha$, а поправка на отклонение AC от AC_1 будет

$$l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2l \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 2l \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \sin^2 1' = \\ = \frac{1}{2} l \alpha^2 \sin^2 1'. \quad (1)$$

Здесь сомножители этого произведения можно округлять, так как вся величина поправки невелика, и особой точности в определении ее не требуется.

Пример 1. Пусть линии хода будут $AC = 348,8$ и $CD = 317,4$ и поправочные углы (черт. 12)

$$\angle DAC = 3^\circ 17' \text{ и } \angle CDA = 3^\circ 36' \frac{1}{2}.$$

Вычислим по формуле (1) настоящего § поправку сначала на линию AC , обозначив таковую через ΔAC и приняв во внимание, что $\angle DAC = 197'$:

$$\Delta AC = \frac{1}{2} \times 348,8 \times 197^2 \times 0,00029^2.$$

Произведя округления, получим:

$$\Delta AC = \frac{1}{2} \times 350 \times 200^2 \times 0,0003^2 = \frac{1}{2} \times 350 \times \\ 40\,000 \times 0,000\,000\,09 = 20\,000 \times 0,000\,031\,5 = \\ = 0,63 = 0,6.$$

Если мы произведем более точные вычисления, то убедимся, что при этом мы ввели ошибку лишь на 0,03, чем вполне можно в данном случае пренебречь.

Далее будем иметь ¹⁾:

$$\Delta CD = \frac{1}{2} \times 317,4 \times \left(216 \frac{1}{2} \right)^2 \times 0,00029^2 = \frac{1}{2} \times \\ 320 \times 220^2 \times 0,0003^2 = \frac{1}{2} \times 320 \times 0,066^2 = \frac{1}{2} \times \\ 320 \times 0,004 = 320 \times 0,002 = 0,64 = 0,6.$$

Общая поправка будет:

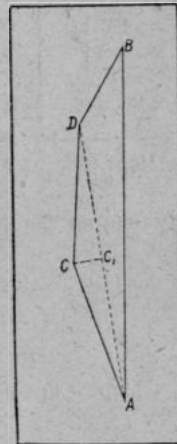
$$0,6 + 0,6 = 1,2,$$

и линия AD будет равняться:

$$348,8 + 317,4 - 1,2 = 665,0.$$

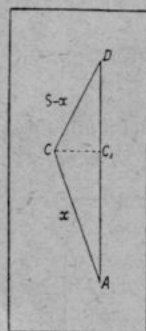
В огромном большинстве случаев практики углы линии хода AC и CD с линией AD будут не больше того предела, до которого мы не вводим поправок на углы наклона линий, и по аналогии с этим можно не вводить поправок и при данных вычислениях, но для лиц, знакомых с элементами высшей математики, ниже приводится вывод формулы определения границы той погрешности, которая вводится в поправочные углы DAC и CDA от принятия линии AD , равной

$$1) \ 216 \frac{1}{2}' = 3^\circ 36' \frac{1}{2}' = \angle CDA.$$



Черт. 12.

сумме линий $AC + CD$, без введения поправок, и доказывается возможность при некоторых условиях в смысле порядка вычисления поправочных углов не вводить поправки в длину линии AD при отклонении угла C от 180° не свыше чем на 6° (что покрывает почти все случаи практики).



Черт. 13.

Прежде всего поставим себе такой вопрос: при каком соотношении между сторонами AC и CD в случае определенного одного и того же отклонения γ угла C от 180° разность между суммой линий AC и CD , которую мы обозначим через S , и линией AD (см. черт. 13), длину которой обозначим через l , будет наибольшей?

Считая здесь S и γ величинами постоянными, обозначим разность между S и AD через ΔS , сторону AC через x , другая сторона — CD будет тогда $S - x$.

Углы D и A при принятом у нас способе определения по формуле (2) § 35 выражаются так:

$$D = \frac{x\gamma}{S},$$

$$A = \frac{(S-x)\gamma}{S}.$$

Определим величину разности

$$S - l = \Delta S.$$

Пусть CC_1 будет $\perp$ к AD .

$$\begin{aligned} AC - AC_1 &= AC - AC \cos A = AC (1 - \cos A) = 2AC \sin^2 \frac{A}{2} = \\ &= \frac{1}{2} AC \times A^2 \sin^2 1' = \frac{1}{2} x \frac{(S-x)^2 \gamma^2}{S^2} \sin^2 1'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD - C_1D &= CD - CD \cos D = CD (1 - \cos D) = 2CD \sin^2 \frac{D}{2} = \\ &= \frac{1}{2} CD \times D^2 \sin^2 1' = \frac{1}{2} (S-x) \frac{x^2 \gamma^2}{S^2} \sin^2 1'. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} (AC + CD) - (AC_1 + C_1D) &= \frac{1}{2} x \frac{(S-x)^2 \gamma^2}{S^2} \sin^2 1' + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(S-x) x^2 \gamma^2}{S^2} \sin^2 1', \end{aligned}$$

или после упрощения

$$S - l = \frac{1}{2} \frac{x \gamma^2 \sin^2 1' (S-x)}{S^2} (S-x+x),$$

и окончательно

$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 \sin^2 1' x (S-x)}{S}. \quad (2)$$

Так выражается величина поправки ΔS для линии $AD = l$.

Найдем при каком x будет иметь максимум эта функция, и для этого прежде всего перепишем формулу (2) следующим образом:

$$\Delta S = \frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{2S} (xS - x^2)$$

и затем найдем первую и вторую производную функции ΔS .

$$\frac{d(\Delta S)}{dx} = \frac{d \left[\frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{2S} (xS - x^2) \right]}{dx} = \frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{2S} (S - 2x),$$

и

$$\frac{d^2(\Delta S)}{dx^2} = \frac{d \left[\frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{2S} (S - 2x) \right]}{dx} = - \frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{S} < 0.$$

Приравнявая первую производную нулю, получим:

$$\frac{\gamma^2 \sin^2 1'}{2S} (S - 2x) = 0,$$

или

$$S - 2x = 0$$

и

$$x = \frac{S}{2}.$$

Принимая во внимание, что вторая производная остается отрицательной величиной, находим, что при $x = \frac{S}{2}$, ΔS имеет максимум, т.е. при равенстве сторон AC и CB величина поправки ΔS будет наибольшей.

Для этого случая величину ее получим, подставив в формулу (2) настоящего §, вместо x , $\frac{S}{2}$ и заменяя ΔS ее верхней границей $(\Delta S)_1$

$$(\Delta S)_1 = \frac{\gamma^2 \sin^2 1' \frac{S}{2} \left(S - \frac{S}{2} \right)}{2S},$$

или по упрощении:

$$(\Delta S)_1 = \frac{1}{8} \gamma^2 \sin^2 l' S = mS, \quad (3)$$

где

$$m = \frac{1}{8} \gamma^2 \sin^2 l'.$$

Считая теперь, что мы имеем самый неблагоприятный случай в смысле соотношения сторон AC и CB , т.е. $AC = CB$ и $\Delta S = (\Delta S)_1$, определим влияние того обстоятельства, что (см. черт. 14) $AD = S$ заключает в себе погрешность $(\Delta S)_1$ на точность вычисления поправочных углов A и B , при чем предварительно поставим себе такой вопрос, при каком соотношении сторон AD и DB эта погрешность будет наибольшей, а затем найдем и величину этой погрешности.



Черт. 14.

Обозначим AD через S , $AD + DB$ через l , отклонение угла D от 180° , в отличие от такового же отклонения C (черт. 13) через γ' , и примем при этом во внимание, что по введении поправки в величину AD последняя будет в самом неблагоприятном, в смысле соотношения сторон AC и CD (черт. 13), случае равна $S - (\Delta S)_1$, и тогда $AD + DB$ будет $l - (\Delta S)_1$. Величины γ' и l будут в рассматриваемом случае постоянными, а S — величиной переменной.

По принятому нами методу определения поправочного угла B будем иметь, без принятия во внимание поправки:

$$B = \frac{\gamma' S}{l},$$

а с принятием во внимание поправки $(\Delta S)_1$

$$B = \frac{\gamma' [S - (\Delta S)_1]}{l - (\Delta S)_1},$$

или после замены $(\Delta S)_1$ на mS , согласно формулы (3):

$$B = \frac{\gamma' (S - mS)}{l - mS} = \frac{\gamma' S (1 - m)}{l - mS}.$$

Во втором случае получим меньший результат, так как $\frac{S}{l}$ есть правильная дробь, и в ней от числителя и знаменателя отнимается $(\Delta S)_1$.

Обозначим разницу в величине угла B при вычислении с принятием и без принятия поправки $(\Delta S)_1$ через ΔB ; величина ΔB определится следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{\gamma' S}{l} - \frac{\gamma' S (1 - m)}{l - mS} = \frac{\gamma' S}{l} \left[1 - \frac{l(1 - m)}{l - mS} \right] = \\ &= \frac{\gamma' S}{l} \left[\frac{l - mS - l(1 - m)}{l - mS} \right] = \frac{\gamma' S}{l} \times \frac{-mS + lm}{l - mS} = \frac{\gamma' mS}{l} \times \frac{l - S}{l - mS}. \end{aligned}$$

Здесь ΔB будет положительной.

Приступая к определению максимума этой функции, примем прежде всего во внимание, что поправкой mS в знаменателе для числа $l - mS$ можно пренебречь, так как при тех пределах для величины γ , которые нами установлены, эта поправка весьма невелика по сравнению с l , после чего будем иметь:

$$\Delta B = \frac{\gamma' m}{l^2} (lS - S^2). \quad (4)$$

Найдем величины первой и второй производной функции ΔS по S :

$$\frac{d(\Delta B)}{dS} = \frac{d \left[\frac{\gamma' m (lS - S^2)}{l^2} \right]}{dS} = \frac{\gamma' m}{l^2} \frac{d(lS - S^2)}{dS} = \frac{\gamma' m}{l^2} (l - 2S)$$

и

$$\frac{d^2(\Delta B)}{dS^2} = \frac{d \left[\frac{\gamma' m (l - 2S)}{l^2} \right]}{dS} = \frac{\gamma' m}{l^2} \frac{d(l - 2S)}{dS} = \frac{-2\gamma' m}{l^2} < 0.$$

Приравнявая нулю первую производную, будем иметь:

$$\frac{\gamma' m}{l^2} (l - 2S) = 0$$

и

$$S = \frac{l}{2};$$

и так как при этом вторая производная остается величиной отрицательной, то функция ΔB имеет при $S = \frac{l}{2}$ максимум.

Таким образом мы нашли, что наибольшая погрешность в величину угла B вводится при непринятии поправки $(\Delta S)_1$ в том случае, если $AD = DB$.

Найдем для этого случая величину самой погрешности ΔB , которая будет тогда своей верхней границей $(\Delta B)_1$ или границей погрешности угла B , E_B ; подставим в формулу (4) настоящего § вместо S , $\frac{l}{2}$:

$$E_B = \frac{\gamma' m \left(l \frac{1}{2} - \frac{l^2}{4} \right)}{l^2},$$

или по упрощении:

$$E_B = \frac{1}{4} \gamma' m. \quad (5)$$

Подставляя здесь вместо γ' его предельное значение $7^\circ = 420'$, получим:

$$E_B = \frac{1}{4} \times 420 \text{ м} = 105 \text{ м};$$

и подставляя вместо m его значение из формулы (3) настоящего §, будем иметь:

$$E_B = 105 \times \frac{1}{8} \gamma^2 \sin^2 1' = \frac{1}{8} \times 105 \times 0,000291^2 \gamma^2,$$

или по вычислении и округлении:

$$E_B = 0,000\,001\,12 \gamma^2. \quad (6)$$

В этой формуле выражена зависимость при самом неблагоприятном для точности вычисления соотношении сторон AC , CD и DB (черт. 12) и при предельном отклонении в 7° от 180° угла D (черт. 14), между величиной отклонения γ от 180° угла C (черт. 12) и границей той погрешности, которая вводится в вычисленную величину поправочного угла B от непринятия поправки в длине линии AD по отношению к сумме линий AC и CD .

Здесь же напомним, что эта погрешность будет положительной, а погрешность в величине B от применения нашего метода будет положительной, если линия AD будет меньше DB , и отрицательной при обратном соотношении между величиной AD и DB ; в первом случае поэтому данные погрешности будут направлены в одну сторону, а во втором — в разные стороны.

Напомним сверх того, что у нас наиболее неблагоприятным соотношением между сторонами AC , CD и DB (см. черт. 12) для величины границы погрешности E_B (см. форм. 6) было такое, что

$AC = CD$ и $AC + CD = DB$, и если бы мы поэтому начали вычисления наши с замены линий CD и DB , то выиграли бы при таком, примерно, соотношении в двух отношениях: во-первых E_B по формуле (6) было бы уменьшено, а во-вторых — эта погрешность была бы обратного знака с погрешностью вычисления поправочного угла, и от применения изложенного метода погрешности эти в той или иной мере взаимно компенсировались бы.

Итак, примем себе за правило начинать вычисление поправочных углов с той стороны хода, с которой находится большая линия, и тогда эта линия, вместе со средней линией хода, составит сумму наверное большую, чем 3-я линия хода, а при таких условиях влияние на величину поправочных углов погрешности от принятия замыкающей двух линий хода равною их сумме будет противоположно по знаку влиянию погрешности от вычисления этих углов по упрощенной формуле.

Теперь, пользуясь формулой (6), найдем величину E_B для различных углов γ в пределах до 7° . Не останавливаясь на выполнении вычислений, расположим результаты их в следующей табличке:

Величина угла γ .	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Величина E_B . . .	0',004	0',016	0',037	0',065	0',101	0',146	0',198

Из этой таблички заключаем, что до 6° отклонения угла γ от 180° получается E_B , не превышающая средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения, и если избрать порядок вычислений, как выше было указано, таким, чтобы погрешность от непринятия поправки на длину линии AD и погрешность от применения предлагаемого метода вычисления поправочных углов были разных знаков, то можно до величины γ , не превышающей 6° , не вводить поправки в линию AD , и общая погрешность угла B не будет превышать принятого нами предела.

Независимо от этого, так как мы при вычислении поправочных углов при втором приеме пользуемся поправочными углами первого приема, произойдет накопление погрешностей, которое не превысит двойной границы погрешности поправочных углов при одном приеме.

Если ход состоит из 4 линий, то к нему можно последовательно применить все предыдущие рассуждения, и придется пользоваться при

этом методом вычисления поправочных углов 3 раза, вводя каждый раз в них погрешность, не превышающую средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения.

Считая, что при третьем приеме вычисления, когда мы получаем один поправочный угол для основного хода и третье слагаемое для другого поправочного угла того же хода, произойдет накопление погрешностей даже исключительно в одну сторону, заключаем, что *общая погрешность вычисления поправочных углов основного хода не будет превышать утроенной средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения, т.-е., иными словами, не будет превышать предельной таковой ошибки.*

Дабы не вычислять поправки на величину замыкающих двух или трех линий хода против суммы этих линий, будем и здесь придерживаться определенного порядка вычисления поправочных углов и примем за правило начинать вычисления с того конца вспомогательного хода, у которого сумма двух линий будет больше суммы двух остальных линий и при таких условиях замыкающая первых двух будет больше 3-й линии, а замыкающая первых трех, больше 4-й линии, и в поправочные углы будут вводиться погрешности, противоположные по знаку погрешностям их от вычисления по упрощенным формулам.

Так как у нас при этом погрешности будут частично взаимно покрываться, то накопления до величины предельной ошибки от наведения трубы и колебания изображения наверное не произойдет, и граница общей погрешности вычисленных поправочных углов будет меньше предельной ошибки от наведения трубы и колебания изображения. Но при этом мы, конечно, не принимаем во внимание ошибок в измерении углов хода, а считаемся лишь с погрешностями вычислений⁴⁾.

Случае четырех линий хода мы и закончим теоретическое обоснование вопроса и будем рекомендовать применение изложенного метода только в пределах этого количества линий.

§ 37. Вычисление величины линии основного хода, замененной вспомогательным ходом.

Когда нужно будет при камеральной обстановке иметь длину линии AB , то таковая вычисляется как сумма проекций линий вспомо-

⁴⁾ Не принимаем мы также во внимание приближенности чисел, выражающих длины линий вспомогательного хода, так как хотя это обстоятельство и влияет на величину поправочных углов, но влияние это слишком незначительно.

гательного хода AC , CD и DB ; при чем углы A и B линии AC и DB с линией AB окажутся у нас вычисленными при полевой обстановке, а угол DCN (см. черт. 15) линии CD с линией AB будет представлять собою отклонение от 180° суммы углов A и C или B и D , так как равносумму 180° этих сумм служит, как известно, условием параллельности линии CD с линией AB .

Самое выполнение вычислительной операции будет аналогично нахождению поправки на длину линии от наклона ее части AC на угол A , CD на угол DCN и DB на угол B .

§ 38. Вычисление расстояний вспомогательного пункта хода из двух линий от провешиваемой линии.

Величина расстояния CC_1 (см. черт. 16) определяется следующим образом:

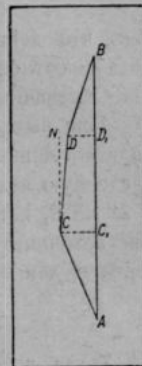
$$\begin{aligned} CC_1 &= AC \sin A = AC \times A \times \sin 1', \\ CC_1 &= CB \sin B = CB \times B \times \sin 1'. \end{aligned} \quad (1)$$

Вычисленное таким образом расстояние CC_1 будет заключать в себе погрешности двойного порядка: от того, что углы A и B содержат в себе некоторую погрешность, и от того, что, производя вычисления при полевой обстановке, мы будем заменять $\sin A$ и $\sin B$ на $A \sin 1'$ и $B \sin 1'$. Исследуем эти две погрешности.

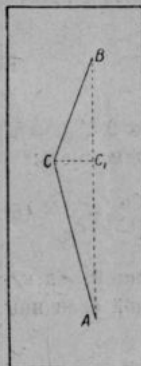
Пусть вычисленная величина угла A заключает в себе некоторую погрешность ΔA , и пусть для большей конкретности рассуждений эта погрешность будет положительной; так как сумма углов A и B будет постоянной, то угол B будет заключать в себе ту же погрешность с отрицательным знаком, т.-е. $\Delta B = -\Delta A$.

При таких условиях $\sin A$ и $\sin B$ будут также заключать в себе погрешности, которые мы обозначим через $\Delta' \sin A$ и $\Delta' \sin B$ и которые можно вычислить по формуле (3) § 30, т.-е.

$$\begin{aligned} \Delta' \sin A &= \Delta A \cos A \sin 1', \\ \Delta' \sin B &= \Delta B \cos B \sin 1' = -\Delta A \cos B \sin 1'. \end{aligned} \quad (2)$$



Черт. 15.



Черт. 16.

Так как при небольшой величине углов A и B косинусы их оба будут близки к единице, то можно принять, что

$$\Delta' \sin A = -\Delta' \sin B,$$

т.е., что действительные погрешности синусов углов A и B равны по абсолютной величине и имеют обратные знаки.

Обозначим $\Delta' \sin A = -\Delta' \sin B$ через e .

При вычислении CC_1 по формулам (1) настоящего § мы заменили $\sin A$ на $A \sin 1'$ и $\sin B$ на $B \sin 1'$; при этом мы ввели в вычисленную величину $\sin A$ и $\sin B$ некоторые погрешности: $\Delta'' \sin A$ и $\Delta'' \sin B$, которые подробно исследуем в дальнейшем, и действительные величины которых (положительные или отрицательные) обозначим через e_1 для $\sin A$ и e_2 для $\sin B$, т.е. будет иметь:

$$\Delta'' \sin A = e_1 \text{ и } \Delta'' \sin B = e_2.$$

Тогда действительные общие погрешности $\sin A$ и $\sin B$, $\Delta \sin A$ и $\Delta \sin B$ определяются таким образом:

$$\begin{aligned} \Delta \sin A &= \Delta' \sin A + \Delta'' \sin A = e + e_1, \\ \Delta \sin B &= \Delta' \sin B + \Delta'' \sin B = -e + e_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим приближенную величину CC_1 , вычисленную по первой из формул (1) при замене угла A его вычисленным значением и $\sin A$ на $A \sin 1'$, через h' , а приближенную величину CC_1 , вычисленную по второй формуле (1) при аналогичных заменах—через h'' ; после чего будем иметь:

$$\begin{aligned} h' &= AC \cdot A \sin 1', \\ h'' &= BC \cdot B \sin 1'. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначая действительные погрешности h' и h'' через $\Delta h'$ и $\Delta h''$ и принимая во внимание формулы (3) настоящего §, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta h' &= AC \Delta \sin A = AC(e + e_1) = AC \times e + AC \times e_1, \\ \Delta h'' &= BC \Delta \sin B = BC(-e + e_2) = -BC \times e + BC \times e_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждая из погрешностей $\Delta h'$ и $\Delta h''$ состоит из 2 частей, из которых первая есть погрешность от неточности вычисленной величины углов A и B , а вторая от замены

$$\sin A \text{ и } \sin B \text{ на } A \sin 1' \text{ и } B \sin 1'.$$

Сравнивая между собою погрешности

$$AC \times e \text{ и } -BC \times e$$

при первом и втором вычислении величины CC_1 , мы видим, что они разных знаков, а по абсолютной величине пропорциональны линиям AC и BC . Если бы они были единственными погрешностями величин h' и h'' , то сумму их можно было бы получить вычитанием h'' из h' , а зная сумму и отношение, можно было бы найти величину той и другой, и после этого отнятием найденных величин погрешностей от приближенных величин h' и h'' найти точное значение CC_1 ; но так как $\Delta h'$ и $\Delta h''$ заключают в себе еще погрешности $AC \times e_1$ и $BC \times e_2$, то таким способом можно избавиться только приближенные величины h' и h'' от первой погрешности; что же касается погрешности в вычисленной величине CC_1 от замены $\sin A$ на $A \sin 1'$ и $\sin B$ на $B \sin 1'$, т.е. погрешности от неточного вычисления синусов углов, то таковая ликвидирована не будет, и какая-то погрешность вызванная некоторой, средней погрешностью между e_1 и e_2 в $\sin A$ и $\sin B$, останется в полученном приближенном значении величины CC_1 .

Найдем величину этой действительной погрешности.

Вычитанием $\Delta h''$ из $\Delta h'$ по формулам (5) получим:

$$\begin{aligned} \Delta h' - \Delta h'' &= AC(e + e_1) - BC(-e + e_2) = (AC + BC)e + \\ &+ (AC \times e_1 - BC \times e_2); \end{aligned}$$

разделив эту разность в отношении $AC : CB$, получим следующую поправку для h' :

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta h' - \Delta h'')AC}{AC + CB} &= \frac{[(AC + BC)e + (AC \times e_1 - BC \times e_2)]AC}{AC + BC} = \\ &= AC \times e + \frac{AC(AC \times e_1 - BC \times e_2)}{AC + BC} \end{aligned}$$

и после отнятия этой поправки от $\Delta h'$ имеем исправленную величину $\Delta h'$, которую обозначим через Δh :

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta h' - \left[AC \times e + \frac{AC(AC \times e_1 - BC \times e_2)}{AC + BC} \right] = \\ &= AC \times e + AC \times e_1 - AC \times e - \frac{AC(AC \times e_1 - BC \times e_2)}{AC + BC} = \\ &= AC \times e_1 - \frac{AC(AC \times e_1 - BC \times e_2)}{AC + BC} = \\ &= \frac{AC(AC + BC)e_1 - AC(AC \times e_1 - BC \times e_2)}{AC + BC} = \\ &= \frac{AC^2 \times e_1 + AC \times BC \times e_1 - AC^2 \times e_1 + AC \times BC \times e_2}{AC + BC}, \end{aligned}$$

или после упрощений:

$$\Delta h = \frac{AC \times BC(e_1 + e_2)}{AC + BC} \quad (6)$$

Таким образом мы нашли для h , исправленной приближенной величины CC_1 , значение действительной погрешности.

Нетрудно теперь уже найти и границу этой погрешности при определенных величинах AC и BC :

$$E_h = \frac{AC \times BC [(e_1)' + (e_2)']}{AC + BC} = \frac{AC \times BC (e' + e')}{AC + BC} = \frac{2AC \times BC \times e'}{l}$$

где $(e_1)'$ и $(e_2)'$ — верхние границы e_1 и e_2 , e' есть общая граница погрешности синусов поправочных углов от замены их на произведение выраженной в минутах величины угла и $\sin 1'$, а l — длина провешиваемой линии.

В дальнейшем будет показано, что границей погрешности e' можно принять погрешность $\sin$, являющуюся следствием отклонения величины угла на среднюю ошибку от наведения трубы и колебания изображения, равную $0',144$, каковая погрешность определяется согласно § 30 формулой:

$$e' = \Delta \sin \alpha = 0,144 \cos \alpha \sin 1'. \quad (*)$$

В различных случаях величина $\frac{2AC \times BC}{l}$ будет различна в зависимости от соотношения между длиной линии AC и BC .

Легко найти по теории Maxima и Minima, что наибольшей величина произведение $AC \times BC$ будет при

$$AC = BC = \frac{l}{2}.$$

Действительно, обозначим одну из линий AC или CB через x , тогда другая из них будет $l - x$, и мы получим:

$$E_h = \frac{2e'x(l-x)}{l} = \frac{2e'}{l} (lx - x^2);$$

найдем затем первую и вторую производную функции E_h по x :

$$\begin{aligned} \frac{dE_h}{dx} &= \frac{d \left[\frac{2e'}{l} (lx - x^2) \right]}{dx} = \frac{2e'}{l} (l - 2x); \\ \frac{d^2E_h}{dx^2} &= \frac{d \left[\frac{2e'}{l} (l - 2x) \right]}{dx} = -\frac{2e'}{l} \cdot 2 = -\frac{4e'}{l} < 0; \end{aligned}$$

приравняв первую производную нулю, получим:

$$\frac{2e'}{l} (l - 2x) = 0,$$

откуда $x = \frac{l}{2}$, и так как вторая производная при этом отрицательна, то имеем при $x = \frac{l}{2}$ максимум E_h .

Подставляя затем в выражение для E_h вместо AC и BC , $\frac{l}{2}$, будем иметь:

$$E_h = \frac{2 \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times e'}{l}.$$

откуда при выполнении действий получаем:

$$E_h = \frac{1}{2} l e'^2 \quad (7)$$

или после подстановки вместо e' значения этой величины из формулы (*):

$$E_h = \frac{1}{2} l \times 0,144 \cos \alpha \sin 1'.$$

Отбрасывая здесь множитель $\cos \alpha$, что даст увеличение E_h и на что мы поэтому имеем право, и заменяя $0,144 \sin 1'$ на $\sin 0',144$, получим:

$$E_h = \frac{1}{2} l \sin 0',144, \quad (8)$$

Вторая часть этого равенства представляет собою ошибку в определении положения пункта на провешиваемой линии, если этот пункт находится на расстоянии $\frac{l}{2}$ от инструмента и если в визировании на этот пункт сделана ошибка, равная $0',144$, и равенство (8) можно поэтому прочесть следующим образом: *граница погрешности вычисленного расстояния вспомогательного пункта хода из 2 линий от провешиваемой линии будет равна ошибке в определении поло-*

⁴⁾ Здесь E_h является границей погрешности h уже при любом соотношении между сторонами AC и BC .

жения пункта на линии помощью трубы на расстоянии равном $\frac{l}{2}$, если при этом погрешность от наведения трубы и колебания изображения будет равняться своей средней величине в $8'',66$, и $\frac{l}{2}$ есть среднее арифметическое из величин линий хода.

Приступим теперь к изучению действительной погрешности от замены $\sin \alpha$ на $\alpha \sin 1'$ и установим такой способ вычисления величины CC , чтобы ее границу погрешности можно было бы действительно приравнять к погрешности при отклонении угла α от своей истинной величины на среднюю ошибку от наведения трубы и колебания изображения и тем самым покажем правильность формулы (*) настоящего §, которой мы при излагаемом доказательстве воспользовались.

Способ этот заключается в том, что величине $\sin 1'$ мы будем придавать в различных случаях такое приближенное значение, чтобы замена $\sin \alpha$ на $\alpha \sin 1'$ не давала погрешности, превышающей погрешность величины $\sin \alpha$ при $\Delta \alpha = 0',144$, т.-е. $0,144 \cos \alpha \sin 1'$.

Истинная величина $\sin 1'$ равна $0,000\ 290\ 888\ 20 \dots$, но если бы мы согласились не совсем считаться с этой величиной, а брать ее такою, чтобы замена $\sin \alpha$ на $\alpha \sin 1'$ совсем не давала погрешности, то нам нужно было бы определять $\sin 1'$ из равенства $\sin \alpha = \alpha \sin 1'$, т.-е. брать $\sin 1'$ равным $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

В приведенной ниже таблице (см. 1 строку) помещены значения отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ для нескольких углов, вычисленные помощью семизначных таблиц натуральных величин $\sin$, и из этой таблицы мы усматриваем, что отношение $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ и при углах α , не превышающих 1° , уже несколько меньше действительной величины $\sin 1'$, а с увеличением угла α это отношение все уменьшается и при $\alpha = 8^\circ$ становится даже меньше $0,00029$.

Величина угла α .	$45'$	1°	2°	3°	4°
$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$	0,000 290 88	0,000 290 87	0,000 290 83	0,000 290 75	0,000 290 65
$\frac{0,144 \sin 1' \cos \alpha}{\alpha}$	0,000 000 93	0,000 000 70	0,000 000 35	0,000 000 23	0,000 000 17

Если бы мы при вычислениях $\sin$ углов брали вместо $\sin 1'$ помещенные в первой строке таблицы близкие к $\sin 1'$ значения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ для соответствующих углов, то получили бы результат большой точности, ибо

$$\sin \alpha = \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha};$$

но так как это невозможно сделать при полевой обстановке вследствие того, что нет возможности помнить значение $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ для большого числа частных случаев, то мы разобьем углы в пределах практической надобности на небольшое количество групп, для каждой из которых значение $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, близкое к $\sin 1'$, уже будет возможно установить и запомнить; но при этом условимся делить углы на такие группы и придавать в каждой такой группе отношению $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ такое значение, чтобы при вычислении затем $\sin \alpha$ по формуле

$$\sin \alpha = \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ мы будем брать вместо $\sin 1'$ по памяти, мы не получили погрешности большей, чем погрешность при ошибке в угле на $0',144$ для синуса любого угла принятой группы.

Нам известно, что при отклонении угла от своей истинной величины на $0',144$ величина $\sin \alpha$ (см. § 30) определяется с погрешностью $0,144 \cos \alpha \sin 1'$, и тогда частное $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ отклонится от истинного своего значения на величину

$$\frac{0,144 \cos \alpha \sin 1'}{\alpha},$$

5°	6°	7°	$7\frac{1}{2}^\circ$	8°	10°
0,000 290 52	0,000 290 36	0,000 290 17	0,000 290 06	0,000 289 94	0,000 289 41
0,000 000 14	0,000 000 12	0,000 000 10	0,000 000 09	0,000 000 09	0,000 000 07

какое отклонение мы и будем считать возможным предельным отклонением отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, принятого нами для целой группы углов от отношения для каждого угла той же группы.

Во второй строке вышеприведенной таблицы занесены значения этого отклонения для приведенных там углов.

Из рассмотрения вышеприведенной таблицы следует, что для углов менее 45' погрешность в 0,144 соответствует для $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ отклонению в 93 или более единиц последнего знака, тогда как принятие за величину $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ значения $\epsilon = 0,00029$ даст отклонение лишь в 88 или несколько более единиц последнего знака; и поэтому для всех углов меньше 45' можно принимать $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равным 0,00029.

Далее, для углов от 45' до 3°, приняв $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равным 0,000 291, введем отклонение от действительной величины этого отношения в пределах от 0,000 291 — 0,000 290 88 = 0,000 000 02, для угла в 45', и до 0,000 291 — 0,000 290 75 = 0,000 000 25, для угла в 3°; допустимое же отклонение, как видно из данных второй строки, изменяется в пределах от 70 до 23 единиц последнего знака и, следовательно, лишь для 3°, или углов очень близких к этой величине, несколько уступает фактическому отклонению; поэтому мы можем принять, с некоторой натяжкой при углах очень близких к 3°, для всех углов от 45' до 3° величину $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равной 0,000 291.

Для углов от 3° до 6°, приняв $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равным 0,000 290 5, мы введем отклонение в 25 единиц последнего знака против допустимых 23 для угла 3°; 15 единиц против допустимых 17 для угла 4°, 2 против 14 для 5° и 14 против 12 для 6°; следовательно, для всех углов от 3° до 6° можно принять величину $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равной 0,000 290 5, с некоторой натяжкой лишь для углов, очень близких к 3° или 6°.

Таким же образом мы убедимся, что для углов от 6° до 7° можно принять $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ равным 0,000 290 25, для углов от 7° до 7½° равным 0,000 290 1 и для углов от 7½° до 8° равным 0,00029.

С дальнейшим увеличением угла α действительная величина отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ начинает изменяться довольно быстро, а величина допу-

стимого отклонения продолжает убывать, и становится поэтому затруднительным выделить группы углов, для которых можно было бы найти удобную для запоминания величину отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$; поэтому, а также и потому, что это не вызывается практическими потребностями, мы ограничимся углами до 8°.

Результат для наглядности представим в виде следующей таблицы.

Для каких углов применяется.	Величина $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (α в минутах).
0' — 45'	0,00029
45' — 3°	0,000 291
3° — 6°	0,000 290 5
6° — 7°	0,000 290 25
7° — 7½°	0,000 290 1
7½° — 8°	0,00029

Мы видим из этой таблицы, что до $\alpha = 3^\circ$ величина $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ представляет собою различным образом округленную величину $\sin 1'$, для следующих же значений углов наблюдается уменьшение этого отношения по сравнению с величиной $\sin 1'$. В случае необходимости найти при полевой обстановке величину $\sin$ какого либо угла до 8°, мы воспользуемся этой табличкой, которую легко запомнить или записать.

Таким образом при принятом нами методе вычисления величины расстояний пунктов вспомогательного хода от провешиваемой линии формула (*) оказывается правильной, и граница погрешности определенного вычислением положения пункта C_1 на провешиваемой линии соответствует средней ошибке визирования на этот пункт, при расстоянии равном средней арифметической из сторон хода, что говорит о большой точности произведенных вычислений, значительно превышающей точность визирования; но при этом мы все же должны оговориться, что нами не принята во внимание ошибка в измерении угла

при пункте C , и с точностью выставления при помощи трубы точки на линии, конец которой виден из пункта визирования, точность данного метода вполне сравниться поэтому не может.

Пример. Пусть (см. черт. 16)

$$AC = 635,1 \text{ м}, CB = 235,4 \text{ м}, \gamma = 6^\circ 38'.$$

Найти расстояние вспомогательного пункта C от линии AB .

По принятому методу имеем:

$$B = \frac{AC \times \gamma}{AC + CB} = \frac{635,1 \times 398}{635,1 + 235,4} = \frac{352\,769,8}{870,5} = 290',4;$$

$$A = \frac{CB \times \gamma}{AC + CB} = \frac{235,4 \times 398}{635,1 + 235,4} = \frac{93689,2}{870,5} = 107',6;$$

$$A + B = 290',4 + 107',6 = \gamma;$$

$$h' = AC \times \sin A = AC \times A \times \sin 1' = 635,1 \times 107,6 \times 0,000291 = 19,88;$$

$$h'' = BC \times \sin B = BC \times B \times \sin 1' = 235,4 \times 290,4 \times 0,0002905 = 19,85_9;$$

$$h' - h'' = 19,88_6 - 19,85_9 = 0,02_7;$$

разделив $0,02_7$ приблизительно пропорционально величинам $635,1$ и $235,4$ и принимая в то же время во внимание необходимость последнего округления, получим поправки $-0,01_6$ и $+0,01_1$, после чего будем иметь:

$$19,88_6 - 0,01_6 = 19,85_9 + 0,01_1 = 19,87.$$

§ 39. Вычисление расстояния вспомогательных пунктов хода из трех и четырех линий от провешиваемой линии.

Укажем способ уничтожения влияния погрешности от неточности вычисления величины поправочных углов на вычисление расстояния вспомогательных пунктов хода из 4 линий до провешиваемой линии; при чем попутно будет рассмотрен случай 3 линий хода.

Пусть мы имеем вспомогательный для провешивания линии AB (см. черт. 17) ход из 4 линий — AC , CD , DE и EB .

Пусть при этом $AC + CD > DE + EB$; тогда согласно указаний § 36 начнем с вычисления поправочных углов DAC и CDA и затем, не учитывая поправки на длину линии AD , в пределах отклонения угла ACD на 6° от 180° , перейдем к вычислению поправочных углов EAD и DEA , а затем BAE и EBA .

При определении величины расстояния EE_1 вспомогательного пункта E от линии AB , мы можем в точности применить все рассу-

ждения и метод предыдущего § и найти таким образом величину EE_1 с действительной погрешностью от произведенных вычислений, равной

$$\frac{AE \times EB (e_1 + e_2)}{AE + EB} \quad (1)$$

При вычислении же расстояния DD_1 придется пользоваться несколько иным методом, который мы сейчас и изложим.

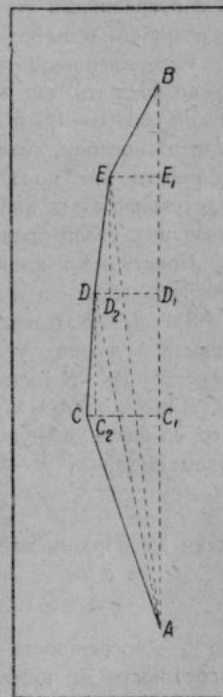
В приведенном в § 34 примере 5 мы вычисляли CC_1 по углу A и линии AC , и при таких сравнительно небольших отклонениях углов у вспомогательных пунктов от 180° этот метод был вполне пригоден, в близких же к предельному случаю отклонениях величины углов мы должны будем исправлять вычисленную по углу BAD и стороне AD линию DD_1 по сумме отрезков DD_2 и D_2D_1 , где $ED_2 \parallel AB$ и D_2D_1 равно EE_1 , а DD_2 вычисляется по линии ED и углу DED_2 .

Покажем прежде всего, что угол DED_2 заключает в себе ту же по абсолютной величине и обратную по знаку погрешность, что и погрешность угла BAD .

Действительно угол DED_2 представляет собою разность углов DEA и D_2EA ; первый из этих углов, будучи вычислен одновременно с углом EAD в $\triangle EAD$, заключает в себе ту же по абсолютной величине и обратную по знаку погрешность, что и угол EAD ; что же касается угла D_2EA , то вследствие параллельности линии ED_2 и AB он в точности равен углу BAE и заключает в себе, следовательно, ту же погрешность, что и угол BAE , но так как угол D_2EA отнимается от угла DEA для получения угла DED_2 , то при этом он введет в разность свою погрешность с обратным знаком, и таким образом окажется, что угол DED_2 заключает в себе с обратными знаками погрешности угла EAD и BAE , т.е. в общем погрешность ту же по абсолютной величине и обратную по знаку, что и погрешность всего угла BAD .

Если мы теперь сравним величину DD_1 , вычисленную по формуле:

$$DD_1 = AD \sin (BAD) = AD \times (BAD) \times \sin 1', \quad (2)$$



Черт. 17.

с величиной той же линии, взятой как сумма и EE_1 и DD_2 , где последняя вычислена по формуле:

$$DD_2 = DE \sin(DED_2) = DE \times DED_2 \times \sin 1', \quad (3)$$

то в этих двух значениях отрезка DD_1 будет некоторая разница. Эта разница объясняется прежде всего тем обстоятельством, что углы BAD и DED_2 заключают в себе погрешности от приближенного вычисления их и погрешности эти разных знаков, чем вызываются разных знаков погрешности в вычисленных величинах отрезков DD_1 и DD_2 .

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем §, можно доказать, что эти последние погрешности будут пропорциональны линиям AD и DE , по которым вычисляются отрезки DD_1 и DD_2 , и способом, аналогичным приведенному в предыдущем §, погрешности эти можно ликвидировать, после чего в величине DD_1 будет заключаться лишь погрешность от замены величин синусов поправочных углов произведениями этих углов на $\sin 1'$.

Приступим к вычислению действительной величины этой последней погрешности в исправленном отрезке DD_1 .

$\sin(BAD)$ заключает в себе погрешность от неточности вычисленной величины угла BAD , которую мы обозначим через e , и погрешность от неточного вычисления $\sin(BAD)$ по формуле: $\sin(BAD) = (BAD) \sin 1'$, которую мы обозначим через e_3 , после чего, обозначая общую погрешность $\sin(BAD)$ через $\Delta \sin(BAD)$, мы будем иметь:

$$\Delta \sin(BAD) = e + e_3.$$

Таким же образом найдем, что

$$\Delta \sin(DED_2) = -e + e_4,$$

где e_4 — погрешность от замены $\sin(DED_2)$ на $(DED_2) \sin 1'$, а e — погрешность от неточности угла DED_2 , равная, как показано было выше, по абсолютной величине и обратная по знаку соответствующей погрешности $\sin(BAD)$.

После этого будем иметь действительные погрешности расстояния DD_1 , вычисленного по формуле (2), и DD_2 , вычисленного по формуле (3), а именно:

$$\Delta DD_1 = AD \cdot \Delta \sin(BAD) = AD(e + e_3)$$

и

$$\Delta DD_2 = DE \cdot \Delta \sin(DED_2) = DE(-e + e_4),$$

а принимая во внимание действительную погрешность исправленного расстояния EE_1 , равного D_2D_1 , мы будем иметь действительную погрешность DD_1 , вычисленную как сумма $DD_2 + D_2D_1$, т.-е.

$$\Delta(DD_2 + D_2D_1) = DE(-e + e_4) + \frac{AE \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB}.$$

Величина поправки на расстояние DD_1 , вычисленное по формуле (2), получится, по принятому нами методу, следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{[\Delta DD_1 - \Delta(DD_2 + D_2D_1)] AD}{AD + DE} = \\ & = \frac{\left[AD(e + e_3) - DE(-e + e_4) - \frac{AE \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB} \right] AD}{AD + DE} = \\ & = \frac{\left[(AD + DE)e + AD \times e_3 - DE \times e_4 - \frac{AE \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB} \right] AD}{AD + DE} = \\ & = AD \times e + \frac{AD^2 \times e_3 - AD \times DE \times e_4 - \frac{AD \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB}}{AD + DE}. \end{aligned}$$

Отнимая эту поправку от ΔDD_1 , вычисленной по формуле (2) настоящего §, получим действительную погрешность исправленной величины DD_1 , которую мы обозначим через $\Delta(DD_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta(DD_1) &= \Delta DD_1 - \frac{[\Delta DD_1 - \Delta(DD_2 + D_2D_1)] AD}{AD + DE} = \\ &= AD(e + e_3) - AD \times e - \frac{AD^2 \times e_3 - AD \times DE \times e_4}{AD + DE} + \\ &+ \frac{AD \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB} = AD \times e_3 - \frac{AD^2 \times e_3 - AD \times DE \times e_4}{AD + DE} + \\ &+ \frac{AD \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB} = \\ &= \frac{AD \times e_3 \times (AD + DE) - AD^2 \times e_3 + AD \times DE \times e_4}{AD + DE} + \\ &+ \frac{AD \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB} = \frac{AD \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \\ &+ \frac{AD \times EB \times (e_1 + e_2)}{AB}. \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾ После замены ΔDD_1 и $\Delta(DD_2 + D_2D_1)$ их значениями.

²⁾ После сокращения первого члена на знаменатель, а также замены в последнем члене AE на $AD + DE$ и сокращения на знаменатель.

³⁾ По выполнении действий и замене в знаменателе $AD + DE$ на AE .

Отсюда легко найти границу погрешности исправленной величины DD_1 , которую мы обозначим через $E_{(DD_1)}$:

$$E_{(DD_1)} = \left[\frac{AD \times DE (e_3 + e_1)}{AE} \right]_1 + \left[\frac{AD \times EB (e_1 + e_2)}{AB} \right]_1 = \\ = \frac{AD \times DE [(e_3)_1 + (e_1)_1]}{AB} + \frac{AD \times EB [(e_1)_1 + (e_2)_1]}{AB},$$

или по замене (e_1) , (e_2) , (e_3) и (e_4) на e' , являющуюся общей границей погрешности синусов поправочных углов от замены их произведениями углов на $\sin 1'$, получим окончательно:

$$E_{(DD_1)} = 2e' \times AD \left(\frac{DE}{AE} + \frac{EB}{AB} \right). \quad (5)$$

Если мы будем рассматривать вспомогательный ход из трех линий: AD , DE и EB , то DD_1 будет представлять собою расстояние до провешиваемой линии второго в порядке очереди вычисления пункта этого хода, и, таким образом, вопрос обоснования вычисления расстояний до провешиваемой линии пунктов хода из 3 линий оказался решенным попутно.

Можно доказать на основании теории Maxima и Minima, что наибольшей величины граница погрешности $E_{(DD_1)}$, определяемая формулой (5), достигнет при таком соотношении между сторонами вспомогательного хода из 3 линий, когда первая из них — в данном случае AD — составляет $\frac{4}{9}$, вторая DE — $\frac{2}{9}$ и третья EB — $\frac{3}{9}$ периметра вспомогательного хода.

При таком соотношении сторон хода формула (5) нам даст:

$$E_{(DD_1)} = 2e' \times \frac{4}{9} l \left(\frac{\frac{2}{9} l}{\frac{4}{9} l + \frac{2}{9} l} + \frac{\frac{3}{9} l}{l} \right) = \frac{8}{9} le' \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{27} le',$$

или после подстановки в эту формулу значения e' из формулы (*) настоящего § будем иметь:

$$E_{(DD_1)} = \frac{16}{27} l \cdot 0,144 \cos \alpha \sin 1',$$

откуда, по отбрасывании множителя $\cos \alpha$ и замены $0',144 \sin 1'$ на $\sin 0',144$, получим:

$$E_{(DD_1)} = \frac{16}{27} l \sin 0',144.$$

Перепишав эту формулу таким образом:

$$E_{(DD_1)} = \frac{16}{9} \left(\frac{l}{3} \sin 0',144 \right)$$

и принимая во внимание, что $\frac{l}{3} \sin 0',144$ есть средняя ошибка визирования на расстояние $\frac{l}{3}$, являющееся средней арифметической из всех 3 сторон нашего вспомогательного хода, делаем тот вывод, что граница погрешности в определении положения пункта D_1 на провешиваемой линии соответствует $\frac{16}{9}$ средней ошибки визирования трубой на расстояние, равное средней длине линии вспомогательного хода из 3 линий. Напомним при этом, что, как показано было в предыдущем §, граница погрешности в определении пункта E_1 хода соответствовала средней ошибке визирования на расстояние, равное арифметическому среднему из величины линий AE и EB .

Это положение можно формулировать еще следующим образом; для вспомогательного хода из 3 или 4 линий граница погрешности в положении первого в порядке очереди определения промежуточного пункта на провешиваемой линии соответствует средней ошибке визирования на расстояние, равное арифметической середине из тех 2-х линий, по которым положение этого пункта определялось; граница же погрешности в положении второго, в порядке очереди определения, промежуточного пункта на провешиваемой линии соответствует $\frac{16}{9}$ средней ошибки визирования на расстояние, равное арифметической середине из тех 3 линий, по которым положение этого пункта определялось.

Переходя к определению величины расстояния CC_1 пункта C от провешиваемой линии, прежде всего покажем, что погрешность угла BAC будет равна и обратного знака с погрешностью угла CDC_2 .

Действительно, при принятом у нас методе вычисления величины поправочных углов погрешность угла CDA будет равна и обратного знака с погрешностью угла DAC ; погрешность угла C_2DA при $C_2D \parallel AB$ будет в точности такая же, как и погрешность угла BAD ,

так как углы эти равны, а при отнятии угла C_2DA от CDA для получения интересующего нас угла CDC_2 последняя погрешность войдет в угол CDC_2 с обратным знаком; таким образом угол CDC_2 будет заключать в себе две погрешности, равные и обратных знаков с погрешностями углов DAC и BAD , а, следовательно, общая погрешность от вычисления по принятому методу угла CDC_2 будет равна и обратного знака с общей погрешностью угла BAC .

Расстояние CC_1 будем вычислять по стороне AC и углу BAC , а поверять и исправлять по величине CC_1 , полученной как сумма CC_2 и C_2C_1 , где CC_2 вычисляется по стороне CD и углу CDC_2 , а C_2C_1 равна DD_1 .

Погрешность $\sin(BAC)$ будет содержать в себе погрешность e от неточности величины угла BAC и погрешность e_3 от неточного вычисления $\sin(BAC)$ по формуле:

$$\sin(BAC) = (BAC) \sin 1',$$

и таким образом мы имеем:

$$\Delta \sin(BAC) = e + e_3.$$

Погрешность $\sin(CDC_2)$ будет заключать в себе погрешность $-e$ от неточности угла CDC_2 и погрешность от неточного вычисления $\sin(CDC_2)$ и подобно предыдущему будем иметь:

$$\Delta \sin(CDC_2) = -e + e_6.$$

Погрешность величины отрезка CC_1 , вычисленной по формуле

$$CC_1 = AC \times \sin(BAC) = AC \times (BAC) \sin 1',$$

каковую погрешность мы обозначим через ΔCC_1 , будет такова:

$$\Delta CC_1 = \Delta[AC \sin(BAC)] = AC \times \Delta \sin(BAC) = AC(e + e_3).$$

Погрешность величины расстояния CC_2 , вычисленного по формуле

$$CC_2 = CD \sin(CDC_2) = CD \times (CDC_2) \sin 1',$$

определяется следующим образом:

$$\Delta CC_2 = \Delta[CD \sin(CDC_2)] = CD \Delta \sin(CDC_2) = CD(-e + e_6).$$

Эту последнюю погрешность мы суммируем с погрешностью C_2C_1 , равной погрешности исправленной величины DD_1 , т.е. $\Delta(DD_1)$ (см. формулу 4) и получим $\Delta(CC_2 + C_2C_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta(CC_2 + C_2C_1) &= CD(-e + e_6) + \frac{AD \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \\ &+ \frac{AD \times EB(e_1 + e_2)}{AB}. \end{aligned}$$

Приступим далее, подобно предыдущему, к исправлению величины CC_1 таким образом, чтобы ликвидировать влияние погрешности от неточности вычисленной величины поправочных углов, для чего прежде всего определим величину поправки для расстояния CC_1 , вычисленного по линии AC и углу BAC .

Величина поправки будет такова:

$$\begin{aligned} \frac{[\Delta CC_1 - \Delta(CC_2 + C_2C_1)] AC}{AC + CD} &= \\ \frac{\left[\frac{AC(e + e_3) - CD(-e + e_6)}{AC + CD} - \frac{AD \times DE(e_3 + e_4)}{AE} - \frac{AD \times EB(e_1 + e_2)}{AB} \right] AC}{AC + CD} &= \\ \frac{\left[e(AC + CD) + AC \times e_3 - CD \times e_6 - \frac{AD \times DE(e_3 + e_4)}{AE} - \frac{AD \times EB(e_1 + e_2)}{AB} \right] AC}{AC + CD} &= \\ = AC \times e - \frac{AC^2 \times e_3 + AC \times CD \times e_6}{AC + CD} - \frac{AC \times DE(e_3 + e_4)}{AE} - \frac{AC \times EB(e_1 + e_2)}{AB}. \end{aligned}$$

Вводя теперь эту поправку со знаком минус в величину ΔCC_1 , получим погрешность исправленной величины CC_1 , т.е. $\Delta(CC_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta(CC_1) &= \Delta CC_1 - \frac{[\Delta CC_1 - \Delta(CC_2 + C_2C_1)] AC}{AC + CD} = \\ &= AC(e + e_3) - AC \times e + \frac{AC^2 \times e_3 + AC \times CD \times e_6}{AC + CD} + \\ &+ \frac{AC \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \frac{AC \times EB(e_1 + e_2)}{AB} = AC \times e_3 + \\ &+ \frac{-AC^2 \times e_3 + AC \times CD \times e_6}{AC + CD} + \frac{AC \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \\ &+ \frac{AC \times EB(e_1 + e_2)}{AB} = \frac{AC(AC + CD)e_3 - AC^2 \times e_3 + AC \times CD \times e_6}{AC + CD} + \\ &+ \frac{AC \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \frac{AC \times EB(e_1 + e_2)}{AB} = \frac{AC \times CD(e_3 + e_6)}{AD} + \\ &+ \frac{AC \times DE(e_3 + e_4)}{AE} + \frac{AC \times EB(e_1 + e_2)}{AB}. \end{aligned} \quad (6)$$

1) По замене ΔCC_1 и $\Delta(CC_2 + C_2C_1)$ их значениями.

2) После сокращения на знаменатель и замены AD на $AC + CD$.

Зная выражение действительной погрешности исправленной величины CC_1 , можно найти границу этой погрешности:

$$E_{(CC_1)} = \left[\frac{AC \times CD (e_3 + e_6)}{AD} \right]_1 + \left[\frac{AC \times DE (e_3 + e_4)}{AE} \right]_1 + \\ + \left[\frac{AC \times EB (e_1 + e_2)}{AB} \right]_1 = \frac{AC \times CD [(e_3)_1 + (e_6)_1]}{AD} + \\ + \frac{AC \times DE [(e_3)_1 + (e_4)_1]}{AE} + \frac{AC \times EB [(e_1)_1 + (e_2)_1]}{AB} + \\ + \frac{AC \times EB}{AB} (E_{e_1} + E_{e_2}),$$

откуда, подставляя общую границу погрешности e' вместо $(e_1)_1, \dots, (e_6)_1$, получим:

$$E_{(CC_1)} = 2AC \times e' \left(\frac{CD}{AD} + \frac{DE}{AE} + \frac{EB}{AB} \right). \quad (7)$$

Применением теории максимума и минимума можно показать, что наибольшей величины выражение $E_{(CC_1)}$ по формуле (7) достигает при таком соотношении между величиной сторон AC , CD , DE и EB , когда стороны эти выражаются в долях периметра l всего хода из 4 линий следующим образом:

$$AC = \frac{27}{64} l; \quad CD = \frac{9}{64} l; \quad DE = \frac{12}{64} l; \quad EB = \frac{16}{64} l;$$

тогда значение $E_{(CC_1)}$ из формулы (7) получает такую величину:

$$E_{(CC_1)} = 2 \times \frac{27}{64} l e' \left[\frac{\frac{9}{64} l}{\frac{27}{64} l + \frac{9}{64} l} + \frac{\frac{12}{64} l}{\frac{27}{64} l + \frac{9}{64} l + \frac{12}{64} l} + \frac{\frac{16}{64} l}{\frac{1}{4} l} \right] = \\ = \frac{27}{32} l e' \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{81}{128} l e',$$

или после подстановки в данную формулу значения e' из формулы (*) предыдущего §, имеем:

$$E_{(CC_1)} = \frac{81}{128} l \times 0,144 \cos \alpha \sin 1',$$

откуда после замены $0,144 \sin 1'$ на $\sin 0',144$ и отбрасывания $\cos \alpha$ получим:

$$E_{(CC_1)} = \frac{81}{128} l \sin 0',144.$$

Эту формулу можно переписать следующим образом:

$$E_{(CC_1)} = \frac{81}{32} \left(\frac{l}{4} \sin 0',144 \right),$$

где

$$\frac{l}{4} \sin 0',144$$

есть средняя ошибка в визировании при помощи малого теодолита на расстояние, равное арифметической середине из всех сторон вспомогательного хода.

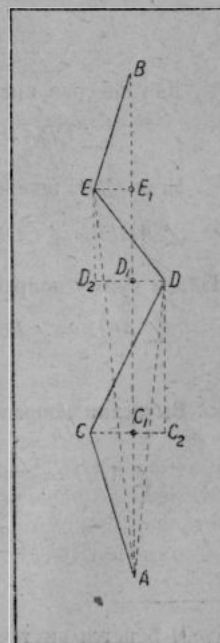
И таким образом имеем следующее положение: *граница погрешности в определении положения третьего в порядке очереди вычисления промежуточного пункта на провешиваемой линии соответствует*

$\frac{81}{32}$ средней ошибки визирования на расстояние, равное арифметической середине из всех четырех линий вспомогательного хода, т.е. меньше предельной ошибки визирования на указанное расстояние.

Таким образом мы показали, что и для последнего вспомогательного пункта хода из 4 линий, несмотря на накопление погрешности в вычисленной величине его расстояния от провешиваемой линии, мы можем при принятом методе определять положение пунктов этого хода по отношению к провешиваемой линии с точностью, которая может конкурировать с точностью визирования трубой малого теодолита.

Рассмотрим применение изложенного метода введения поправок в вычисленные расстояния вспомогательных пунктов хода от провешиваемой линии, когда углы эти по величине своей близки к предельному допустимому значению.

Пример. Дан вспомогательный ход $ACDEB$ (см. черт. 18), где $AC = 425,3$, $CD = 315,1$,



Черт. 18.

$DE = 239,4$ и $EB = 285,7$, $\angle C = 174^\circ 05'$, $\angle D = 189^\circ 15'$, $\angle E = 170^\circ 05'$; найти расстояния CC_1 , DD_1 и EE_1 вспомогательных пунктов C , D и E до линии AB , величины поправок на углы основного хода при пунктах A и B и углы линий хода с линией AB .

Произведем вычисления всех поправочных углов. Принимая во внимание требование § 36 и считаясь с тем, что $AC + CD > DE + EB$, начнем от пункта A основного хода и определим поправочные углы CDA и DAC :

$$\angle CDA + \angle DAC = 180^\circ - C = 180^\circ - 174^\circ 05' = 5^\circ 55' = 355';$$

$$\begin{aligned}\angle CDA &= \frac{(\angle CDA + \angle DAC) AC}{AC + CD} = \frac{355' \times 425,3}{425,3 + 35,1} = \\ &= \frac{355' \times 425,3}{740,4} = 203',9 = 3^\circ 23',9;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle DAC &= \frac{(\angle CDA + \angle DAC) CD}{AC + CD} = \frac{355' \times 315,1}{425,3 + 315,1} = \\ &= \frac{355' \times 315,1}{740,4} = 151',1 = 2^\circ 31',1.\end{aligned}$$

Для проверки имеем:

$$\angle CDA + \angle DAC = 3^\circ 23',9 + 2^\circ 31',1 = 5^\circ 55'.$$

Угол CDE теперь будет заменен углом ADE ¹⁾;

$$\angle ADE = \angle CDE - \angle CDA = 189^\circ 15' - 3^\circ 23',9 = 185^\circ 51',1.$$

Найдем сумму поправочных углов AED и DAE :

$$\begin{aligned}\angle AED + \angle DAE &= \angle ADE - 180^\circ = 185^\circ 51',1 - 180^\circ = \\ &= 5^\circ 51',1 = 351',1.\end{aligned}$$

Вычислим поправочные углы AED и DAE :

$$\begin{aligned}\angle AED &= \frac{(\angle AED + \angle DAE) AD}{AD + DE} = \frac{351',1 \times 740,4}{740,4 + 239,4} = \\ &= \frac{351',1 \times 740,4}{979,8} = 265',3 = 4^\circ 25',3;\end{aligned}$$

¹⁾ Берется внутренний угол хода.

²⁾ После замены AD на сумму $AC + CD = 740,4$

$$\begin{aligned}\angle DAE &= \frac{(\angle AED + \angle DAE) DE}{AD + DE} = \frac{351',1 \times 239,4}{740,4 + 239,4} = \\ &= \frac{351',1 \times 239,4}{979,8} = 85',8 = 1^\circ 25',8.\end{aligned}$$

Для проверки имеем:

$$\angle AED + \angle DAE = 4^\circ 25',3 + 1^\circ 25',8 = 5^\circ 51',1.$$

Угол DEB теперь будет заменен углом AEB .

$$\angle AEB = \angle DEB + \angle AED = 170^\circ 05' + 4^\circ 25',3 = 174^\circ 30',3.$$

Найдем сумму поправочных углов B и BAE :

$$\begin{aligned}\angle B + \angle BAE &= 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - 174^\circ 30',3 = \\ &= 5^\circ 29',7 = 329',7.\end{aligned}$$

Определим поправочные углы B и BAE :

$$\begin{aligned}\angle B &= \frac{(\angle B + \angle BAE) AE}{AE + EB} = \frac{329',7 \times 979,8}{979,8 + 285,7} = \\ &= \frac{329',7 \times 979,8}{1265,5} = 4^\circ 15',3 = 4^\circ 15',3 \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle BAE &= \frac{(\angle B + \angle BAE) EB}{AE + EB} = \frac{329',7 \times 285,7}{979,8 + 285,7} = \\ &= \frac{329',7 \times 285,7}{1265,5} = 1^\circ 14',4.\end{aligned}$$

Для проверки имеем:

$$\angle B + \angle BAE = 4^\circ 15',3 + 1^\circ 14',4 = 5^\circ 29',7.$$

Теперь уже представляется возможным определить общее расположение пунктов C , D и E по отношению к провешиваемой линии.

Прежде всего по углу AEB , который оказался $< 180^\circ$, заключаем, что пункт E расположен влево от провешиваемой линии; из сравнения углов BAE и DAE заключаем, что пункт D расположен вправо от линии AB , и сверх того находим величину угла DAB , равного

$$\angle DAE - \angle BAE = 1^\circ 25',8 - 1^\circ 14',4 = 11',4.$$

¹⁾ После замены AE на $AD + DE = 979,8$.

Из сравнения величины угла DAC с углом DAB находим, что пункт C расположен влево от линии AB и угол BAC равен

$$\begin{aligned}\angle DAC - \angle DAB &= 2^\circ 31',1 - 11',4 = 2^\circ 19',7 = 139',7 = \\ &= 2^\circ 19\frac{1}{2}' \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

Сверх того находим, что угол линии DE с линией AB равен

$$\begin{aligned}180^\circ - (\angle B + \angle DEB) &= 180^\circ - (4^\circ 15',3 + 170^\circ 5') = \\ &= 5^\circ 39',7 = 339',7,\end{aligned}$$

и угол линии CD с линией AB равен

$$\begin{aligned}180^\circ - (\angle BAC + \angle ACD) &= 180^\circ - (2^\circ 19',7 + 174^\circ 5') = \\ &= 3^\circ 35',3 = 215',3.\end{aligned}$$

Найдем теперь расстояние EE_1 по стороне AE и по стороне EB :
 $EE_1 = AE \sin(BAE) = AE \times (BAE) \sin 1' = 979,8 \times 74,4 \times 0,000291 = 21,21_2$.
 $EE_1 = EB \sin B = EB \times B \sin 1' = 285,7 \times 255,3 \times 0,0002905 = 21,18_3$ (здесь значения $\sin 1'$ взяты согласно требований таблицы предыдущего §).

Определим исправленную величину EE_1 , т.-е. (EE_1) , для чего разность между обоими значениями EE_1 , $21,21_2 - 21,18_3 = 0,02_4$, разделим приблизительно пропорционально длинам AE и EB , после чего получим поправки $0,01_9$ и $0,00_3$ и величину (EE_1) равной:

$$21,21_2 - 0,01_9 = 21,19_4 = 21,19 \text{ (с округлением).}$$

Определим расстояние DD_1 .

С одной стороны имеем

$$\begin{aligned}DD_1 &= AD \sin(DAB) = 740,4 \sin 11',4 = 740,4 \times 11,4 \sin 1' = \\ &= 740,4 \times 11,4 \times 0,00029 = 2,44_8,\end{aligned}$$

и с другой стороны получаем

$$\begin{aligned}DD_1 &= DD_2 - D_1 D_3 = ED \sin(D_2 ED) - (E_1 E) = 239,4 \sin 5^\circ 39',7 - \\ &- 21,19_4 = 239,4 \times 339,7 \times \sin 1' - 21,19_4 = 239,4 \times 339,7 \times \\ &\times 0,0002905 - 21,19_4 = 23,62_3 - 21,19_4 = 2,43_1.\end{aligned}$$

После этого найдем исправленную величину DD_1 для чего разность между обоими значениями DD_1 , равную

$$2,44_8 - 2,43_1 = 0,01_7,$$

разделим приблизительно пропорционально линиям AD и DE , после чего получим поправки $0,01_3$ и $0,00_1$ и исправленную величину (DD_1) равную

$$2,44_8 - 0,01_3 = 2,43_5 = 2,44 \text{ (с округлением).}$$

Определим расстояние CC_1 .

С одной стороны имеем:

$$\begin{aligned}CC_1 &= AC \sin(BAC) = 425,3 \sin 139',7 = 425,3 \times 139,7 \sin 1' = \\ &= 425,3 \times 139,7 \times 0,000291 = 17,29_6;\end{aligned}$$

а с другой стороны получаем

$$\begin{aligned}CC_1 &= CC_2 - C_1 C_3 = CD \sin(CDC_2) - (DD_1) = 315,1 \sin 215',3 - \\ &- (DD_1) = 315,1 \times 215,3 \times 0,0002905 - 2,43_5 = \\ &= 19,70_8 - 2,43_5 = 17,27_3.\end{aligned}$$

После этого найдем исправленную величину CC_1 , для чего разность между полученными значениями CC_1 , а именно $17,29_6 - 17,27_3 = 0,01_7$, разделим приблизительно пропорционально линиям AC и CD ; после чего получим поправки $0,01$ и $0,00_7$ и исправленную величину (CC_1) :

$$(CC_1) = 17,29 - 0,01 = 17,28.$$

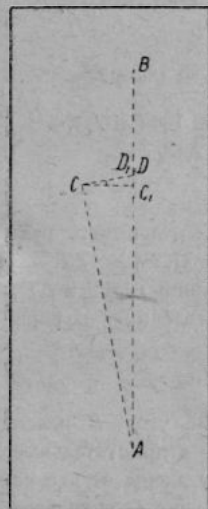
Таким образом мы получили, что поправочный угол B равен $4^\circ 15\frac{1}{2}'$, поправочный угол BAC равен $2^\circ 19\frac{1}{2}'$, вспомогательные пункты E и C находятся слева от линии AB и удалены от нее на расстояния $21,19$ м и $17,28$ м, а вспомогательный пункт D находится справа от линии AB и удален от нее на расстояние $2,44$ м, угол BAC линии AC с провешиваемой линией составляет $2^\circ 19',7$, угол CDC_2 линии CD — $3^\circ 35',3$, угол $D_2 ED$ линии DE — $5^\circ 39',7$, угол B линии EB составляет $4^\circ 15',3$.

§ 40. Перенесение пунктов вспомогательного хода на провешиваемую линию.

Особенность данного вопроса заключается в том, что вычисленные нами расстояния вспомогательных пунктов от провешиваемой линии будут лежать на перпендикулярах к искомой линии, а с известными нам по своему расположению линиями вспомогательного хода направления этих расстояний составляют

углы, отличающиеся от прямого; так для случая черт. 5 направление CC_1 составляет с линией AC угол $90^\circ - A$, а с линией CB угол $90^\circ - B$.

Все эти углы легко можно определить и, установив инструмент на вспомогательных пунктах, эти направления можно задать, но такой метод является нерациональным, так как требует затраты излишнего времени, и данная задача, как ниже будет показано, легко разрешаема помощью экера.



Черт. 19.

Приступим к исследованию этого вопроса.

Пусть AB (см. черт. 19) будет провешиваемая линия, C — вспомогательный пункт, расстояние которого CC_1 от провешиваемой линии известно. Требуется получить на линии AB какую-либо точку для определения положения этой линии.

Для нас при этом нет надобности получить обязательно пункт C_1 , а требуется лишь, чтобы полученный пункт только находился на линии AB .

Мы имеем возможность помощью экера восстановить перпендикуляр CD к линии AC в точке C , и тогда этот перпендикуляр

составит с направлением CC_1 угол C_1CD , равный углу A .

В огромном большинстве случаев практики разница в длине между отрезками CC_1 и CD , равная DD_1 , где $CD_1 = CC_1$, нечувствительна, вследствие небольшой величины угла A и небольшой сравнительно величины расстояния CC_1 , и тогда можно, отложив на направлении CD величину отрезка CC_1 , получить пункт D на линии AB ; в тех же случаях, когда разность между CD и CC_1 оказывается заметной, можно сначала способом, который будет указан ниже, более или менее точно получить направление CC_1 и, отложив на нем вычисленную величину CC_1 , найти точку C_1 на линии AB .

Установим сначала, до какой величины угла A пункт D_1 можно считать находящимся на линии AB .

Обозначим длину линии AC через l , величину угла A через α и разность между CD и CC_1 , равную DD_1 , через ΔCC_1 ; тогда будем иметь:

$$CD = AC \operatorname{tg} A = l \operatorname{tg} \alpha$$

и

$$CC_1 = AC \sin A = l \sin \alpha,$$

или после почленного вычитания этих равенств:

$$\Delta CC_1 = l (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha),$$

и отсюда:

$$\frac{\Delta CC_1}{l} = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha. \quad (1)$$

ΔCC_1 будет представлять собою (см. черт. 20) проведенное под углом $(90 - \alpha)$ отклонение DD_1 точки D_1 от линии AB ; расстояние же D_2D_1 точки D_1 от линии AB будет равняться $DD_1 \sin (90 - \alpha)$, т.-е.

$$D_2D_1 = DD_1 \cos \alpha = \Delta CC_1 \cos \alpha,$$

каковым расстоянием будет определяться ошибка в положении точки D_1 .

Этой ошибке будет соответствовать ошибка в направлении из точки A на точку D_1 по отношению истинного направления AB , и обозначая угол DAD_1 через $\Delta \alpha$, будем иметь:

$$D_1D_2 = AD_1 \sin \Delta \alpha;$$

или по замене AD_1 весьма близкой ей величиной AD имеем:

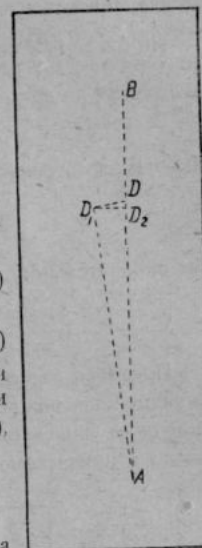
$$D_1D_2 = AD \sin \Delta \alpha;$$

заменив в этом равенстве D_1D_2 на $\Delta CC_1 \cos \alpha$ и AD на $\frac{l}{\cos \alpha}$, получим:

$$\Delta CC_1 \cos \alpha = \frac{l}{\cos \alpha} \sin \Delta \alpha,$$

откуда находим величину $\frac{\Delta CC_1}{l}$:

$$\frac{\Delta CC_1}{l} = \frac{\sin \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha};$$



Черт. 20.

подставляя найденную величину $\frac{\Delta CC_1}{l}$ в формулу (1), получим:

$$\frac{\sin \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha,$$

откуда имеем:

$$\begin{aligned} \sin \Delta \alpha &= \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \alpha) = \sin 2\alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned}$$

заменяя здесь синусы произведением углов на $\sin 1'$, получим:

$$\Delta \alpha \sin 1' = 2\alpha \sin 1' \times \frac{\alpha^2}{4} \sin^2 1',$$

или окончательно:

$$\Delta \alpha = \frac{\alpha^3}{2} \sin^2 1'. \quad (2)$$

Придавая здесь α те или иные значения, будем получать соответствующие значения $\Delta \alpha$, которые можно выразить в долях средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения, как это приведено в прилагаемой ниже таблице:

α	$\Delta \alpha$ в минутах	$\Delta \alpha$ в долях 8",66
3'	0,0012	0,0083
1°	0,0092	0,064
1°30'	0,031	0,215
2°	0,074	0,514

Принимая предельным значением $\alpha = 1^\circ 30'$, будем вводить при этом погрешность в направлении линии AB на 0,215 от средней ошибки наведения трубы и колебания изображений.

Припоминая из § 39, что при вычислении расстояния вспомогательных пунктов хода из 3 или 4 линий до провешиваемой линии мы совершаем ошибку, граница которой равносильна ошибке в направлении линии на $\frac{15}{9}$ средней ошибки от наведения трубы и колебания

изображения для расстояния, вычисляемого вторым по порядку, и $2\frac{17}{32}$ той же средней ошибки для расстояния, вычисляемого третьим по порядку, можем сделать тот вывод, что после присоединения к погрешности от вычисления этих расстояний погрешности от неправильно взятого их направления, не превышающей 0,215 средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения, все же окажется, что граница общей погрешности в определении направления провешиваемой линии в первом из указанных случаев будет

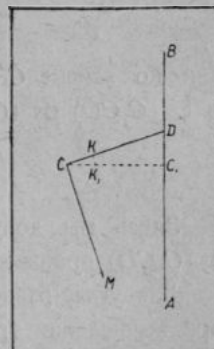
$$\frac{16}{9} + 0,215 = 1,992$$

упомянутой средней ошибки, а во втором

$$2\frac{17}{32} + 0,215 = 2,647$$

этой же ошибки, т.е. другими словами граница общей погрешности в первом случае не превысит двойной средней ошибки от наведения трубы и колебания изображения, а во втором случае будет меньше предельной таковой же ошибки.

Итак, при угле линии вспомогательного хода с провешиваемой линией, не превышающем $1\frac{1}{2}^\circ$, мы можем производить перенесение пунктов вспомогательного хода так, как указано на черт. 19, т.е. путем восставления перпендикуляра к линии вспомогательного хода и откладывания на нем вычисленного расстояния.



Черт. 21.

Заметим при этом, что в том случае, если линия вспомогательного хода не расположена в начале или конце хода, а посередине его, как указано на черт. 21, можно применить те же самые рассуждения, и указанный способ перенесения вспомогательных пунктов на провешиваемую линию может применяться поэтому во всех случаях, когда линия хода образует с провешиваемой линией угол, не превышающий $1\frac{1}{2}^\circ$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда указанный угол превышает $1\frac{1}{2}^\circ$.

Представляется возможным найти при помощи экера направление, близкое к направлению CC_1 (см. черт. 21) перпендикуляр к провешиваемой линии.

Для этого следует, отложив какую-либо меру, например 10 м, на перпендикуляре CD к линии MC вспомогательного хода, вычислить величину отрезка KK_1 , являющегося перпендикуляром к линии CD , и, отложив его, получить точку K_1 на линии CC_1 , после чего определится направление CC_1 , и по отложению на нем вычисленной величины CC_1 легко получить пункт C_1 на линии AB .

Вычисление величины KK_1 можно очень просто произвести, зная угол C_1CD , равный углу линии вспомогательного хода с провешиваемой линией, по формуле:

$$KK_1 = CK \operatorname{tg} (C_1CD),$$

или по замене CK ее мерою, в нашем случае равной 10 м, и $\operatorname{tg} (C_1CD)$ на $(C_1CD) \sin 1'$:

$$KK_1 = 10 \times (C_1CD) \sin 1'.$$

Здесь мы допустили некоторую погрешность от замены $\operatorname{tg} (C_1CD)$ произведением его угла на $\sin 1'$.

Для угла, равного даже предельной величине в 8° , имеем при вычислении тригонометрическим путем:

$KK_1 = 10 \operatorname{tg} 8^\circ = 10 \times 0,1405 = 1,405 = 1,41$ (с округлением), а при вычислении по упрощенной формуле:

$$\begin{aligned} KK_1 &= 10 \times 8 \times 60 \times 0,00029 = 1,392 = \\ &= 1,39 \text{ (с округлением).} \end{aligned}$$

Разница получается при этом лишь в $1,41 - 1,39 = 0,02$ м, и таким образом направление определилось достаточно точно.

Данный способ может быть применен как в том случае, когда линия CM исходит из начального или конечного пункта линии AB , так и в том случае, когда она находится в середине вспомогательного хода.

Независимо от того, будет ли угол линии вспомогательного хода с провешиваемой линией больше или меньше $1\frac{1}{2}^\circ$, при любом вспомогательном пункте можно для перенесения этого пункта на провешиваемую линию восставлять перпендикуляр как к той, так и к другой из линий вспомогательного хода, на пересечении которых находится указанный пункт, но предпочтительнее, понятно, восставлять перпендикуляр к той линии, которая с провешиваемой линией образует меньший угол.

Заканчивая рассмотрение данного вопроса укажем, что в том случае, если расстояние CC_1 не превышает длины ленты или рулетки, которыми мы пользуемся при измерениях, и если из пункта видна хотя бы одна точка линии AB , можно непосредственно помощью экера опустить перпендикуляр CC_1 на провешиваемую линию, для чего необходимо, отмерив расстояние от пункта C , перемещаться с экером, сохраняя это расстояние от C до тех пор, пока направление на C не окажется перпендикулярным к направлению на видимый пункт провешиваемой линии, после чего конец отмеренного отрезка и определит точку на провешиваемой линии.

Пример. Перенести пункты C , D и E вспомогательного хода, приведенного в примере предыдущего §, на провешиваемую линию (см. черт. 18).

Напомним данные указанного примера:

Пункт C расположен в расстоянии 17,28 м, а пункт E — в расстоянии 21,19 м слева от провешиваемой линии, а пункт D — в расстоянии 2,44 м справа от нее.

Линия AC составляла, с округлением до $1'$, угол в $2^\circ 20'$ с провешиваемой линией AB ,

линия CD — угол в $3^{\circ}35'$,
 линия DE — угол в $5^{\circ}40'$,
 и линия EB — угол в $4^{\circ}15'$.

Все указанные линии образуют углы большие чем $1\frac{1}{2}^{\circ}$ с провешиваемой линией, и расстояния пунктов C и E превышают 10 м; поэтому для перенесения пункта C восставим перпендикуляр к линии AC вправо от нее и, отмерив на нем 10 м, отложим по перпендикуляру к нему вправо величину, соответствующую KK_1 черт. 21; она окажется равной:

$$10 \times (2 \times 60 + 20) \times \sin 1' = 10 \times 140 \times 0,00029 = 0,41,$$

после чего получаем направление CC_1 и, отложив на нем 17,28 м, находим пункт C_1 на линии AB .

Для перенесения пункта E восставим перпендикуляр к линии EB в пункте E вправо от нее и, отмерив на нем 10 м и отложив по перпендикуляру к нему влево

$$10 \times 255 \times 0,00029 = 0,74 \text{ м},$$

получим направление EE_1 ; отложив по этому направлению от пункта E 21,19 м, найдем пункт E_1 на линии AB .

Что же касается пункта D , то, так как расстояние его до провешиваемой линии не превышает 10 м, можно, отмерив от пункта D 2,44 м, опустить при помощи экера перпендикуляр на направление линии AB , если только установлен где-либо в точке C_1 или E_1 видимый пункт на этой линии.

Если же такового пункта не установлено, то можно поступить подобно тому, как мы поступали при перенесении пунктов C и E , т.е. восставить перпендикуляр в пункте D к линии CD влево от этой линии и, отмерив на нем 10 м, отложить по перпендикуляру к нему влево

$$10 \times 215 \times 0,00029 = 0,62 \text{ м},$$

после чего определится направление DD_1 и по отложении на нем от пункта D 2,44 м будет найдена точка D_1 на провешиваемой линии.

§ 41. О применении способа математического вешения линий на практике.

Обобщая сказанное в настоящей главе, можно сделать тот вывод, что указанный способ может иметь весьма широкое применение при угломерной съемке во всех тех случаях, когда из одного конца линии другой не виден, если только известно приблизительно направление линии.

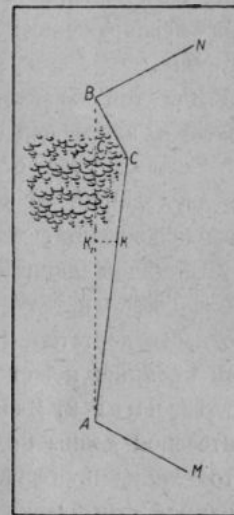
Укажем несколько конкретных случаев, когда применение этого метода делается особенно полезным.

Пример 1. При обходе окружной межи требуется провешить линию AB , при чем часть этой линии захватывает край кустарника или леса, и из одного конца этой линии другой, поэтому, не виден (см. черт. 22).

Из точки A исполнитель посылает вперед помощника и говорит ему поставить в точке C рабочего с вехой таким образом, чтобы быть возможно более близко к лесу или кустарнику и видеть одновременно пункты A и B ; при чем дается наказ, что, если бы это оказалось невозможным, стать таким образом, чтобы была видима точка A и видно возможно более далеко вперед вдоль кустарника, чтобы затем установить второй вспомогательный пункт хода, из которого будет видна точка B .

После этого исполнитель, продолжая без всякой задержки работу, измеряет углы MAC и C и линии AC и CB , замечая, не доходя кустарника, какую-либо точку K .

Произведя затем вычисления изложенным методом, посылает помощника с экером и рулеткой и указывает, на сколько



Черт. 22.

метров и по какому направлению перенести пункты C и K , чтобы установить их на линии AB .

После установления пункта K_1 можно производить вешение тому же помощнику через пункты A и K_1 на себя, в сторону кустарника, проводя просеку.

Пункт C_1 может дать возможность исправить направление, если бы при неровной местности, или вследствие вешения невооруженным глазом, произошло свешение линии в сторону.

Для той же цели можно было бы в случае надобности взять и затем перенести на линию AB пункт на линии CB .

Если бы ход от точки A к B был составлен более чем из двух линий, то и это обстоятельство не внесло бы особых осложнений.

В общем линия AB может быть провешена без помощи самого исполнителя, если только в его распоряжении имеется хотя бы достаточно подготовленный рабочий, а в это время сам съемщик может продолжать обход окружной межи.

Пример 2. Явилась необходимость проложить линию значительной длины по неровной местности, при чем направление этой линии приблизительно известно по плановым данным или видимой фактически меже. Местность может быть как открытая, так и под лесом или зарослями.

В этом случае задается направление по плановым данным или приблизительно по меже и подобно тому, как в примере 4 § 34 (см. черт. 8), ставятся вспомогательные точки на возвышенных местах, и после установки в них угломерного инструмента линия продолжается, если нет основания считать, что съемщик отклонился далеко от провешиваемой линии, или делается излом подобно тому, как изображено на черт. 9, в последнем случае.

Пример 3. Необходимо провешить спроектированную на плане при землеустройстве линию значительной длины по неровной местности между двумя определенными точками.

Задаем направление этой линии по вычисленному при проектировании углу с какой-либо линией проложенного на местности инструментального хода и, устанавливая точки на возвышенных местах, продолжаем эту линию до тех пор, пока не заметим веку, поставленную в другом конце этой линии.

После этого, измеряя угол при последнем вспомогательном пункте, можем произвести необходимые вычисления, если он отличается от 180, не производя измерения всей линии, так как мера ее определена была при проектировании. Перенеся все вспомогательные пункты на провешиваемую линию, уже затем домеряем линию до конца для проверки и установления разницы между вычисленной и найденной при измерении длиной, если предстоит затем по этой линии разбивка на участки.

Пример 4. Необходимо провешить линию значительной длины по строевому лесу, если направление ее приблизительно известно по плановым данным. Местность может быть как ровная, так и гористая.

Прокладываем по приблизительному направлению провешиваемой линии вспомогательный ход из нескольких линий, выбирая эти линии таким образом, чтобы не пришлось рубить толстых деревьев, а можно было ограничиться по возможности подчисткой сучьев.

Дойдя до конца провешиваемой линии и измерив все внутренние углы и линии, производим вычисления, переносим все вспомогательные пункты на линию и произведем вешение, при чем это последнее можно одновременно выполнять с обоих концов и посередине, и придется только, имея это заранее в виду, установить подобно тому, как мы это делали в примере 1 настоящего §, промежуточные пункты на линиях хода таким образом, чтобы можно было в нужных местах начать вешение.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

**ЧИСЛА УСЛОВНО ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ
ПРИ ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ.****§ 42. Общие сведения.**

После того как по данным измерений в натуре произведена увязка окружной межи и поверочных диагоналей и ходов и вычислена площадь полигона, в распоряжении исполнителя для последующего составления землеустроительного проекта имеется следующий основной математический материал:

- 1) румбы и меры линий,
- 2) вычисленные приращения,
- 3) исправленные приращения,
- 4) координаты вершин полигона и
- 5) площадь полигона.

Все эти данные основаны на приближенных числах, полученных в результате измерений в натуре, заключают в себе в той или иной мере их ошибки и являются также числами приближенными.

Но тем не менее между первыми двумя категориями указанных чисел и последними тремя существует весьма существенная разница в том, что тогда как первые находятся в противоречии, образуя невязку полигона, последние вполне гармонируют друг с другом, составляя увязанную фигуру.

Хотя эта последняя и отличается несколько от точной копии действительного полигона, но при составлении землеустроитель-

ного проекта мы будем условно считать ее данные математически точными и по этим данным с возможной точностью будем определять меру проектируемых линий и величину их румбов.

При такой постановке вопроса задача составления землеустроительного проекта в той ее части, которая названа нами математической стороной этой операции, и будет действительно представлять собою чисто математическую задачу.

Данные составленного землеустроительного проекта должны поэтому в должной мере гармонировать с исправленными приращениями, координатами и вычисленной по координатам площадью полигона. Если эти последние достаточно близко соответствуют фигуре на местности, то такими же свойствами будут обладать и данные землеустроительного проекта.

Отрешившись вполне при составлении землеустроительного проекта от данных действительных измерений и считаясь только с увязанными данными, мы не можем тем не менее отказаться от того, чтобы до некоторой степени не согласовать точность полевых измерений с точностью проектирования, ибо в противном случае либо при полевых измерениях, либо при проектировании мы произведем много лишней работы, не оправдываемой конечным результатом.

Представим себе такое положение дел, которое, к прискорбию, имеет место и до настоящего времени в весьма большом количестве случаев на практике, когда полевые измерения производятся с соблюдением требований технической инструкции, т.-е. с определением углов при двух положениях лимба и отсчитыванием до $1'$, измерением линий стальной лентой и пр., а в то же время эти относительно точные данные наносятся затем на план в сотенном масштабе, и производится проектирование графическими способами с измерением линий по масштабу, а площадей планиметром или вычислением по измеренным на плане линиям.

При таких условиях результат работы не отразит точности полевых измерений, и останется лишь пожалеть о малополезном труде, затраченном на производство этих измерений, так как при таком техническом подходе к составлению землеустроительного проекта в столь точной полевой работе не было надобности.

Представим себе теперь другую крайность, когда составитель землеустроительного проекта, применив, скажем, семи-значные таблицы натуральных значений тригонометрических функций и весьма точные методы вычислений, определил меры всех запроектированных линий с точностью до 0,01 м, а углы с точностью до долей минуты.

При таких условиях еще более нерационально будет затрачен труд составителя проекта, так как точность вычислений не будет соответствовать точности измерений на местности, и линия, определенная с точностью до 0,01 м, может дать на местности разницу в десятые доли метра, а угол, определенный с долями минут, мы не сможем даже отсчитать по принятым у нас инструментам.

Таким образом между работой съемщика и работой составителя землеустроительного проекта должна быть известная гармония.

Возвращаясь к основному поставленному в настоящем § вопросу, приступим к ознакомлению с тем вредным влиянием на точность проектирования, которое оказывает пользование при вычислениях румбами и измеренными на местности линиями и вычисленными приращениями, поскольку эти данные в той или иной мере противоречат условно точным плановым данным, и укажем наиболее простые способы парализования этого влияния.

§ 43. Определение границы влияния увязки на меру и румб линии.

При увязке любого хода мы, как известно, определяем величину отклонения суммы приращений координат по оси X и по оси Y от той величины, которая определяется замкнутостью

полигона или является наиболее вероятной величиной суммы приращений, если имеем дело с поверочными ходами; это отклонение, являющееся невязкой хода, мы уничтожаем или увязываем, распределяя его по всем линиям хода, пропорционально длинам линий или величинам их приращений. Будем считать, что нами принят способ распределения невязки пропорционально длинам линии, т.е. мы распределяем как невязку в абсциссах, так и невязку в ординатах пропорционально этим длинам, чем и обеспечивается такое распределение самой невязки.

Действительно, пусть периметр хода будет p , длина одной из линий этого хода l , невязка хода по оси X , $\sum \Delta x$, невязка по оси Y , $\sum \Delta y$.

При указанном способе увязки на долю линии l придется поправка $-\frac{l}{p} \sum \Delta x$ по оси X и $-\frac{l}{p} \sum \Delta y$ по оси y .

Подобно тому, как невязка всего хода есть

$$V(\sum \Delta x)^2 + (\sum \Delta y)^2,$$

часть ее, приходящаяся на линию l , будет:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{l}{p} \sum \Delta x\right)^2 + \left(\frac{l}{p} \sum \Delta y\right)^2} = \\ & = \frac{l}{p} \sqrt{(\sum \Delta x)^2 + (\sum \Delta y)^2}, \end{aligned}$$

т.е. эта невязка составляет также $\frac{l}{p}$ от общей невязки; из чего заключаем, что и общая невязка распределяется пропорционально длинам линий периметра.

При увязке полигона мы, как известно, вводим поправки в величины приращений для всех линий со знаками, обратными невязкам по соответствующим координатным осям, вследствие

чего происходит перенесение всех линий, кроме первой, параллельно самим себе, которое в данном случае нас не интересует, и сверх того изменение положения конца каждой линии по отношению к ее началу, которое вызывает изменения как величины, так и направления линии, вводя в то и другое некоторые поправки; это изменение положения конца линии будет производиться на величину приходящейся на долю этой линии невязки по направлению, противоположному направлению невязки, и этим изменением будет определяться *общая поправка* для линии, которую мы будем так называть для отличия от поправок на величину линии и ее румб или на оба приращения координат.

Если для всего хода невязка составляет $\frac{1}{n}$ периметра, то и для линии l выпадающая на ее долю общая поправка составит поэтому также $\frac{1}{n}$ от l , ибо такова будет величина приходящейся на долю этой линии невязки.

Пример 1. Найти величину общей поправки, падающей на линию в 652,1 м, и направление этой поправки, если на весь ход, периметр которого равняется 7525, падает невязка по абсциссам в +1,75, а по ординатам — 2,47.

Здесь на линию 652,1 м приходится поправка

$$-\frac{652,1}{7525} \times 1,75 = -0,15 \text{ м}$$

по иксам и

$$-\frac{652,1}{7525} \times (-2,47) = 0,21 \text{ м}$$

по игрекам.

Общая невязка для линии 652,1 будет равна поэтому

$$\sqrt{(-0,15)^2 + 0,21^2} = \sqrt{0,0850} = 0,26;$$

она составляет $\frac{652,1}{7525}$ от всей невязки, т.-е.

$$\frac{652,1}{7525} \sqrt{1,75^2 + (-2,47)^2} = \frac{652,1}{7525} \times 3,03 = 0,26.$$

Направление невязки линии 652,1 будет СЗ, а направление общей поправки — прямо противоположно, т.-е. ЮВ, величина же румба r этой поправки определится по известным формулам:

$$\Delta x = l \cos r,$$

$$\Delta y = l \sin r,$$

т.-е.

$$\cos r = \frac{0,15}{0,26} = 0,5769 = \cos 54^\circ 46',$$

откуда $r = 54^\circ 46'$, и общая поправка для линии в 652,1 будет, таким образом,

$$\frac{\text{ЮВ} : 54^\circ 46'}{0,26},$$

а направление ее окажется прямо противоположным направлению невязки всего полигона, с тем лишь отступлением, которое определяется округлением против точно пропорционального расчета поправок по X и Y для нашей линии 652,1, (направление невязки хода будет СЗ : $54^\circ 43'$).

Данный пример не имеет практического значения и приведен лишь для иллюстрации теории вопроса.

Возвращаясь к основному вопросу настоящего §, рассмотрим влияние увязки на изменение меры и румба линии.

Пусть будет нам дана линия AB с началом в точке A и концом в точке B , отложенная на чертеже в том или ином масштабе по данным измерения в натуре, и пусть Δx и Δy будут соответствующие ей приращения координат, которые

последней мы можем легко узнать и величину BB_1 , и тогда будем знать верхнюю границу для величины δl , которая будет границей погрешности для l , т.е. E_l , и верхнюю границу для δr , которая будет E_r .

При этом будем иметь:

$$E_l = \frac{l}{n}, \quad (2)$$

а после подстановки в формулу (1), вместо δr , E_r , вместо B_1B_3 , BB_1 , и, отбрасывая знак —, будем иметь:

$$E_r = \frac{BB_1}{l \sin 1'} = \frac{BB}{l} \cdot \frac{1}{\sin 1'},$$

или по замене $\frac{BB_1}{l}$ на $\frac{1}{n}$

$$E_r = \frac{1}{n \sin 1'}. \quad (3)$$

Для примера первого настоящего § невязка составляет

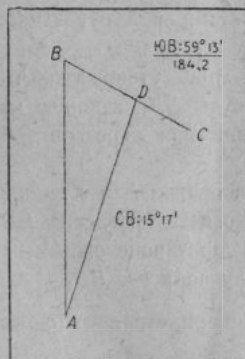
$$\frac{3,03}{7525} = \frac{1}{2483} \text{ часть периметра;}$$

следовательно $n = 2483$ и при $l = 652,1$ будем иметь:

$$E_l = \frac{l}{n} = \frac{652,1}{2483} = 0,263 = 0,27 \text{ (с округлением),}$$

и

$$E_r = \frac{1}{2483 \sin 1'} = \frac{1}{2483 \times 0,00029} = 1,4 \text{ (с округлением).}$$



Черт. 25.

Если при каком-либо вычислении мы будем пользоваться неисправленными мерами и румбами линий, то этим введем погрешность, границу которой можно учесть, зная, какую часть периметра хода составляла его невязка и пользуясь формулами (2) и (3) настоящего §.

ПРИМЕР 2. Найдем влияние на точность вычисления длины отрезков BD и AD задачи 1-й § 2 (см. черт. 25) того обстоятельства, что линия BC

$$\frac{\text{ЮВ: } 59^\circ 13'}{184,2}$$

взята по данным полевых измерений, и невязка того хода, к которому принадлежит эта линия, составляет $\frac{1}{1520}$ часть периметра.

От увязки хода изменилась длина линии BC и ее румб; определить по данным задачи это изменение не представляется возможным, но учесть верхнюю границу этого изменения по формулам (2) и (3) настоящего § возможно:

$$E_{BC} = E_{184,2} = \frac{184,2}{1520} = 0,14 \text{ (с округлением).}$$

$$E_{59^\circ 13'} = \frac{1}{1520 \sin 1'} = \frac{1}{1520 \times 0,00029} = \frac{1}{0,4408} = 2,3.$$

В задаче 1-й § 2 мы получили, что

$$BD = \frac{180,21 \sin A}{\sin (BDA)} = 44,92$$

$$AD = \frac{180,21 \sin B}{\sin (BDA)} = 162,93.$$

Если румб линии BC считать приближенным, с границей погрешности равной $2,3$, то значения углов B и BDA также сделаются приближенными с той же границей погрешности, так как эти углы мы определяли по румбам составляющих эти углы линий.

Границы погрешности величин $\sin B$ и $\sin (BDA)$ можно определить по формуле 9-й § 30, т.е.

$$E_{\sin B} = E_B \times \cos B \times \sin 1' = 2,3 \times \cos 60^\circ 36' \times 0,00029 = 0,00033,$$

$$E_{\sin (BDA)} = E_{(BDA)} \times \cos (BDA) \times \sin 1' = 2,3 \times \cos 74^\circ 30' \times 0,00029 = 0,00018.$$

Выделяя влияние только этой погрешности и считая поэтому число $180,21$ и значения $\sin$, взятые нами ранее, числами точными, мы получим, пользуясь формулами § 27:

$$E_{BD} = E_{\frac{180,21 \cdot \sin A}{\sin (BDA)}} =$$

(см. форм. 4)

$$= \frac{BD \times E_{\sin (BDA)}}{\sin (BDA)} = \frac{44,92 \times 0,00018}{\sin 74^\circ 30'} = \frac{0,0081}{0,9636} = 0,0085 = 0,01 \text{ (с округлением).}$$

$$E_{AD} = E_{180,21} \cdot \frac{\sin B}{\sin(BDA)}$$

(см. форм. 7)

$$\begin{aligned} &= \frac{E_{180,21} \sin B + AD \times E_{\sin(BDA)}}{\sin(BDA)} = \\ &= \frac{180,21 E_{\sin B} + 162,93 \times 0,00018}{\sin 74^{\circ}30'} = \\ &= \frac{180,21 \times 0,00033 + 0,03}{0,9636} = \frac{0,06 + 0,03}{0,9636} = 0,10. \end{aligned}$$

На BD еще сверх того скажется влияние увязки на ее длину как части линии BC , которое можно определить непосредственно по формуле 2-й настоящего §, т.е.

$$E_{BC} = \frac{44,92}{1520} = 0,03$$

и тогда общее влияние увязки на длину линии BD будет равно

$$0,01 + 0,03 = 0,04 \text{ м.}$$

Таким образом оказывается, что пользование при вычислениях румбом и мерою линии без введения в них поправки на увязку вызывает в нашем случае погрешность, граница которой равна 0,04 для линии BD и 0,10 для линии AD .

Чтобы при вычислениях от этой погрешности избавиться, укажем в следующем § способ нахождения поправки на длину линии и ее румб от увязки.

§ 44. Нахождение поправки на меру линии и ее румб от увязки.

Если известны исправленные приращения Δx и Δy , то по ним можно найти исправленную меру линии и румб по формулам:

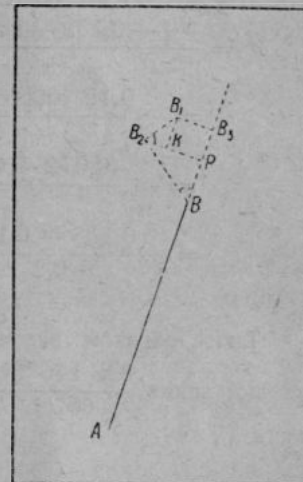
$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \\ \cos r &= \frac{\Delta x}{l}, \\ \sin r &= \frac{\Delta y}{l}; \end{aligned}$$

но вычисления эти, будучи простыми сами по себе, отнимают все же довольно много времени, если применять их для многих линий, и поэтому мы дадим способ непосредственного определения поправок δl и δr на длину и азимут линии, приводящий к значительно более быстрому результату.

Пусть $AB = l$ (см. черт. 26) будет линия по данным полевого измерения, AB_3 — та же линия после увязки хода, $BB_2 = \delta x$, $B_2B_1 = \delta y$, $BB_3 = \delta l$, $\angle B_3BB_2 = r$ есть азимут линии AB .

Считая l , δx , δy данными, определим величину δl и B_1B_3 по этим данным.

$$\begin{aligned} \delta l &= BB_3 = BP + PB_3 = \\ &= BB_2 \cos(PBB_2) + \\ &+ B_2B_1 \sin KB_2B_1 = \\ &= \delta x \cos r + \delta y \sin r, \\ B_1B_3 &= B_2P - B_2K = \\ &= BB_2 \sin(PBB_2) - \\ &- B_2B_1 \cos(KB_2B_1) = \\ &= \delta x \sin r - \delta y \cos r. \end{aligned}$$



Черт. 26.

По величине B_1B_3 , пользуясь формулой 1-й предыдущего §, можно найти величину δr , тогда получим окончательно:

$$\begin{aligned} \delta l &= \delta x \cos r + \delta y \sin r, \\ \delta r &= \frac{-\delta x \sin r + \delta y \cos r}{l \sin 1'}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пример. Найти поправку δl и δr для примера 1 предыдущего §, если румб этой линии будет ЮЗ:46°17'.

В этом примере мы имели, что $l = 652,1$, $\delta x = -0,15$ и $\delta y = 0,21$; подставляя эти значения в формулу (1) настоя-

¹⁾ Данные формулы можно найти в иностранной периодической литературе.

щего §, производя вычисления по таблицам Гаусса и принимая во внимание, что при румбе ЮЗ, $\sin$ и $\cos$ азимута будут равняться отрицательным $\sin$ и $\cos$ румба, будем иметь:

$$\begin{aligned}\delta l &= -0,15 (-\cos 46^\circ 17') + 0,21 (-\sin 46^\circ 17') = \\ &= 0,15 \cos 46^\circ 17' - 0,21 \sin 46^\circ 17' = (0,069 + 0,035) - \\ &- (0,145 + 0,007) = 0,104 - 0,152 = -0,048 = \\ &= -0,05 \text{ (с округлением);}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta r &= \frac{-[-0,15 (-\sin 46^\circ 17')] + 0,21 (-\cos 46^\circ 17')}{652,1 \times 0,0003} = \\ &= -\frac{0,15 \sin 46^\circ 17' + 0,21 \cos 46^\circ 17'}{0,2} = \\ &= -\frac{(0,072 + 0,036) + (0,138 + 0,007)}{0,2} = \\ &= -\frac{0,108 + 0,145}{0,2} = -\frac{0,253}{0,2} = -1',3 = \\ &= -1' \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

Таким образом исправленная для парализования влияния увязки линия $\frac{\text{ЮЗ} : 46^\circ 17'}{652,1}$ будет $\frac{\text{ЮЗ} : 46^\circ 16'}{652,05}$.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

СОСТАВЛЕНИЕ ПРОЕКТА РАЗБИВКИ ДАЧИ НА КВАРТАЛЫ И ОТДЕЛЬНЫЕ КРУПНЫЕ УЧАСТКИ.

§ 45. Общие сведения.

Продуктом землеустроительного проектирования могут быть как крупные участки, например земли для целых селений или частей селения, поселков, артелей, и пр., так и участки мелкие, например отдельные угодия для поселков и земли, предназначенные для единоличных землепользователей, например хуторские, отрубные и проч.

Разница в проектировании тех и других заключается в том, что в первом случае приходится иметь дело при вычислительных операциях из материала условно точного почти исключительно с координатами и исправленными приращениями координат, а меры линий и их румбы являются числами приближенными, взятыми по измерениям в натуре, тогда как во втором случае большинство линий и их румбов являются вычисленными по условно точным данным.

При проектировании участков мелких, а часто даже и таких, как поселки, приходится предварительно проектировать квартал для целой группы таких участков, что также производится по методу проектирования участков крупных.

Приступим к рассмотрению отдельных конкретных задач, с которыми приходится сталкиваться при проектировании крупных участков.

§ 46. Нахождение координат точки на заданном расстоянии от начала или конца данной линии.

Рассмотрим конкретный вопрос нахождения координат точки на линии ЮВ: $60^{\circ}20'$ (см. черт. 27) с координатами начала:

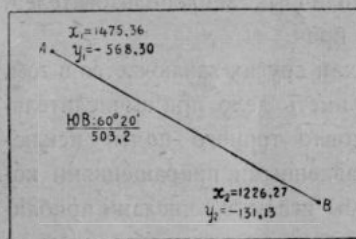
$$x_1 = 1475,36, y_1 = -568,30$$

и координатами конца:

$$x_2 = 1226,27, y_2 = -131,13$$

на расстоянии 216 м от ее начала, если для линии ЮВ: $60^{\circ}20'$ $\frac{503,2}{503,2}$ будут $\delta x = -0,01'$ и $\delta y = -0,06$.

Здесь условно точными данными будут координаты концов линии, а приближенными — мера и румб линии.



Черт. 27.

Если бы мы нашли приращения координат для линии мерою 216 м под румбом ЮВ: $60^{\circ}20'$ и прибавили эти приращения к координатам начала линии, т.-е. точки А, то получили бы координаты точки, не удовлетворяющей поставленным требованиям, так как, во-первых,

эта точка не будет, как правило, находиться на линии АВ, определяемой координатами ее концов, ибо от исправлений приращений для линии АВ обычно меняется и ее румб, чего мы не предусмотрели, а, во-вторых, эта точка не будет и по расстоянию от концов линии АВ на своем месте, так как при увязке изменилась длина линии АВ и, следовательно, ее часть в 216 м, чего также мы не предусмотрели.

Таким образом недостаточно найти приращения координат для отрезка в 216 м, но нужно сверх того приращения эти

исправить так же, как исправляли мы приращения всего хода, и тогда это исправление надлежащим образом отразится как на направлении, так и на длине отрезка в 216 м, и точка, координаты которой мы ищем, будет удовлетворять поставленным требованиям.

Приступим к исполнению самого вычисления.

Определим для этого прежде всего приращения отрезка в 216 м.

Вычисленные приращения этого отрезка будут:

$$\Delta x = -l \cos r = -216,0 \cos 60^{\circ}20' = -216,0 \times 0,4950 = -106,92,$$

$$\Delta y = l \sin r = 216,0 \sin 60^{\circ}20' = 216,0 \times 0,8689 = 187,68.$$

При увязке хода приращения всей линии ЮВ: $60^{\circ}20'$ $\frac{503,2}{503,2}$ подверглись согласно заданию примера следующим исправлениям:

$$\delta x = -0,01,$$

$$\delta y = -0,06.$$

При таком исправлении приращений для данной линии и всего хода придется в приращения координат для отрезка в 216 м ввести следующие поправки:

$$\delta x = 0,$$

$$\delta y = -0,03;$$

и тогда исправленные приращения координат для отрезка 216 м будут:

$$\Delta x = -106,92,$$

$$\Delta y = 187,68 - 0,03 = 187,65,$$

а координаты искомой точки окажутся такими:

$$x = 1475,36 - 106,92 = 1368,44,$$

$$y = -568,30 + 187,65 = -380,65.$$

Для проверки вычисления следует параллельно с этим проделать ту же операцию для остатка линии в $503,2 - 216,0 = 287,2$ м.

Вычисленные приращения для него будут:

$$\Delta x = -l \cos r = -287,2 \cos 60^\circ 20' = -287,2 \times 0,4950 = -142,16,$$

$$\Delta y = l \sin r = 287,2 \sin 60^\circ 20' = 287,2 \times 0,8689 = 249,55.$$

Исправления для этих приращений таковы:

$$\delta x = -0,01,$$

$$\delta y = -0,06 - (-0,03) = -0,03$$

и исправленные приращения окажутся равными:

$$\Delta x = -142,16 - 0,01 = -142,17,$$

$$\Delta y = 249,55 - 0,03 = 249,52;$$

После чего должны получиться координаты конца линии по координатам промежуточной точки и приращениям для отрезка 287,2:

$$x_2 = x + \Delta x = 1368,44 - 142,17 = -1226,27,$$

$$y_2 = y + \Delta y = -380,65 + 249,52 = -131,13.$$

Оказалось, что найденные координаты в точности совпали с прежними, из чего заключаем, что вычисление произведено правильно.

Этим же способом можно производить вычисления координат точек на линии во всех случаях, и только при поверочном вычислении координат конца линии можем получить числа, отличающиеся от данных координат этой точки на 0,01, что явится следствием иного округления приращений для отрезков линии по сравнению с приращениями для всей линии.

§ 47. Проведение линии между двумя данными точками.

Если точки даны, то являются данными и их координаты, и задача сводится к нахождению линии, т.е. ее меры и румба по координатам концов этой линии.

Из геодезии нам известно, что разности координат конца и начала данной линии дадут исправленные приращения этой линии; если координаты начала линии будут x_1 и y_1 , а конца x_2 и y_2 , то приращения координат для данной линии будут $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, и вопрос сводится к нахождению меры и румба линии по приращениям координат для этой линии.

На примере 6 § 2 был указан метод вычислений для решения данного вопроса при помощи арифмометра, а на примере 6 § 3 метод вычислений без помощи арифмометра, посредством таблиц квадратов чисел.

Так как приращения координат при этом определяются по координатам концов линии, то их можно сравнить с исправленными приращениями и причислить к числу данных условно точных.

При вычислении длины линии по этим данным точность результата будет различна в зависимости от того, производим ли мы эти вычисления при помощи арифмометра или посредством таблиц квадратов чисел, так как в первом случае подкоренное число и величина корня вычисляются без введения каких-либо погрешностей, и получается лишь погрешность от округления величины корня до 0,01, граница которой равна, как известно, половине единицы последнего знака, т.е. 0,005, тогда как во втором случае вводится сверх того погрешность от пользования таблицами квадратов чисел.

В примерах 3—6 § 29 был достаточно полно рассмотрен вопрос о том, с какой точностью определяется длина линии l в этом последнем случае, и выведена была формула (5):

$$E_l = \frac{0,75}{l} + 0,005, \quad (1)$$

дающая возможность определить точность найденной величины линии для всех случаев, когда эта линия заключается в пределах между 100 и 1000 м, и мы познакомимся поэтому только с вопросом определения точности найденной величины румба при решении данной задачи указанным методом и начнем прежде всего с отдельных примеров.

Пример 1. При нахождении длины линии l допущена относительная погрешность, граница которой равна 0,0001; найти влияние этой погрешности на границы погрешностей натуральных величин $\sin r$ и $\cos r$, где r есть румб искомой линии, оказавшийся при определении равным $5^\circ 12'$.

Напомним прежде всего, что $\sin r$ и $\cos r$ мы находили по формулам:

$$\begin{aligned}\cos r &= \frac{\Delta x}{l} \\ \sin r &= \frac{\Delta y}{l}\end{aligned}\quad (2)$$

Так как при этом Δx и Δy являются числами условно точными, то погрешность $\cos r$ и $\sin r$ будет зависеть только от погрешности l .

В § 27 было показано, что граница относительной погрешности частного от деления числа точного на приближенное равна границе той же погрешности числа приближенного; поэтому граница относительной погрешности $\cos r$ и $\sin r$ будет также равна 0,0001.

По таблицам Гаусса находим, что

$$\sin r = \sin 5^\circ 12' = 0,0906$$

$$\cos r = \cos 5^\circ 12' = 0,9959.$$

Следовательно, можем найти по величинам $\cos 5^\circ 12'$ и $\sin 5^\circ 12'$ и их границе относительной погрешности, границы погрешностей абсолютных:

$$\begin{aligned}E \sin 5^\circ 12' &= \sin 5^\circ 12' e \sin 5^\circ 12' = 0,0906 \times 0,0001 = \\ &= 0,00000906 = 0,00001 \text{ (с округлением),}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E \cos 5^\circ 12' &= \cos 5^\circ 12' e \cos 5^\circ 12' = 0,9959 \times 0,0001 = \\ &= 0,00009959 = 0,0001 \text{ (с округлением).}\end{aligned}$$

Таким образом влияние погрешности вычисленной величины линии l на точность вычисления натуральных величин $\sin r$ и $\cos r$, определенных по формулам (2), различно и пропорционально этим величинам.

При этом мы не коснемся погрешности от округления вычисленных величин $\sin r$ и $\cos r$, которые притом нам могут быть известны.

Пример 2. Определенные по формулам (2) тригонометрические функции румба $\cos r$ и $\sin r$ оказались равными 0,9960 и 0,0907. Граница относительной погрешности линии l равна 0,0001; найти величину румба r и точность его вычисления.

Из предыдущего примера делаем тот вывод, что $\sin r$ окажется ближе по своей величине к 0,0907, чем $\cos r$ к 0,9960, так как точность последнего значительно ниже. Ищем поэтому угол, которого $\sin$ оказывается равным 0,0907; по таблицам Гаусса находим, что $\sin 5^\circ 12' = 0,0906$ и следовательно $r = 5^\circ 12'$. В это же время оказывается, что $\cos 5^\circ 12' = 0,9959$, а величине косинуса, равной 0,9960, соответствуют углы от $5^\circ 6'$ до $5^\circ 9'$, но на это обращать внимания мы не будем, так как величина косинуса заслуживает в этом случае значительно меньшего доверия, чем величина $\sin$, но отметим различную чувствительность той и другой функции на изменение угла r , так как в то время, когда с изменением угла r на $1'$ соседние значения $\sin$ изменяются на 0,0003, таковые значения $\cos$ остаются по таблицам Гаусса совсем без изменения, из чего заключаем, что и по этим соображениям определять румб в данном случае по косинусу нецелесообразно.

Приступим к определению точности нахождения величины r по $\sin$, для каковой цели определим прежде всего точность найденного значения $\sin r$.

Вследствие неточности величины l в найденном значении $\sin r$ заключается некоторая погрешность, границу которой можно найти таким же образом, как и в предыдущем примере, и последняя окажется равной $0,00000907 = 0,00001$ (с округлением), т.е.

$$E_1 \sin r = 0,00001.$$

Сверх того в найденном значении величины $\sin r$ будет заключаться некоторая погрешность от округления, граница которой равна половине единицы последнего знака, т.е.

$$E_2 \sin r = 0,00005,$$

и таким образом вычислена будет граница общей погрешности величины $\sin r$:

$$E \sin r = E_1 \sin r + E_2 \sin r = 0,00001 + 0,00005 = 0,00006.$$

При определении величины румба мы считали, что

$$\sin 5^\circ 12' = 0,0906,$$

но число это, как известно, приближенное с границей погрешности равной 0,00005, и воспользовавшись этим числом, мы ввели в величину искомого синуса погрешность с границей равной 0,00005, и таким образом граница общей погрешности последнего будет $0,00006 + 0,00005 = 0,00011$.

Возникает вопрос, какой доле минуты соответствует эта граница погрешности. По таблицам Гаусса мы имеем, что разность между 0,0906 и значениями $\sin$ углов на $1'$ больших и меньших будет 0,0003, но эта разность заключает в себе заметную погрешность и значительно более точной будет разность, определяемая по формуле (13) § 30, т.е.

$$\Delta \sin r = \Delta r \cos r \sin 1' = 1 \times 0,9959 \times 0,00029 = 0,00028811 = 0,00029 \text{ (с округлением),}$$

по сравнению с которой граница погрешности $\sin r$ составляет

$$\frac{0,00011}{0,00029} = \frac{11'}{29},$$

и следовательно имеем:

$$E_1 r = \frac{11'}{29} = 0',4 \text{ (с округлением).}$$

Такова граница погрешности r от вычисления, что же касается границы погрешности r от округления, то в данном случае величина $\sin r$ заключается между

$$\sin 5^\circ 12' = 0,0906$$

и

$$\sin 5^\circ 13' = 0,0909$$

и так как

$$\sin r - \sin 5^\circ 12' = 0,0907 - 0,0906 = 0,0001,$$

а

$$\sin 5^\circ 13' - \sin 5^\circ 12' = 0,0003,$$

то действительная погрешность от округления будет равна

$$\frac{0,0001}{0,0003} = \frac{1'}{3},$$

но, стремясь сделать метод решения поставленного в настоящем примере вопроса общим для всей категории аналогичных случаев, возьмем вместо действительной погрешности в $\frac{1}{3}$ границу этой погрешности для всех таких случаев в $\frac{1}{2}$, после чего будем иметь величину границы общей погрешности r :

$$E_r = E_{1r} + E_{2r} = 0',4 + 0',5 = 0',9 = 1' \text{ (с округлением).}$$

Пример 3. Величины $\cos r$ и $\sin r$ оказались соответственно равными 0,7041 и 0,7103.

Найти величину румба r и точность его получения. Определяя величину румба по $\cos r$ находим, что

$$\cos 45^\circ 15' = 0,7040,$$

а

$$\cos 45^\circ 14' = 0,7042;$$

так как величина $\cos r$ заключается по середине между этими значениями, то возникает вопрос, в какую сторону произвести округление величины r , и обратимся поэтому к $\sin r$, натуральная величина которого немногим более таковой для $\cos r$, и точность ее поэтому будет лишь немногим уступать точности величины $\cos r$.

При этом оказывается, что

$$\sin 45^\circ 15' = 0,7102$$

и

$$\sin 45^\circ 16' = 0,7104,$$

т.е. величина $\sin r$ заключается по середине между $45^\circ 15'$ и $45^\circ 16'$.

Таким образом получаем, что при определении величины r по $\cos r$ мы можем последний принять с одинаковым основанием как равным $45^\circ 15'$, так и $45^\circ 14'$, при определении же по $\sin r$ — как $45^\circ 15'$, так и $45^\circ 16'$.

Нетрудно уже при поверхностном подходе к вопросу заключить, что румб r следует взять равным $45^\circ 15'$, но так как при этом мы могли допустить отклонение от этой величины на целую минуту как в ту, так и в другую сторону, если бы ограничились определением r по одной лишь функции $\sin r$ или $\cos r$, то данное явление нуждается в некотором объяснении.

Формулы (2) показывают, что погрешность в величине l вызывает одинакового знака погрешности в определяемых величинах $\cos r$ и $\sin r$, т.е. с увеличением l против действительного значения вычисленная величина $\sin r$ и $\cos r$ уменьшаются и наоборот.

Погрешности же одинакового знака в величинах $\sin r$ и $\cos r$ вызывают погрешности разного знака в величине r , определяемой по $\sin r$ и $\cos r$, так как известно, что с увеличением $\sin r$ угол r увеличивается, а для косинуса — наоборот.

Столь значительная разница в величинах r , определяемых по $\sin r$ и $\cos r$, при почти одинаковой точности той или другой величины, объясняется поэтому тем обстоятельством, что здесь сказалось влияние погрешности в величине l , которая явилась отрицательной и вызвала поэтому положительные погрешности в величинах $\cos r$ и $\sin r$ что дало отрицательную погрешность в величине румба, определяемого по $\cos r$, и положительную в величине румба r , определяемого по $\sin r$.

Если мы при округлении вычисленных величин $\sin r$ и $\cos r$ ввели погрешности, равные их границе, т.е. 0,00005, и если значения $\sin r$ и $\cos r$ в таблицах Гаусса будут также даны с погрешностью, близкой к их границе 0,00005, то и в этом случае величина $\cos r$ не будет больше $\cos 45^\circ 14'$, а величина $\sin r$ не будет больше $\sin 45^\circ 16'$, и при определении r по $\cos r$, r не будет меньше $45^\circ 14'$, а при определении по $\sin r$ — больше $45^\circ 16'$; поэтому, принимая r равным $45^\circ 15'$, мы можем гарантировать и для данного случая точность румба до $1'$, не входя в определение точности величины l .

Приведенные примеры показывают, что метод определения величины румба линии по исправленным приращениям координат должен несколько отличаться для случая, когда угол r близок к 45° , от того метода, который был нами указан в 1-й главе, так как будет не лишним в этом случае определить по формулам (2) одновременно и $\sin r$ и $\cos r$, и взять r в целых минутах близким к арифметической середине его значений, полученных первым и вторым способом, т.е. по $\cos r$ и по $\sin r$, что даст и проверку вычислений, тогда как для румбов, приближающихся к 0° или 90° , нужно производить определение их величин по той из функций $\sin$ или $\cos$, которая меньше по своей величине и лишь проверку для обнаруживания грубых ошибок при вычислениях следует производить посредством нахождения приращения по большей своей натуральной величиной функции $\sin$ или $\cos$.

§ 48. Проведение линии из данной точки по заданному направлению.

Метод решения данной задачи указан был в § 2.

Решим здесь ту же задачу с принятием исправления от увязки на меру и румб линии, если по ведомости координат мы узнали, что поправка линии $\frac{\text{ЮВ: } 59^\circ 13'}{184,2}$ по иксам составляла $-0,10$, а по игрекам $+0,06$.

Начнем с определения поправок от увязки линии $\frac{\text{ЮВ: } 59^\circ 13'}{184,2}$.

По формулам (1) § 44 имеем:

$$\delta l = \delta x \cos r + \delta y \sin r = -0,10 (-\cos 59^\circ 13') + +0,06 \sin 59^\circ 13' = 0,051 + 0,052 = 0,10;$$

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{-\delta x \sin r + \delta y \cos r}{l \sin 1'} = \\ &= \frac{0,10 \sin 59^\circ 13' + 0,06 (-\cos 59^\circ 13')}{184,2 \sin 1'} = \\ &= \frac{0,086 - 0,031}{0,053} = \frac{0,055}{0,053} = 1', \end{aligned}$$

т.е. исправленная мера линии будет $184,2 + 0,1 = 184,3$, а исправление азимута на $+1'$ даст исправление румба ЮВ на $-1'$, и последний окажется: ЮВ: $59^\circ 12'$.

В задаче 1-й § 2 мы имели (см. черт. 25)

$$BD = \frac{180,21 \cdot \sin A}{\sin (BDA)}$$

и

$$AD = \frac{180,21 \cdot \sin B}{\sin (BDA)},$$

где угол A был равен $13^\circ 54'$, $\angle B = 60^\circ 36'$ и $\angle BDA = 105^\circ 30'$.

От изменения румба линии BC в сторону уменьшения на $1'$ уменьшится на $1'$ угол B и увеличится угол BDA , и окажется угол B равным $60^\circ 35'$ и $\angle BDA = 105^\circ 31'$;

После этого будем иметь:

$$BD = \frac{180,21 \sin 13^\circ 54'}{\sin 105^\circ 31'} = \frac{180,21 \times 0,2402}{\sin 74^\circ 29'} = \frac{43,29}{0,9636} = 44,93$$

и

$$AD = \frac{180,21 \cdot \sin 60^\circ 35'}{\sin 105^\circ 31'} = \frac{180,21 \times 0,8711}{\sin 74^\circ 29'} = \frac{156,98}{0,9636} = 162,91.$$

Такая длина линии BD была бы только в том случае, если бы эта линия не подвергалась изменению при увязке, но так как она увеличилась от увязки на $0,10$ м, то на долю отрезка $44,93$ приходится поправка $\frac{0,10 \times 44,93}{184,2} = 0,02$ м в сторону увеличения, и таким образом окончательно получим:

$$BD = 44,93 + 0,02 = 44,95$$

и

$$AD = 162,91.$$

§ 49. Проектирование заданной площади линией из данной точки.

При проектировании участка влево от линии AB (см. черт. 28) оказалось, что в определенной по координатам площади до линии AB недостает против причитающегося для проектирования количества некоторой площади Q ; линия AB и ее румб оказались вычисленными по координатам точек A и B , и исправленный от увязки румб линии BM известен.

Требуется добавить недостающую площадь таким образом, чтобы она отсекалась линией AC , исходящей из точки A . Рассмотрим метод такого проектирования на конкретном примере.

Пусть AB оказалась равной $\frac{CB:2^\circ 15'}{238,1}$, площадь $Q = 5020$ м², исправленный румб линии $BM = ЮВ:62^\circ 17'$; требуется найти недостающие элементы треугольника, — длину сторон BC и AC и угол A .

Угол ABC , определяемый по румбам составляющих его линий, равен $64^\circ 32'$.

Дальнейшее можно произвести двумя способами.

1-й способ. Найдем по площади треугольника Q и его основанию AB высоту DC :

$$DC = \frac{2Q}{AB} = \frac{10040}{238,1} = 42,17.$$

Определим затем длину линии BC по катету DC и углу DBC :

$$BC = \frac{DC}{\sin B} = \frac{42,17}{\sin 64^\circ 32'} = 46,71,$$

и потом длину линий BD и AD :

$$DB = BC \cos B = 46,71 \cos 64^\circ 32' = 20,09;$$

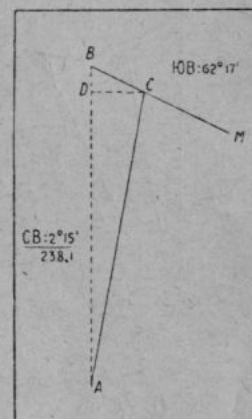
$$AD = AB - DB = 238,1 - 20,09 = 218,01.$$

Вычислим затем по катетам AD и DC гипотенузу AC :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{218,01^2 + 42,17^2} = 222,05.$$

Землеустроительное проектирование.

14



Черт. 28.

Определим затем угол A и в соответствии с указаниями предыдущего § будем вычислять этот угол по его $\sin$, так как угол $A < 45^\circ$ и $\sin A < \cos A$:

$$\sin A = \frac{42,17}{222,05} = 0,1899 = \sin 10^\circ 57', \text{ откуда } A = 10^\circ 57'.$$

Для проверки имеем:

$$AC \cos A = 222,05 \cos 10^\circ 57' = 218,01.$$

Румб линии AC окажется равным:

$$CB: (2^\circ 15' + 10^\circ 57') = CB: 13^\circ 12'.$$

Кроме того необходимо ввести поправку на увязку в вычисленную длину линии BC подобно тому, как это нами было произведено в предыдущем §.

2-й способ. Определим прежде всего длину перпендикуляра AD , опущенного из точки A на линию BD , и величину катета BD (см. черт. 29):

$$AD = AB \cdot \sin B = 238,1 \sin 64^\circ 32' = 214,96$$

и

$$BD = AB \cos B = 238,1 \cos 64^\circ 32' = 102,38.$$

Далее из тригонометрии известно, что

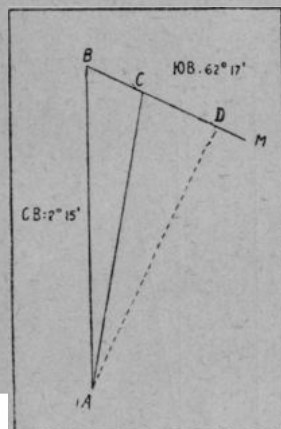
$$Q = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B,$$

откуда имеем:

$$2Q = BC \times (AB \sin B) = BC \times AD = BC \times 214,96;$$

затем получаем:

$$BC = \frac{2Q}{214,96} = \frac{10040}{214,96} = 46,71;$$



Черт. 29.

по BD и BC найдем величину CD :

$$CD = BD - BC = 102,38 - 46,71 = 55,67;$$

по AD и CD определим длину линии AC и величину угла DAC :

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{214,96^2 + 55,67^2} = 222,05,$$

$$\sin (DAC) = \frac{CD}{AC} = \frac{55,67}{222,05} = 0,2507 = \sin 14^\circ 31',$$

и

$$\angle DAC = 14^\circ 31';$$

проверка дает: $CD = AC \cos (DAC) = 222,05 \cos 14^\circ 31' = 214,97.$

Найдем угол CAB по углу DAB и DAC :

$$\angle DAB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 64^\circ 32' = 25^\circ 28'$$

и

$$\angle CAB = \angle DAB - \angle DAC = 25^\circ 28' - 14^\circ 31' = 10^\circ 57'.$$

Румб линии AC и поправка на увязку линии BC находятся по предыдущему.

Вычисления в обоих указанных способах можно производить как на арифмометре, так и непосредственно по таблицам Гаусса.

Нами вычисления выполнены при помощи арифмометра и при проверке их непосредственно по таблицам могут быть незначительные отклонения.

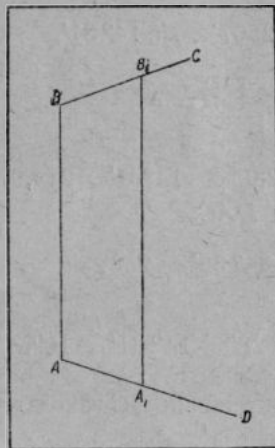
Вследствие элементарности данного вопроса больше на нем останавливаться не будем.

§ 50. Проектирование заданной площади линией, параллельной данной.

Поставленная задача сводится к проектированию трапеции заданной площади. Подробно этот вопрос рассмотрен будет в дальнейшем; в настоящем же § мы остановимся лишь на

указании, каким образом здесь обращаться с данными полевых измерений.

Пусть требуется нам спроектировать площадь Q (см. черт. 30) линией A_1B_1 , параллельной данной линии AB , если направления линий BC и AD нам известно.



Черт. 30.

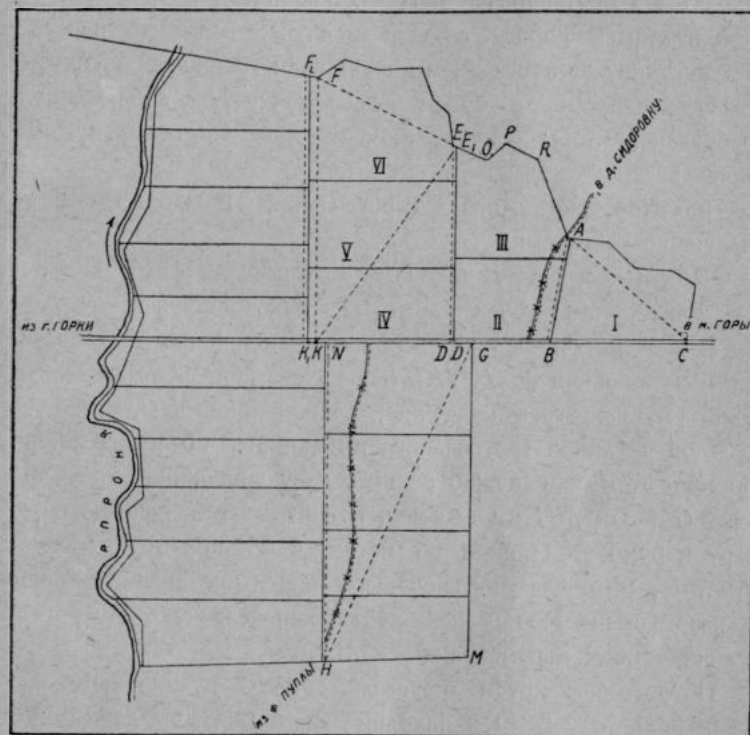
Меры и румбы линий BC и AD будут при этом обычно неисправленными от увязки, и прежде всего необходимо их поэтому исправить; что же касается линии AB , то таковая может быть дана как по неувязанным данным, и тогда ее следует исправить и направление линии A_1B_1 взять параллельным исправленному направлению AB , так и по вычисленным данным, определенным по координатам хода. Если при этом число таких участков, проектируемых параллельными линиями, будет велико, то предпочтительнее воспользоваться при проектировании теми методами, которые предназначены для проектирования мелких участков и о которых будет подробно изложено в дальнейшем.

§ 51. Заключение.

Заканчивая настоящую главу, приведем проект разверстания дачи на поселки, изображенный на прилагаемом схематическом чертеже 31.

Прежде всего обращаем внимание на то, что данный проект приурочен к существующей дорожной сети. Большая дорога из г. Горки в м. Горы осталась на своем месте и на всем протяжении служит границей поселковых участков.

Что же касается проселочных дорог из ф. Пуплы и из д. Сидоровки, то они лишь слегка сдвинуты со своих мест и спрямлены. Самое проектирование кварталов, разбиваемых затем на поселки, мы производим следующим образом:



Черт. 31.

Участок к югу от большой дороги, содержащий в себе 10 поселков, мы разбиваем на два квартала, восточный и западный.

При такой разбивке мы обычно должны будем принимать во внимание 2 землеустроительных соображения: 1) квартал вдоль р. Прони должен быть шире граничащего с ним во-

сточного квартала, так как желательно поместить здесь большее число поселков и 2) дорога из ф. Пуплы должна проходить по границе кварталов.

В данном примере эти землеустроительные требования не находятся в противоречии между собою и точку D , в которой один из краев дороги, в данном случае западный, пересекается с окружной межей, мы принимаем граничным пунктом между квадратами и будем искать точку N с соблюдением требования, чтобы в восточном квартале оказалась нужная площадь.

Проектирование этого четырехугольника можно произвести следующим образом:

Найдем координату J по правилу § 46 и затем по координатам точек H и G , руководствуясь методом § 47, найдем меру и румб вспомогательной линии HG — вычисляем затем площадь ΔHGM по известной формуле тригонометрии, пользуясь найденной длиной линии HG , углом ее с одной из линий треугольника и мерой этой последней линии. Но при этом нам нужно решить, какую из линий треугольника GM или MN мы возьмем, и найти затем исправленную меру и румб этой линии по методу § 44, при этом следует отметить, что для последующего проектирования поселков в квартале целесообразней найти исправленную от увязки величину меры и румба линии GM .

Потом проектируем треугольник HNG нужной нам площади по методу § 49 и находим таким образом длины NG и NH и направление NH .

В правильности произведенного проектирования мы убедимся, проверив площадь остающегося второго квартала к югу от большой дороги, расположенного вдоль реки Прони, что будет достигнуто попутно при разложении этого квартала, в той его части, которая расположена к востоку от магистралей, на простые фигуры — методом, который будет указан в следующей главе.

Вторым доказательством правильности произведенного проектирования будет равенство суммы площадей всех спроектированных в восточном квартале поселков — отведенной общей площади квартала.

Самое проектирование поселков в обоих кварталах I и II , нам желательно

Приступая к проектированию квартала для поселков IV, V и VI, намечаем прежде всего приблизительно требуемую площадь до линии FK , являющейся перпендикуляром к линии вдоль большой дороги, проектируемым по методу § 48.

Она складывается из вычисляемой по координатам площади между линиями ED и KF и трапеции заданной площади EE_1D_1D .

Допустим, что в этой площади оказался некоторый недостаток против причитающегося поселкам IV, V и VI количества, тогда мы добавляем недостающее количество трапецией FKK_1F_1 .

В отведенном квартале проектируем прямоугольниками или трапециями площади для поселков IV и V и производим затем вычисление площади участка для поселка VI, что в данном случае уже безусловно необходимо, так как служит для проверки вычислительных операций в обоих кварталах.

Означенную операцию можно произвести в два приема: вычислением по координатам площади к северу-востоку от линии EF и определением площади оставшегося шестиугольника разложением на 3 прямоугольные трапеции линиями, перпендикулярными к направлению линии вдоль большой дороги.

Определение меры и румба линии EF по координатам концов не является необходимым для вычисления площадей, но полезно для проверки длин линий к югу-западу от EF в участке поселка VI.

Площадь квартала вдоль р. Прони к северу от большой дороги определится как остаток после проектирования других кварталов и поселка I, а правильность проектирования во всем полигоне к северу от большой дороги будет удостоверена при разложении квартала вдоль р. Прони на простые фигуры; проектирование же поселков в этом квартале должно быть произведено по методу проектирования мелких участков.

На этом и заканчиваются общие указания по составлению предложенного проекта.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

РАЗБИВКА НА ПРОСТЫЕ ФИГУРЫ.

§ 52. Общие сведения.

В тех случаях, когда спроектированный квартал предстоит затем разбить на участки — крупные или мелкие, обычно бывает необходимо предварительно разбить этот квартал на простые фигуры: треугольники, прямоугольники и трапеции — линиями параллельными тем, которыми мы потом будем разбивать участки внутри квартала.

Чаще всего эти параллельные линии будут перпендикулярны к одной из сторон спроектированного квартала, и тогда фигуры эти будут прямоугольными, а в противном случае косоугольными.

Поясним данный вопрос нижеследующим примером.

Пусть требуется нам площадь четырехугольника (см. черт. 32), равную $2,7687 \text{ га} = 27687 \text{ м}^2$, разбить затем на несколько мелких участков. Такими участками могут быть: хутора, отруба, отдельные луговые участки для поселков и пр.

Пусть установлено также, что линии проектирования участков должны быть перпендикулярными стороне AD . Для нас представляется необходимым знать, какая площадь будет заключаться против каждой из трех линий AB , BC и CD , после того как мы из пунктов B и C опустим перпендикуляры на линию AD .

Треугольники ABB_1 и CDC_1 и трапеция B_1BCC_1 являются простыми фигурами, на которые разлагается четырехугольник

$ABCD$, и к нахождению всех элементов этих фигур мы прежде всего и приступим.

Углы всех трех линий нашего четырехугольника со стороны AD определены по румбам и записаны на чертеже, и там же записаны все вычисленные линейные элементы, из которых — катеты BB_1 и AB_1 определены по гипотенузе AB и углу A , катеты BB_2 и B_2C по BC и углу BCB_2 , а катеты CC_1 и C_1D по гипотенузе CD и углу D .

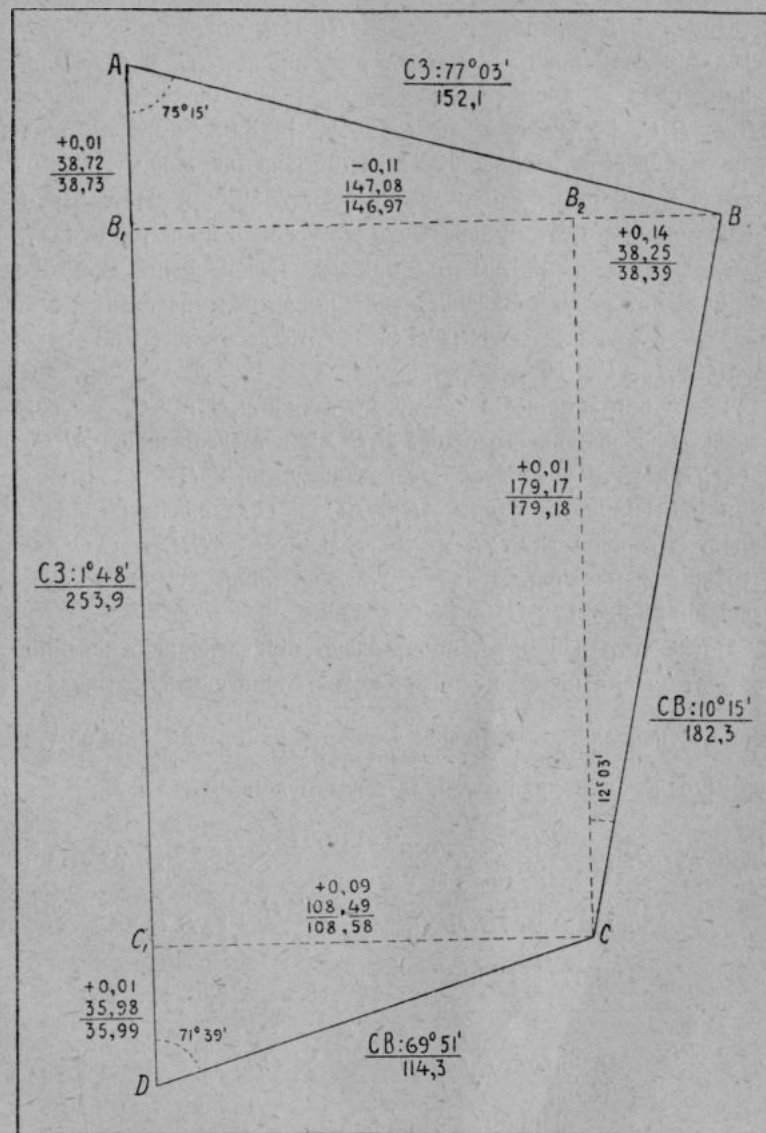
Пусть стороны AB , BC и CD известны нам по данным полевых измерений, и AD вычислена по координатам точек A и D .

При таких условиях линия AD , как полученная вычислением из данных условно-точных, будет обладать лишь незначительной против этих данных погрешностью, с которой мы считаться не будем, тогда как линии AB , BC и CD могут давать существенные отклонения, составлявшие прежде часть невязки всего полигона, к которому принадлежит четырехугольник $ABCD$, а в данный момент составляющие невязку этого четырехугольника.

Если мы условно примем точку A за начало координат, а линию AD за ось X , то катет BB_1 составит ординату у точки B , разность катетов BB_1 и BB_2 — ординату у точки C и $BB_1 - BB_2 - CC_1 = 0,34$ ординату точки D ; но так как ордината этой точки, расположенной на оси X , должна равняться нулю, то наш четырехугольник заключает в себе невязку по условной оси Y .

Приступая к ликвидации этой невязки, мы будем иметь в виду, что линия AD вычислена по условно-точным данным и на нее, поэтому, при увязке определить соответствующую часть невязки хода невозможно, и вся эта невязка должна быть распределена между линиями AB , BC и CD .

Распределив ее по правилам геодезии, будем иметь исправленные катеты, соответствующие приращениям координат Δy при условно принятой координатной системе: $BB_1 = 146,97$, $BB_2 = 38,39$ и $CC_1 = 108,58$.



Черт. 32.

При нашей условной системе AB_1 есть приращение координат Δx для линии AB , B_1C_1 для линии BC и C_1D для линии CD , а абсцисса x точки D оказывается равной $AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 = 38,72 + 179,17 + 35,98 = 253,87$; но если определить абсциссу той же точки по линии AD , то такая будет равна самой линии, т.е. 253,90, и наш четырехугольник имеет поэтому невязку и по условно принятой оси X , равную $253,87 - 253,90 = -0,03$ м. Распределив эту невязку по правилам геодезии, будем иметь исправленные приращения Δx — катеты AB_1 , B_1C_1 и C_1D соответственно равными 38,73, 179,18 и 35,99.

Таким образом оказывается, что линии B_1B и CC_1 , являющиеся основаниями трапеции B_1BCC_1 и треугольников ABB_1 и C_1CD и в то же время ординатами y точек B и C , равны 146,97 и 108,58, а линии AB_1 , B_1C_1 и C_1D , являющиеся высотами трапеции B_1BCC_1 и треугольников ABB_1 и C_1CD и в то же время приращениями Δx для линий AB , BC и CD , равными 38,73, 179,18 и 35,99.

После того как нами произведено исправление оснований и высот наших простых фигур, можно приступить к вычислению их площадей как произведений $\frac{1}{2}$ основания или суммы оснований на высоты, и тогда будем иметь:

$$\text{пл. } \triangle ABB_1 = \frac{BB_1}{2} \times AB_1 = \frac{146,97}{2} \times 38,73 = 2846 \text{ м}^2,$$

$$\begin{aligned} \text{пл. трапец. } B_1BCC_1 &= \frac{BB_1 + CC_1}{2} \times B_1C_1 = \\ &= \frac{146,97 + 108,58}{2} \times 179,18 = 22895 \text{ м}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{пл. } \triangle C_1CD &= \frac{CC_1}{2} \times C_1D = \\ &= \frac{108,58}{2} \times 35,99 = 1954 \text{ м}^2 \end{aligned}$$

и общая площадь четырехугольника $ABCD$:

$$2846 + 22895 + 1954 = 27695 \text{ м}^2.$$

Между этой площадью и вычисленной ранее по координатам площадью четырехугольника обнаруживается разница $27695 - 27687 = 8 \text{ м}^2$.

Наличие этой разницы объясняется неполной согласованностью меры и румба вычисленной по координатам линии AD с этими последними, а также несколькими округлениями вычисленных нами и исправленных оснований и высот простых фигур.

Ликвидируем эту разницу путем распределения ее примерно пропорционально площадям простых фигур, после чего получим поправки: -1 м^2 , -6 м^2 и -1 м^2 и найдем исправленные площади: для $\triangle ABB_1$ равную 2845, для трапеции B_1BCC_1 равную 22889 и $\triangle C_1CD$ равную 1953 м^2 .

На этом подготовка к дальнейшему проектированию участков из данного четырехугольника и заканчивается¹⁾.

§ 53. Разбивка на прямоугольные фигуры.

В предыдущем § мы произвели разбивку приведенного в примере четырехугольника на простые фигуры, и вследствие простоты формы этого квартала каких-либо трудностей при этом не встретилось, но в более сложных случаях необходимо все вычисления и увязку производить более упорядоченно, и так как у нас все свелось главным образом к вычислению приращений и их исправлению, то данную вычислительную

¹⁾ В данном случае, вследствие очень малой величины разницы вычисленных в той и другой координатной системе площадей, необходимость распределять эту разницу пропорционально величинам площадей простых фигур отпадает, и мы могли бы определить ее всю в площадь большей фигуры.

работу целесообразно располагать в ведомости, сходной по форме с ведомостью координат.

Пусть мы имеем квартал формы семиугольника (черт. 33), который нужно разложить на простые фигуры прямыми, перпендикулярными к вычисленной по координатам линии

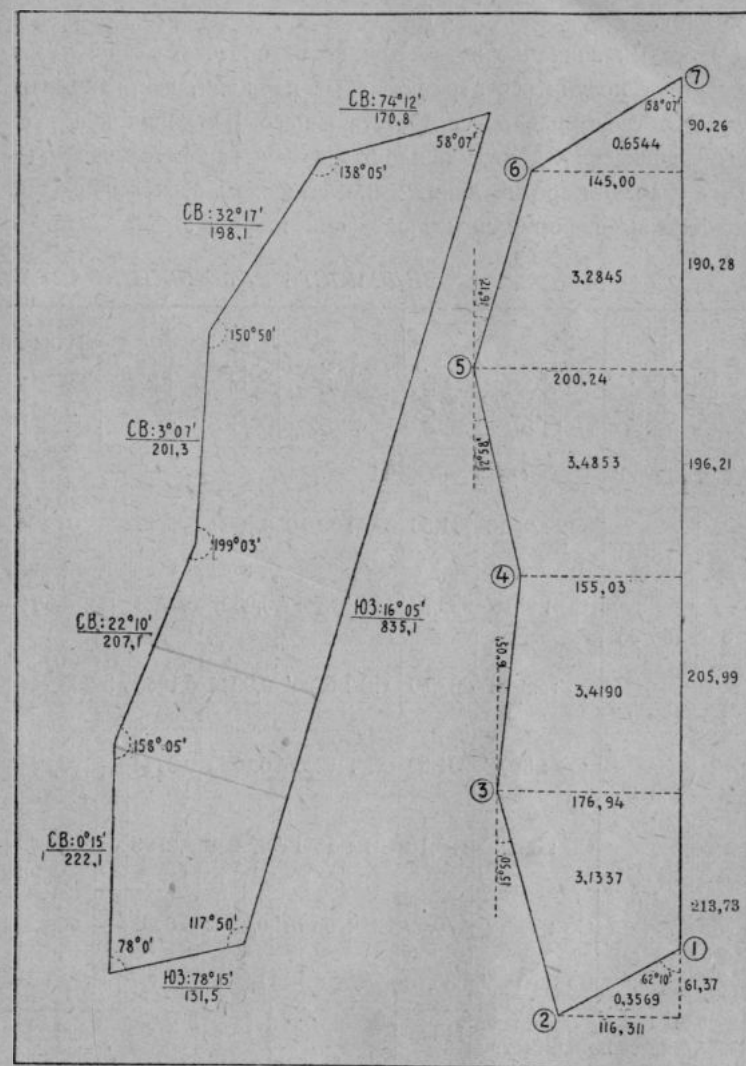
$$\frac{\text{ЮЗ: } 16^{\circ}05'}{835,1}$$

Подобно тому, как и в примере предыдущего §, начнем с изменения координатной системы, а так как ось X направляется по принятому в геодезии правилу по меридиану, то будем считать, что мы изменили направление меридиана таким образом, чтобы оно совпало и было противоположно направлению линии $\frac{\text{ЮЗ: } 16^{\circ}05'}{835,1}$.

Для этой цели необходимо повернуть принятый ранее меридиан северным концом влево на $16^{\circ}05'$, отчего все румбы СВ и ЮЗ, так же как и румб ЮЗ $16^{\circ}05'$, уменьшатся на $16^{\circ}05'$, а СЗ и ЮВ увеличатся на такую же величину.

При этом меридиане румбы линий нашего квартала будут углами их с линией $\frac{\text{ЮГ}}{835,1}$, как показано на черт. 33 (часть В).

Проверив перечисление румбов определением по ним внутренних углов квартала, приступим, подобно тому, как и в примере предыдущего §, к определению невязки полигона, увязке его, вычислению координат у всех точек полигона, нахождению арифметических средних этих координат и произведений на соответствующие исправленные Δx , каковые произведения нужно будет притом всегда брать с обратными знаками, чтобы не получить отрицательной площади всего полигона; по исправлении полученных площадей для согласования с вычисленной ранее по координатам площадью полигона, операция будет закончена, и черт. 33 (В) будет содержать



Черт. 33.

все нужные нам в дальнейшем данные для проектирования участков.

Обратим внимание здесь еще на то обстоятельство, что у нас могут получиться отрицательные площади, как, например, площадь треугольника, соответствующего 1-й линии квартала, вычитающиеся из других площадей — в нашем случае площади трапеции против линии 2-й. Материалы всех вычислений расположим в форме нижеследующей таблицы:

ВЕДОМОСТЬ РАЗБИВКИ КВАРТАЛА НА

№ по порядку.	Внутренние углы.	Прежние румбы.	Меры линий.	Новые румбы.	cos румба.	sin румба.	Вычисленные.		
							+	Δx	± Δy
1	117°50'								
		ЮЗ : 78°15'	131,50	ЮЗ : 62°10'	0,4669	0,8843		+ 0,03 61,40	- 0,02 116,29
2	78°00'								
		СВ : 0°15'	222,10	СЗ : 15°50'	0,9621	0,2728		+ 0,05 213,68	- 0,04 60,59
3	158°05'								
		СВ : 22°10'	207,10	СВ : 6°05'	0,9944	0,1060		+ 0,05 205,94	- 0,04 21,95
4	199°03'								
		СВ : 3°07'	201,30	СЗ : 12°58'	0,9745	0,2244		+ 0,04 196,17	- 0,04 45,17
5	150°50'								
		СВ : 32°17'	198,10	СВ : 16°12'	0,9603	0,2790		+ 0,04 190,24	- 0,03 55,27
6	138°05'								
		СВ : 74°12'	170,80	СВ : 58°07'	0,5282	0,8491		+ 0,04 90,22	- 0,03 145,03
7	58°07'								
		ЮЗ : 16°05'	835,10	Юг	1,0000	0		+ 835,10	+ 0
	Невязка распределяется на периметре.		1130,9					+ 896,25 896,50	+ 222,25 222,05
								- 0,25	+ 0,20

§ 54. Разбивка на косоугольные фигуры.

Пусть дан нам квартал формы семиугольника, изображенный на чертеже 34—А, который по различным землеустроительным соображениям предстоит разверстать на мелкие участки линиями, параллельными линии

$$\frac{ЮЗ:85^{\circ}14'}{225,2},$$

ПРОСТЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ.

Исправленные.		Координаты у.	$-\frac{y_i - i + y_i}{2}$		Вычисленные.		Исправленные.	
+	Δx	± Δy	+	Δx	+	Δx _i $(-\frac{y_i - i + y_i}{2})$	+	Δx _i $(-\frac{y_i - i + y_i}{2})$
			0					
-	61,37	- 116,31			+ 58,15 _з	- 3569	-	3569
			116,31					
+	213,73	- 60,63			+ 146,62 _з	+ 31338	+	31337
			176,94					
+	205,99	+ 21,91			+ 165,98 _з	+ 34191	+	34190
			155,03					
+	196,21	- 45,21			+ 177,63 _з	+ 34854	+	34853
			200,24					
+	190,28	+ 55,24			+ 172,62	+ 32846	+	32845
			145,00					
+	90,26	+ 145,00			+ 72,50	+ 6544	+	6544
			0					
-	835,10	- 0						
						+ 136204	+	136200

при чем эта последняя линия дана вычисленной по координатам или с введенными поправками на данные полевых измерений.

Требуется предварительно разбить этот квартал на косоугольные трапеции I ... IV и треугольник V линиями GH , CL , DK и FI , параллельными AB , с вычислением всех сторон этих трапеций и площадей. Следует при этом оговориться, что если бы площадь данного квартала нужно было разбить лишь на 2—3 участка, то удобней было бы это сделать по методам предыдущей главы, без предварительной разбивки на простые фигуры.

Приступим к вычислению элементов трапеции I.

Так как в ней имеется 2 линии: GA и BH —как часть BC , с неисправленными от увязки данными, то прежде всего нужно вычислить поправки на увязку для обеих этих линий.

Пусть для линии GA поправки при увязке были

$$\delta x = 0,02$$

и

$$\delta y = -0,02;$$

тогда по формулам (1) § 44 имеем:

$$\begin{aligned} \delta l &= \delta x \cos r + \delta y \sin r = 0,02 (-\cos 10^\circ 07') + \\ &+ (-0,02) (-\sin 10^\circ 07') = -0,02 \cos 10^\circ 07' + \\ &+ 0,02 \sin 10^\circ 07' = -0,020 + 0,004 = -0,02 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{-\delta x \sin r + \delta y \cos r}{l \sin 1'} = \\ &= \frac{-0,02 (-\sin 10^\circ 07') - 0,02 (-\cos 10^\circ 07')}{130,2 \times 0,0003} = \\ &= \frac{0,02 \sin 10^\circ 07' + 0,02 \cos 10^\circ 07'}{130 \times 0,0003} = \frac{0,004 + 0,020}{0,039} = \\ &= \frac{0,024}{0,039} = 1' \text{ (с округлением),} \end{aligned}$$

ВЕДОМОСТЬ РАЗБИВКИ КВАРТАЛА НА ПРОСТЫЕ КОСОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ.

№№ основных точек.	№№ вспомога- тельных точек.	Внутренние углы.	Румбы прежние.	Меры основ- ных линий.	Румбы новые.	Cos румб.	Вычисл.		Исправл.	Координаты x.		Δx	Вспомогательн. отрезки = $\frac{\Delta x}{\cos \alpha}$		Sin румб.	Вычисл.		Исправл.	Координаты y.		$y_n - y_n'$	$\frac{ y_{n-1} - y'_{n-1} + y_n - y'_n }{2}$	П л о щ а д и.							
							$\pm \Delta x$	$\pm \Delta x$		$\pm$	Основ- ных точек.		$\pm$	Вспом. точек.		$\pm$	Вспом. отрез- ков.		Вычи- сленн.	Исправл.			$\pm$	Основ- ных точек.	$\pm$	Вспомо- гательн. точек.	Вычисленные.		Исправленные.	
																											$\pm \Delta x_n \frac{ y_{n-1} - y'_{n-1} + y_n - y'_n }{2}$	$\pm$	$\pm \Delta x_n \frac{ y_{n-1} - y'_{n-1} + y_n - y'_n }{2}$	$\pm$
1	—	104°53'	ЮЗ : 85°14'	225,2	Запад	0	0	0	—	—	—	—	—	—	1,0000	225,20	225,20	—	0	—	—	0	0	0						
1'	—	107°42'	СЗ : 22°28'	235,1	СЗ : 17°42'	0,9527	+0,05 223,98	+224,03	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
—	6'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
2	—	152°21'	СВ : 5°11'	198,8	СВ : 9°57'	0,9850	+0,04 195,82	+195,86	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
3	—	169°42'	СВ : 15°29'	165,4	СВ : 20°15'	0,9382	+0,03 155,18	+155,21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
—	5'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
4	—	87°42'	ЮВ : 72°13'	230,7	ЮВ : 67°27'	0,3835	+0,04 88,47	—88,43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
5	—	116°37'	ЮВ : 8°50'	361,83	ЮВ : 4°04'	0,9975	+0,08 360,93	—360,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
—	3'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
—	2'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
6	—	161°03'	ЮЗ : 10°07'	130,2	ЮЗ : 14°53'	0,9665	+0,02 125,84	—125,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
Сумма	900°	—	—	1332	—	—	0,26	0	—	—	—	—	—	—	—	0,20	0	—	—	—	—	—	—	—						

и таким образом будем иметь, что исправленные от увязки мера и румб линии GA будут;

$$\frac{ЮЗ:10^{\circ} 08'}{130,18}.$$

Пусть, далее, поправки от увязки линии BC были:

$$\partial x = 0,05$$

и

$$\partial y = -0,03;$$

по формулам (1) § 44 имеем:

$$\begin{aligned} \partial l &= \partial x \cos r + \partial y \sin r = 0,05 \cos 22^{\circ} 28' + \\ &+ (-0,03) (-\sin 22^{\circ} 28') = 0,05 \cos 22^{\circ} 28' + \\ &+ 0,03 \sin 22^{\circ} 28' = 0,046 + 0,01 = 0,06 \text{ (с округлением),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial r &= \frac{-\partial x \sin r + \partial y \cos r}{l \sin 1'} = \\ &= \frac{-0,05 (-\sin 22^{\circ} 28') - 0,03 \cos 22^{\circ} 28'}{235,1 \times 0,0003} = \\ &= \frac{0,05 \sin 22^{\circ} 28' - 0,03 \cos 22^{\circ} 28'}{230 \times 0,0003} = \frac{0,019 - 0,028}{0,069} = \\ &= -\frac{0,009}{0,069} = 0 \text{ (с округлением),} \end{aligned}$$

и, следовательно, исправленные от увязки мера и румб линии BC будут:

$$\frac{СЗ:22^{\circ} 28'}{235,16};$$

исправленные углы трапеции I окажутся теперь такими:

$$\angle HGA = 75^{\circ} 06'$$

и

$$\angle BHG = 72^{\circ} 18'.$$

Опустим из точек A и B перпендикуляры AM и BN на линию GH и вычислим теперь высоту трапеции I, боковую сторону BH и отрезки GM и HN , по которым затем определим второе основание трапеции GH :

$$AM = GA \sin (HGA) = 130,18 \sin 75^{\circ} 06' = 125,81;$$

$$MG = GA \cos (HGA) = 130,18 \cos 75^{\circ} 06' = 33,47;$$

$$BH = \frac{BN}{\sin (BHG)} = \frac{125,81}{\sin 72^{\circ} 18'} = 132,06;$$

$$HN = BH \cos (BHG) = 132,06 \times \cos 72^{\circ} 18' = 40,15;$$

$$GH = AB + GM + HN = 225,2 + 33,47 + 40,15 = 298,82.$$

После этого имеем исправленный остаток линии BC равным $235,16 - 132,06 = 103,10$; неисправленные от увязки отрезки BH и HC будут заключать вместе поправку $-0,06$, и тогда на каждый из них будет причитаться поправка $-0,03$, и мы будем иметь:

$$BH = 132,06 - 0,03 = 132,03$$

и

$$HC = 103,10 - 0,03 = 103,07.$$

Площадь трапеции I будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{AB + GH}{2} \times BN &= \frac{225,2 + 298,82}{2} \times 125,81 = \\ &= 262,01 \times 125,81 = 32963 \text{ м}^2 = 3,2963 \text{ га.} \end{aligned}$$

Таким же образом можно затем произвести вычисления элементов всех остальных трапеций и треугольника V, и этим подготовительная работа для последующего проектирования участков в данном полигоне будет выполнена.

Но вместе с тем мы дадим другой способ решения поставленного в настоящем § вопроса, который будет близок по идее к предложенному способу разбивки на прямоугольные фигуры и иметь будет, подобно этому последнему, то суще-

ственное преимущество, что значительная часть работы будет производиться по методу нахождения и исправления приращений координат, на что у каждого исполнителя должны быть значительные навыки; сверх того вся вычислительная работа по предлагаемому методу является значительно более упорядоченной и самоконтролируемой.

Идея предлагаемого метода заключается в том, что мы изменяем направление меридиана и, следовательно, оси X и принимаем это направление таким, чтобы оно совпало с направлением высот трапеции I, II, III и IV, т.е. было бы перпендикулярным к направлению стороны AB ; и тогда после перечисления румбов всех линий нашего полигона они будут представлять собою, подобно тому, как это мы имели и в предыдущем §, углы боковых сторон трапеций и треугольника V с высотой, т.е. получатся углы NBH , GAM и пр.

Далее окажется, что исправленные приращения координаты x для линий CD , EF и GA квартала будут представлять собою высоты трапеций III и I и треугольника V ; что же касается высот других трапеций, то они легко могут быть получены из исправленных приращений линий полигона путем простых арифметических действий: например, высота трапеции II будет представлять собою разность исправленных приращений Δx линий 2-й и 7-й, а высота трапеции IV — разность исправленных приращений линий 4-й и 5-й.

Дабы производить нахождение высот более упорядоченно и с соблюдением необходимого контроля, будем получать их так же, как находятся приращения координат неизвестных линий, т.е. путем вычитания координат конца и начала этой линии; таким образом высота трапеции II получится как разность абсцисс пунктов C и G , а высота трапеции IV — как разность абсцисс пунктов F и D .

Переходя к вопросу о координатах пунктов нашего квартала, прежде всего отмечаем, что кроме 7 основных пунктов A , B , C , D , E , F и G образовалось при пересечении линий,

паралельных AB , со сторонами квартала 4 вспомогательных пункта: H , I , K и L .

Установим для нумерации пунктов квартала следующее правило:

Будем обозначать пункты, имеющие одинаковые координаты x , общим номером, а для отличия пункта 2-го от 1-го и пунктов вспомогательных точек от основных, номера их будем брать со знаком „прим“. Оставим далее в ведомости для вычисления приращений и координат при новом меридиане места для вспомогательных точек $6'$, $5'$, $3'$ и $2'$ (см. черт. 34-В), внеся затем против этих пунктов координаты основных точек 6, 5, 3 и 2.

Таким образом вычисляются высоты трапеций и треугольника; несколько сложнее обстоит дело с вычислением оснований трапеций и треугольника.

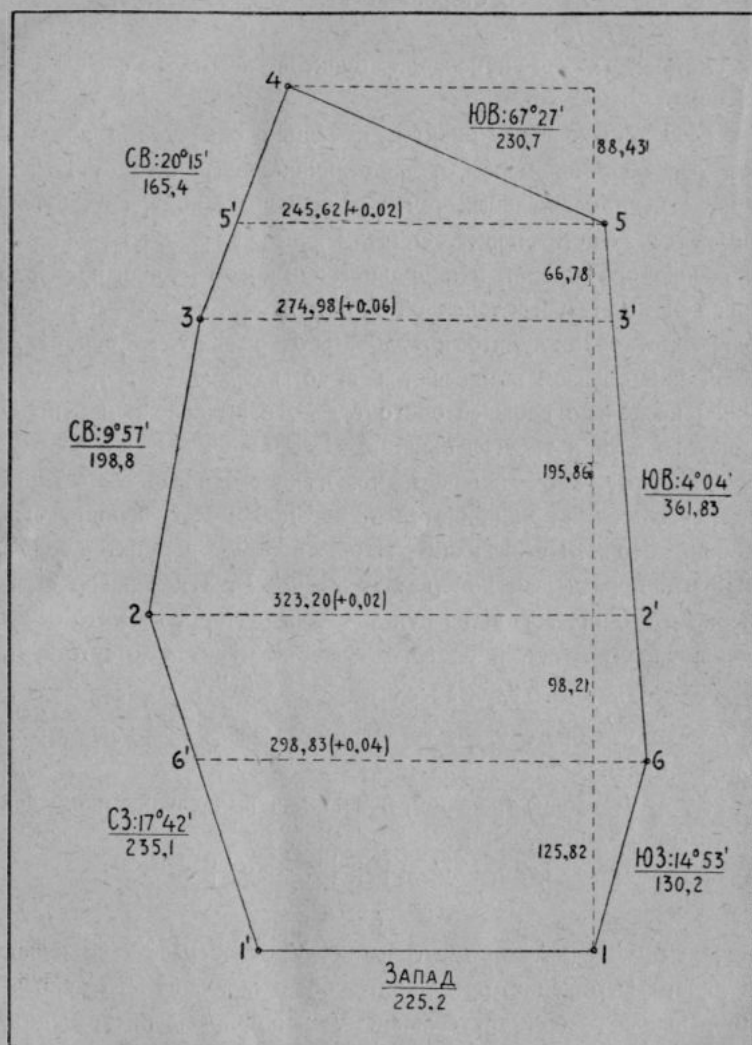
Из чертежа 34-В видно, что каждое основание трапеции и треугольника при принятой нумерации будет представлять собою абсолютное значение разности ординат y пунктов с одинаковым порядковым номером $|y_n - y_n'|$ ¹⁾, а для распространения этого правила и на пункт 4, для которого вместо основания имеем точку, и соответствующий пункт $4'$ отсутствует, условимся в таких случаях считать, что y_n' и y_n совпадают, и вместо y_n' брать y_n , и тогда разность $y_n - y_n'$ будет равняться нулю.

Зная основания трапеций, можно для вычисления площадей брать их средние линии

$$\frac{|y_{n-1} - y'_{n-1}| + |y_n - y_n'|}{2}$$

при чем $y_n' - y_n'$ для треугольника V будет равняться нулю, и данное выражение представит собою половину его основания, иначе говоря треугольник V мы приравняли трапеции, у которой одно основание равно нулю.

¹⁾ При этом мы условимся обозначать абсолютное значение разности $y_n - y_n'$ символом $|y_n - y_n'|$.



При таком обозначении будем иметь, что площади трапеций и треугольника будут равняться произведениям вида

$$\Delta x_n \frac{|y_{n-1} - y_{n-1}'| + |y_n - y_n'|}{2},$$

а общая площадь всего полигона — сумме таких произведений.

Сравнивая полученную этим способом площадь с площадью, вычисленной по координатам прежней системы, обнаружим некоторую небольшую разность, являющуюся следствием иной увязки, иных округлений и пр.; распределяя эту разность пропорционально полученным площадям, находим исправленные площади трапеций и треугольника.

Вычисление ординат вспомогательных точек 6', 5', 3' и 2' сопряжено с некоторым осложнением, так как требуется предварительно вычислять те отрезки, на которые стороны квартала делятся вспомогательными точками, т.-е. в нашем примере отрезки между пунктом 6' и пунктами 1' и 2, пунктом 5' и пунктами 3 и 4, а также все три отрезка, на которые разбита линия мерою 361,83.

Так как соответствующее каждому из указанных отрезков приращение Δx , являющееся высотой трапеции или треугольника, нами уже определено ранее, то длина каждого отрезка может быть найдена по его проекции Δx путем деления величины ее на $\cos r$, где r есть величина соответствующего румба при новом меридиане, т.-е. имеем:

$$l = \frac{x}{\cos r}.$$

После того как определится длина всех отрезков и произведено будет их исправление, так чтобы они в сумме составляли линии квартала, можно будет произвести вычисления

Вычисления рекомендуем располагать в форме предлагаемой ведомости, как это сделано для приведенного примера.

В дальнейшем при рассмотрении вопроса о разбивке квартала на участки без помощи арифмометра нам необходимо будет знать, на какую длину вычисленные нами основания трапеций и треугольника, заключающие в себе поправку на увязку квартала, отличаются от той величины их, которую получили бы мы для каждой из них, если бы просто вычислили ее по соседнему основанию трапеции, расположенному ближе к началу координат, неисправленным от увязки боковым сторонам и углам их с высотой трапеции; другими словами нам необходимо будет знать величину этой поправки с ее знаком. Поправка эта складывается из двух частей, составляющих исправление δu по обоим боковым сторонам.

Но при этом мы должны различать, вводит ли это исправление δu увеличение или уменьшение длины следующего основания. Рассмотрим трапецию I. Из чертежа видно, что она является расширяющейся, из чего заключаем, что увеличение абсолютной величины Δu как для линии BH , так и для линии GA составит положительную поправку для второго основания трапеции HG , по ведомости же находим, что для линии BH вводится увеличение абсолютной величины приращения Δu на 0,02, а для линии GA также на 0,02, что даст общее увеличение длины GH от увязки на 0,04 м. Аналогичным образом найдем, что для трапеции II такое же увеличение будет

$$0,01 + 0,01 = 0,02 \text{ м,}$$

для трапеции III:

$$0,03 + 0,03 = 0,06 \text{ м}$$

и для трапеции IV:

$$0,01 + 0,01 = 0,02 \text{ м.}$$

Величины этих поправок покажем на чертеже 34-В при длинах оснований трапеций в скобках.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРАПЕЦИЙ.

§ 55. Общие сведения.

Когда разбитый на простые фигуры квартал предназначается для проектирования участков, вопросы этого проектирования сводятся к получению прямоугольника или трапеции заданной площади. Проектирование прямоугольника является делом совершенно простым, но проектирование трапеции, представляя собою операцию, повторяющуюся при каждой землеустроительной работе много раз, требует от нас особого внимания, так как даже самое незначительное упрощение в этом проектировании дает уже заметную экономию времени в работе.

Нами будут рекомендованы два метода:

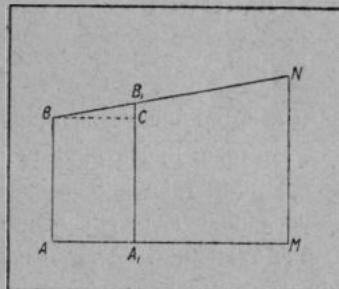
1) *предварительного геометрического проектирования* и 2) *метод вычисления второго основания трапеции по формуле*; что же касается других методов, то мы остановимся на характеристике особенностей лишь двух из них, как более употребительных на практике.

Первый из рекомендуемых нами методов будет иметь, в несколько измененном виде, приложение при проектировании у живых урочищ, а второй во всех остальных случаях.

§ 56. Способ предварительного геометрического проектирования.

Пусть требуется нам вправо от линии AB (см. черт. 35) трапеции $ABNM$ спроектировать трапецию ABB_1A_1 заданной

площади. Трапеция $ABNM$ нанесена на проектный план, и с точностью, соответствующей масштабу плана и степени тщательности его исполнения, мы можем определять по этому плану все те линии, в которых у нас встретится надобность; но при этом мы будем помнить, что все стороны трапеции $ABNM$, и в том числе сторона AB , получились у нас вычислением при разбивке полигона на простые фигуры, и этими



Черт. 35.

данными мы можем воспользоваться при проектировании трапеции ABB_1A_1 .

Произведем предварительное проектирование так называемым геометрическим способом, с принятием во внимание точной величины линии AB ; в полученной трапеции ABB_1A_1 мы принимали AA_1 и A_1B_1 равными той или иной мере, но при

этом нами была допущена более или менее значительная погрешность вследствие того, что определение длины этих линий мы производили грубыми способами — по графическим данным.

Поэтому, не ограничиваясь полученным результатом, произведем вычисление спроектированной трапеции тригонометрическим путем, принимая для этого AA_1 равной той мере, которая у нас получилась по масштабу, и определяя по ней BB_1 по формуле:

$$BB_1 = \frac{AA_1}{\cos(CBB_1)},$$

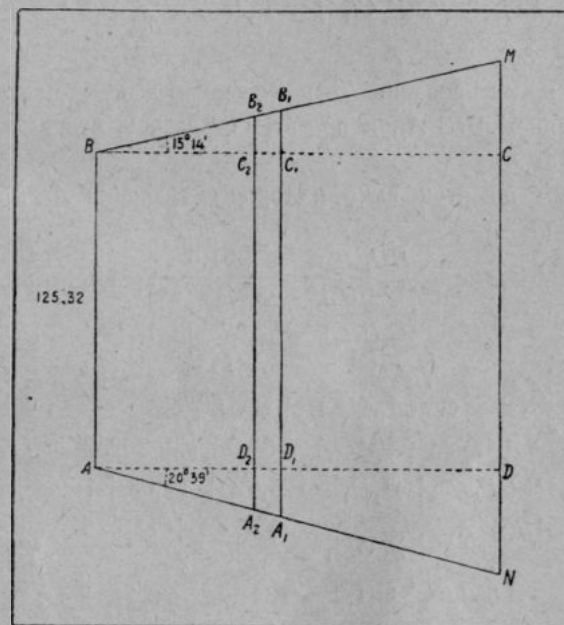
и B_1C по формуле:

$$B_1C = BB_1 \sin(CBB_1).$$

После этого мы получим длину A_1B_1 , согласованную с величиной высоты AA_1 , и затем можем вычислить площадь трапеции ABB_1A_1 , пользуясь этими данными, по формуле:

$$Q = \frac{(AB + A_1B_1)AA_1}{2}.$$

Полученная площадь даст некоторую разницу с площадью подлежащей проектированию трапеции, и эту разницу мы допол-



Черт. 36

нительно спроектируем при линии A_1B_1 , в ту или иную сторону, прямоугольником, высоту которого принимаем равной A_1B_1 , а основание получаем делением разницы в площади на эту высоту.

После этого вводим полученную таким образом поправку в высоту трапеции ABB_1A_1 и, пользуясь исправленной высотой,

определяем, подобно предыдущему, боковую сторону и затем второе основание трапеции.

По тому же принципу, но несколько иначе, проводим вычисления и для случая косоугольной трапеции. Применим для большей наглядности наши рассуждения к конкретному примеру.

Пример. Требуется спроектировать вправо от линии AB трапецию площадью $0,729 \text{ га} = 7290 \text{ м}^2$, при чем

$$AB = 125,32 \text{ м}, \angle CBM = 15^\circ 14' \text{ и } \angle NAD = 20^\circ 39'$$

(см. черт. 36).

При проектировании геометрическим способом получили мы трапецию ABB_1A_1 , и при этом оказалось, что высота AD_1 равна $51,5 \text{ м}$.

Найдем по этой высоте стороны трапеции ABB_1A_1 и ее площадь Q .

$$BB_1 = \frac{BC_1}{\cos(C_1BB_1)} = \frac{51,5}{\cos 15^\circ 14'} = 53,37 \text{ м};$$

$$B_1C_1 = BB_1 \sin(C_1BB_1) = 53,37 \sin 15^\circ 14' = 14,03;$$

$$AA_1 = \frac{AD_1}{\cos(A_1AD_1)} = \frac{51,5}{\cos 20^\circ 39'} = 55,03;$$

$$A_1D_1 = AA_1 \sin(A_1AD_1) = 55,03 \sin 20^\circ 39' = 19,41;$$

$$A_1B_1 = AB + B_1C_1 + A_1D_1 = 125,32 + 14,03 + 19,41 = 158,76;$$

$$Q = \frac{AB + A_1B_1}{2} \times AD_1 = \frac{125,32 + 158,76}{2} \times 51,5 = \\ = 142,04 \times 51,5 = 7315 \text{ м}^2 = 0,7315 \text{ га}.$$

Таким образом нами спроектирована площадь, превышающая заданную на $7315 \text{ м}^2 - 7290 \text{ м}^2 = 25 \text{ м}^2$.

Отсекая эту площадь прямоугольником с высотой A_1B_1 в $158,76 \text{ м}$, получим основание его равным $\frac{25}{158,76} = 0,16 \text{ м}$, и тогда будем иметь исправленную высоту трапеции

$$AD_2 = AD_1 - D_2D_1 = 51,50 - 0,16 = 51,34,$$

а по ней найдем уже остальные элементы этой трапеции:

$$BB_2 = \frac{AD_2}{\cos(C_2BB_2)} = \frac{51,34}{\cos 15^\circ 14'} = 53,21,$$

$$B_2C_2 = BB_2 \sin(C_2BB_2) = 53,21 \sin 15^\circ 14' = 13,98,$$

$$AA_2 = \frac{AD_2}{\cos(A_2AD_2)} = \frac{51,34}{\cos 20^\circ 39'} = 54,86,$$

$$A_2D_2 = AA_2 \sin(A_2AD_2) = 54,86 \sin 20^\circ 39' = 19,35,$$

$$A_2B_2 = AB + B_2C_2 + A_2D_2 = 125,32 + 13,98 + \\ + 19,35 = 158,65;$$

после чего определяем для проверки вычисления заданную площадь Q :

$$Q = \frac{(AB + A_2B_2) AD_2}{2} = \frac{(125,32 + 158,65) 51,34}{2} = \\ = 283,97 \times 25,67 = 7290 \text{ м}^2.$$

Переходя к характеристике этого метода, прежде всего остановимся на его точности.

Источником погрешности в полученной при проектировании площади служит здесь прежде всего то обстоятельство, что мы принимали трапецию $A_2B_2B_1A_1$ за прямоугольник, но погрешность от этого получается ничтожной, так как при высоте трапеции D_1D_2 , равной, например, метру, разность между линиями A_1B_1 и A_2B_2 при встречающейся на практике величине углов CBM и NAD обычно может достигать величины 1 м , и тогда разность между средней линией трапеции $A_2B_2B_1A_1$ и линией A_1B_1 будет $\frac{1}{2} \text{ м}$, что даст в площади трапеции $A_2B_2B_1A_1$ разницу в $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ м}^2$.

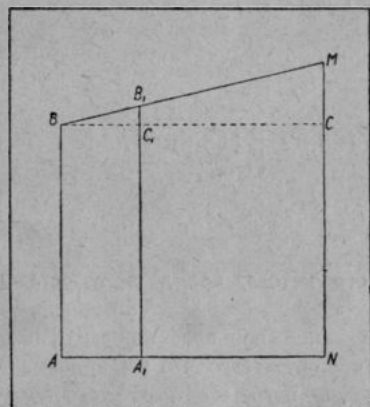
Так как, далее, углы CBM и NAD , при встречающихся на практике случаях проектирования, обычно невелики и никогда не бывают близки к 90° , то при делении на $\cos$ этих углов для получения боковых сторон проектируемой трапеции мы не вводим грубой погрешности (см. § 28), и в смысле точности этот способ проектирования не заключает в себе каких-либо существенных недостатков; но недостатки этого способа обнаруживаются в том, что при применении его необходимо иметь план того квартала, в котором производится проектирование, чего, как увидим далее, не требуется при применении вто-

рого рекомендуемого нами способа, и сверх того на все вычислительные манипуляции затрачивается много времени, вследствие чего рекомендуем его применять, в соответственно измененном виде, лишь при проектировании у живых урочищ, о чем подробно рассмотрен будет вопрос впереди.

§ 57. Вывод формул для вычисления второго основания трапеции.

При решении этой задачи может представиться два случая:

1) когда трапеция прямоугольная и 2) когда трапеция косо-



Черт. 37.

угольная; каждый из этих случаев в свою очередь распадается на два подслучая: а) когда трапеция, как на чертеже 37, расширяющаяся и б) когда она сужающаяся.

Случай 1 а. Пусть мы имеем прямоугольную расширяющуюся трапецию $ABMN$, в которой от линии AB нужно спроектировать заданную площадь Q трапецией ABB_1A_1 ; сторона AB и угол CBM даны.

Введем следующие обозначения: сторону AB , являющуюся первым основанием проектируемой трапеции, будем обозначать через a , искомую сторону A_1B_1 , являющуюся вторым основанием трапеции, через a' , угол CBM , который составляют боковые стороны трапеции AN и BM , через α и высоту трапеции AA_1 через h ; тогда будем иметь:

$$B.C_1 = a' - a,$$

$$h = BC_1 = B_1C_1 \operatorname{ctg} (C_1BB_1) = (a' - a) \operatorname{ctg} \alpha,$$

т.е. высота может быть выражена через известные нам величины a и α и неизвестную величину a' .

Далее имеем формулу для площади Q :

$$Q = \frac{a + a'}{2} h = \frac{(a + a')(a' - a) \operatorname{ctg} \alpha}{2} = \frac{(a'^2 - a^2) \operatorname{ctg} \alpha}{2},$$

или

$$2Q = (a'^2 - a^2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

В этом равенстве нам известны все величины кроме a' , которое можно легко определить, решая уравнение:

$$a'^2 - a^2 = \frac{2Q}{\operatorname{ctg} \alpha},$$

из которого получаем:

$$a'^2 - a^2 = 2Q \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

и затем:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha} \quad (1').$$

Случай 1 б. Этот случай можем иметь, считая, что проектируется трапеция ABB_1A_1 влево от линии A_1B_1 , и тогда A_1B_1 будет известной, а AB искомой, и из формулы (1) будем иметь:

$$a = \sqrt{a'^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha}.$$

В этой формуле является неудобным противоречие с принятым обозначением, так как данное нам основание A_1B_1 обозначено через a' , а искомое через a ; заменяя для устранения этого неудобства a на a' и наоборот, — получим для сужающейся прямоугольной трапеции:

$$a' = \sqrt{a^2 - 2Q \operatorname{tg} \alpha}. \quad (2)$$

Принимая угол α положительным для случая расширяющейся трапеции и отрицательным для сужающейся, будем

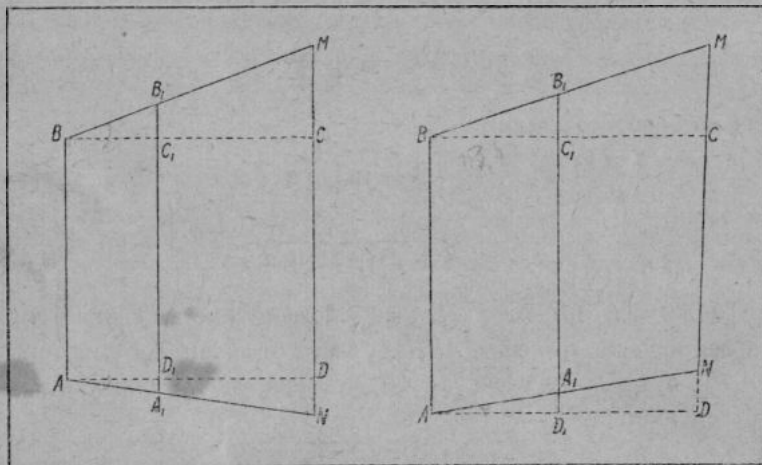
¹⁾ После замены h его значением.

иметь в формуле (2) — α , вместо a и тогда обе формулы можно соединить в одну:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha},$$

где α будет алгебраической величиной.

Случай 2а изображен на чертеже 38 (при чем чертеж 38-а изображает случай, когда трапеция расширяется



Черт. 38-а.

Черт. 38-б.

с обеих сторон, а чертеж 38-б, — когда она с одной стороны расширяется, а с другой сужается). Оставляя прежние обозначение a для угла между боковыми сторонами трапеции, введем обозначения для углов CBM и NAD , являющихся углами боковых сторон с высотой, через β и γ , при чем условимся обозначать через β тот из этих углов, который будет больше по своей абсолютной величине; для оснований трапеции и ее высоты оставим обозначения прежние.

Приступим к выведению формулы для определения 2-го основания трапеции a' ; по обоим случаям чертежа 38 имеем:

$$B_1C_1 = BC_1 \operatorname{tg} (C_1BB_1) = h \operatorname{tg} \beta$$

и

$$A_1D_1 = AD_1 \operatorname{tg} (A_1AD_1) = h \operatorname{tg} \gamma,$$

и затем для чертежа 38-а после сложения этих равенств по членно:

$$B_1C_1 + A_1D_1 = h (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma),$$

или по замене

$$B_1C_1 + A_1D_1 \text{ на } a' - a:$$

$$a' - a = h (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma),$$

откуда можно определить h :

$$h = \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma},$$

после чего напомним формулу для площади Q :

$$Q = \frac{a' + a}{2} h = \frac{a' + a}{2} \cdot \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{a'^2 - a^2}{2 (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)},$$

откуда получаем:

$$a'^2 - a^2 = 2Q (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma).$$

В этом уравнении все величины кроме a' известны, и по ним можно определить a' :

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}. \quad (3)$$

Переходя к случаю черт. 38-б, произведем почленное вычитание равенств (*) настоящего §, после чего получим:

$$B_1C_1 - D_1A_1 = h (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma),$$

или, по замене $B_1C_1 - D_1A_1$ на равную ей величину $a' - a$ имеем:

$$a' - a = h (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma),$$

¹⁾ После замены h его значением.

откуда получаем значение для h :

$$h = \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma},$$

после чего напишем формулу для площади Q :

$$Q = \frac{a' + a}{2} h = \frac{a' + a}{2} \cdot \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma} = \frac{a'^2 - a^2}{2(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)},$$

откуда имеем:

$$a'^2 - a^2 = 2Q(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)$$

и затем:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)}. \quad (4)$$

Принимая углы β и γ положительными только для случая, когда они дают отклонение в сторону расширения трапеции, будем считать угол γ для черт. 38-б отрицательным, и после замены в формуле (4) γ на $-\gamma$ получим формулу (3), где угол γ будет уже иметь алгебраическое значение.

Случай 2б. Оставляем для случая 2б все те обозначения, которые введены были нами для случая 2а; тогда подобно тому, как и для случая 2а, будем иметь (см. черт. 39-а):

$$\begin{aligned} C_1 B_1 &= BC_1 \operatorname{tg}(B_1 B C_1) = h \operatorname{tg} \beta, \\ A_1 D_1 &= AD_1 \operatorname{tg}(D_1 A A_1) = h \operatorname{tg} \gamma, \end{aligned}$$

или после почленного сложения этих равенств:

$$C_1 B_1 + A_1 D_1 = h(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma),$$

и после замены $C_1 B_1 + A_1 D_1$ на равную ей величину $a - a'$ будем иметь:

$$a - a' = h(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma),$$

откуда получим:

$$h = \frac{a - a'}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}.$$

¹⁾ После замены h его значением.

Напишем теперь выражение для площади Q :

$$Q = \frac{a + a'}{2} \cdot h = \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{a - a'}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{a^2 - a'^2}{2(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)},$$

откуда имеем:

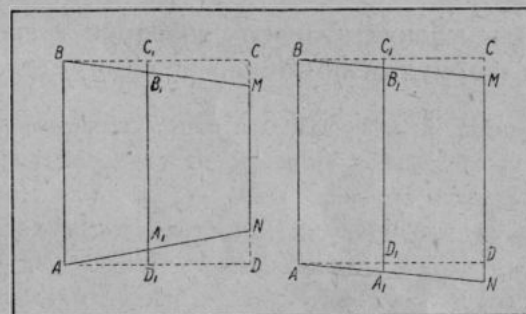
$$a^2 - a'^2 = 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)$$

и

$$a' = \sqrt{a^2 - 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}. \quad (5)$$

таким же образом найдем для случая черт. 39-б:

$$a' = \sqrt{a^2 - 2Q(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)}. \quad (6)$$



Черт. 39-а.

Черт. 39-б.

Принимая же указанное выше правило относительно знака углов β и γ , будем иметь углы β и γ для случая черт. 39-а оба отрицательными, а для случая черт. 39-б: β отрицательным и γ положительным. Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$ и γ на $-\gamma$, а в формуле (6) β на $-\beta$, получим формулу (3) где β и γ будут величинами алгебраическими.

Таким образом для случая 1 имеем формулу:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha} \quad (7)$$

¹⁾ После замены h его значением.

а для случая 2:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}, \quad (8)$$

где углы β и γ будут положительными в том случае, если дают отклонение в сторону расширения трапеции и отрицательными — в обратном случае.

В дополнение к изложенным формулам (7) и (8) заметим себе для дальнейшего, что второй член подкоренного выражения, как видно из формул (3) и (4), (5) и (6), будет положительным для расширяющейся трапеции и отрицательным для сужающейся.

§ 58. Вычисление второго основания трапеции по формулам помощью арифмометра.

На примере 5 § 2 был дан метод вычисления второго основания прямоугольной трапеции при помощи арифмометра.

Отрицательной стороной этого метода была его недостаточно высокая точность, так как $\operatorname{tg} \alpha$ вычислялся делением $\sin \alpha$ на $\cos \alpha$, и при этом сказывалось влияние погрешностей и $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$; сверх того угол α представляет собою не исправленную от увязки хода величину, заключающую в себе вследствие этого погрешность по сравнению с величинами условно-точными, достигающую иногда нескольких минут.

Представляется возможным найти величину $\operatorname{tg} \alpha$ по исправленным от увязки данным и притом с любой степенью точности, и этим будет введено значительное усовершенствование метода § 2.

При разложении квартала на простые фигуры мы производили исправление приращений в новой координатной системе; и линии (см. черт. 37) AB и MN , представляя собою ординаты у точек B и M , точно так же как линия AN , представляющая собою исправленное приращение Δx , являются данными условно-точными.

$\operatorname{tg} \alpha$ можно определить по этим данным; действительно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MC}{BC} = \frac{MN - AB}{AN}; \quad (1)$$

линии MN , AB и AN нам известны, и по ним можно вычислить величину $\operatorname{tg} \alpha$ с той же легкостью, что и посредством деления величины $\sin \alpha$ на $\cos \alpha$.

При этом делении мы можем получить сколько угодно точных знаков, но в дальнейшем будет показано, что можно ограничиться пятью знаками для $\operatorname{tg} \alpha$, и в результате вычислений получится a' с достаточно высокой точностью.

Переходя к случаю косоугольной трапеции, дадим способ находить с любым количеством точных десятичных знаков $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ для углов β и γ , представляющих собою алгебраические величины.

Действительно, из черт. 38-а мы имеем:

$$MC = BC \operatorname{tg} (CBM) = BC \operatorname{tg} \beta$$

и

$$DN = AD \operatorname{tg} (NAD) = BC \operatorname{tg} \gamma,$$

сумма полученных сложением этих равенств получаем:

$$MC + DN = BC (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma),$$

или после замены

$$MC + DN \text{ на } MN - AB:$$

$$MN - AB = BC (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma);$$

после этого находим:

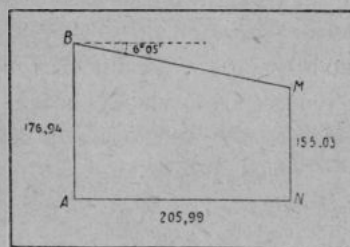
$$\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{MN - AB}{BC}. \quad (2)$$

Здесь MN , AB и BC , представляя собою исправленные увязкой данные получившейся при разложении квартала простой фигуры, будут величинами условно-точными, и вычисленная

по этим величинам сумма $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ может быть получена с любой точностью, в зависимости от числа десятичных знаков, но, подобно предыдущему, ограничимся пятью точными знаками.

Заметим при этом, что таким путем можно вычислить $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ значительно скорее, чем непосредственно по $\sin$ и $\cos$.

Представляется возможность обобщить формулы (1) и (2) настоящего § и вывести следующее общее правило:



Черт. 40.

Исправленные от увязки хода $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ могут быть вычислены с любой точностью путем деления разности второго и первого оснований получившейся после разложения полигона на простые фигуры трапеции на ее высоту.

Что же касается знака этих величин $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$,

то, как было выше показано, они будут положительными для расширяющейся и отрицательными для сужающейся трапеции.

Применим теперь изложенный метод на практике.

Пример 1. Требуется из имеющей форму прямоугольной трапеции 3-й фигуры § 53 спроектировать от ее начала трапецией же площадь в $0,9432 \text{ га} = 9432 \text{ м}^2$; числовые данные необходимых элементов этой фигуры, извлеченные из ведомости разбивки полигона на простые фигуры § 53, приведены на чертеже 40. Найти второе основание проектируемой трапеции.

Приступим к выполнению вычислений:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN - AB}{AN} = \frac{155,03 - 176,94}{205,99} = -\frac{21,91}{205,99} = -0,10636.$$

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{176,94^2 + 2 \times 9432 (-0,10636)} = \sqrt{176,94^2 - 18864 \times 0,10636} = \sqrt{29301,3886} = 171,18 \text{ м.}$$

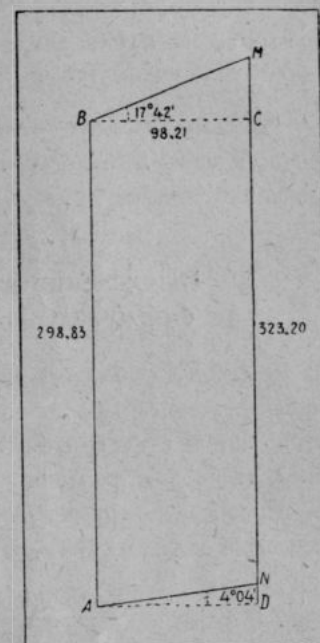
Пример 2. Требуется из имеющей форму косоугольной трапеции простой фигуры № 2, § 54, спроектировать от ее начала трапецией же площадь в $0,56 \text{ га} = 5600 \text{ м}^2$. Числовые данные для элементов этой фигуры, извлеченные из ведомости разбивки на простые фигуры § 54, приведены на чертеже 41.

Определяем прежде всего алгебраическую сумму $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{MN - AB}{BC} = \\ &= \frac{323,20 - 298,83}{98,21} = \\ &= \frac{24,37}{98,21} = 0,24814, \end{aligned}$$

и затем находим величину a' :

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \sqrt{298,83^2 + 2 \times 5600 \times 0,24814} = \sqrt{92078,5369} = 303,44 \text{ м.}$$



Черт. 41.

Заканчивая рассмотрение вопроса о вычислении второго основания трапеции при помощи арифмометра, укажем, что при проектировании трапеций для разбивки полигона на кварталы — предварительной разбивки на простые фигуры не производится, и поэтому в таких случаях вычислить величину $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ изложенным здесь методом представляется возможным, и в этом случае мы будем применять метод вычисления величины $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$.

Но при этом для уточнения результата мы можем брать $\sin$ и $\cos$ по столбцу 2-му таблиц Гаусса, а еще лучше по столбцу 3-му, так как в этом случае имеем $\frac{30 \sin \alpha}{30 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. множитель 30 сокращается, и деления на 30 для получения натуральных величин $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ производить не требуется.

Что же касается величины углов α , β и γ , то таковая во всех случаях будет браться при этих вычислениях исправленной от увязки.

§ 59. Вычисление второго основания трапеции по формулам без помощи арифмометра.

В § 29 дан был метод вычисления второго основания a' проектируемой трапеции для случая, когда трапеция эта прямоугольная, и в настоящем § рассмотрим поэтому лишь случай вычисления для трапеции косоугольной.

Преобразуем прежде всего сумму тангенсов, выразив ее через $\sin$ и $\cos$ углов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \\ &= \frac{\sin (\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma}. \end{aligned}$$

Здесь $\beta + \gamma$ есть угол между боковыми сторонами косоугольной трапеции; обозначив его, по аналогии с трапецией прямоугольной, через α , будем иметь:

$$\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}. \quad (1)$$

Эта формула остается правильной для обоих знаков величины углов α , β и γ , в чем можно убедиться, производя вывод ее для всех случаев § 57.

В самом деле, преобразуем, например, $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma$ (см. черт. 38-б.):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \\ &= \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma}; \end{aligned}$$

а так как для этого случая $\beta - \gamma$ есть угол между боковыми сторонами трапеции, который мы обозначили через α , то будем попрежнему иметь:

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}. \quad (2)$$

$\cos \beta$ и $\cos \gamma$ во всех случаях будут положительны, а так как α будет положителен для расширяющейся и отрицателен для сужающейся трапеции, то $\sin \alpha$ будет сохранять знак второго члена подкоренного выражения § 57.

Формула (8) § 57 переписывается поэтому для всех случаев таким образом:

$$a' = \sqrt{a^2 + \frac{2Q \sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}}. \quad (3)$$

Вычисление величины a' для трапеции косоугольной даст лишь незначительное усложнение по сравнению с вычислением той же величины для трапеции прямоугольной, в чем мы и убедимся на прилагаемом примере.

Пример. Решим вопрос примера 2-го предыдущего §. Имеем формулу:

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{a^2 + \frac{2Q \sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}} = \\ &= \sqrt{298,83^2 + \frac{2 \times 5600 \sin (17^\circ 42' - 4^\circ 04')}{\cos 17^\circ 42' \cos 4^\circ 04'}} = \\ &= \sqrt{298,83^2 + \frac{11200 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42' \cos 4^\circ 04'}} = \\ &= \sqrt{298,83^2 + 10 \frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42' \cos 4^\circ 04'}}. \end{aligned}$$

Произведем сначала вычисление $1120 \sin 13^\circ 38'$.

$$1120 \sin 13^\circ 38' = (3 \times 300 + 200 + 20) \sin 13^\circ 38' = \\ = 3 \times 70,71 + 47,14 + 4,71 = 263,98.$$

Затем найдем величину $\frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42'}$:

$$\frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42'} = \frac{263,98}{\cos 17^\circ 42'} = \frac{190,53 + 66,69 + 6,67 + 0,09}{\cos 17^\circ 42'} = \\ = \frac{277,09 \cos 17^\circ 42'}{\cos 17^\circ 42'} = 277,09.$$

Вычислим потом величину $\frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42' \cos 4^\circ 04'}$:

$$\frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42' \cos 4^\circ 04'} = \frac{\frac{1120 \sin 13^\circ 38'}{\cos 17^\circ 42'}}{\cos 4^\circ 04'} = \\ = \frac{277,09}{\cos 4^\circ 04'} = \frac{199,50 + 69,82 + 6,98 + 0,79}{\cos 4^\circ 04'} = \\ = \frac{277,79 \cos 4^\circ 04'}{\cos 4^\circ 04'} = 277,79.$$

После этого будем иметь:

$$d' = \sqrt{298,83^2 + 10 \times 277,79} = \sqrt{298,83^2 + 2777,9} = \\ = \sqrt{100^2 \left(\frac{298,83^2}{100^2} + \frac{2777,9}{100^2} \right)} = \\ = 100 \sqrt{2,9883^2 + 0,2777_9} = \\ = 100 \sqrt{8,9281 + 0,0018 + 0,2777_9} = 100 \sqrt{9,2076_9} = \\ = 100 \sqrt{9,2052 + 0,0024_9} = 100 \times 3,0344 = 303,44,$$

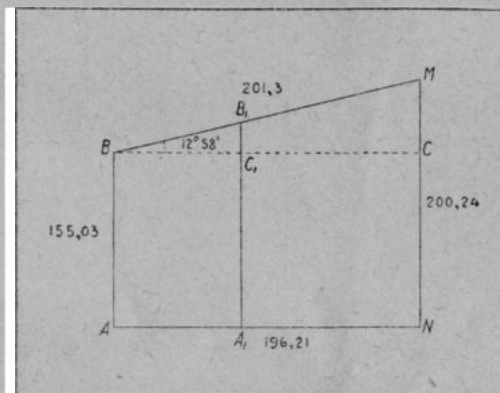
где вычисление произведено помощью таблиц квадратов чисел.

Замечание. В том случае, когда в распоряжении исполнителя имеются таблицы для умножения и деления чисел, определение величины $\lg a$ или $\lg \beta + \lg \gamma$ может быть произведе-

дено тем методом, который указан нами для вычислений при помощи арифмометра, а вся остальная работа будет и в этом случае выполняться по таблицам квадратов чисел.

§ 60. Исправление вычисленной величины второго основания трапеции для согласования с увязанными данными.

В настоящем § нам необходимо будет рассмотреть лишь вопрос проектирования трапеции без помощи арифмометра.



Черт. 42.

так как для этого случая, когда проектирование производится при его помощи, таковой поправки вводить при принятом методе определения $\lg a$ и $\lg \beta + \lg \gamma$ не требуется.

Начнем с конкретного примера.

Пример 1. Пусть необходимо нам спроектировать без помощи арифмометра от имеющей форму прямоугольной трапеции 4-й по порядку простой фигуры, получившейся после разбивки квартала § 53, заданную площадь, например,

$$2,1592 \text{ га} = 21592 \text{ м}^2.$$

Элементы этой фигуры показаны на черт. 42.

и таким образом исправленная для уничтожения влияния увязки величина a' будет $184,33 + 0,02 = 184,35$ м.

По методу этого примера можно вычислять поправку на увязку во всех случаях, независимо от того, будет ли проектируемая трапеция ABB_1A_1 , находиться при начале трапеции $ABMN$, или в конце, или где-либо по середине, и единственная деталь требует некоторого навыка на практике, это определение знака поправки. Но нетрудно видеть, что этот знак всегда будет положительным, когда знак поправки δu совпадает со знаком u и отрицательной в обратном случае.

ПРИМЕР 2. Найдем поправку на вычисленную величину примера 2 предыдущего §.

В предвидении такого рода необходимости мы в § 54 указали изменение всех оснований трапеций, являющихся простыми фигурами, от увязки квартала; и для трапеции, от которой проектируется заданная площадь в примере 2-м предыдущего §, таковая поправка на 2-е основание, как видно из черт. 34-б, составляет $+0,02$ м.

Так как, далее, разность между основаниями спроектированной трапеции составляет $303,44 - 298,83 = 4,61 = 5$ м (с округлением), а разность между основаниями всей трапеции (черт. 41) составляет $323,20 - 298,83 = 24,37 = 25$ м (с округлением) то поправка наша на вычисленную величину второго основания проектируемой трапеции должна составить $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ от общей поправки в 0,02, и таким образом оказывается, что поправка эта менее 0,005, и вводить ее не приходится.

Обобщая приведенные примеры, заключаем, что в тех случаях, когда невязка в полигоне была относительно незначительной и когда в то же время трапеции, получившиеся разбивкой этого полигона на простые фигуры, подлежат при проектировании разделению на 2 и не более 3-х частей, и не будет поэтому иметь место накопление погрешностей

на величине 2-го основания при проектировании 2-й, 3-й и т. д. трапеции из данной фигуры — можно отказаться совсем от введения указанной поправки, но при этом, во избежание накопления погрешностей, необходимо проектировать одну трапецию от начала фигуры, вторую от конца, а третья получится тогда как остаток фигуры между первыми двумя, и хотя в обоих ее основаниях и будут заключаться некоторые погрешности на увязку квартала, но при небольшой относительно невязке этого квартала они не будут существенными и ими можно пренебречь.

Во всех же остальных случаях проектирования трапеций без помощи арифмометра поправку на величину вычисленного основания следует вводить, но при этом, дабы не пришлось искать в ведомостях разбивки на простые фигуры, какое изменение основания трапеции при увязке произошло, следует на составленном при разбивке на простые фигуры чертеже отмечать против каждого основания трапеции изменение этого основания от увязки боковых сторон трапеции, считая по направлению от начала координат, что нами в § 54 и выполнено.

В тех же случаях, когда при проектировании трапеции без помощи арифмометра предварительного разложения полигона на простые фигуры не производилось, мы будем иметь дело с исправленными от увязки полигона данными, и во введении поправки в вычисленную величину второго основания трапеции на увязку полигона надобности не будет.

§ 61. О точности вычисления второго основания трапеции по формулам.

Посмотрим, какова точность определения второго основания трапеции, исходя из примера 2-го § 58, и найдем таковую отдельно для случаев, когда проектирование производится при помощи арифмометра, и когда таковое выполняется непосредственно по таблицам Гаусса и таблицам квадратов чисел.

Случай 1. При вычислении a' помощью арифмометра по формуле:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)},$$

числа a и Q у нас будут точными, и источниками погрешностей явятся приближенные значения чисел $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$, взятого с округлением, и, сверх того, округление величины корня.

Если мы будем брать $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ с пятью точными знаками, то граница его погрешности от округления будет меньше половины единицы последнего знака, т.е. будем иметь равенство:

$$E_{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = 0,000\,005.$$

Граница погрешности всего подкоренного числа определится тогда при a точном следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{[a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)]} &= E_{2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \\ &= (\text{см. § 24}) 2Q E_{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = 2Q \times 0,000\,005, \end{aligned}$$

откуда будем иметь:

$$E_{[a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)]} = 0,00001\,Q \quad (1)$$

и при

$$Q = 5600 \text{ м}^2;$$

$$E_{[a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)]} = 0,00001 \times 5600 = 0,056.$$

После этого можно определить границу погрешности a' по формуле § 29, принимая во внимание, что a' находится с 2 десятичными знаками и $E_{2a'} = 0,005$:

$$\begin{aligned} E_{a'} &= E_{1a'} + E_{2a'} = \frac{E_{[a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)]}}{2a'} + 0,005 = \\ &= \frac{0,00001\,Q}{2a'} + 0,005, \end{aligned}$$

откуда находим общую формулу:

$$E_{a'} = 0,000\,005 \frac{Q}{a'} + 0,005, \quad (2)$$

а для рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned} E_{a'} &= \frac{0,056}{2 \times 303,44} + 0,005 = \\ &= (\text{с округлением}) 0,0001 + 0,005 = 0,0051. \end{aligned}$$

Для данного частного случая определение величины a' произведено, таким образом, с точностью, близкой к точности до половины сотой доли метра, а граница погрешности от вычисления величины a' значительно меньше границы погрешности от округления a' , вследствие чего для этого случая можно было бы взять $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ с 4 десятичными знаками, вместо 5; но в тех случаях, когда отношение $\frac{Q}{a'}$ будет большим, чем в данном примере, величина $E_{1a'}$ возрастает. При принятом по землеустройству предельном отношении между длиной и шириной участков 5:1, величина $\frac{Q}{a'}$ не может быть особенно большой, и при $\frac{Q}{a'}$ равном, например, 1000, что на практике встречается уже редко, будем иметь:

$$E_{1a'} = 0,000\,005 \frac{Q}{a'} = 0,000\,005 \times 1000 = 0,005,$$

т.е. $E_{1a'}$ сравняется с $E_{2a'}$, из чего заключаем, что вполне достаточной для $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ точностью будет принятая нами точность определения этой величины с 5 знаками, и тогда *точность нахождения при помощи арифмометра величины a' , при проектировании участков по данным разбивки полигона на простые фигуры, будет не ниже 0,01 м.*

Случай 2. Переходя к случаю определения a' без помощи арифмометра, напомним, что в § 29 (см. пример 9) нами на частном примере произведено было определение точности a' для трапеции прямоугольной.

При нахождении a' для трапеции косоугольной, вместо

$$2Q \operatorname{tg} = \frac{2Q \sin \alpha}{\cos \alpha},$$

берется под корнем

$$\frac{2Q \sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma},$$

и таким образом добавляется одна операция деления числа на $\cos$, вводящая в результат некоторую дополнительную погрешность; в общем же можно утверждать, что *точность определения a' без помощи арифмометра, уступая несколько точности определения первым способом, останется все же достаточно высокой.*

Заканчивая рассмотрение настоящего вопроса, отметим те обстоятельства проектирования, которые благоприятствуют или не благоприятствуют хорошей точности результата.

Формула 2-1 показывает, что при проектировании помощью арифмометра, с увеличением Q или уменьшением a' , $E_{1a'}$ увеличивается, и наоборот.

Легко проследить на примере § 29, что при проектировании без помощи арифмометра будет то же самое, вследствие чего можно утверждать, что с увеличением величины проектируемого участка точность в абсолютных единицах уменьшается, а при одной и той же величине участка благоприятным в смысле точности обстоятельством будет увеличение величины a' , что будет иметь место при участках, вытянутых в сторону средней линии, и для трапеций расширяющихся.

В дальнейшем мы увидим, что и для хорошей точности в определении величины высоты трапеции вытянутость участка в сторону средней линии также будет обстоятельством положительного характера.

На практике проектирования приходится, для меньшей потери площади земли под выездные дороги для кварталов, давать ширину этих последних (см. черт. 31) такую, чтобы участки были именно вытянутыми в сторону их средней линии, из чего заключаем, что в этом отношении рекомендуемый нами способ проектирования по формулам является удобным на практике.

Исходя из указанной здесь точности нахождения величины a' заключаем, на основании соображений § 11, что основания спроектированных трапеций можно записывать на плане округленными до 0,05 м.

§ 62. Определение высоты и боковых сторон трапеции при проектировании по формулам.

Определение высоты трапеции, когда известна площадь и оба основания, является делом весьма простым и притом одинаковым для всех случаев, какова бы ни была проектируемая трапеция и каким бы способом проектирование это мы ни производили.

При основаниях трапеции a и a' , высоте h и площади Q имеем формулу:

$$h = \frac{Q}{\frac{a+a'}{2}} = \frac{2Q}{a+a'}.$$

Нетрудно теперь найти и точность величины h .

При a точном средняя линия трапеции $\frac{a+a'}{2}$ будет заключать в себе границу погрешности, равную половине границы погрешности a' , так как имеем:

$$E_{\frac{a+a'}{2}} = \frac{E(a+a')}{2} = \frac{Ea'}{2};$$

согласно же показанного в § 27 (см. форм. 3) граница относительной погрешности h будет такая же, как и граница относительной погрешности средней линии, и тогда соотношение точности вычисленной величины h (без округления) и точности средней линии будет зависеть от соотношения между величиной этих линий. При h равном средней линии и при точности a' до 0,01 граница погрешности средней линии окажется равной 0,005, и такова же будет граница погрешности от вычисления h , т.-е.

$$E_{1h} = 0,005,$$

и тогда

$$E_h = E_{1h} + E_{2h} = 0,005 + 0,005 = 0,01;$$

при предельном неблагоприятном соотношении между величиной h и средней линией, когда h будет в 5 раз превышать среднюю линию, будем иметь:

$$E_{1h} = 5 \times 0,005 = 0,025$$

и

$$E_h = E_{1h} + E_{2h} = 0,025 + 0,005 = 0,03,$$

т.-е. и в этом случае является возможность записывать на план (см. § 11) h округленными до 0,05.

Из вышеизложенного можно сделать также тот вывод, что удлиненность участков в сторону их средних линий будет обстоятельством, благоприятствующим точности вычисления их высоты.

Переходя к вопросу определения длины боковых сторон и обозначая их через b при угле β и b' при угле γ , будем иметь для прямоугольной трапеции (см. черт. 44):

$$b = \frac{h}{\cos \alpha'} \quad (2)$$

и для косоугольной (см. черт. 45):

$$b = \frac{h}{\cos \beta}$$

и

$$b' = \frac{h}{\cos \gamma} \quad (3)$$

Проверку правильности вычислений производим по формулам:

$$a' = a + b \sin \alpha \quad (4)$$

для прямоугольной и

$$a' = a + b \sin \beta + b' \sin \gamma \quad (5)$$

для косоугольной трапеции, где α , β и γ — величины алгебраические.

§ 63. Другие способы проектирования трапеции заданной площади.

Прежде всего остановимся на способе, близком к рекомендуемому нами способу проектирования по формуле и заключающемся в том, что второе основание трапеции определяется таким же образом, как указано нами в § 57, но высота находится по формуле:

$$h = \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (1)$$

для расширяющейся прямоугольной трапеции и

$$h = \frac{a - a'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (1')$$

для сужающейся.

Иными словами (см. черт. 44) высота h определяется из прямоугольного $\triangle BB_1C_1$ как катет BC_1 по другому катету B_1C_1 .

Этот способ упомянут в курсе геодезии профессора Соловьева.

Распространяя это определение высоты h на косоугольную трапецию (см. черт. 45), можно получить формулу:

$$h = \frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \quad (2)$$

для косоугольной расширяющейся трапеции и

$$h = \frac{a - a'}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \quad (2')$$

для косоугольной сужающейся трапеции;

или, принимая во внимание формулу (1) § 59, будем иметь:

$$h = \frac{(a' - a) \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} \quad (3)$$

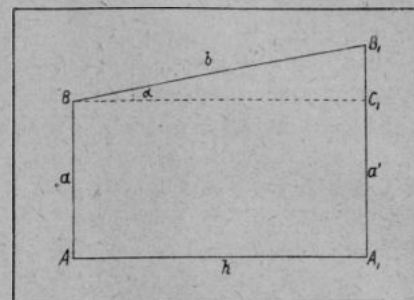
для расширяющейся и

$$h = \frac{(a - a') \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} \quad (3')$$

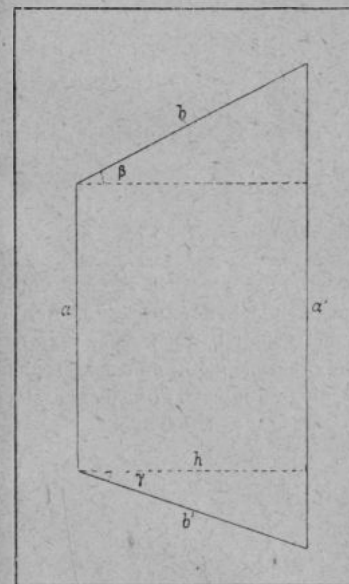
для сужающейся трапеции.

Эти же формулы, с заменой a' его значением, можно получить непосредственным решением трапеции, принимая за неизвестную величину ее высоту; способ этот указан в курсе проф. Орлова «Деление площадей» (см. изд. 3-е, стр. 37, 3-е решение).

Переходя к характеристике указанного способа определения высоты h , вспомним прежде всего доказанное нами в § 28 положение, согласно которому при делении ка-



Черт. 44.



Черт. 45.

кого-либо числа на $\sin$ или tg малого угла получается результат весьма грубый. Так как в этом способе по формулам (1) и (1') для прямоугольной трапеции производится деление на tg угла между боковыми сторонами, а по формулам (3) и (3') для косоугольной трапеции — на $\sin$ такого угла, то при малом угле между боковыми сторонами этот способ совершенно не пригоден, так как дает весьма грубый результат.

Для сравнения же точности проектирования этим способом с проектированием рекомендуемым нами способом при углах достаточно больших, приведем несколько примеров.

Пример 1. Найти при проектировании помощью арифмометра точность определения высоты тра-

пещи примера 2-го § 58 по способу, рекомендуемому нами, и способу, изложенному в настоящем §.

В § 61 было показано, что при вычислении помощью арифмометра для данного примера имеем:

$$E_a' = 0,0051,$$

следовательно, как показано было в предыдущем §, точность вычисленной величины средней линии будет вдвое выше, т.е. граница ее погрешности окажется равной

$$\frac{0,0051}{2} = 0,0026.$$

Величина средней линии для данного примера будет равна

$$\frac{298,83 + 303,44}{2} = 301,135$$

и

$$h = \frac{Q}{301,135} = \frac{5600}{301,135} = 18,60.$$

При отношении между h и средней линией, равном $\frac{18,60}{301,135}$, будем иметь:

$$E_{1h} = 0,0026 \times \frac{18,60}{301,135} = 0,00017 = 0,0002 \text{ (с округлением)},$$

и граница общей погрешности h будет такова:

$$E_h = E_{1h} + E_{2h} = 0,0002 + 0,005 = 0,0052.$$

Стало-быть, мы имеем, что по рекомендуемому нами методу определения высоты точность ее будет близка к половине сотой доли метра

Найдем теперь точность вычисления высоты по методу настоящего §. Производя вычисления h по формуле (2) и руководствуясь при определении E_{1h} формулами § 27, будем иметь, при вычислении $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ с 5 точными знаками и $E_{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = 0,000\,005$:

$$\begin{aligned} E_h = E_{1h} + E_{2h} = E_{\frac{a' - a}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}} + E_{2h} &= \frac{E_{(a' - a)} + h E_{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} + \\ + 0,005 &= \frac{0,0051 + 18,60 \times 0,000\,005}{0,24814} + 0,005 = \frac{0,0052}{0,24814} + 0,005 = \\ &= 0,021 + 0,005 = 0,026; \end{aligned}$$

т.е. имеем, что E_{1h} вместо прежней величины $= 0,0002$, оказалось равной $0,021$, или в 100 раз больше, а E_h вместо прежней величины $0,0052$, равной $0,026$, т.е. больше в 5 раз.

Пример 2. Найти при проектировании без помощи арифмометра точность вычисления высоты примера 2 § 58 способом § 62 и настоящего, считая $E_a' = 0,01$.

Точность определения высоты по методу § 62 будет отличаться в данном примере от примера предыдущего лишь тем, что вместо $0,0051$ нужно будет для E_a' взять $0,01$, и тогда будем иметь:

$$E_{1h} = \frac{0,01}{2} \times \frac{18,60}{301,135} = \frac{0,093}{301,135} = 0,00031,$$

$$\begin{aligned} E_h = E_{1h} + E_{2h} &= 0,00031 + 0,005 = 0,0054 = \\ &= 0,006 \text{ (с округлением)}. \end{aligned}$$

Переходя к нахождению точности вычисления величины h по способу настоящего §, произведем самые вычисления по этому способу и вспомним метод определения точности примера 6 § 27, и тогда будем иметь при вычислении h по формуле (3) настоящего §:

$$\begin{aligned} \frac{a' - a}{\sin \alpha} &= \frac{303,44 - 298,83}{\sin (17^\circ 42' - 4^\circ 04')} = \frac{4,61}{\sin 13^\circ 38'} = \\ &= \frac{2,36 + 2,12 + 0,13}{\sin 13^\circ 38'} = \frac{19,55 \sin 13^\circ 38'}{\sin 13^\circ 38'} = 19,55; \end{aligned}$$

$$\frac{(a' - a) \cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{a' - a}{\sin \alpha} \cos \beta = 19,55 \cos 17^\circ 42' = 18,62;$$

$$h = \frac{(a' - a) \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} = \frac{(a' - a) \cos \beta}{\sin \alpha} \cos \gamma = 18,62 \cos 4^\circ 04' = 18,57;$$

и затем:

$$\begin{aligned} E_{\frac{a' - a}{\sin \alpha}} &= \frac{E_{(a' - a)} + E_{19,55 \sin 23^\circ 38'}}{\sin 13^\circ 38'} = \frac{0,01 + 0,015}{\sin 13^\circ 38'} = \\ &= \frac{0,025}{\sin 13^\circ 38'} = 0,107; \end{aligned}$$

$$E_{\frac{(a' - a) \cos \beta}{\sin \alpha}} = E_{19,55 \cos 17^\circ 42'} = 0,107 + 0,015 = 0,122;$$

$$\begin{aligned} E_{\frac{(a' - a) \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}} &= E_{18,62 \cos \gamma} = 0,122 + 0,015 = 0,137 = \\ &= 0,14 \text{ м (с округлением)}. \end{aligned}$$

Если мы вместо вычисления сторон OM и ON $\triangle ONM$ произведем вычисление его высоты, то как легко доказать, получим следующую формулу:

$$h = \frac{MN}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma};$$

подставляя же в эту формулу, вместо $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$, значение этой суммы из формулы (2) § 58, получим значение высоты h , определенной по условно-точным данным.

При проектировании площади Q берутся подобные треугольники ABO и A_1B_1O , площади которых известны и относятся как квадраты сходственных сторон или высот, т.е. имеем:

$$\frac{A_1C^2}{AO^2} = \frac{B_1O^2}{OB^2} = \frac{EO^2}{DO^2} = \frac{\text{пл. } \triangle A_1B_1O}{\text{пл. } \triangle ABO},$$

откуда, зная площади треугольников A_1B_1O и ABO и линии AO и BO , можно вычислить стороны A_1O и B_1O или EO по формулам:

$$A_1O = \sqrt{AO^2 \frac{\text{пл. } \triangle A_1B_1O}{\text{пл. } \triangle ABO}},$$

$$B_1O = \sqrt{BO^2 \frac{\text{пл. } \triangle A_1B_1O}{\text{пл. } \triangle ABO}},$$

и

$$EO = \sqrt{DO^2 \frac{\text{пл. } \triangle A_1B_1O}{\text{пл. } \triangle ABO}}.$$

Зная A_1O и B_1O при основном способе или EO при измененном способе, можно получить AA_1 и BB_1 или DE и затем уже найти остальные элементы трапеции.

Из последних формул видно, что излагаемый способ имеет при работе без арифмометра еще то неудобство, что приходится при нем выполнять действия над большими числами и без помощи каких-либо таблиц, что весьма затрудняет вычислительные операции.

Основываясь на изложенных выше данных, мы не рекомендуем пользоваться и излагаемым способом.

§ 64. Выводы.

Оканчивая настоящую главу, укажем, что операция проектирования заданной площади трапецией, встречающаяся очень часто при землеустроительном проектировании, может быть

выполнена достаточно точно и достаточно быстро рекомендуемым нами методом нахождения второго основания трапеции по формуле, одним и тем же способом при всякой величине угла между боковыми сторонами трапеции; при этом *отсутствие арифмометра не создает сколько-нибудь существенного препятствия точному проектированию*, так как почти все вычислительные операции выполняются по таблицам Гаусса и таблицам квадратов чисел, и лишь деление площади на среднюю линию для получения высоты должно выполняться по таблицам умножения, а при отсутствии их — непосредственно.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ У ЖИВОГО УРОЧИЩА.

§ 65. Два способа проектирования.

Живые урочища, как известно, бывают различными по своей извилистости. В некоторых случаях направление их берегов изменяется постепенно, в других же случаях направление это подвергается постоянным изменениям, и образуется большое количество излучин.

В первом случае можно выбрать такие магистральные линии, которые располагаются достаточно близко к живому урочищу, и последнее может быть заснято небольшим количеством перпендикуляров малой длины; во втором же случае или придется брать небольшие по длине магистральные линии, что нежелательно, или примириться с тем обстоятельством, что живое урочище будет местами заметно отклоняться от магистральных линий, и определяющие его положение перпендикуляры будут значительной длины.

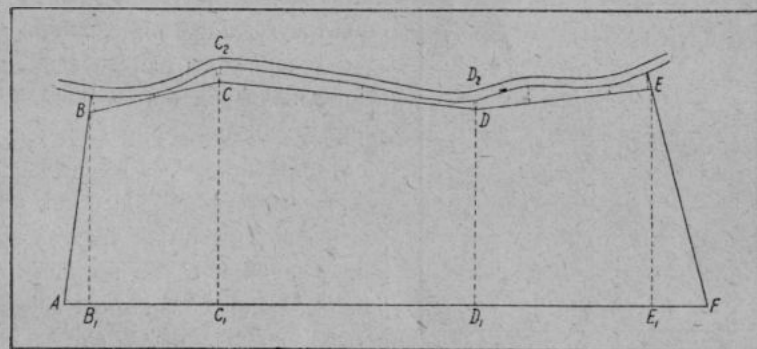
Для обоих указанных случаев нами будут рекомендованы различные способы проектирования участков; при чем в первом случае проектирование будет производиться почти исключительно по длинным измерениям в натуре, а во втором — почти исключительно планиметром.

В связи с этим должны быть применены различные методы и для предварительного определения площади между магистральными и живым урочищем.

В первом случае таковая площадь должна определяться исключительно по данным измерения в натуре как сумма пло-

щадей простых фигур — треугольников, трапеций и прямоугольников — методом, указанным в курсе геодезии; во втором же случае полоса между магистральными и живым урочищем должна быть наложена в масштабе 25 м в см отдельно от общего плана и притом таким образом, чтобы затем можно было здесь же наложить весь квартал, прилегающий к живому урочищу, и производить проектирование участков помощью планиметра.

Пример 1-го случая изображен на чертеже 47, где показан квартал вдоль живого урочища, часть которого между



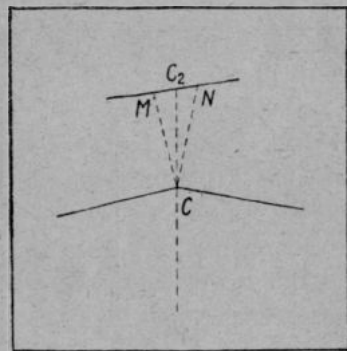
Черт. 47.

магистральным ходом и линией AF разбита на простые фигуры, и все элементы этих фигур вычислены по методу главы 6-й, а общая площадь между магистральным ходом и живым урочищем определена по частям, треугольниками и трапециями.

Представляется необходимым до производства проектирования участков определить, какая часть полосы между магистральными и живым урочищем придется против каждой простой фигуры, или, другими словами, как разбита будет эта площадь продолжением линий C_1C и D_1D за точки C и D до пересечения этих линий с живым урочищем. При этом к треугольникам ABB_1 и E_1EF можно не относить какой-либо площади

за магистралью, причисляя таковую к соседним трапециям, так как в этом не встретится практической надобности.

Продолжения линий C_1C и D_1D разобьют те простые фигуры у живого урочища, по которым они проходят, на 2 части, и представится необходимым определить площадь хотя бы одной из этих частей, имеющей форму треугольника, для того, чтобы затем уж распределить площадь всей полосы у живого урочища между простыми фигурами квартала.



Черт. 48.

Операция эта выполняется таким образом, что в указанном треугольнике принимается за основание соответствующий перпендикуляр к магистральной линии, а высота определяется геометрически.

На чертеже 48 показан в увеличенном масштабе треугольник у пункта C , по которому прошла линия CC_2 , являющаяся продолжением линии C_1C .

Указанный треугольник разбился на две части: CMC_2 и CC_2N , из которых первая будет отнесена к трапеции B_1BCC_1 , а вторая к трапеции C_1CDD_1 .

В этих треугольниках за основания можно принять известные нам по измерению в натуре перпендикуляры CM и CN , а высота может быть найдена по плану.

Полученная при таком вычислении площадей этих треугольников погрешность не будет сколько-нибудь заметной, так как по характеру живого урочища в рассматриваемом случае пункты поворота магистралей не могут быть удалены от него более чем на несколько метров, а при таких условиях ошибка в определении высоты треугольника, например, на один метр, давая в площади треугольника погрешность в столько

квадратных метров, сколько заключается в половине основания треугольника линейных метров, не будет существенной.

После того как соответствующее вычисление будет сделано и для треугольника при пункте D , могут быть определены все части квартала от живого урочища и до линии AF , и останется затем при проектировании участков разбивать на части только эти площади.

Вот такого рода дополнительная работа по распределению полосы у живого урочища между простыми фигурами квартала должна быть сделана вместе с разбивкой квартала на простые фигуры, до проектирования отдельных участков, и в результате этой работы получатся площади простых фигур, ограниченных с одной стороны живым урочищем.

Форму ведомости для разложения квартала при живом урочище на простые фигуры мы примем такой же, как в главе 6, но с добавлением в конце одного столбца для площадей у живого урочища и второго для общих площадей каждой простой фигуры с соответствующей частью полосы у живого урочища.

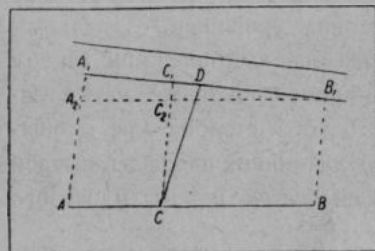
При этом мы должны оговориться, что в тех случаях, когда при проектировании крупных участков мы не производим предварительной разбивки квартала на простые фигуры, явится надобность определить площадь полосы у живого урочища только до той линии, до которой мы предварительно намечаем проектируемый участок. Если на примере черт. 47 у нас в указанном квартале должно быть, скажем, лишь 2 участка, и граница их должна пойти где-либо вблизи линии D_1D_2 , каковую линию намечаем предварительно как границу этих участков, то для нас явится необходимость определить площадь лишь 2 частей полосы у живого урочища — до продолжения линии D_1D и после этого продолжения — и затем спроектировать от линии D_1D_2 некоторую площадь, составившую разницу между площадью проектируемого участка и оказавшейся площадью до линии D_1D_2 .

В двух следующих §§ будет показано, как можно спроектировать простой фигурой площадь от какой-угодно линии квартала у живого урочища и как производить разбивку квартала на участки помощью планиметра.

§ 66. Проектирование по данным измерений в натуре.

Рассмотрим предварительно следующий вопрос.

Дана часть магистральной линии AB (см. черт. 49), расположенная между двумя соседними перпендикулярами к живому урочищу AA_1 и BB_1 , между которыми направление живого урочища остается без изменения.



Черт. 49.

В точке C , расстояние которой до точек A и B известно, с магистралью пересекается граничная линия, часть которой CD разделяет трапецию у живого урочища AA_1B_1B на две части — AA_1DC и CDB_1B .

Требуется определить площадь каждой из этих частей, если длина перпендикуляров AA_1 и BB_1 известна. Для решения данного вопроса прежде всего необходимо вычислить длину перпендикуляра к магистральной линии в точке C .

Легко видеть, после проведения линии $B_1A_2 \parallel AB$, что C_1C_2 можно получить из пропорции:

$$\frac{C_1C_2}{A_1A_2} = \frac{C_2B_1}{A_2B_1},$$

и тогда CC_1 определится как сумма $BB_1 + C_1C_2$.

По нахождении величины перпендикуляра CC_1 можно получить площадь треугольника CC_1D , в котором основанием

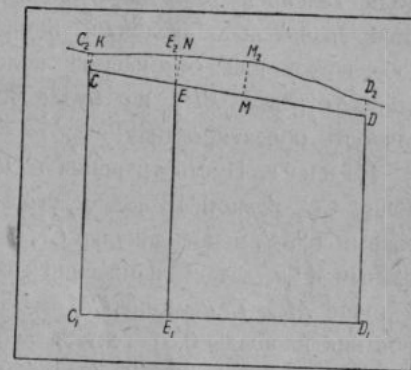
будем считать линию CC_1 , а высоту определим по плану, пользуясь циркулем и масштабом.

Вследствие небольшой величины CC_1 , не превышающей нескольких метров, ошибка в определении высоты треугольника CC_1D не даст сколько-нибудь заметной погрешности в величине площади.

Далее получаем площадь четырехугольника AA_1DC как сумму площадей AA_1C_1C и CC_1D , а четырехугольника CDB_1B как разность CC_1B_1B и CC_1D ; сумма же площадей $AA_1DC + CDB_1B$ должна дать известную нам по прежним вычислениям площадь трапеции AA_1B_1B , что и будет служить проверкой указанной вычислительной операции.

Пусть требуется теперь спроектировать от линии CC_1 (см. черт. 50) в фигуре $C_1C_2D_2D_1$ заданную площадь некоторой линией, параллельной C_1C_2 . Спроектируем сначала эту площадь геометрическим способом или же планиметром и, получив участок $C_1C_2E_2E_1$, произведем уже более точным способом определение площади и вычисление линий данной фигуры.

При этом мы можем поступить таким образом: возьмем по плану, пользуясь масштабом, линию C_1E_1 и затем по этой линии, зная угол между линиями C_1D_1 и CD , найдем высоту трапеции C_1CEE_1 , если она не прямоугольная, величину отрезка CE и разность между CC_1 и EE_1 , после чего будем иметь величину EE_1 и площадь трапеции C_1CEE_1 , а также можем вычислить способом, указанным в начале настоящего §, площадь CC_2E_2E и найти затем общую площадь фигуры $C_1C_2E_2E_1$.



Черт. 50.

Вследствие неточности проектирования геометрическим способом или помощью планиметра обычно будет получаться некоторая разница между заданной для проектирования площадью и полученной в результате вычисления, и, подобно тому, как мы поступали в § 56, необходимо затем будет добавить или отнять эту разницу узкой полосой вдоль линии E_1E_2 , принимая эту полосу за прямоугольник. При этом линия E_1E нам будет известна по данным вычислений, а линия E_2E должна быть взята по плану, и ширина полосы получится делением разницы в площадях на линию E_1E_2 ; вследствие значительной величины линии E_1E_2 и небольшой ширины добавляемой или отнимаемой полосы, ошибка в определении длины отрезка EE_2 не будет иметь заметного влияния на точность проектирования.

Пример. Пусть трапеция CDD_1C_1 будет прямоугольной, линия CC_1 равной 185,34 м, угол α между линией CD и C_1D_1 равным $6^\circ 34'$, перпендикуляр CK к магистрали CD у пункта C равным 4 м, а при изменении направления живого урочища в точке M_2 — 7 м, линия $CM = 65$ м и заданная для проектирования площадь 0,57 гектара = 5700 м². Пусть при проектировании геометрическим способом мы получили линию C_1E_1 равной 31 м:

После этого находим:

$$CE = \frac{C_1E_1}{\cos \alpha} = \frac{31}{\cos 6^\circ 34'} = 31,21 \text{ м},$$

$$CC_1 - EE_1 = CE \sin \alpha = 31,21 \sin 6^\circ 34' = 3,57 \text{ м},$$

$$EE_1 = CC_1 - 3,57 = 185,34 - 3,57 = 181,77,$$

$$\begin{aligned} \text{площадь } C_1CEE_1 &= \frac{CC_1 + EE_1}{2} \times C_1E_1 = \\ &= \frac{185,34 + 181,77}{2} \times 31,00 = 5690 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Найдем затем длину перпендикуляра EN к магистрали в точке E .

Разность $EN - CK$ определится из пропорции:

$$\frac{EN - CK}{M_2M - CK} = \frac{CE}{CM},$$

откуда имеем:

$$EN - CK = \frac{(M_2M - CK) CE}{CM} = \frac{(7 - 4) 31,21}{65} = 1,44 \text{ м.}$$

и перпендикуляр EN окажется равным $4 + 1,44 = 5,44$ м.

Определим после этого площади трапеций $CKNE$ и ENM_2M :

$$\begin{aligned} \text{пл. } CKNE &= \frac{CK + EN}{2} \times CE = \frac{4 + 5,44}{2} \times 31,21 = \\ &= 147 \text{ м}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{пл. } ENM_2M &= \frac{EN + MM_2}{2} \times EM = \\ &= \frac{5,44 + 7,0}{2} (65 - 31,21) = 6,22 \times 33,79 = 210 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Проверка дает общую площадь трапеции равной

$$147 + 210 = 357 \text{ м}^2.$$

Площадь $\triangle EE_2N$ можно принять равной площади $\triangle CC_2K$, и тогда площадь CC_2E_2E будет равна площади $CKNE = 147$ м², общая площадь трапеции $C_1C_2E_2E_1$ окажется равной

$$5690 + 147 = 5837 \text{ м}^2,$$

и таким образом получится, что нами спроектировано более чем причиталось на $5837 - 5700 = 137$ м², каковую площадь отобьем влево от линии E_1E_2 ,

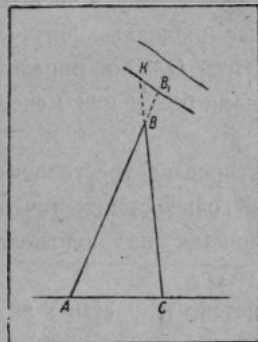
Принимая EE_2 равной $EN = 5,44$ м, будем иметь:

$$E_1E_2 = E_1E + EE_2 = 181,77 + 5,44 = 187,21,$$

и ширина проектируемой полосы будет равна

$$\frac{137}{187,21} = 0,73 \text{ м.}$$

В некоторых случаях данный способ проектирования представляется возможным заменить значительно более простым способом, изображенным на чертеже 52, когда точка B остается на границе участка и проектируется треугольник ABC заданной площади.



Черт. 52.

При этом предварительно необходимо спроектировать этот треугольник ABC приблизительно геометрически для того, чтобы определить геометрически же площадь треугольника BKB_1 , отходящего в обратную сторону, каковую площадь следует добавить к данной площади, и тогда задача будет сведена к вопросу проектирования треугольника § 49.

Во всех рассмотренных в настоящем § случаях проектирования мы не вводим поправок на увязку хода, и объясняется это несколько пониженной точностью проектирования у живых урочищ, при которой введение таких поправок делается нецелесообразным.

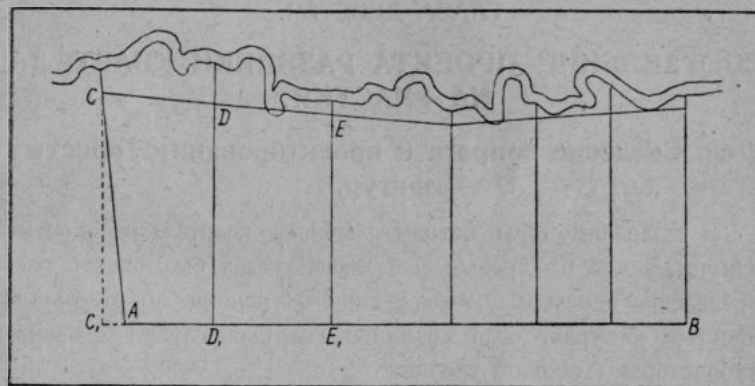
§ 67. Проектирование планиметром.

Как указано было в § 65, этот способ следует практиковать преимущественно при живых урочищах извилистых и при условии нанесения этих урочищ вместе с прилегающим кварталом в масштабе 25 м в с.м. Пусть требуется нам разбить квартал чертежа 53 на 6 участков заданной площади линиями, перпендикулярными AB .

Производим проектирование планиметром, который при увеличенном масштабе дает, как известно, удовлетворительный по точности результат; затем находим по плану длины отрезков линии AB , соответствующих отдельным проектируемым участкам, сравниваем их сумму с известной по вычислениям, на основании данных измерений в натуре, линией AB и полу-

ченную разницу распределяем между всеми отрезками этой линии пропорционально их длине.

По исправленным отрезкам линии AB можно найти затем уже путем вычислений по данным измерений в натуре длины других сторон проектируемых участков.



Черт. 53.

В частности для участка $ACDD_1$ будем иметь стороны AD_1 и AC , и углы BAC и C , а по этим данным найдем длину перпендикуляра CC_1 к линии AB и величину C_1A , затем CD , $CC_1 - DD_1$ и наконец DD_1 .

Трапеция DEE_1D_1 решается по высоте D_1E_1 , одному основанию DD_1 и углу D_1DE , и т. п. Указанное проектирование может производиться на вспомогательном плане, а по вычисленным данным участки затем могут быть нанесены на основной план.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

СОСТАВЛЕНИЕ ПРОЕКТА РАЗБИВКИ КВАРТАЛА
НА УЧАСТКИ.§ 68. Сведение вопроса к проектированию простых
фигур.

В главе 6-й даны методы разбивки квартала на простые фигуры, а в § 65 предыдущей главы указан был способ распределения площади полосы у живого урочища по отдельным простым фигурам, если границей квартала служит с какой-либо стороны таковое урочище.

После того как при составлении землеустроительного проекта выяснится, сколько участков, какой площади каждый и в какой последовательности должно быть отведено в каком-либо квартале, представляется необходимым прежде всего определить, как распределятся эти участки между простыми фигурами, дабы свести вопрос к разбивке отдельных простых фигур, что нами было уже рассмотрено в главах 7 и 8 настоящего курса.

В качестве примера рассмотрим случай распределения площади разбитого на простые фигуры квартала § 53, начиная с южной его части, на 9 участков, площади которых в гектарах даны во втором столбце, приводимой ниже ведомости. (См. стр. 283.)

По ведомости § 53 мы видим, что первая площадь простой фигуры имеет форму треугольника и отрицательна, а по исключении ее из второй простой фигуры, имеющей форму трапеции, получим

$$3,1337 - 0,3569 = 2,7768 \text{ га.}$$

№№ участков.	Площади участков в гектарах.	№№ фигур, из кото- рых проектируется участок.	Какая площадь из данной фи- гуры отводится.
1	1,3200	2	1,3200
2	1,0200	2	1,0200
3	1,3800	{ 2	0,4368
		{ 3	0,9432
4	1,1700	3	1,1700
5	1,5150	{ 3	1,3058
		{ 4	0,2092
6	1,9500	4	1,9500
7	1,7520	{ 4	1,3261
		{ 5	0,4259
8	1,5210	5	1,5210
9	1,9920	{ 5	1,3376
		{ 6	0,6544
	13,6200		13,6200

От этой площади должна быть прежде всего отведена площадь участка № 1 в 1,3200 га, после чего от данной фигуры останется

$$2,7768 - 1,3200 = 1,4568 \text{ га,}$$

из чего заключаем, что из нее может быть целиком еще

спроектирован участок № 2 площадью 1,0200 га, и получится остаток в

$$1,4568 - 1,0200 = 0,4368 \text{ га.}$$

Данный остаток засчитываем в участок № 3 и добавляем в этот участок недостающую площадь

$$1,3800 - 0,4368 = 0,9432 \text{ га,}$$

из следующей трапеции № 3, после чего в последней останется

$$3,4190 - 0,9432 = 2,4758 \text{ га.}$$

из этого заключаем, что из трапеции № 3 будет целиком спроектирован участок № 4 площадью 1,1700 га и сверх того получится остаток $2,4758 - 1,1700 = 1,3058$ га для участка № 5.

Продолжая данную операцию до тех пор, пока не окажется исчерпанной площадь всего квартала, произведем тем самым распределение земли квартала на участки, как указано в последнем столбце ведомости.

Так как при этом остаток от 5-й простой фигуры в 1,3376 га, вместе с 6-й фигурой площадью 0,6544 га составляют 1,9920 га, что является площадью участка 9-го, то это показывает, что вычисление на счетах произведено правильно; верность же производства записей в ведомость подтверждается тем, что сумма площадей по последнему столбцу дает площадь всего квартала § 53.

Приведенная ведомость полезна для расположения материала в достаточно наглядной форме, и по ней можно видеть, на какие части и в какой последовательности должна быть разбита при проектировании участков площадь каждой простой фигуры, а самое проектирование можно производить, начиная с любой простой фигуры, а в пределах одной фигуры — с любого ее конца, и таким образом весь вопрос проектирования участков в квартале сведется к проектированию простыми фигурами — трапециями и прямоугольниками.

§ 69. Производство увязки и округления спроектированных отрезков.

В § 60 был дан метод исправления вычисленной величины второго основания проектируемой трапеции для согласования с условно точными данными квартала.

При производстве вычисления высоты трапеции по исправленным от увязки хода ее основаниям получим таковую заключающей лишь незначительную погрешность вычислений и не нуждающейся в исправлении на увязку хода.

Несколько иначе обстоит с вычисленными величинами боковых сторон проектируемых трапеций, так как таковые стороны в полученных при разбивке квартала простых фигурах чаще всего даются неисправленными от увязки квартала данными, а при проектировании мы получаем отрезки этих сторон по высотам проектируемых трапеций, составляющим исправленные приращения Δx для боковых сторон простых фигур квартала, и поэтому может случиться, что боковые стороны фигур квартала не совпадут с суммами составляющих их отрезков боковых сторон спроектированных трапеций, и в последнем случае будет необходимо полученную разницу распределить между всеми отрезками пропорционально их длине.

После производства указанных операций будем иметь все стороны спроектированных участков согласованными со сторонами всего квартала, но взятыми до сотой доли метра.

С такой точностью записывать эти стороны на проектный план мы прежде всего не имеем права, так как точность произведенных вычислений может быть меньшей, чем до 0,01, и сверх того это делать нерационально, так как точность полевых измерений в общем значительно ниже, чем до 0,01 метра, но все же, исходя из точности проектирования предложенными методами, мы будем рекомендовать записывать на план стороны участков, получившихся после разбивки квартала, округленными до 0,05 м, при округлении вычисленных сто-

рон всего квартала до 0,1 м, тем более, что при исполнении проекта в натуре для сторон участков при мелкой разбивке 0,05 м составляет уже заметную величину. Но при этом производство округления не должно в то же время нарушить согласованности между величиной линий квартала и суммой составляющих их отрезков.

Замечание. Здесь следует оговориться, что при проектировании участков очень мелких, площадью лишь в несколько сот квадратных метров, что может иметь место при разверстании на отдельные участки таких угодий большой относительной ценности, как капустники, конопляники, заливные луга и пр., можно брать все отрезки линий до 0,01 м, а дабы получить на это право — можно оставить все прежние методы вычислений помощью арифмометра, дающие при малых линиях хороший результат, но следует уточнить всю ту вычислительную работу, которую мы производим непосредственно помощью таблиц Гаусса; а для этой цели необходимо совершенно отказаться от пользования табличками cent. и все приращения для частей отрезка брать с 3 десятичными знаками, округляя до 0,01 приращение лишь всей линии.

Этим способом можно брать приращения для отрезков, не превышающих 30 метров, и граница погрешности всего приращения линии будет заключать в себе столько раз по 0,0005, сколько отдельных определений потребуется нам произвести при нахождении приращения и плюс погрешность от округления приращения до 0,01.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

ПРОИЗВОДСТВО ОЦЕНКИ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО ОЦЕНОЧНЫМ ДАННЫМ.

§ 70. Сведения общие и способы оценки.

До сих пор, рассматривая различные вопросы проектирования участков при землеустройстве, мы вели речь только о площади этих участков, не затрагивая вопроса о том, на основании каких данных и какого расчета эта площадь определяется.

Данными, которыми должен руководствоваться землеустроитель, являются права на землю со стороны отдельных участников землеустройства, дающие, так сказать, задание, в каком отношении общая ценность подлежащей землеустройству площади должна быть распределена между всеми этими участниками.

В том случае, когда вся землеустраиваемая площадь одинакового качества, таковая площадь должна разверстываться между участниками землеустройства пропорционально их правам на землеустраиваемую территорию; в том же случае, когда земля в разверстываемой даче качества различного, это качество должно определять собою количество земли, отводимой каждому землепользователю; и в том случае, когда дается земля качеством выше среднего по всей землеустраиваемой даче, количество ее должно быть соответственно меньше того, которое причиталось бы в том случае, если бы вся земля была одинакового качества, и наоборот.

В отдельных простых случаях землеустроителю удастся добиться соглашения между всеми участниками землеустройства

относительно площади и месторасположения отводимой им территории, и в этом случае сами заинтересованные лица производят тот, чаще всего примитивный, расчет по которому количество земли компенсируется ее качеством.

Во всех же остальных случаях таковой расчет для каждого отдельного отводимого участка выполняется землеустроителем на основании данных произведенной предварительно оценки всей земли устраиваемой дачи.

Оценка эта производится оценочными комиссиями и заключается в распределении всей земли дачи, в зависимости от ее качества, по соответствующим категориям.

Число категорий бывает различное, в зависимости от степени разнообразия качества земли в даче.

Качество земли этими категориями может определяться двояким образом — в единицах абсолютных и относительных.

При первом способе устанавливается цена гектара земли различных категорий в каких-либо твердых единицах ценности; при втором способе принимается эквивалент в форме отношения, по которому затем можно определить, сколько гектаров одной из категорий может заменить по ценности гектар другой категории.

Пусть в какой-либо даче установлено, например, 5 оценочных категорий. Примером первого способа оценки может быть такой случай, когда цена гектара I категории принята равной 300 рублям, II категории — 225, III — 150, IV — 100 и V — 75 рублям; при втором же способе этот самый пример представился бы в следующем виде: III категория была бы принята за основную категорию, так как с этой землей и при оценке и при расчетах всего удобнее было бы сравнивать по качеству землю остальных категорий¹⁾; тогда

¹⁾ За основную категорию земли, для удобства последующих расчетов всего целесообразнее принимать наиболее распространённую в даче категорию, а для удобства производства самой оценки — землю среднего качества.

земля I категории была бы вдвое более ценной, чем земля основной категории, иначе говоря — один гектар земли первой категории будет эквивалентен двум гектарам земли основной категории, и для первой категории будет таким образом оценочный коэффициент 2; таким же образом установим, что для II категории таким коэффициентом будет $1\frac{1}{2}$, для IV — $\frac{2}{3}$ и для V — $\frac{1}{2}$.

Другими словами, гектар земли III категории принимается здесь за единицу ценности, и в этих единицах выражаться будет, в соответствии с качеством земли, цена гектара других категорий.

При первом способе оценки всю землю устраиваемой дачи переводят на единицы ценности, например рубли, определяют затем, на какую сумму в этих единицах ценности причитается получить территории каждому участнику землеустройства, и проектируют, наконец, участки такой площади, чтобы по качеству земли в них они соответствовали заданной ценности.

При втором способе оценки всю землю дачи исчисляют в переводе на основную категорию, определяют затем в площади этой территории право каждого участника землеустройства и проектируют ему участок такой величины, чтобы в переводе на основную категорию получилась заданная площадь.

При производстве вычислений 2-й способ предпочтительнее первого, так как при нем приходится иметь дело с меньшими числами, но для заинтересованных лиц 1-й способ часто несколько нагляднее 2-го, и в этом случае можно рекомендовать применение способа смешанного, когда при оценке будут фигурировать рубли или другие единицы ценности, а при всех расчетах земля основной категории; но при этом цена гектара каждой категории должна выражаться в таком количестве рублей, чтобы между этими ценами было по возможности наиболее простое отношение.

Руководствуясь приведенными соображениями, мы будем вести все последующее изложение настоящей главы применительно ко второму способу оценки.

относительно площади и месторасположения отводимой им территории, и в этом случае сами заинтересованные лица производят тот, чаще всего примитивный, расчет по которому количество земли компенсируется ее качеством.

Во всех же остальных случаях таковой расчет для каждого отдельного отводимого участка выполняется землеустроителем на основании данных произведенной предварительно оценки всей земли устраиваемой дачи.

Оценка эта производится оценочными комиссиями и заключается в распределении всей земли дачи, в зависимости от ее качества, по соответствующим категориям.

Число категорий бывает различное, в зависимости от степени разнообразия качества земли в даче.

Качество земли этими категориями может определяться двояким образом — в единицах абсолютных и относительных.

При первом способе устанавливается цена гектара земли различных категорий в каких-либо твердых единицах ценности; при втором способе принимается эквивалент в форме отношения, по которому затем можно определить, сколько гектаров одной из категорий может заменить по ценности гектар другой категории.

Пусть в какой-либо даче установлено, например, 5 оценочных категорий. Примером первого способа оценки может быть такой случай, когда цена гектара I категории принята равной 300 рублям, II категории — 225, III — 150, IV — 100 и V — 75 рублям; при втором же способе этот самый пример представился бы в следующем виде: III категория была бы принята за основную категорию, так как с этой землей и при оценке и при расчетах всего удобней было бы сравнивать по качеству землю остальных категорий¹⁾; тогда

¹⁾ За основную категорию земли, для удобства последующих расчетов всего целесообразнее принимать наиболее распространенную в даче категорию, а для удобства производства самой оценки — землю среднего качества.

земля I категории была бы вдвое более ценной, чем земля основной категории, иначе говоря — один гектар земли первой категории будет эквивалентен двум гектарам земли основной категории, и для первой категории будет таким образом оценочный коэффициент 2; таким же образом установим, что для II категории таким коэффициентом будет $1\frac{1}{2}$, для IV — $\frac{2}{3}$ и для V — $\frac{1}{2}$.

Другими словами, гектар земли III категории принимается здесь за единицу ценности, и в этих единицах выражаться будет, в соответствии с качеством земли, цена гектара других категорий.

При первом способе оценки всю землю устраиваемой дачи переводят на единицы ценности, например рубли, определяют затем, на какую сумму в этих единицах ценности причитается получить территории каждому участнику землеустройства, и проектируют, наконец, участки такой площади, чтобы по качеству земли в них они соответствовали заданной ценности.

При втором способе оценки всю землю дачи исчисляют в переводе на основную категорию, определяют затем в площади этой территории право каждого участника землеустройства и проектируют ему участок такой величины, чтобы в переводе на основную категорию получилась заданная площадь.

При производстве вычислений 2-й способ предпочтительнее первого, так как при нем приходится иметь дело с меньшими числами, но для заинтересованных лиц 1-й способ часто несколько нагляднее 2-го, и в этом случае можно рекомендовать применение способа смешанного, когда при оценке будут фигурировать рубли или другие единицы ценности, а при всех расчетах земля основной категории; но при этом цена гектара каждой категории должна выражаться в таком количестве рублей, чтобы между этими ценами было по возможности наиболее простое отношение.

Руководствуясь приведенными соображениями, мы будем вести все последующее изложение настоящей главы применительно ко второму способу оценки.

§ 71. Математические требования к оценочным материалам.

В результате работ оценочной комиссии устанавливаются границы оценочных категорий в натуре, которые наносятся затем и на проектный план.

Возникает вопрос: с какой точностью должны измеряться и затем при проектировании учитываться границы оценочных категорий, — должны ли к точности этой работы предъявляться те же самые требования, какие предъявляются к снятию границ дачи и проектированию площадей участков, или здесь можно ограничиться менее совершенными съемочными методами и учетом площадей оценочных категорий геометрическим способом и помощью планиметра — в тех, конечно, случаях, когда эти площади не имеют форму таких фигур, как прямоугольники, трапеции и треугольники с известной высотой и пр., так как в последнем случае эти площади могут быть вычислены непосредственно по данным измерений в натуре, без пользования планом.

Так как означенная работа должна быть согласована с точностью самой оценки, где пока, к сожалению, достаточно точных критериев не имеется, то мы будем рекомендовать применять к съемке границ оценочных категорий и учету площадей этих категорий те требования, которые предъявляются при хорошем исполнении к съемке важнейшей ситуации и последующему учету ситуационных площадей.

Ввиду того, далее, что проектирование участков линиями, пересекающимися под косыми углами с границами оценочных категорий, представляет значительные трудности, нами рекомендуется согласовать оценочную работу и работу проектирования таким образом, чтобы проектные линии направлялись затем почти исключительно параллельно и перпендикулярно к границам оценочных категорий.

Для этой цели следует заранее наметить предположительные границы кварталов, с вычислением принятыми при проектировании методами длины и направления проектных между кварталами линий и площадей кварталов, и затем все эти предположенные проектные линии проложить в натуре и принять основными границами оценочных категорий, выбрав границы этих категорий внутри квартала таким образом, чтобы они имели направление границ будущих участков.

Применительно к проекту чертежа 31 разбивки дачи на поселки, математические требования к производству оценки будут следующими.

Намечаем заранее границей кварталов и прокладываем в натуре перпендикуляры к направлению большой дороги из пунктов *A, E, F* и *H*.

Все эти линии избираем основными границами оценочных категорий и сверх того намечаем геометрическим способом на плане и прокладываем в случае надобности на местности линию, параллельную предыдущим, где-либо посередине полосы вдоль р. Прони, а если изменчивость качества земли того требует, то по тому же направлению и посередине некоторых других или даже всех кварталов, кроме площади, намеченной под участок 1.

Тогда вся землеустраиваемая дача будет разбита, например, на 4 оценочных полосы к югу и 6 полос плюс намеченный отдельный участок к северу от большой дороги, и все эти полосы будут разбиты параллельными между собою линиями.

В некоторых отдельных случаях может оказаться, что разнообразие качества земли в землеустраиваемой даче потребует еще более узких полос, и тогда необходимо будет некоторые кварталы разбить, вместо двух, на 3 или 4 полосы, но опять-таки линиями, параллельными намеченным проектным линиям кварталов.

Проложенные оценочные полосы необходимо, далее, разбить на части более или менее мелкие для распределения

земли в полосах по оценочным категориям, и эту разбивку мы будем производить линиями, параллельными наменному направлению границ отдельных поселков, т.-е. параллельно направлению большой дороги и, следовательно, перпендикулярно основным оценочным линиям, отмечая переходы поперечных оценочных линий, с отсчитыванием целыми метрами, при измерении по основным оценочным линиям; что же касается оценки земли наменного отдельного участка для поселка 1-го, то таковую можно произвести линиями, перпендикулярными к направлению большой дороги.

Таковы математические требования к оценке, от которых в некоторых, вообще говоря немногих, случаях приходится отступать, устанавливая границы оценочных категорий там, где они определенно отмечены более или менее резким изменением качества земли.

§ 72. Обработка оценочных данных.

После производства оценки указанным в предыдущем § способом исполнитель будет иметь оценочные полосы, ширина которых известна достаточно точно на основании вычислений, если они ограничены с боков параллельными линиями, и будет меняться и определяться всякий раз по плану, если таковые полосы направлены вдоль ломанного хода или тем более вдоль живого урочища.

Применительно к случаю черт. 31 будем иметь постоянно меняющуюся ширину крайней полосы вдоль р. Прони, составляющей часть того и другого квартала вдоль этого живого урочища, а из других полос будет иметь неодинаковую ширину крайняя полоса квартала восточного к югу от большой дороги; что же касается полос в кварталах участков II—VI, то неправильной формы будут лишь северные их концы.

Примем себе за правило пользоваться лишь теми данными полевых измерений, которые непосредственно послужат для вычисле-

ния площадей простых фигур, как основные их элементы, т.-е. основания и высоты, а все остальные данные брать по плану и вычислять площади участков отдельных оценочных категорий геометрическим способом или планиметром¹⁾.

Тогда по производстве всех вычислений обнаружатся у нас некоторые отступления от полученных ранее площадей квартала.

Распределим оказавшуюся разницу между теми лишь площадями, которые определены нами геометрически или помощью планиметра и оставив без изменения все площади, вычисленные по данным предварительного проектирования кварталов и полевых измерений при оценке; произведя вычисления для всех кварталов, будем знать площади всех различающихся своими категориями частей полос и после этого можем перевести все эти площади в основную категорию, определить площадь каждого квартала и всей дачи в гектарах этой категории и вычислить долю каждого участника землеустройства в этих единицах, чем операция обработки оценочных данных и исчерпывается.

При этом необходимо помнить, что *нам затем потребуются при проектировании данные для всех отрезков и всех площадей оценочных категорий, вследствие чего все эти данные весьма полезно сохранить и притом для большей наглядности в форме схематического чертежа со всеми необходимыми надписями.*

§ 73. Проектирование кварталов и отдельных крупных участков.

Когда после произведенной обработки оценочных данных определится в переводе на основную категорию площадь

¹⁾ Здесь мы не имеем в виду площадей особенно высокого качества, как, например, заливные луга, капустники, конопляники и пр., которые обычно идут в отдельное распределение и к которым применяются те же технические требования, что и к отдельным дачам.

каждого квартала и площадь, причитающаяся отдельным землепользователям, перед землеустроителем предстанет задача *произвести размещение землепользователей таким образом, чтобы как отдельные участки, так и целые кварталы с возможно меньшими изменениями их площадей могли поступить при проектировании соответствующим отдельным землепользователям и их группам.*

После этого весь вопрос проектирования кварталов или отдельных больших участков сведется к *добавлению или отнятию от намеченных ранее площадей той разницы, которая окажется между намеченными ранее площадями и причитающимися при землеустройстве количествами.*

При этом обычно приходится иметь дело с двумя различными задачами, которые мы сейчас и рассмотрим.

Задача № 1. При производстве проектирования квартала или отдельного крупного участка явилась необходимость передвинуть для получения надлежащей ценности проектируемой площади одну из проектных линий параллельно самой себе так, чтобы получившаяся от такой передвигки трапеция имела заданную ценность, составляющую разницу между причитающимся для данного квартала или участка количеством и намеченным для него ранее. Определить высоту этой трапеции и другие ее элементы.

Пусть линия AB , равная по длине a (черт. 54, 55 и 56), представляет собою намеченную ранее границу квартала, принятую нами за одну из основных оценочных линий, и требуется передвинуть эту линию параллельно самой себе в положение A_1B так, чтобы площадь полученной трапеции ABB_1A_1 , в переводе на основную категорию, составляла заданную величину. Римскими цифрами показаны оценочные категории, а промеры по линии AB между границами этих категорий даны.

При решении данной задачи может представиться несколько случаев; начнем с самого простого.

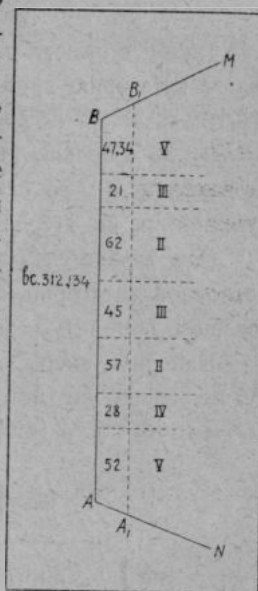
Случай 1-й. К линиям BM и AN прилегает земля одной и той же оценочной категории; все поперечные оценочные линии между собою параллельны, а по отношению к линии AB могут быть под каким-либо углом (см. черт. 54).

Метод проектирования для этого случая мы покажем на следующем примере.

Пример 1-й. Пусть в той полосе, от которой явилась необходимость спроектировать участок ABB_1A_1 , оценочные данные будут соответствовать данным чертежа 54, а соотношение между ценностью земли различных категорий будет таким, что III категория явится основной, а оценочные коэффициенты для других категорий будут соответственно 2, $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$; угол β будет равен $18^\circ 34'$, угол $\gamma = 12^\circ 17'$; заданная площадь Q равна, в переводе на основную категорию, $0,78 \text{ га} = 7800 \text{ м}^2$.

Заменим полосу чертежа 54 другой полосой, ценность которой будет такая же, как и ценность полосы чертежа 54, но длина изменится в сторону увеличения от замены земли всех категорий землей категории V, с сохранением ценности всех тех поперечных полос, которые мы будем заменять.

В частности, для категории II мы имеем две поперечные полосы общей шириной $62 + 57 = 119 \text{ м}$, а соотношение ценности, по сравнению с категорией V, $\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$, из чего заключаем, что для замены двух поперечных полос II категории категорией V, полосу последней нужно взять шириной $119 \times 3 = 357 \text{ м}$.



Черт. 54.

Таким же образом получим для III категории:

$$(21 + 45) : \frac{1}{2} = 132 \text{ м и для категории IV:}$$

$$28 \times (2/3 : 1/2) = 28 \times \frac{4}{3} = 37,33 \text{ м.}$$

Таким образом окажется, что при переводе всей полосы на V категорию длина линии AB будет равна $47,34 + 357 + 132 + 37,33 + 52 = 625,67 \text{ м}$, т.е. на $625,67 - 312,34 = 313,33 \text{ м}$ больше прежней длины, т.е. длина полосы, а следовательно и 2-го основания трапеции ABB_1A_1 — линии A_1B_1 , увеличится на $313,33 \text{ м}$.

Нам требуется спроектировать площадь, равную 7800 м^2 основной категории, каковая площадь будет по ценности эквивалента $7800 : 1/2 = 15600 \text{ м}^2$ земли V категории.

Найдем теперь второе основание трапеции из земли V категории по методу главы 7-й, принимая $a = 625,67 \text{ м}$, $Q = 15600$, $\beta = 18^\circ 34'$ и $\gamma = 12^\circ 17'$:

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{a^2 + 2Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}} = \\ &= \sqrt{625,67^2 + 31200 \frac{\sin (18^\circ 34' + 12^\circ 17')}{\cos 18^\circ 34' \cos 12^\circ 17'}} = \\ &= \sqrt{625,67^2 + 17273,4} = 639,32; \end{aligned}$$

и затем высоту трапеции h :

$$h = \frac{2Q}{a + a'} = \frac{31200}{625,67 + 639,32} = \frac{31200}{1264,99} = 24,66;$$

после чего получаем:

$$b = \frac{h}{\cos \beta} = \frac{24,66}{\cos 18^\circ 34'} = 26,01,$$

и

$$b' = \frac{h}{\cos \gamma} = \frac{24,66}{\cos 12^\circ 17'} = 25,24;$$

действительная же величина $a' = 639,32 - 313,33 = 325,99$; фактически спроектированная площадь

$$Q = \frac{312,34 + 325,99}{2} \times 24,66 = 7871 \text{ м}^2 =$$

$= 0,7871 \text{ га}$, а проверка дает: $a' = a + b \sin \beta + b' \sin \gamma = 312,34 + 8,28 + 5,37 = 325,99$, что говорит о правильности произведенных вычислений.

Случай 2-й. Дана оценочная полоса со всеми промерами по основным оценочным линиям. Поперечные оценочные линии могут быть какого угодно направления, оценочные категории, прилегающие к линиям AN и BM , различны. Рассмотрим этот случай применительно к частному примеру черт. 55, где приведены все цифровые данные, а соотношение между ценностью категорий такое же, как и в предыдущем примере.

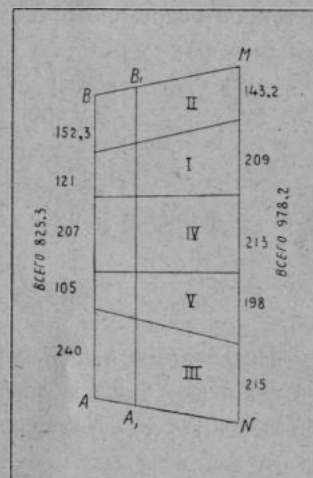
Пример 2-й. Пусть требуется от линии AB оценочной полосы $ABMN$ спроектировать трапецию ABB_1A_1 ценностью равной $0,9 \text{ га} = 9000 \text{ м}^2$ основной категории.

Заменяем полосу $ABMN$ другою, той же ценности, но состоящей исключительно из основной категории; тогда, подобно примеру предыдущему, будем для измененной полосы иметь AB равной:

$$152,3 \times 1\frac{1}{2} + 121 \times 2 + 207 \times \frac{2}{3} + 105 \times \frac{1}{2} + 240 = 228,45 + 242 + 138 + 52,5 + 240 = 900,95$$

и MN равной:

$$143,2 \times 1\frac{1}{2} + 209 \times 2 + 213 \times \frac{2}{3} + 198 \times \frac{1}{2} + 215 = 214,8 + 418 + 142 + 99 + 215 = 1088,8.$$



Черт. 55.

Если при этом известна нам и высота трапеции $ABMN$, то можно вычислить A_1B_1 и h для трапеции ABB_1A_1 даже без углов β и γ .

Действительно, пусть высота H трапеции $ABMN$ будет равна 120 м; тогда по формуле § 58 будем иметь:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{MN - AB}{H} = \frac{1088,8 - 900,95}{120} = \\ &= \frac{187,85}{120} = 1,56542,\end{aligned}$$

и второе основание проектируемой трапеции получим по формулам § 57:

$$\begin{aligned}a' &= \sqrt{a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \\ &= \sqrt{900,95^2 + 2 \times 9000 \times 1,56542} = \\ &= \sqrt{900,95^2 + 28177,6} = 916,45,\end{aligned}$$

а h по формуле § 62:

$$h = \frac{2Q}{a + a'} = \frac{18000}{900,95 + 916,45} = \frac{18000}{1817,40} = 9,90 \text{ м.}$$

После этого b, b' и действительную величину a' получим по формулам § 62, а действительная величина ABB_1A_1 может быть найдена по формуле:

$$Q = \frac{a + a'}{2} \times h,$$

где a и a' — действительные величины оснований этой трапеции.

Случай 3-й. Все поперечные оценочные линии перпендикулярны к основной оценочной линии AB , категории прилегающей к линиям BM и AN земли различны, промеры по линии MN (черт. 55) могут быть неизвестны.

Пример 3-й. Рассмотрим частный случай черт. 56, когда требуется спроектировать трапецией площадь, ценностью в $0,51 \text{ га} = 5100 \text{ м}^2$ основной категории.

Переведем заданную площадь и все поперечные оценочные полосы на категорию земли, прилегающей к одной из линий BM или AN .

Пусть мы будем переводить всю площадь на II категорию; тогда, применяя рассуждения примера 1-го настоящего §, будем иметь, вместо линии AB , следующую длину:

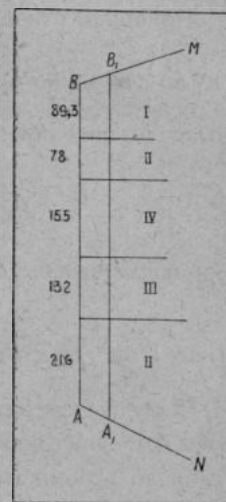
$$\begin{aligned}216 + 132 \times \frac{1}{1^{1/2}} + 155 \times \frac{2/3}{1^{1/2}} + 78 + \\ + 89,3 \times \frac{2}{1^{1/2}} = 216 + 88 + 68,89 + \\ + 78 + 119,07 = 569,96.\end{aligned}$$

Таким образом, вместо полосы черт. 56 из различных оценочных категорий, мы будем иметь полосу из II категорий, длина которой по линии AB будет 569,96.

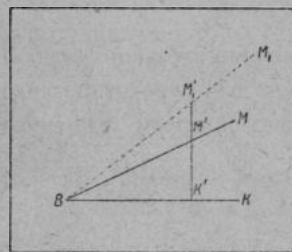
При решении вопроса о проектировании трапецией заданной площади является, как известно, необходимость иметь величину tg углов боковых сторон трапеции с перпендикуляром к ее основанию. Угол линии AN с указанным перпендикуляром остается без изменения, но угол линии BM после замены I категории на II величину свою изменит.

Действительно, если угол линии BM с перпендикуляром к линии AB будет углом KBM (черт. 57), то при замене земли I категории на II этот угол увеличится, так как вместо треугольника $BM'K'$

нужно будет взять треугольник $BM_1'K'$ с основанием равным $M_1'K'$, которое будет больше основания $M'K$ во столько раз,



Черт. 56.



Черт. 57.

во сколько раз больше площадь земли II категории по сравнению с категорией I, при одинаковой ценности этих площадей.

Принимая отношение $\frac{M_1'K'}{M'K'}$ равным m , или $M_1'K' = m M'K'$,

где m для данного частного случая будет $\frac{2}{1^{1/2}} = 1^{1/3}$, получим после деления обеих частей этого равенства на BK' :

$$\frac{M_1'K'}{BK'} = m \frac{M'K'}{BK'}$$

или после замены отношений

$$\frac{M_1'K'}{BK'} \text{ и } \frac{M'K'}{BK'} \text{ на } \operatorname{tg} \beta' \text{ и } \operatorname{tg} \beta,$$

где β будет, как и прежде в таких случаях, углом боковой стороны трапеции с перпендикуляром к основанию, а β' — таковым же углом во вспомогательной полосе, получившейся заменой земли различных категорий на одну и ту же (в нашем примере II), получим:

$$\operatorname{tg} \beta' = m \operatorname{tg} \beta$$

или для данного примера:

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{4}{3} \operatorname{tg} \beta.$$

После этого все элементы нашей вспомогательной полосы будут известны, и перечислив заданную для проектирования площадь основной категории во II, спроектируем трапецией полученную площадь $\frac{5100 \text{ м}^2}{1^{1/2}} = 3400 \text{ м}^2$; при этом будем иметь:

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q(\operatorname{tg} \beta' + \operatorname{tg} \gamma)} = \sqrt{569,96^2 + 6800(\frac{4}{3} \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

откуда, по выполнении действий, найдем второе основание a' проектируемой трапеции для вспомогательной полосы, после

чего уже будет возможно найти действительную величину h по формуле:

$$h = \frac{2Q}{a + a'} = \frac{6800}{569,96 + a'},$$

а по ней действительные величины боковых сторон b и b' по формулам § 62:

$$b = \frac{h}{\cos \beta},$$

$$b' = \frac{h}{\cos \gamma},$$

и затем действительную величину a' , равную

$$a + b \sin \beta + b' \sin \gamma,$$

и действительную величину Q , равную

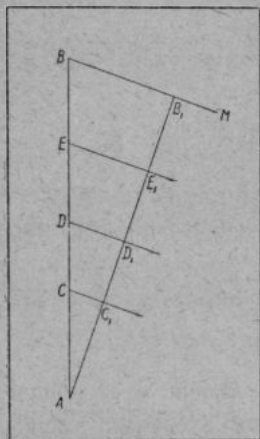
$$\frac{a + a'}{2} \times h.$$

Переходя к рассмотрению настоящей задачи в ее общем виде и соединяя вместе все рассмотренные 3 случая, заключаем, что для решения ее необходимо переходить ко вспомогательной полосе, состоящей из одной оценочной категории, при чем будут изменяться основания проектируемой трапеции, а в некоторых случаях даже углы их с боковыми сторонами, и лишь высота трапеции получается своей действительной величиной; по получении же этой высоты мы можем определить все остальные элементы спроектированной трапеции, т.е. второе основание, боковые стороны и действительную площадь.

Заметим при этом, что в дальнейшем нам необходимо будет знать площади и ценности всех отдельных участков одинаковой категории в спроектированной трапеции, и определение этих площадей и ценностей лучше всего произвести тотчас же

вслед за проектированием трапеции; и тогда полученная таким образом ценность всей трапеции должна совпасть с заданной для проектирования ценностью, что и будет служить проверкой правильности произведенного проектирования.

Задача 2-я. Спроектировать треугольником площадь заданной ценности, если все поперечные оценочные линии параллельны между собою и с соответствующей стороной квартала. При этом могут представиться 2 случая — когда поперечные оценочные линии не перпендикулярны линии AB (черт. 58) и когда они ей перпендикулярны.



Черт. 58.

Случай 1-й. Пусть от линии AB (черт. 58) требуется спроектировать площадь заданной ценности треугольником ABB_1 , при чем линии EE_1 , DD_1 и CC_1 будут параллельны линии BB_1 , а с линией AB образуют какой-угодно угол.

Поставим себе вопрос, как относятся площади и ценности участков EBB_1E_1 , DEE_1D_1 , CDD_1C_1 , ACC_1 и данного треугольника, если все оценочные категории известны.

Данный треугольник состоит из трех трапеций и одного треугольника различных оценочных категорий, и мы найдем прежде всего отношение этих площадей.

Из подобия треугольников имеем:

$$\text{пл. } \triangle ABB_1 : \text{пл. } \triangle AEE_1 : \text{пл. } \triangle ADD_1 : \text{пл. } \triangle ACC_1 = \\ = AB^2 : AE^2 : AD^2 : AC^2,$$

откуда получаем:

$$\text{пл. } EBB_1E_1 : \text{пл. } DEE_1D_1 : \text{пл. } CDD_1C_1 : \text{пл. } ACC_1 = \\ = (AB^2 - AE^2) : (AE^2 - AD^2) : (AD^2 - AC^2) : AC^2,$$

или после преобразования во второй части:

$$\text{пл. } EBB_1E_1 : \text{пл. } DEE_1D_1 : \text{пл. } CDD_1C_1 : \text{пл. } ACC_1 = \\ = [EB(AB + AE)] : [DE(AE + AD)] : [CD(AD + AC)] : (AC \times AC),$$

т.е., другими словами, площади трапеций с землей одинакового качества будут относиться, как произведения их боковых сторон по линии AB на сумму расстояний концов обоих оснований на линии AB до точки A ; при этом треугольник ACC_1 можно приравнять трапеции, у которой одно основание равно нулю и расположено в точке A .

Зная отношение площадей одинакового качества земли и отношение цен их категорий, например $m_1 : m_2 : m_3 : m_4$, можно получить отношение ценностей указанных трапеций и треугольника, а именно:

$$\text{ценн. } EBB_1E_1 : \text{ценн. } DEE_1D_1 : \text{ценн. } CDD_1C_1 : \text{ценн. } ACC_1 = \\ = [m_1 \times EB(AB + AE)] : [m_2 \times ED(AE + AD)] : [m_3 \times CD(AD + AC)] : (m_4 AC^2)$$

и затем отношение этих ценностей к ценности всего треугольника ABB_1 :

$$\text{ценн. } EBB_1E_1 : \text{ценн. } DEE_1D_1 : \text{ценн. } CDD_1C_1 : \text{ценн. } ACC_1 : \text{ценн. } ABB_1 = \\ = [m_1 \times EB(AB + AE)] : [m_2 \times DE(AE + AD)] : [m_3 \times CD(AD + AC)] : (m_4 \times AC^2) : [m_1 \times EB(AB + AE) + m_2 \times DE(AE + AD) + m_3 \times CD(AD + AC) + m_4 AC^2].$$

Таким образом мы получили ряд чисел, которым будут пропорциональны ценности участков EBB_1E_1 , DEE_1D_1 , CDD_1C_1 и ACC_1 в проектируемом треугольнике, и ценность самого проектируемого треугольника.

Зная заданную для проектирования ценность треугольника ABB_1 , мы можем определить отношение n или $\frac{1}{N}$ между величиной числа:

$$m_1 EB (AB + AE) + m_2 DE (AE + AD) + m_3 CD (AD + AC) + m_4 AC^2$$

и этой ценностью, и тогда нам будет известно, на какое число n нужно умножить или на какое число N разделить каждое из чисел, которым пропорциональны ценности участков различных категорий, для того, чтобы вместо этих чисел получить самые ценности площадей.

Для нахождения же величины площадей участков: EBB_1E_1 , DEE_1D_1 , CDD_1C_1 и ACC_1 , необходимо полученные их ценности разделить на соответствующие числа: m_1 , m_2 , m_3 и m_4 .

Что же касается площади всего проектируемого треугольника ABB_1 , то таковая, с одной стороны, может быть получена как сумма площадей участков одинаковых категорий, а, с другой стороны, самостоятельно следующим образом.

Для получения площадей участков одинаковой категории мы делили ценности их на числа: m_1 , m_2 , m_3 и m_4 , но легко видеть, что вместо этого мы могли бы умножить на n или делить на N те числа, которым пропорциональны эти площади, т.е. $EB(AB + AE)$, $DE(AE + AD)$, $CD(AD + AC)$ и AC^2 , а так как для треугольника ABB_1 таковым числом будет AB^2 , то для получения площади этого треугольника необходимо умножить AB^2 на n или разделить на N .

Сравнивая величину площади треугольника ABB_1 , полученную тем и другим образом, убедимся в правильности произведенного вычисления; проектирование же этой площади произведем по методу § 49.

Случай 2-й. Линии BB_1 , EE_1 , DD_1 и CC_1 перпендикулярны к линии AB (см. черт. 59).

Кроме метода случая 1-го здесь можно применить также и следующий метод.

Из подобия треугольников имеем:

$BB_1 : EE_1 : DD_1 : CC_1 = AB : AE : AD : AC$, где величины AC , AD и AE известны по данным измерений в натуре и AB по данным вычислений.

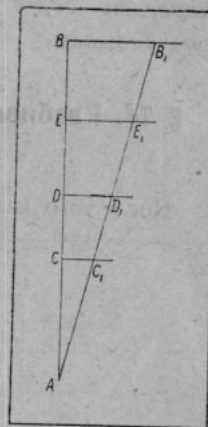
Принимая здесь BB_1 равной какой-либо удобной для вычисления величине, например 10 метрам, получим по ней, пользуясь указанным выше отношением, величины EE_1 , DD_1 и CC_1 , после чего будем знать площади трапеций EBB_1E_1 , DEE_1D_1 , CDD_1C_1 и треугольника ACC_1 и найдем затем их ценности, а равно также ценность всего треугольника ABB_1 . Сравнивая эту ценность с той ценностью, которая была нам задана для проектирования, найдем действительную величину линии BB_1 , а по ней длину AB_1 и угол A , после чего задача окажется решенной.

Площади же участков EBB_1E_1 , DEE_1D_1 , CDD_1C_1 и ACC_1 изменятся в том же отношении, как и площадь всего треугольника ABB_1 при BB_1 , равной 10 м и равной вычисленной величине, и по таким данным легко могут быть определены эти площади, а по ним и ценность их.

Сумма вычисленных площадей должна дать площадь $\triangle ABB_1$, а сумма их ценностей — ценность $\triangle ABB_1$, что послужит для проверки правильности произведенного вычисления.

Задача 1-я настоящего § может быть применена при получении проектных линий D_1E_1 и F_1K_1 чертежа 31, а задача 2-я — при получении линий HN и AB того же чертежа.

Переходя к общему вопросу настоящего §, укажем, что в отдельных случаях при проектировании кварталов или отдельных крупных участков могут получиться более сложные

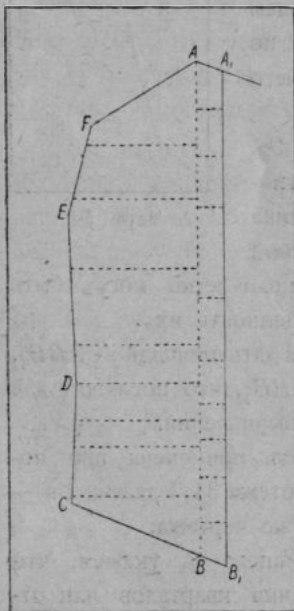


Черт. 59.

случаи, чем те, которые рассмотрены нами в задачах 1-й и 2-й настоящего § и в этих случаях мы будем рекомендовать произвести предварительно проектирование геометрическим способом или помощью планиметра и лишь затем, когда определится как площадь всего участка, так и площади, отнесенные ко всем различным категориям, т.-е., другими словами, *будет произведен расчет распределения площади проектируемого участка между оценочными категориями, — можно будет спроектировать более точно, методами главы пятой, полученную площадь.*

§ 74. Разбивка квартала на участки по данным оценки.

После того как в намеченные ранее величины кварталов внесены методами предыдущего § необходимые изменения и произведены вызванные этими изменениями исправления площадей оценочных категорий, будет известна площадь всего квартала и его общая ценность, а также площади всех отдельных участков одинаковой категории и ценность каждого из них.



Черт. 60.

На черт. 60 приведен пример квартала, в котором к ранее взятой площади $ABCDEF$, с 9 отдельными участками различных категорий, добавлена трапеция полоса AA_1B_1B с 10 отдельными по качеству земли участками, при чем нам известна площадь и ценность каждого из этих участков, а равно также площадь и ценность всего квартала A_1B_1CDEF .

Прежде чем приступить к проектированию участков, следует разбить весь квартал методами главы 6-й на простые фигуры, а затем определить, как составляется площадь каждой простой фигуры из земли различных категорий, и все эти данные, вместе с данными полученных в результате измерений в натуре промеров для оценочных линий, следует нанести для наглядности на схематический чертеж, примером которого могут быть каждый из чертежей 61 — 64.

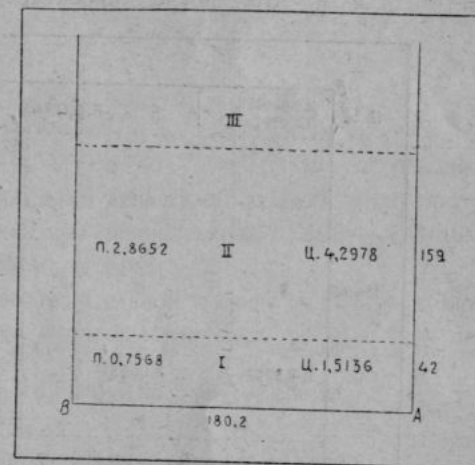
Ознакомление же с самым проектированием отдельных участков произведем на нижеследующих примерах.

ПРИМЕР 1-й. Требуется от линии AB имеющего форму прямоугольника квартала (черт. 61) спроектировать прямоугольником же участок ценностью 3,25 за основной ка-

тегории, при чем категории для данного примера будут те же, что и во всех примерах настоящей главы, а площади и ценности одинаковой категории квартала (I и II) показаны на черт. 61 в гектарах основной категории.

Поставим себе прежде всего вопрос, какова должна быть площадь проектируемого участка.

Из сравнения его ценности с ценностью участков I и II категории заключаем, что площадь I категории войдет целиком в проектируемый участок, и сверх того необходимо будет добавить некоторую площадь II категории ценностью

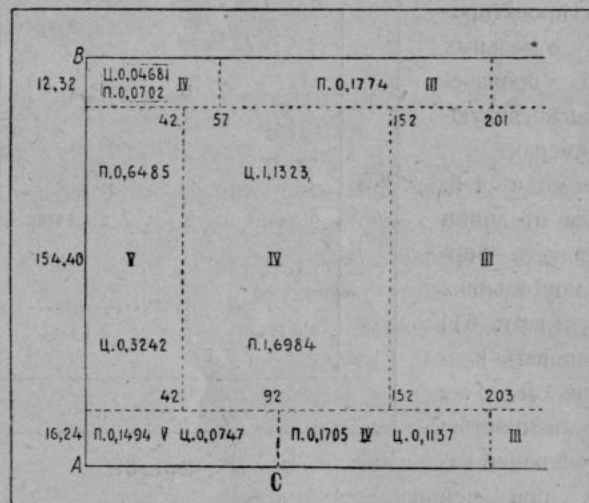


Черт. 61.

$3,2500 - 1,5136 = 1,7364$ га основной категории, что для II категории будет соответствовать $1,7364 : 1\frac{1}{2} = 1,1576$ га, и таким образом окажется, что проектируемый участок будет заключать в себе:

I кат.	0,7538	га
II "	1,1576	"
а всего	1,9144	га

Из это заключаем, что ширина участка будет $19144 : 180,2 = 106,24$ м и что после проектирования этого участка



Черт. 62

от площади II категории останется $2,8652 - 1,1576 = 1,7076$ га, равная по ценности $4,2978 - 1,7364 = 2,5614$ га основной категории.

Пример 2-й. Требуется от линии АВ имеющего форму прямоугольника квартала чертежа 62 спроектировать прямоугольником же участок ценностью 1,24 га основной категории по данным черт. 62 при принятых ранее оценочных категориях. Намечаем прежде всего для проектирования площадь до точки С

квартала. Тогда в указанную площадь войдут целиком следующие категории:

V	п. 0,6485	га	ц. 0,3242	га
V	" 0,1494	"	" 0,0747	"
IV	" 0,0702	"	" 0,0468	"
Итого . .	0,8681	га	" 0,4457	га

и сверх того IV категории $(92 - 42) 154,4 = 0,772$ га ценностью $0,772 : 1\frac{1}{2} = 0,5147$ га основной категории, и III категории $(92 - 57) 12,32 = 0,0431$ га, что вместе с предыдущим составит площадь:

$$0,8681 + 0,7720 + 0,0431 = 1,6832 \text{ га}$$

ценностью $0,4457 + 0,5147 + 0,0431 = 1,0035$ га основной категории, и таким образом обнаружится недостаток против причитающегося количества ценностью в $1,2400 - 1,0035 = 0,2365$ га основной категории.

Проектированием дополнительной полосы за точку С шириною в 1 м мы добавляем площадь, равную

$$154,40 + 16,24 + 12,32 = 182,96 \text{ м}^2$$

ценностью $16,24 : 1\frac{1}{2} + 154,40 : 1\frac{1}{2} + 12,32 = 126,08 \text{ м}^2$ основной категории, из чего заключаем, что к намеченной ранее площади необходимо добавить полосу шириною в $2365 : 126,08 = 18,76$ м и площадью $182,96 \times 18,76 = 3432 \text{ м}^2 = 0,3432$ га, после чего общая площадь спроектированного участка окажется равной $1,6832 + 0,3432 = 2,0264$ га, а ширина участка $92 + 18,76 = 110,76$ м.

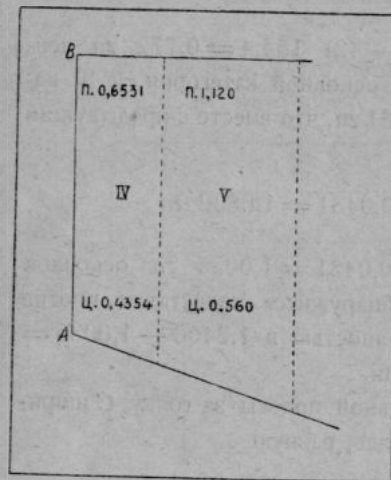
Проверка дает:

$182,96 \times 110,76 = 20265 \text{ м}^2 = 2,0265$ гектара, что говорит о верности произведенного вычисления площадей.

Распределив прирезанную дополнительную площадь в 0,3432 гектара между всеми 3 площадями оценочных категорий и по-

лучив, подобно тому как и в предыдущем примере, остатки этих площадей, закончим выполнение задания настоящего примера.

Пример 3-й. Требуется спроектировать трапецией в квартале (черт. 63) от линии AB площадь ценностью в 0,815 га основной категории и при оценочных категориях таких же, как и в предыдущем примере.



Черт. 63.

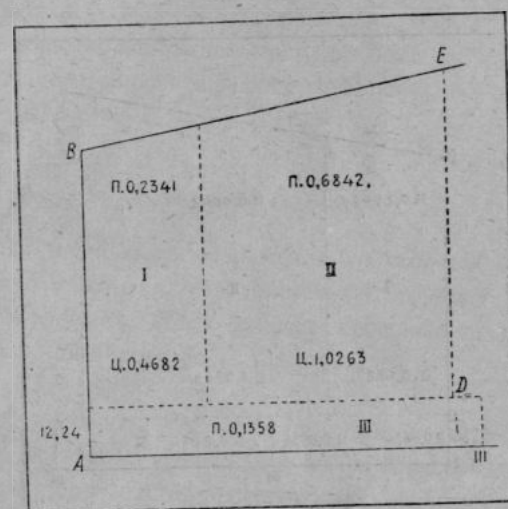
Из сравнения заданной для проектирования ценности участка с ценностью площадей оценочных категорий обнаруживаем, что в проектируемый участок войдет полностью площадь IV категории и сверх того должна быть добавлена от V категории площадь ценностью 0,815 — 0,4354 = 0,3796 га основной категории и величиной $0,3796 \times 2 = 0,7592$ га и, таким образом, проектируемый участок будет содержать в себе площадь, равную

$0,6531 + 0,7592 = 1,4123$ га, а самое проектирование может быть выполнено по методу главы седьмой.

Остаток V категории, получившийся после проектирования участка, окажется по величине своей равным $1,1200 - 0,7592 = 0,3608$ га ценностью $0,560 - 0,3796 = 0,1804$ га основной категории.

Пример 4-й. В простой фигуре формы прямоугольной трапеции (черт. 64) требуется от линии AB спроектировать участок той же формы ценностью в 1,42 га основной категории, по данным чертежа и при оценочных категориях таких же, как в других примерах настоящей главы.

Из сравнения заданной к проектированию ценности с ценностью оценочных категорий фигуры чертежа 64 заключаем, что в проектируемый участок войдет целиком категория I, часть категории II и соответствующая часть категории III; линия проектирования должна будет пройти поэтому влево от линии ED , т.е. по земле III и II категорий, и мы будем иметь пример, близкий случаю 1-му задачи 1-й предыдущего параграфа.



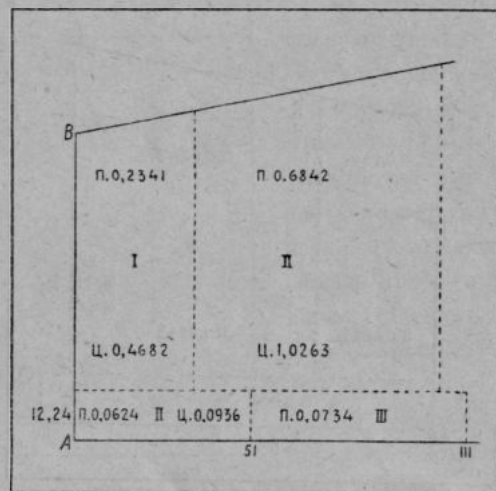
Черт. 61.

Применяя метод этой задачи и заменяя полосу III категории II категорией, отчего ширина этой полосы делается равной $12,24 : 1\frac{1}{2} = 8,16$ м, будем иметь в проектируемом участке лишь землю I и II категорий.

Так как ценность I категории равна 0,4682 га основной категории, то из II категории необходимо будет добавить площадь ценностью $1,4200 - 0,4682 = 0,9518$ га основной категории, а величиной равную $0,9518 : 1\frac{1}{2} = 0,6345$ га, и тогда общая площадь, намеченная к проектированию в измененной фигуре, будет $0,2341 + 0,6345 = 0,8686$ га.

Проектируя эту площадь трапецией по методу главы 7-й, получим окончательно высоту трапеции и боковую сторону; второе же основание найдем после прибавления к его найденной величине $12,24 - 8,16 = 4,08$ м, а площадь — после прибавления к $0,8686$ га величины $4,08 \cdot h$.

В правильности проектирования убедимся, подсчитав ценности всех категорий, вошедших в спроектированный участок.



Черт. 65.

Пример 5-й. В простой фигуре черт. 65, имеющей форму прямоугольной трапеции, необходимо от линии AB спроектировать участок такой же формы ценностью в $1,42$ га основной категории.

Прежде всего замечаем, что данный пример отличается от предыдущего лишь тем, что вместо III категории предыдущего примера взяты здесь II и III категории, и решение настоящего примера сведем поэтому к примеру предыдущему, для чего заменим II категорию при линии AC категорией III, от чего ценность этой площади мы преуменим на

$0,0936 - 0,0624 = 0,0312$ га основной категории, и решая настоящий пример методом предыдущего примера, мы будем проектировать поэтому участок ценностью не $1,42$ га основной категории, а $1,420 - 0,0312 = 1,3888$ га основной категории, так как тогда преумножение ценности участка на $0,0312$ га основной категории будет компенсировано уменьшением на это же количество заданной для проектирования ценности.

Таким образом настоящий пример может быть решен методом предыдущего, с проектированием участка ценностью $1,3888$ га основной категории.

§ 75. Заключение.

Предвидя возможные возражения со стороны защитников графических методов против применения точного проектирования в тех случаях, когда таковое совершается по данным оценки, мы позволим себе остановиться на этой стороне вопроса.

Нам могут заявить, что при отсутствии достаточно точных методов оценки, когда ценность участка определяется весьма приблизительно, производство проектирования исчисленных по оценочным данным площадей точными методами является излишней роскошью.

Но это возражение, кажущееся на первый взгляд достаточно убедительным, отпадает при более глубоком подходе к вопросу.

В самом деле, при проектировании участков по данным оценки имеют место две совершенно различных по существу своему операции: 1) *производство расчета для получения величины площади участка* в зависимости от качества входящей в этот участок земли и 2) *проектирование полученной на основании расчета площади*.

Данные оценочного расчета в последующее время будут все более и более терять свое значение для характеристики ценности участка, так как под влиянием целого ряда причин

эта последняя будет постоянно изменяться и *произведенный оценочный расчет представляет интерес главным образом в момент разверстания.*

Совсем иначе обстоит с теми данными, получившимися в результате землеустройства, которыми определяется площадь участка и его границы.

Этот материал будет представлять на все последующее время большой практический интерес как для государства, так и для заинтересованных землепользователей, и *к качеству этого рода землеустроительного наследия будущего следует отнестись с особенным вниманием.*

Сверх того мы берем на себя смелость утверждать, что вообще *производство разверстания с проектированием графическими методами отнюдь не ускоряет выполнения самой работы* и при сколько-нибудь умелом применении точных методов эти последние особенно при разбивке на мелкие участки, могут с успехом конкурировать в указанном отношении с методами графическими; не говоря уже о том, что начнут выходить из землеустроительной практики весьма печальные и чрезвычайно неблагоприятно отражающиеся на авторитете землемера случаи, когда заинтересованные граждане, применив самые первобытные орудия измерений, все же правильно обнаруживают неточности работы землемера.

Единственной более или менее уязвимой особенностью перехода к точным методам проектирования со стороны тех техников, которые в своей землеустроительной деятельности применяли до сих пор только графические методы, является *необходимость усиления их квалификации путем ознакомления с этими методами*, но таковое ознакомление может быть произведено без всякой посторонней помощи собственными усилиями отдельных землемерных техников, если они будут обладать средними способностями и проявят интерес к этим методам.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие	Стр. III
-----------------------	----------

ГЛАВА I.

ПОЛЬЗОВАНИЕ ТАБЛИЦАМИ ГАУССА.

1. Общие соображения	I
2. Пользование таблицами при наличии арифмометра	—
3. Пользование таблицами при отсутствии арифмометра	9
4. Выводы	19

ГЛАВА II.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ.

Общие сведения.

5. Приближенные числа и источники их происхождения в землемерном деле	23
6. Необходимость знакомства с теорией приближенных вычислений	25
7. Действительные погрешности	26
8. Граница погрешности	28
9. Точность приближенного числа	29
10. Границы приближенного числа и определение по ним границы его погрешности	30
11. Округление величины приближенного числа	33

Нахождение точности результата путем предварительного непосредственного вычисления величины его верхней и нижней границы при различных алгебраических действиях.

12. Сложение	44
13. Вычитание	47

	<i>Стр.</i>
14. Умножение	49
15. Деление	52
16. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня	54

Точность в относительных единицах и особенности таблиц Гаусса.

17. Погрешности абсолютные и относительные	57
18. Граница относительной погрешности	58
19. Точность в относительных единицах	—
20. Точность чисел, получаемых по различным строкам и столбцам таблиц Гаусса	59

Непосредственное определение границы погрешности результата при различных алгебраических действиях.

21. Необходимость непосредственного определения границы погрешности	62
22. Сложение	—
23. Вычитание	66
24. Умножение и деление приближенного числа на число точное .	67
25. Нахождение приращений координат при помощи арифмометра более точным способом	72
26. Умножение приближенных чисел	74
27. Деление приближенных чисел	78
28. Точность частного от деления на $\sin$ или $\lg$ малых углов . .	87
29. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня	91

Приложение.

30. Граница погрешности $\sin$ и $\cos$ приближенных углов	107
31. Точность вычисления при помощи пятизначных таблиц логарифмов	111
32. Заключение	116

ГЛАВА III.

ВЕШЕНИЕ ЛИНИЙ.

33. Различные способы вешения	117
34. Описательная сторона применения математического способа вешения	118

	<i>Стр.</i>
35. Обоснование метода вычисления поправочных углов для хода из двух линий	128
36. Обоснование метода вычисления поправочных углов для случая, когда вспомогательный ход состоит из трех или четырех линий	142
37. Вычисление величины линии основного хода, замененной вспомогательным ходом	150
38. Вычисление расстояния вспомогательного пункта хода из двух линий от провешиваемой линии	151
39. Вычисление расстояния вспомогательных пунктов хода из трех или четырех линий от провешиваемой линии . .	160
40. Перенесение пунктов вспомогательного хода на провешиваемую линию	173
41. О применении способа математического вешения линий на практике	181

ГЛАВА IV.

ЧИСЛА УСЛОВНО ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРИ ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ.

42. Общие сведения	184
43. Определение границы влияния увязки на меру и румб линии .	186
44. Нахождение поправки на меру линии и ее румб от увязки .	194

ГЛАВА V.

СОСТАВЛЕНИЕ ПРОЕКТА РАЗБИВКИ ДАЧИ НА КВАРТАЛЫ И ОТДЕЛЬНЫЕ КРУПНЫЕ УЧАСТКИ.

45. Общие сведения	197
46. Нахождение координат точки на заданном расстоянии от начала или конца данной линии	198
47. Проведение линии между двумя данными точками	201
48. Проведение линии из данной точки по заданному направлению .	207
49. Проектирование заданной площади линией из данной точки .	208
50. Проектирование заданной площади линией, параллельной данной	211
51. Заключение	212

ГЛАВА VI.

РАЗБИВКА НА ПРОСТЫЕ ФИГУРЫ.

	<i>Стр.</i>
52. Общие сведения	217
53. Разбивка на прямоугольные фигуры	221
54. Разбивка на косоугольные фигуры	225

ГЛАВА VII.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРАПЕЦИЙ.

55. Общие сведения	235
56. Способ предварительного геометрического проектирования	—
57. Вывод формул для вычисления второго основания трапеции	240
58. Вычисление второго основания трапеции по формулам помощью арифмометра	246
59. Вычисление второго основания трапеции по формулам без помощи арифмометра	250
60. Исправление вычисленной величины второго основания трапеции для согласования с увязанными данными	253
61. О точности вычисления второго основания трапеции по формулам	257
62. Определение высоты и боковых сторон трапеции при проектировании по формулам	260
63. Другие способы проектирования трапеции заданной площади	262
64. Выводы	268

ГЛАВА VIII.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ У ЖИВОГО УРОЧИЩА.

65. Два способа проектирования	270
66. Проектирование по данным измерений в натуре	274
67. Проектирование планиметром	280

ГЛАВА IX.

СОСТАВЛЕНИЕ ПРОЕКТА РАЗБИВКИ КВАРТАЛА НА УЧАСТКИ.

68. Сведение вопроса к проектированию простых фигур	282
69. Производство увязки и округления спроектированных отрезков	285

ГЛАВА X.

ПРОИЗВОДСТВО ОЦЕНКИ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО ОЦЕНОЧНЫМ ДАННЫМ.

	<i>Стр.</i>
70. Сведения общие и способы оценки	287
71. Математические требования к оценочным материалам	290
72. Обработка оценочных данных	292
73. Проектирование кварталов и отдельных крупных участков	293
74. Разбивка квартала на участки по данным оценки	306
75. Заключение	313

