БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ
ВОДНА-МЕЛІЁРАЦЫЙНЫ ІНСТЫТУТ

ПРОФ. І. К. БАГАЯЎЛЕНСКІ

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕОМЭТРЫЯ

1932

КООПЭРАЦЫЙНАЕ ВЫДАВЕЦТВА
СТУДЭНТАЎ ГОРАЦКІХ ВНУ

ПРОФ. І. К. БАГАЯЎЛЕНСКІ

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕОМЭТРЫЯ

Складзена паводле лекцый
І. Л. РАЗОУСКІМ і В. Л. НІСЬНЕВІЧАМ

ПАСЬМЕРТНАЕ ВЫДАНЬНЕ
ПАД РЭДАКЦ. В. Л. НІСЬНЕВІЧА

КООПЭРАЦЫЙНАЕ ВЫДАВЕЦТВА
СТУДЭНТАЎ ГОРАЦКІХ ВНУ

ГОРКІ, БССР 1932

Упаўгалоўлітбел № 110
Заказ № 629—2000 экз.
Горкі, Друкарня Комбінату ВНУ

ПРАДМОВА

Гэта кніга складзена па заданьні Мэліярацыйнага гуртка б. Беларускай Дзяржаўнай Акадэміі Сельскае Гаспадаркі і зьяўляецца першай спробай даць падручнік па вышэйшай матэматыцы на беларускай мове. Матар'ялам для складаньня паслужылі запісы лекцый, чытаных нябожчыкам проф. І. К. Багаяўленскім на Мэліярацыйным факультэце памянёнай Акадэміі. У складаньні II часткі кнігі—„Аналітычная геомэтрыя ў прасторы“, я ня мог прыняць удзелу, і яна складзена цалкам тав. І. Л. Разоўскім. Першае літаграфаванае выданьне „Аналітычнай геомэтрыі“ выйшла пры жыцьці І. К. Багаяўленскага ў 1930 г. Гэта пасьмяротнае выданьне ў асноўным паўтарае папярэдняе. Некаторыя зьмены ўнесены ў тэрмінолёгію, некалькі задач выкінуты і часткова заменены новымі. У заключэньне вынашу падзяку выдавецкай камісіі мэлгуртка, у асабістасьці тав. Ф. Н. Цярэшка, Загадчыку Выдавецтвам Горацкіх ВНУ Д. Р. Новікаву і тав. І. Г. Савінэру, за энэргічную садзейнасьць пры выпуску гэтай кнігі, а таксама тав. Е. С. Рабец за старанна праведзеную карэктуру.

В. Нісьневіч.

Красавік 1932 г.

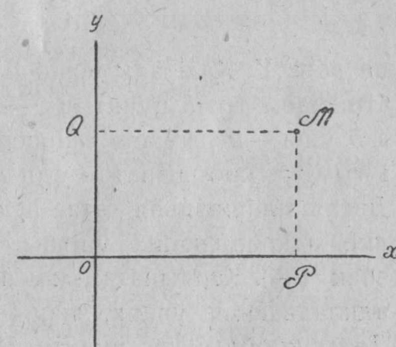
РАЗЬДЗЕЛ I

§ 1. КООРДЫНАТЫ

Аналітычная геомэтрыя ёсьць навука, якая дасьледвае ўласьцівасьці геомэтрычных элемэнтаў з дапамогай прыстасаваньня альгебрычных формул.

Мэтод, якім аналітычная геомэтрыя ажыцьцяўляе гэту задачу, ёсьць мэтод коордынат. Коордынаты ўводзяцца ў аналітычную геомэтрыю з мэтай вызначыць палажэньне пункту ў прасторы з дапамогай заданьня некаторых лікаў.

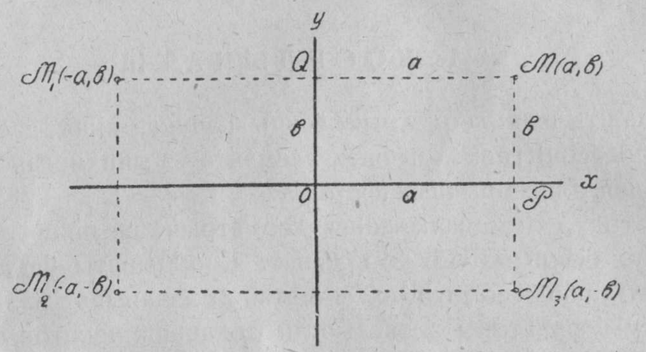
Возьмем на роўніцы просты кут XOY (рыс. 1). Бакі гэтага куту (OX, OY) назавем восямі коордынат, а пункт O перасеку іх назавем пачаткам коордынат.



Рыс. 1

Возьмем на нашай роўніцы пункт M. Адцінак OP завецца абсцысай і адцінак OQ — ордынатай пункту M. Абодва адцінкі OP і OQ, ці што адно і тое-ж, адлегласьці PM і QM завуцца коордынатамі пункту.

Калі мы вымераем велічыні PM і QM з дапамогай якойнебудзь адзінкі, дык лікі, якія мы атрымаем, і будуць звацца лікавымі коордынатамі, ці проста коордынатамі пункту. Адгэтуль відавочна, што, ведаючы палажэньне пункту і маючы адзінку памеру, мы заўсёды зможам знайсьці коордынаты пункту. Аднак, калі мы спробуем разьвязаць адваротную задачу, гэта значыць, па дадзеных коордынатах пункту знайсьці ці пабудаваць гэты пункт, дык задача будзе некалькі неазначанай. Сапраўды, няхай нам дадзены восі коордынат і коордынаты a і b якога-небудзь пункту (рыс. 2). Як пабудаваць нам пункт? Адкладзем управа па восі OX у прынятым маштабе a адзінак, а па восі OY уверх b адзінак і правядзем лініі QM і PM роўналежна адпаведным восям. Тады пункт M іх перасеку і будзе шуканым пунктам. Але відавочна, што тыя-ж коордынаты мае і пункт M_1, які атрымаецца, калі адкласьці a адзінак улева па восі X, а b адзінак уверх



Рыс. 2

па восі Y. Калі адкласьці a улева па OX, а b уніз па OY, атрымаем трэці пункт M_2, — урэшце, адкладваючы a управа, а b уніз — атрымаем чацьверты пункт M_3. Значыцца, адным і тым-жа коордынатам адпавядаюць 4 пункты на роўніцы. Дзеля зьнішчэньня гэтае неазначанасьці, умовіліся абсцысам, якія адкладваюцца ўправа, прыпісваць знак (+), а ўлева знак (—). Ордынатам-жа прыпісваем знак (+), калі яны адкладваюцца ўверх, знак (—), калі яны адкладваюцца ўніз. Тады коордынаты пункту M будуць:

$$(+a, +b),$$

$$M_1 — (-a, +b),$$

$$M_2 — (-a, -b)$$

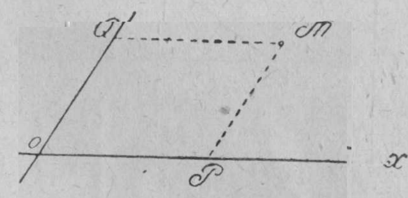
і

$$M_3 — (+a, -b).$$

Пасьля прынятых умоў, кожнай дадзенай пары лікавых значэньняў коордынат будзе адпавядаць толькі адзін цалкам азначаны пункт.

Значыцца, мэтод коордынат дае магчымасьць вызначаць палажэньне адвольнага пункту двума лікамі, і наадварот,— для ўсякай пары лікаў знайсьці адзіны адпавядаючы ім пункт.

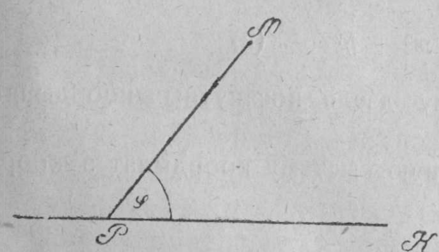
Сыстэмы каардынат, у якіх кут між восямі просты, завуцца простакутнымі сыстэмамі. Такой сыстэмай і была пададзеная вышэй. Аднак, існуюць і косакутныя сыстэмы коордынат, кут паміж якіх ня роўны 90°, напрыклад, сыстэма XOY, нарысаваная на рыс. 3. Няхай дадзен пункт M у такой сыстэме коордынат. Тады коордынатамі яго будуць адцінкі MP і MQ, роўналежныя восям коордынат.



Рыс. 3

Адносна гэтае сыстэмы магчыма сказаць усё тое, што было сказана аб простакутнай сыстэме. Такім чынам мы знайшлі спосаб выяўляць палажэньне пункту на роўніцы, з дапамогай дадзеных на роўніцы 2-х простых, якія перасякаюцца паміж сабой. Усе такія сыстэмы коордынат завуцца просталінейнымі, ці Дэкартавымі (ад імя францускага матэматыка Дэкарта).

Існуе яшчэ шмат іншых сыстэм коордынат. З іх найбольш ужываецца полярная сыстэма коордынат.



Рыс. 4

Няхай на роўніцы дадзена якая-небудзь простая лінія, якую назавем *полярнай восьсю* (рыс. 4), і на ёй пункт P, які завецца *полюсам.*

Тады палажэньне адвольнага пункту цалкам вызначаецца адлегласьцю PM пункту ад полюсу і кутом φ, які ўтворан лініяй PM з восьсю. Гэта адлегласьць PM завецца *радыюсам-вектарам. Радыюс-вектар* PM і кут φ і будуць *полярнымі коордынатамі пункту* M. Прыстасуем мэтод коордынат напершае для разьвязваньня наступных пытаньняў.

§ 2. АДЛЕГЛАСЬЦЬ ПАМІЖ ДВУМА ПУНКТАМІ

Няхай маем сыстэму простакутных коордынат.

Дадзены пункты M і N (рыс. 5) з коордынатамі (x_1, y_1) і (x_2, y_2).

Трэба знайсьці адлегласьць паміж імі.

З простакутнага трыкутніка MNR знаходзім:

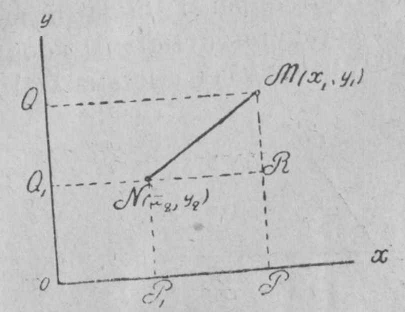
$$MN^2 = NR^2 + RM^2$$

але:

$$NR = P_1P = OP - OP_1 = x_1 - x_2;$$

а

$$RM = Q_1Q = OQ - OQ_1 = y_1 - y_2.$$



Рыс. 5

Такім чынам, назваўшы цераз d шуканую адлегласьць MN, атрымаем:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

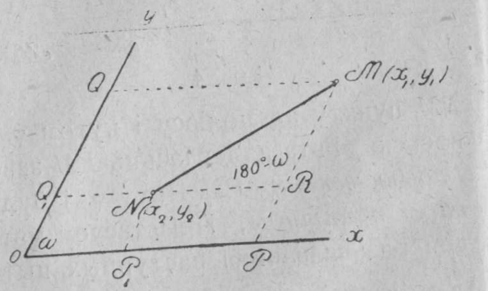
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (1)$$

Калі адным з пунктаў зьяўляецца пачатак коордынат, дык абедзьве коордынаты яго роўны нулю. Формула (1) прымае наступны выгляд:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

Разьвяжам тую-ж задачу дзеля косакутных коордынат (рыс. 6).

Няхай мы маем косакутную сыстэму коордынат з коордынатным кутом ω і 2 пункты M і N з коордынатамі адпаведна (x_1, y_1) і (x_2, y_2). Адлегласьць MN паміж пунктаў ёсьць бок косакутнага трыкутніка MNR, у выніку чаго паводле вядомай тэорэмы трыгонамэтрыі атрымаем:



Рыс. 6

$$MN^2 = NR^2 + RM^2 - 2NR \,.\, RM \,.\, \mathrm{cs}\, R$$

але кут

$$R = 180° - \omega$$

(куты з адпаведна роўналежнымі бакамі), значыцца:

$$\mathrm{cs}\, R = \mathrm{cs}\,(180° - \omega) = -\,\mathrm{cs}\,\omega.$$

Далей маем:

$$NR = x_1 - x_2;$$

$$RM = y_1 - y_2$$

Захоўваючы папярэдняе азначэньне адлегласьці, маем:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\,(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2)\ \mathrm{cs}\,\omega$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\,(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2)\ \mathrm{cs}\,\omega} \qquad (1')$$

Увага: калі ў формуле (1') лічыць

$$\omega = 90° \ (\mathrm{cs}\,\omega = 0),$$

дык атрымаем формулу (1) для прастакутнай сыстэмы коордынат, якая такім чынам зьяўляецца прыватным выпадкам формулы (1').

Увага: ува ўсіх выведзеных формулах знак $\pm$ перад радыкалам адкідаецца, бо мы шукаем толькі абсолютную велічыню адлегласьці.

Задачы

1. На восі абсцыс знайсьці пункт на роўнай адлегласьці ад пачатку коордынат і ад пункту $(-5\,,3)$.

2. Праз пункт $(2\,,-3)$ праходзіць простая, роўналежная восі x. Знайсьці на гэтай простай пункт на роўнай адлегласьці ад восі y і ад пункту $(-3\,,1)$, а гэтак-сама пункт, які знаходзіцца ад пачатку коордынат на адлегласьці, роўнай 5.

3. Знайсьці коордынаты вяршыні роўнаплечнага трыкутніка, калі гэта вяршыня ляжыць на восі коордынат, і калі аснова трыкутніка дадзена коордынатамі канцоў $(1\,,2)$ і $(-1\,,4)$.

Падзел адцінка ў дадзеным стасунку

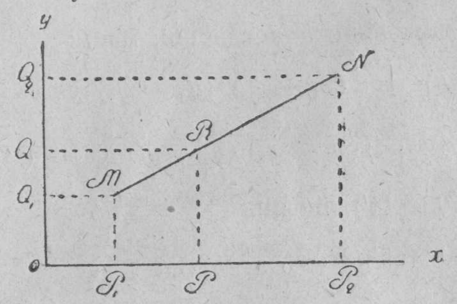
Гэта задача разьвязваецца зусім аднолькава як у простакутных, так і косакутных коордынатах.

Дадзена сыстэма каардынат XOY; два пункты M і N. Трэба знайсьці на простай MN такі пункт R, каб адлегласьці яго ад пунктаў M і N знаходзіліся бы ў стасунку $\frac{m}{n}$, дзе

m і n дадзеныя вялічыні, г. з.:

$$\frac{MR}{RN}=\frac{m}{n},$$

такі пункт можа ляжаць як унутры, так і па-за адцінкам MN. Разгледзім 1-ы выпадак. Няхай коордынаты пункту M будуць (x_1, y_1), пункту N — (x_2, y_2), а шуканыя коордынаты пункту R — (x, y). Правядзем праз пункты M, N і R лініі P_1M, P_2N і PR, роўналежныя OY; лініі QM, Q_2N і OR роўналежныя OX. Тады адцінкі MN і P_1P_2 расьсякуцца роўналежнымі простымі на пропорцыянальныя часткі. А таму:



Рыс. 7

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{MR}{RN}=\frac{m}{n}$$

але:

$$P_1P = OP - OP_1 = x - x_1$$

$$PP_2 = OP_2 - OP = x_2 - x$$

у выніку

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n};$$

$$n(x-x_1)=m(x_2-x)$$

Калі разьвяжам гэта раўнаньне адносна x, знойдзем:

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \qquad (3).$$

Разважаючы падобна папярэдняму, знойдзем:

$$\frac{MR}{RN}=\frac{Q_1Q}{QQ_2}=\frac{m}{n};$$

$$Q_1Q = y - y_1;$$

$$QQ_2 = y_2 - y$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n} \qquad (3).$$

Калі мы шукаем коордынаты сярэдзіны адцінку, дык

$$m=n$$

і мы атрымаем наступныя формулы:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (3').$$

Коордынаты сярэдзіны адцінку роўныя сярэднему арытмэтычнаму з коордынат яго канцоў.

У выпадку, калі пункт ляжыць па-за адцінкам (рыс. 8):

$$\frac{MR}{NR}=\frac{m}{n}=$$

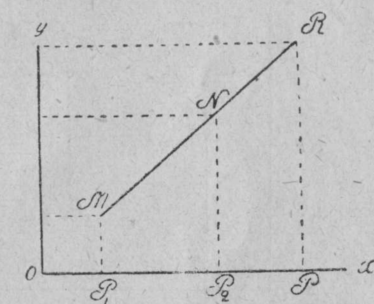
$$=\frac{P_1P}{P_2P}=\frac{x-x_1}{x-x_2};$$

адкуль

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

аналёгічна:

$$y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$



Рыс. 8

Задачы

1. Вяршыні трыкутніка — $(3, 5)$, $(8, -7)$, $(-2, 1)$. Знайсьці даўжыні яго бакоў і мэдыян, цэнтр цяжару і радыюс апісанага круга.

2. Дзьве вяршыні трыкутніка — $(3, 7)$ і $(-2, 5)$. Знайсьці трэцюю вяршыню так, каб сярэдзіны бакоў, якія праходзяць праз яе, ляжалі на восях коордынат.

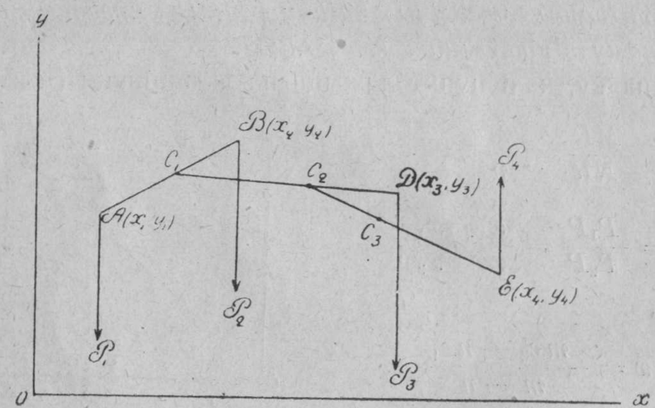
3. Па коордынатах дзьвюх вяршынь і пункту перасеку дыягоналяй паралелаграма, знайсьці коордынаты дзьвюх другіх вяршынь.

4. Дадзены координаты дзьвюх вяршынь трыкутніка A (3, 2) і B (5, 6), бок AC ў 3 разы больш за бок BC. Вызначыць координаты пункту перасеку бісэктрысы куту C з бокам AB

5. Дадзены координаты дзьвюх вяршынь паралелаграма. Знайсьці координаты дзьвюх другіх вяршынь, калі пункт перасеку дыягоналяй павінен ляжаць на аднэй з восяй, а трэцяя вяршыня на простай, роўналежнай восі Y, і на дадзенай адлегласьці ад гэтае восі.

Цэнтр роўналежных сіл

Дадзены роўналежныя сілы P_1, P_2, P_3, P_4 . . . , прыкладзеныя ў пунктах (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) і г. д.



Рыс. 9

Цэнтр C_1 дзьвюх роўналежных сіл P_1 і P_2 дзеліць адцінак AB у стасунку:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{P_2}{P_1}$$

а таму, координаты пункту C_1 ёсьць:

$$x_{c_1} = \frac{x_1P_1 + x_2P_2}{P_1 + P_2};$$

$$y_{c_1} = \frac{y_1P_1 + y_2P_2}{P_1 + P_2}$$

У гэтым пункту прыкладзена роўнадзейная

$$(P_1 + P_2).$$

Сіла

$$(P_1 + P_2)$$

разам з сілай P_3 даюць роўнадзейную

$$(P_1 + P_2 + P_3),$$

прыкладзеную ў цэнтры C_2. Абсцысы гэтага цэнтру паводле папярэдняй формулы выражаюцца:

$$x_{c_2} = \frac{\frac{x_1P_1 + x_2P_2}{P_1 + P_2}(P_1 + P_2) + x_2P_3}{(P_1 + P_2) + P_3} =$$

$$= \frac{x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Скарочана абазначым гэты выраз так:

$$x_{c_2} = \frac{\Sigma xP}{\Sigma P}$$

Ордыната пункту C_2 атрымае аналёгічны выраз:

$$y_{c_2} = \frac{\Sigma yP}{\Sigma P}$$

Прыкладаючы чацьвертую сілу, пятую сілу і г. д., атрымаем для координат цэнтру ўсіх дадзеных роўналежных сіл выраз:

$$x_c = \frac{\Sigma xP}{\Sigma P};$$

$$y_c = \frac{\Sigma yP}{\Sigma P}$$

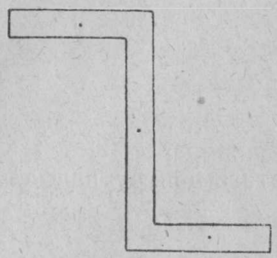
дзе сумы распаўсюджваюцца на ўсе дадзеныя сілы.

Задачы

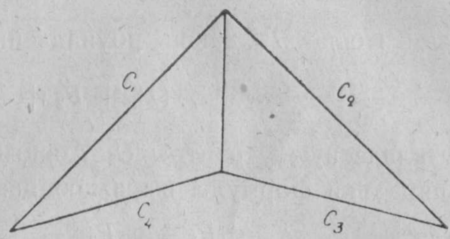
1. Знайсьці цэнтр цяжару фігуры, складзенай з простакутнікаў.

Шукаем цэнтр цяжару кожнага простакутніка (пункт перасеку дыягоналяй). Дапускаючы, што вага кожнага простакутніка знаходзіцца ў яго цэнтры цяжару, шукаем цэнтр цяжару ўсёй фігуры (рыс. 10).

2. Знайсьці цэнтр цяжару фэрмы (рыс. 11).



Рыс. 10

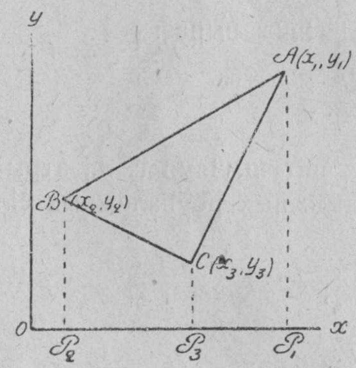


Рыс. 11

Плошча трыкутніка па коордынатах яго вяршынь

Дадзены пункты A, B і C з коордынатамі (x_1, y_1), (x_2, y_2) і (x_3, y_3). Знайсьці плошчу трыкутніка ABC. Правядзем простыя AP_1, BP_2 і CP_3, роўналежныя восі Y. Плошча трыкутніка:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } P_1ABP_2 - \text{пл. } P_1ACP_3 - \text{пл. } P_3CBP_2$$



Рыс. 12

плошча трапэцыі:

$$\text{пл. } P_1ABP_2 = \frac{1}{2}(AP_1 + BP_2)\,P_2P_1 = \frac{1}{2}\,(y_1 + y_2)\,(x_1 - x_2)$$

$$\text{пл. } P_1ACP_3 = \frac{1}{2}(AP_1 + CP_3)\,P_3P_1 = \frac{1}{2}\,(y_1 + y_3)\,(x_1 - x_3)$$

$$\text{пл. } P_3CBP_2 = \frac{1}{2}(P_3C + BP_2)\,P_2P_3 = \frac{1}{2}\,(y_3 + y_2)\,(x_3 - x_2)$$

У выніку плошча трыкутніка роўна:

$$\text{пл. } \Delta = \frac{1}{2}\,[(y_1 + y_2)\,(x_1 - x_2) - (y_1 + y_3)\,(x_1 - x_3) + - (y_3 + y_2)\,(x_3 - x_2)]$$

Расчыняем дужкі і скарачаем:

$$\text{пл. } \Delta = \frac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 + x_2y_3)$$

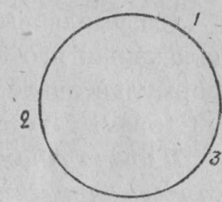
Калі згрупуем члены з аднолькавымі значкамі пры x і вынесем x за дужкі, канчаткова атрымаем:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,[x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)] \quad (4)$$

Калі-б мы згрупавалі члены з аднолькавамі значкамі пры y, дык атрымалі-б для тэй-жа плошчы наступную формулу:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,[y_1\,(x_3 - x_2) + y_3\,(x_2 - x_1) + y_2\,(x_1 - x_3)] \quad (4а)$$

Парадак значкоў у формуле (4) лёгка ўпомніць, ужываючы наступнае мнэмонічнае правіла. Пранумаруем вяршыні трыкутніка лічбамі 1, 2, 3, ідучы ў дадатным напрамку кутоў (ад дадатнага напрамку восі X да дадатнага напрамку восі Y) і разьмесьцім гэтыя лічбы ў тым-жа парадку ўздоўж акружыны (рыс. 13).



Рыс. 13

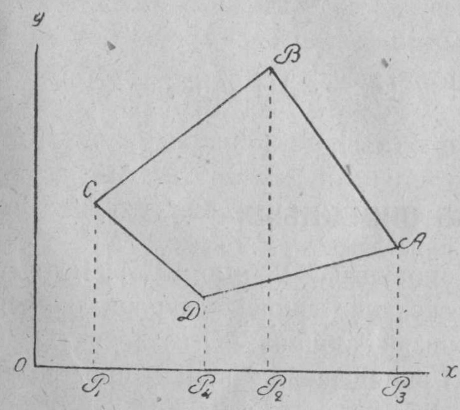
У першым члене формулы (4) значкі ідуць па парадку (1, 2, 3).

У далейшых членах значкі атрымліваюцца кругавой заменай (2, 3, 1), (3, 1, 2).

У формуле (4а) трэба мяняць значкі ў адваротным напрамку: (1, 3, 2) (3, 2, 1) (2, 1, 3).

Плошча многакутніка па коордынатах яго вяршынь

Плошчу ўсякага многакутніка магчыма атрымаць, як альгебрычную суму некаторых трапэцый, напр. плошчу чатырохкутніка $ABCD$ (рыс. 14) атрымаем, калі з сумы плошчаў дзьвюх трапэцый адымем суму плошчаў дзьвюх іншых трапэцый.



Рыс. 14

Азначым коордынаты вяршынь A, B, C, D адпаведна праз (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) і выразіўшы плошчу кожнае трапэцыі праз коордынаты яе вяршынь, атрымаем:

$$S = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_1 - x_2) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_2 - x_3) +$$

$$- \frac{y_1 + y_4}{2}(x_1 - x_4) - \frac{y_4 + y_3}{2}(x_4 - x_3)$$

Расчыніўшы дужкі і зрабіўшы ўсе дзеяньні, аналёгічныя тым, якія мы рабілі пры вылічэньні плошчы трыкутніка, атрымаем:

$$S = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \right.$$

$$\left. + x_4(y_1 - y_3)\right] \qquad (5)$$

Зразумела, што плошча кожнага многакутніка пры ўсякім палажэньні яго адносна восяй коордынат будзе выражацца формулай аналёгічна формуле (5).

Словамі гэту формулу магчыма выказаць так:

Плошча многакутніка роўна паўсуме здабыткаў абсцысы кожнае вяршыні на розьніцу ордынат наступнай і папярэдняй вяршыні пры умове абходу многакутніка ў дадатным напрамку кутоў.

Тую-ж плошчу магчыма вызначыць формулай другога віду, аналёгічна формуле (4а), менавіта:

Плошча многакутніка роўна паўсуме здабыткаў ордынаты кожнае вяршыні на розьніцу абсцыс папярэдняй і наступнай вяршыні.

Паводле новага азначэньня формула будзе мець так выгляд:

$$S = \frac{1}{2}\left[y_1(x_4 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \right.$$

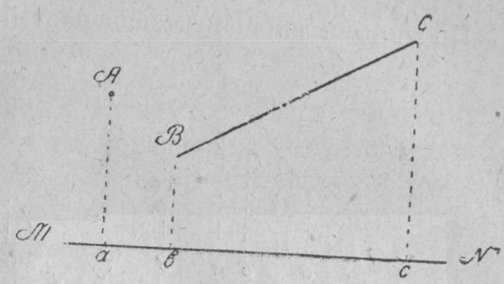
$$\left. + y_4(x_3 - x_1)\right] \qquad (5')$$

§ 3. АБ ПРОЕКЦЫЯХ

Няхай мы маем вось проекцыі MN (рыс. 15). Проекцыяй пункту A на гэту вось завецца аснова a пэрпэндыкуляра Aa на вось MN. Проекцыяй адцінка BC на вось MN завецца адцінак bc восі, які зьмяшчаецца паміж проекцыямі крайніх пунктаў адцінка BC.

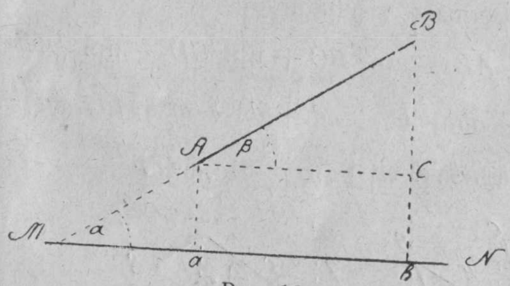
Тэорэма. Проекцыя адцінка на вось роўна самому адцінку, памножанаму на косінус кута паміж напрамкамі адцінка і восі.

Няхай дадзены адцінак AB і вось проекцыі MN.



Рыс. 15

Спусьцім з пунктаў A і B пэрпэндыкуляры Aa і Bb на вось MN; адцінак ab і будзе проекцыяй адцінка AB. З пункту A правядзем лінію AC, роўналежную MN.



Рыс. 16

З трыкутніку ABC знаходзім:

$$AC = AB \,.\, \text{cs}\,\beta.$$

Мы ведаем, што

$$AC = ab,$$

а кут

$$\beta = \alpha,$$

які ўтварае вось MN і адцінак AB, значыцца:

$$ab = AB \,.\, \text{cs}\,\alpha \qquad (6),$$

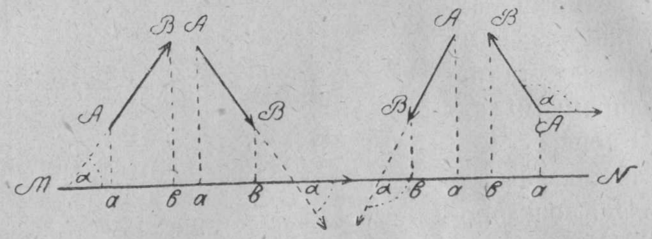
што і трэ'было давесьці.

Трэба заўважыць, што кутом паміж адцінкам і восьсю завецца той, які ўтвараецца дадатным напрамкам восі і напрамкам адцінка, які паказваецца пасьля даўжыні літарамі (напр., адцінак AB), ці стрэлкай.

Пры такой умове кут можа быць больш за 90° і cosinus у гэтым выпадку можа прымаць адмоўныя значэньні. У такім выпадку проекцыя лічыцца таксама адмоўнай. Так (рыс. 17), калі лічыць напрамак восі дадатным—управа, то проекцыі першых двух адцінкаў будуць дадатнымі (кут α—востры), а апошніх двух—адмоўнымі (кут α—тупы).

Як бачым з рысунку, проекцыі першых двух адцінкаў ідуць ў дадатным напрамку восі MN, а проекцыі двух апошніх адцінкаў—у адмоўным напрамку восі MN.

Проекцыяй ламанай завецца альгэбрычная сума проекцый



Рыс. 17

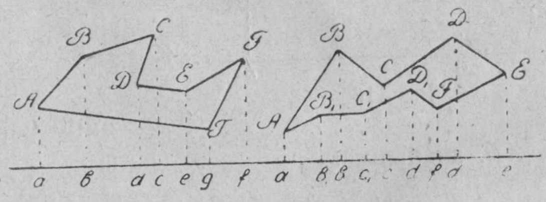
простых, якія яе складаюць. Яна роўна проекцыі адцінка яе замыкаючай, г. зн. лініі, якая злучае канцы гэтай ламанай.

Напр. (рыс. 18), проекцыя ламанай

$ABCDEFG$ роўна пр. AB + пр. BC + пр. CD + пр. DE +

+ пр. EF + пр. $FG = ab + bc + cd + de + ef + fg = ag =$

= проекцыі AG (тут адрэзкі cd і fg—адмоўныя).



Рыс. 18

Вынік I. Проекцыя замкнутай ламанай лініі роўна нулю, таму што канцы яе супадаюць, і адцінак, які іх злучае, пераходзіць ў пункт.

Вынік II. Проекцыі некалькіх ламаных, канцы якіх супадаюць, роўны паміж сабой, таму што канцы іх злучае той самы адцінак.

§ 4. ПЕРАТВАРЭНЬНЕ КООРДЫНАТ

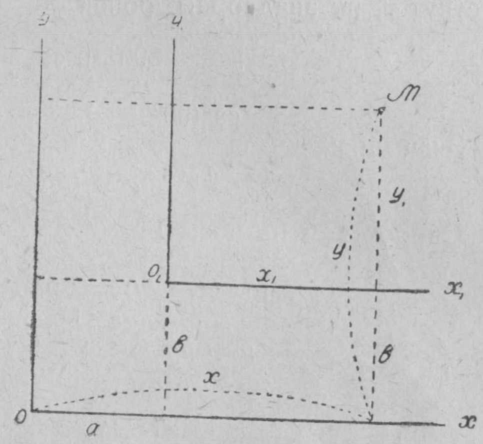
Няхай нам патрэбна замяніць першапачатковую сыстэму коордынат на новую сыстэму. Трэба па коордынатах пункту адносна аднэй сыстэмы знайсьці яе коордынаты адносна другой сыстэмы. Разгледзім некалькі выпадкаў.

1. Перанос пачатку коордынат

Няхай напрамак новых восяй коордынат супадае з напрамкам старых, а пачатак пераносіцца ў пункт з коордынатамі a і b. Азначым коордынаты пункту M (рыс. 19) адносна старой сыстэмы коордынат праз (x, y), а адносна новай (x_1, y_1). З рысунка відаць, што:

$$x = x_1 + a;$$

$$y = y_1 + b \quad (7)$$



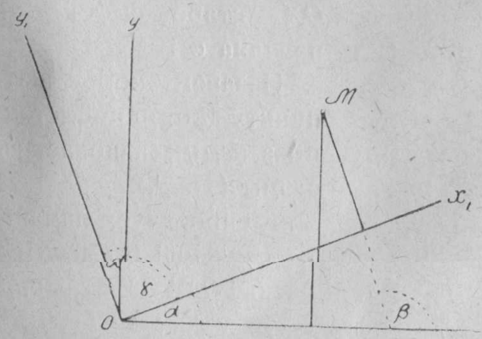
Рыс. 19

Гэта зн.: старыя коордынаты роўны новым плюс коордынаты новага пачатку паводле старой сыстэмы.

2. Зварот простакутных коордынат

Сыстэма простакутных коордынат павернута на некаторы кут α, прычым пачатак застаецца на месцы.

Няхай дадзена першапачатковая сыстэма коордынат XOY і новая сыстэма X_1OY_1, восі якой складаюць адпаведна куты α з старымі восямі. Для пункту M старыя коордынаты—x і y, а новыя x_1, y_1. Проекцыі дзьвюх ламаных $(x + y)$ і $(x_1 + y_1)$ на кожную вось роўны паміж сабой таму, што



Рыс. 20

гэтыя ламаныя маюць адны і тыя самыя канцы O і M.

Спроектуем іх на вось X:

$$\text{пр.}_x\,(x + y) = \text{пр.}_x\,(x_1 + y_1)$$

$$x + o = x_1 \operatorname{cs} \alpha + y_1 \operatorname{cs} \beta$$

але кут β, як знадворны, ровен

$$90^\circ + \alpha,$$

а

$$\operatorname{cs}\,(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sn} \alpha$$

Значыцца:

$$x = x_1 \operatorname{cs} \alpha - y_1 \operatorname{sn} \alpha \qquad (8a)$$

Спроектуем на вось Y:

$$\text{пр.}_y\,(x + y) = \text{пр.}_y\,(x_1 + y_1)$$

$$o + y = x_1 \operatorname{cs} \gamma + y_1 \operatorname{cs} \alpha;$$

але

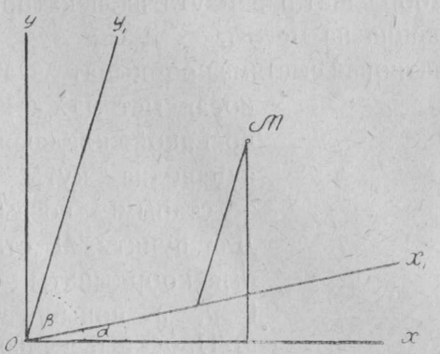
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Значыцца:

$$y = x_1 \operatorname{sn} \alpha + y_1 \operatorname{cs} \alpha \qquad (8b)$$

3. Ператварэньне простакутных коордынат у косакутныя

Дадзена простакутная сыстэма коордынат XOY (рыс. 21) і новая — X_1OY_1, прычым OX_1 і OY_1 новае сыстэмы ўтвараюць куты з восьсю OX — старой сыстэмы адпаведна α і β.



Гыс. 21

Назавем коордынаты пункту M старой сыстэмы праз (x, y), а новае сыстэмы (x_1, y_1).

Зноў спроектуем ламаныя $(x + y)$ і $(x_1 + y_1)$ на восі OX і OY, атрымаем:

Проектуем на OX:

$$\text{пр.}_x\,(x + y) = \text{пр.}_x\,(x_1 + y_1)$$

$$x = x_1 \operatorname{cs} \alpha + y_1 \operatorname{cs} \beta \qquad (9a)$$

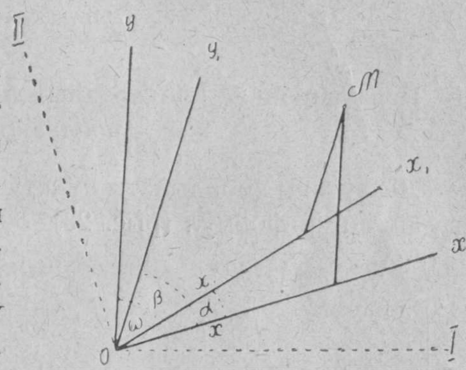
Проектуем на OY:

$$\text{пр.}_y\,(x + y) = \text{пр.}_y\,(x_1 + y_1)$$

$$y = x_1 \operatorname{sn} \alpha + y \operatorname{sn} \beta \qquad (9b).$$

4. Ператварэньне косакутных коордынат у косакутныя

Дадзены (рыс. 22) косакутная сыстэма XOY з коордынатным кутом ω і новая сыстэма X_1OY_1, прычым восі OX_1 і OY_1 утвараюць з восьсю OX адпаведна куты α і β.



Рыс. 22

Знойдзем формулы ператварэньня коордынат пункту M, коордынаты якога назавем па-старому.

Спроектуем ламаныя $(x + y)$ і $(x_1 + y_1)$ спачатку на простую I, пэрпэндыкулярную да OY (у формулу ўвойдзе толькі x), а пасьля на простую II, пэрпэндыкулярную да OX (у формулу ўвойдзе y). Знойдзем куты, якія ўтвараюцца адцінкамі, якія мы проектуем, і восьсю проекцыі I.

$$\text{кут }(x, \mathrm{I}) = \frac{\pi}{2} - \omega$$

$$\text{кут }(y, \mathrm{I}) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\text{кут }(x_1, \mathrm{I}) = \frac{\pi}{2} - \omega + \alpha$$

$$\text{кут }(y_1, \mathrm{I}) = \frac{\pi}{2} - \omega + \beta.$$

У выніку маем:

$$x \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + o = x_1 \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \omega + \alpha\right) + y_1 \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \omega + \beta\right),$$

адкуль маем:

$$x = \frac{x_1 \operatorname{sn}(\omega - \alpha) + y_1 \operatorname{sn}(\omega - \beta)}{\operatorname{sn}\omega} \qquad (11a)$$

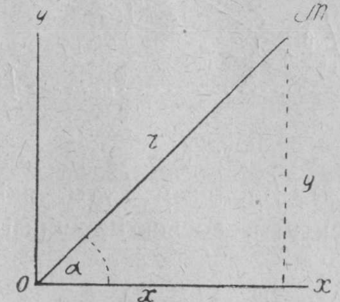
$$\text{пр.}_{\text{II}}(x + y) = \text{пр.}_{\text{II}}(x_1 + y_1)$$

$$o + y \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = x_1 \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y_1 \operatorname{cs}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$y = \frac{x_1 \operatorname{sn}\alpha + y_1 \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\omega} \qquad (11b).$$

5.Ператварэньне Дэкартавых координат ў полярныя і наадварот

Дэкартавы координаты пункту ператвараюцца ў полярныя з дапамогай формул (рыс. 23):



Рыс. 23

$$x = r \,.\, \operatorname{cs}\alpha$$

$$y = r \,.\, \operatorname{sn}\alpha$$

Разьвяжам гэта раўнаньне адносна r і α:

$$r^2 = x^2 + y^2\,;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,;$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

Дзьве апошнія формулы — формулы ператварэньня полярных координат у Дэкартавыя.

Задачы

1. Координаты пункту адносна простакутнай сыстэмы будуць (3, 7).

Знайсьці координаты гэтага-ж пункту, калі пачатак перанесены ў пункт (1, — 2), а напрамак восяй захованы ранейшы.

2. Ператварыць простакутныя восі координат у косакутныя (з тым-жа пачаткам), калі старыя координаты аднаго пункту (2, 2), а новыя (3, 1).

3. Адносна простакутнай сыстэмы координат, координаты пункту будуць:

$$x = 4\,;\; y = -5.$$

Знайсьці координаты гэтага-ж пункту, калі за восі координат прыняты бісэктрысы кутоў, паміж восямі дадзенай сыстэмы координат.

РАЗЬДЗЕЛ II.

Простая лінія

§ 1. РАЎНАНЬНЕ ПРОСТАЙ

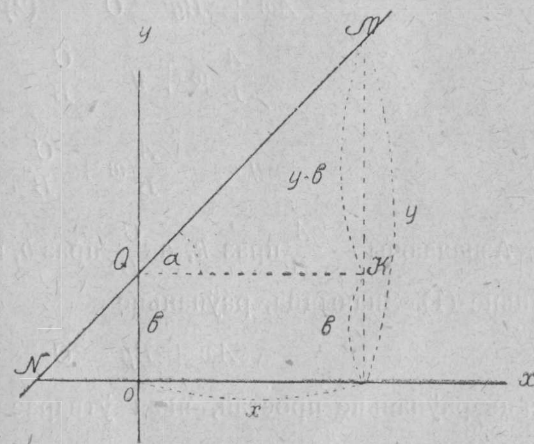
Няхай мы маем сыстэму координат XOY (рыс. 24) і некаторую простую NM, якая адсякае на восі Y адцінак

$$OQ = b$$

і стварае з восьсю X кут α.

Возьмем які-небудзь пункт M на простай і азначым яго координаты праз (x, y).

Правядзем праз пункт Q лінію QK, роўналежную восі OX. З простакутнага трыкутніка QKM знойдзем:



Рыс. 24

$$KM = QK \,.\, \operatorname{tg}\alpha.$$

ці

$$y - b = x \,.\, \operatorname{tg}\alpha$$

Азначыўшы $\operatorname{tg}\alpha$ праз k, атрымаем:

$$y = kx + b \qquad (1).$$

Такая залежнасьць існуе паміж координатамі адвольнага пункту, узятага на простай. Значыцца, раўнаньне (1) ёсьць залежнасьць паміж бягучымі координатамі (x, y) пунктаў простай MN. Зразумела, што калі возьмем пункт S не на простай MN, дык паміж яго координатамі (x, y) ужо ня будзе залежнасьці (1). Наадварот, няхай дадзена якое-небудзь раўнаньне (1). Яно мае нязьмернае мноства (бязьмежны лік) разьвязкаў. Будзем лічыць кожную пару разьвязкаў (x, y) за координаты пункту на роўніцы. Гэтыя пункты, відавочна, ляжаць на аднэй простай [1]).

На падставе гэтага раўнаньне (1) завецца *раўнаньнем простай*.

Коэфіцыент k, роўны $\operatorname{tg}\alpha$, завецца кутавым коэфіцыентам простай, а велічыні k і b, якія характарызуюць палажэньне простай, завуцца парамэтрамі. Усякае неазначанае раўнаньне 1-ай ступені з 2 невядомымі:

$$Ax + By = C$$

магчыма прывесьці да выгляду раўнаньня: (1)

$$Ax + By = C \qquad (2)$$

$$\frac{A}{B}x + y = \frac{C}{B}$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Азначаючы $-\frac{A}{B}$ праз k, а $\frac{C}{B}$ праз b, мы і атрымаем раўнаньне (1). Значыцца, раўнаньне

$$Ax + By = C$$

ёсьць раўнаньне простай, якая ўтварае з восьсю x кут, tg якога роўны $-\frac{A}{B}$ (кутавы коэфіцыент) і адсякае (простая) на восі OY адрэзак $\frac{C}{B}$.

Раўнаньне (1) завецца раўнаньнем з кутавым коэфіцыентам, а раўнаньне (2) — раўнаньнем простай у агульным

[1]) Праверыць гэта графічна для некалькіх разьвязкаў раўнаньня:

$$2x + y = 4.$$

выглядзе, ці агульным раўнаньнем простай. Такім чынам, раўнаньнем дадзенай простай завецца раўнаньне 1-ае ступені з двума невядомымі, якому здавальняюць координаты адвольнага пункту на гэтай простай. Са сказанага вынікае, што кожнай простай адпавядае сваё раўнаньне 1-ае ступені, і кожнаму раўнаньню 1-ае ступені адпавядае некаторая адзіная простая. Дзеля таго, каб пабудаваць простую паводле дадзенага раўнаньня, трэба прывесьці яе да выгляду раўнаньня з кутавым коэфіцыентам

$$y = kx + b$$

і правесьці праз пункт на восі Y

$$(x = 0,\ y = b)$$

простую, нахіленую да восі X пад кутом α, tg якога роўны кутавому коэфіцыенту k.

Напр., дадзена простая:

$$2x + y = 3,$$

прыводзім раўнаньне да выгляду (1):

$$y = -2x + 3;$$

адкуль

$$k = -2;$$

$$b = 3.$$

Праводзім праз пункт $(0, 3)$ такую простую, каб $\operatorname{tg}\alpha$ быў роўны -2. Але прасьцей пабудаваць простую, злучыўшы паміж сабой пункты перасеку яе з восямі координат. Каб знайсьці пункт перасеку простай з восьсю X, дапусьцім у раўнаньні простай

$$y = 0;$$

знаходзім x. Для атрыманьня пункту перасеку простай з восьсю Y, прымаем

$$x = 0$$

і знаходзім y. У нашым прыкладзе пры

$$y = 0,$$

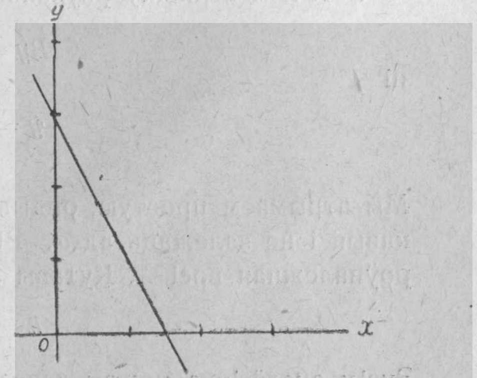
$$x = \frac{3}{2};$$

пры

$$x = 0,$$

$$y = 3$$

(рыс. 25).



Рыс. 25

Калі адкладзем знойдзеныя велічыні ў прынятым маштабе па восях X і Y і злучым атрыманыя пункты, знойдзем шуканую простую.

§ 2. ДАСЬЛЕДВАНЬНЕ РАЎНАНЬНЯ ПРОСТАЙ

Разгледзім цяпер прыватныя выпадкі агульнага раўнаньня простай:

$$Ax + By = C \qquad (2),$$

калі адна ці некалькі каардынат яго пераходзяць у 0.

1) Няхай

$$C = 0,$$

тады раўнаньне (2) прыме выгляд:

$$Ax + By = 0$$

Відавочна, што атрыманаму раўнаньню здавальняюць значэньні:

$$x = 0, \ y = 0.$$

А гэта азначае, што простая праходзіць праз пачатак каардынат.

2) Няхай адзін з коэфіцыентаў пры невядомых пераходзіць ў нуль, напр.,

$$A = 0.$$

У гэтым выпадку раўнаньне (2) прымае такі выгляд:

$$By = C,$$

ці

$$y = \frac{C}{B}.$$

Мы атрымаем простую, ардынаты ўсіх пунктаў якой аднолькавыя і не залежаць ад x. Відавочна, гэта будзе простая, роўналежная восі X. Кутавы коэфіцыент яе

$$k = 0.$$

Зусім аналёгічна можам давесьці, што, калі ў раўнаньні (2)

$$B = 0,$$

дык мы атрымаем простую, роўналежную восі y. Кутавы коэфіцыент яе роўны ∞.

Такім чынам, калі ў раўнаньні простай адсутнічае якаянебудзь з каардынат, то простая роўналежна адпаведнай восі.

3) Дапусьцім цяпер, што

$$A = 0$$

і

$$C = 0.$$

Раўнаньне (2) прымае ў гэтым выпадку выгляд:

$$By = 0,$$

ці

$$y = 0.$$

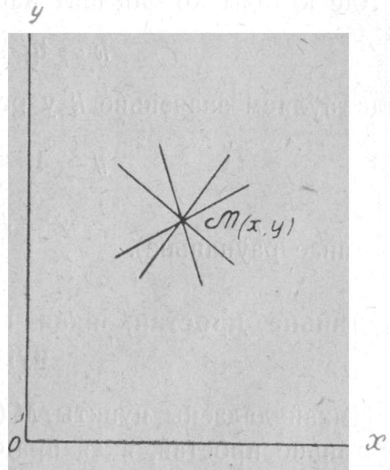
Гэта раўнаньне ўяўляе вось x-аў, бо на ёй ляжаць усе пункты, ардынаты якіх роўны 0. Аналёгічна, раўнаньне

$$x = 0$$

ўяўляе вось y-аў.

§ 3. ПУЧОК ПРОСТЫХ

Дадзены пункт M $(x_1, \ y_1)$. Праз гэты пункт можна правесьці бясьмернае мноства простых (рыс. 26).



Рыс. 26

Знойдзем раўнаньне адвольнай простай, якая праходзіць праз пункт M. Напішам раўнаньне простай з кутавым коэфіцыентам у агульным выглядзе:

$$y = kx + b \qquad (1)$$

Каб знайсьці абодва парамэтры k і b, неабходны дзьве ўмовы. Мы-ж маем толькі адну ўмову, — прахаджэньне простай праз дадзены пункт. Мы можам такім чынам знайсьці толькі адну залежнасьць паміж парамэтрамі; значыцца, адзін з парамэтраў застаецца адвольным.

З тэй прычыны, што простая павінна праходзіць праз пункт (x_1, y_1), координаты пункту павінны здавальняць раўнаньню (1).

Падставім у гэта раўнаньне координаты (x_1, y_1):

$$y_1 = kx_1 + b \qquad (2)$$

Гэта і ёсьць шуканая залежнасьць паміж парамэтрамі. Знойдзем адсюль парамэтр b і падставім яго значэньне ў раўнаньне (1), ці прасьцей, адымем ад раўнаньня (1) роўнасьць (2). Атрымаем:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (3),$$

дзе k — адвольны лік.

Гэта і ёсьць раўнаньне *пучка простых*. Яму здавальняе адвольная простая, якая праходзіць праз пункт (x_1, y_1).

Надаючы k розныя значэньні, атрымаем розныя простыя, якія праходзяць праз пункт (x_1, y_1).

Прыклад. Знайсьці раўнаньне простай, якая праходзіць праз пункт (2, 1) і стварае з восьсю X кут $= 45°$.

Пішам раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт (2, 1):

$$y - 1 = k(x - 2)$$

Але кутавы коэфіцыент нашай простай

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Падстаўляем значэньне k у раўнаньне, атрымліваем:

$$y - 1 = x - 2,$$

ці

$$x - y = 1$$

(шуканае раўнаньне).

Раўнаньне простай, якая праходзіць праз 2 дадзеныя пункты

Няхай дадзены пункты $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$. Знойдзем раўнаньне простай, якая праходзіць праз гэтыя пункты.

Напішам раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт M:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (1).$$

Дзеля таго, каб простая праходзіла праз пункт $N(x_2, y_2)$, неабходна, каб координаты пункту здавальнялі раўнаньню простай. Падставім координаты (x_2, y_2) у раўнаньне (1). Атрымаем:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

Падзелім раўнаньне (1) на роўнасьць (2).

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (3)$$

Гэта і ёсьць шуканае раўнаньне.

Кут паміж дзьвюх простых

Няхай дадзены простыя AB і CD (рыс. 27) раўнаньнямі:

$$y = kx + b$$

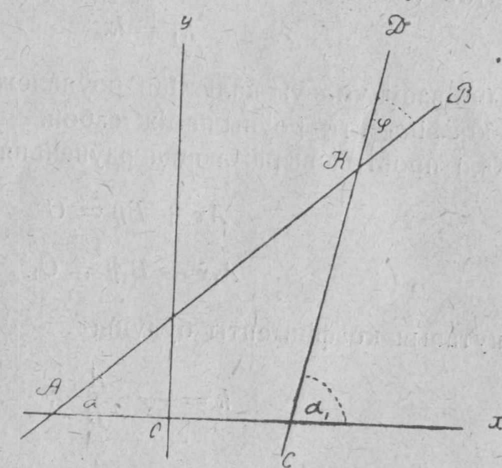
$$y = k_1x + b_1$$

Знойдзем кут φ паміж імі. Абазначым куты, складзеныя нашымі простымі з восьсю X, праз α і α_1.

Тады:

$$\operatorname{tg} \alpha = k$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$$



Рыс. 27

Для трыкутніка ACK кут α_1 ёсьць знадворны; таму:

$$\alpha_1 = \alpha + \varphi$$

адкуль

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha$$

ці

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} \qquad (1)$$

Але

$$\operatorname{tg} \alpha = k;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$$

і роўнасьць (1) перапішацца:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1} \quad (2)$$

Так выразіцца tg кута паміж простымі праз іхнія кутавыя коэфіцыенты.

Умовы роўналежнасьці і пэрпэндыкулярнасьці простых

1. Калі простыя AB і CD роўналежныя, дык тангенс кута ($\operatorname{tg} \varphi$) паміж імі роўны нулю, і значыцца (згодна формулы (2)):

$$k_1 = k.$$

Атрымліваем умову: калі лініі роўналежныя, то іхнія кутавыя коэфіцыенты роўны паміж сабой.

Калі простыя выражаюцца раўнаньнямі:

$$Ax + By = C$$

і

$$A_1x + B_1y = C_1$$

то кутавыя коэфіцыенты будуць:

$$k = -\frac{A}{B};$$

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}.$$

У выпадку роўналежнасьці:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1},$$

ці

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1},$$

Атрымліваем, такім чынам, умову роўналежнасьці:

Дзьве простыя роўналежныя паміж сабой, калі коэфіцыенты пры зьменных пропорцыянальныя паміж сабой.

2. Калі простыя AB і CD пэрпэндыкулярныя паміж сабой, дык

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty,$$

а значыцца (згодна формулы 2):

$$1 + kk_1 = 0;$$

адкуль

$$k_1 = -\frac{1}{k}.$$

Атрымліваем умову пэрпэндыкулярнасьці простых: калі дзьве простыя пэрпэндыкулярны, дык іхнія кутавыя коэфіцыенты адваротныя па велічыні і процілеглыя па знаку.

Прыклад. Праз пункт $(5, -2)$ правесьці простую, пэрпэндыкулярную да простай:

$$2x - 3y = 4.$$

Напішам раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт $(5, -2)$:

$$y + 2 = k\,(x - 5).$$

Для простай

$$2x - 3y = 4$$

кутавы коэфіцыент

$$k = \frac{2}{3};$$

значыцца:

$$k_1 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Падстаўляем у раўнаньне пучка:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}\,(x - 5),$$

ці

$$3x + 2y = 11.$$

Пункт перасеку дзьвюх простых

Дадзены дзьве простыя:

$$Ax + By = C \quad (1)$$

$$A'x + B'y = C' \quad (2).$$

Пункт іх перасеку ляжыць адначасова на абедзьвюх простых і, значыцца, координаты яго павінны здавальняць абодвум раўнаньням (1) і (2). Каб знайсьці гэтыя значэньні x і y, якія здавальняюць адначасова раўнаньням (1) і (2), трэба іх сумесна разьвязаць.

Знаходзім:

$$x = \frac{CB' - C'B}{AB' - A'B} \qquad (3a)$$

$$y = \frac{AC' - A'C}{AB' - A'B} \qquad (3b)$$

Дасьледуем атрыманыя формулы.

1. Калі

$$AB' - A'B \neq 0,$$

дык x і y будуць мець канечныя значэньні, і мы атрымаем зусім азначаны пункт перасеку дзьвюх простых (1) і (2), координаты якога даюцца формуламі (3a) і (3b).

2. Няхай назоўнік

$$AB' - A'B = 0 \qquad (4),$$

але лічнікі ў роўнасьцях (3a) і (3b) ня роўны нулю, тады:

$$x = \infty,$$

$$y = \infty,$$

і пункт перасеку бесканечна далёкі, іначай кажучы, простыя (1) і (2) роўналежныя.

Роўнасьць (4) можна напісаць інакш так:

$$AB' = A'B;$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

гэта азначае, атрымліваем знаёмую ўмову—калі гэтыя простыя роўналежныя, то коэфіцыенты пры адпаведных зьменных пропорцыянальныя.

3. Няхай роўны нулю назоўнік і абодва лічнікі ў формулах (3a) і (3b), гэта азначае:

$$AB' - A'B = 0;$$

$$CB' - C'B = 0$$

і

$$AC' = A'C = 0 \qquad (5).$$

Тады для координат пункту перасеку мы атрымаем выразы:

$$x = \frac{0}{0};$$

$$y = \frac{0}{0}$$

Гэта значыць, координаты пункту перасеку неазначаныя. Інакш кажучы, гэтыя простыя перасякаюцца ў адвольным пункту, гэта азначае, зьліваюцца ў адну простую.

Ператвараем роўнасьць (5) такім чынам:

$$AB' = A'B,$$

ці

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'};$$

$$CB' = C'B,$$

ці

$$\frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}.$$

$$AC' = A'C,$$

ці

$$\frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}.$$

Адкуль можам напісаць:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \qquad (6)$$

Гэта значыць, усе тры коэфіцыенты адпаведна пропорцыянальныя.

Калі ўсе тры коэфіцыенты аднаго раўнаньня адпаведна пропорцыянальныя коэфіцыентам другога раўнаньня, дык такія два раўнаньні ўяўляюць адну і тую-ж простую.

Той-жа вынік можна атрымаць іншым шляхам. Азначым стасунак коэфіцыентаў

$$\frac{A}{A'} \text{ праз } q,$$

тады, прымаючы пад увагу роўнасьць (6), маем:

$$\frac{A}{A'} = q;$$

$$\frac{B}{B'} = q;$$

$$\frac{C}{C'} = q,$$

ці

$$A = A'q;$$

$$B = B'q;$$

$$C = C'q$$

і раўнаньні (1) і (2) перапішуцца так:

$$A'qx + B'qy = C'q \qquad (7)$$

$$A'x + B'y = C' \qquad (8)$$

Відавочна, што раўнаньні (7) і (8) роўназначныя, а таму яны павінны ўяўляць адну і тую-ж простую.

Раўнаньне простай у адцінках

Няхай дадзена простая, якая адсякае на восях коордынат адцінкі a і b. Трэба напісаць раўнаньне простай, у якім парамэтрамі зьяўляліся-б гэтыя адцінкі (рыс. 28).

Напішам раўнаньне простай з кутавым коэфіцыентам

$$y = kx + b \qquad (1)$$

Простая праходзіць праз пункт A, значыцца, коордынаты гэтага пункту $(a, 0)$ здавальняюць раўнаньню (1):

$$0 = ka + b,$$

адсюль

$$k = -\frac{b}{a}$$

Уводзім гэты выраз k у раўнаньне (1).

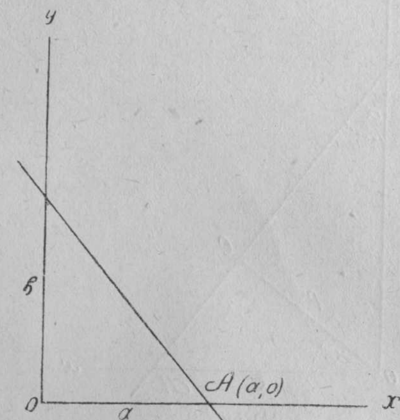
Атрымліваем:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

Дзелім раўнаньне на b і пераносім член з x у левую частку:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

(Раўнаньне простай у адцінках).



Рыс. 28

Прыклад. Прывесьці раўнаньне простай

$$2x + 3y = 4$$

да віду (2). Дзелім усё раўнаньне на свабодны член, каб у правай частцы атрымалася адзінка:

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{4}y = 1;$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$$

Значыцца,

$$a = 2;$$

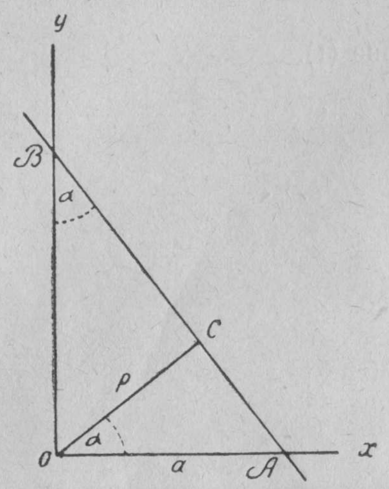
$$b = \frac{4}{3}.$$

Раўнаньне простай ў нормальнай форме

Няхай дадзена простая (рыс. 29)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1)$$

Спусьцім з пачатку коордынат пэрпэндыкуляр на простую. Няхай велічыня пэрпэндыкуляра будзе p, а кут, які ён стварае з восьсю X, будзе α. Зразумела, што простая зусім азначаецца велічынямі p і α, і значыцца, можна атрымаць раўнаньне простай з гэтымі двума парамэтрамі.



Рыс. 29

З простакутнага трыкутніка OAC знаходзім:

$$a = \frac{p}{\text{cs}\,\alpha},$$

а з трыкутніка OBC, у якім кут OBC роўны α (як куты з узаемна - пэрпэндыкулярнымі бакамі),

$$b = \frac{p}{\text{sn}\,\alpha}.$$

Падстаўляем знойдзеныя значэньні a і b у раўнаньне (1) Атрымаем:

$$\frac{x\,\text{cs}\,\alpha}{p} + \frac{y\,\text{sn}\,\alpha}{p} = 1$$

$$x\,\text{cs}\,\alpha + y\,\text{sn}\,\alpha = p \qquad (2).$$

Апошняе раўнаньне завецца раўнаньнем простай у нормальнай форме, ці проста нормальным раўнаньнем простай.

Няхай маем агульнае раўнаньне простай:

$$Ax + By = C \qquad (3)$$

і трэба перавесьці яго ў нормальную форму (2). Гэтыя два раўнаньні павінны ўяўляць адну і тую-ж простую, значыцца, коэфіцыенты пры невядомых павінны быць пропорцыянальныя; таму, помножыўшы раўнаньне (3) на некаторы множнік M, можна зрабіць коэфіцыенты яго, адпаведна роўнымі коэфіцыентам раўнаньня (2). Знойдзем гэты множнік. Пасьля памнажэньня раўнаньня (3) на M, мы атрымаем:

$$MAx + MBy = MC \qquad (4)$$

Параўнаем атрыманае раўнаньне з роўнасьцяй (2), знаходзім:

$$MA = \text{cs}\,\alpha;$$

$$MB = \text{sn}\,\alpha;$$

$$MC = p$$

Узьвядзем першыя дзьве з гэтых роўнасьцяй у квадрат і складзем:

$$M^2A^2 + M^2B^2 = \text{cs}^2\alpha + \text{sn}^2\alpha = 1;$$

адсюль знойдзем M:

$$M^2(A^2 + B^2) = 1;$$

$$M^2 = \frac{1}{A^2 + B^2};$$

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (6).$$

Множнік M завецца нормавальным множнікам. Каб ведаць, які знак з двух, што стаяць перад радыкалам у (6) належыць абраць для M, трэба памятаць, што p, якое стаіць у правай частцы раўнаньня (2), заўсёды лічыцца дадатнай велічынёй, таму знак трэба ўзяць з такім разьлікам, каб правая частка раўнаньня (3) была дадатнай. Значыцца, для M трэба ўзяць той знак, які мае коэфіцыент C.

Прыклад. Дадзена раўнаньне простай:

$$4x + 3y = 6;$$

знойдзем адлегласьць простай ад пачатку коордынат.

Прывядзем раўнаньне да нормальнай формы, а дзеля гэтага знойдзем нормавальны множнік

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{9 + 16}} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{25}} = \pm\frac{1}{5}.$$

Бярэм M дадатнае, бо правая частка нашага раўнаньня $C = 6$ дадатная.

Памножыўшы раўнаньне нашай простай на

$$M=\frac{1}{5},$$

атрымаем:

$$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{6}{5};$$

значыцца,

$$p=\frac{6}{5},$$

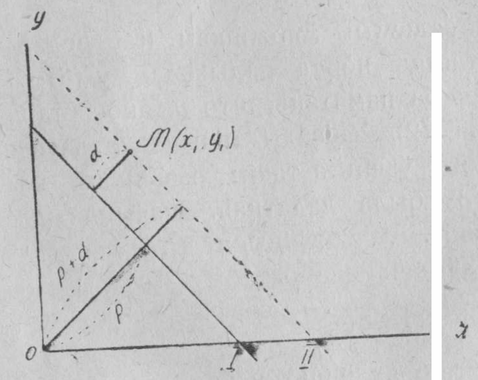
а p і ёсьць адлегласьць простай ад пачатку координат.

Адлегласьць ад пункту да простай

Дадзена простая (рыс. 30), раўнаньне якой у агульным выглядзе ёсьць:

$$Ax+By=C.$$

Пункт M з координатамі (x_1, y_1). Знойдзем адлегласьць гэтага пункту ад дадзенай простай. Прывядзем раўнаньне простай да нормальнага віду.



Рыс. 30

Няхай прыведзенае раўнаньне будзе:

$$x\,\mathrm{cs}\,\alpha + y\,\mathrm{sn}\,\alpha = p \qquad (1).$$

Правядзем праз пункт $M(x_1, y_1)$ простую II, роўналежную дадзенай I. Відавочна, што калі простыя роўналежны, дык нормальныя іхнія раўнаньні адрозьніваюцца толькі велічынямі p.

Пэрпэндыкуляр з пачатку координат на простую II, роўны па велічыні

$$p+d,$$

утварае з восьсю X той-жа кут α, як і дадзеная простая I. Таму нормальнае раўнаньне II простай напішацца ў выглядзе:

$$x\,\mathrm{cs}\,\alpha + y\,\mathrm{sn}\,\alpha = p + d \qquad (2).$$

Але гэта простая праходзіць праз дадзены пункт; значыцца, координаты (x_1, y_1) гэтага пункту здавальняюць раўнаньню (2), г. зн.:

$$x_1\,\mathrm{cs}\,\alpha + y_1\,\mathrm{sn}\,\alpha = p + d$$

Адсюль для шуканай адлегласьці d атрымаем формулу:

$$d = x_1\,\mathrm{cs}\,\alpha + y_1\,\mathrm{sn}\,\alpha - p.$$

Атрымоўваем правіла:

Дзеля таго, каб знайсьці адлегласьць ад пункту да простай, трэба прывесьці раўнаньне простай да нормальнай формы, перанесьці ўсе члены ў левую частку і замест бягучых координат падставіць координаты дадзенага пункту. Левая частка і дае шуканую адлегласьць.

Пры адшуканьні адлегласьці паміж пунктам і простай, трымаючыся сказанага, мы будзем атрымліваць у розных выпадках як дадатныя, так і адмоўныя значэньні для адлегласьцяй. Значыцца, адлегласьці пункту ад простай могуць быць дадатнымі і адмоўнымі.

Відавочна, што пры бесьперарыўным руху пункту па роўніцы адлегласьці яе ад дадзенай простай зьмяняюцца таксама бесьперарыўна, а значыцца, пераход ад дадатных значэньняў да адмоўных магчымы толькі праз нуль.

Прымаючы пад увагу, што адлегласьць пункту ад простай толькі тады роўная нулю, калі гэты пункт ляжыць на гэтай самай простай, выводзім, што адлегласьць зьмяняе свой знак толькі пры пераходзе пункту цераз самую простую. Выходзіць, што ўсякая простая дзеліць роўніцу на дзьве часткі: па адзін бок ляжаць пункты з дадатнымі адлегласьцямі да простай, па другі—з адмоўнымі.

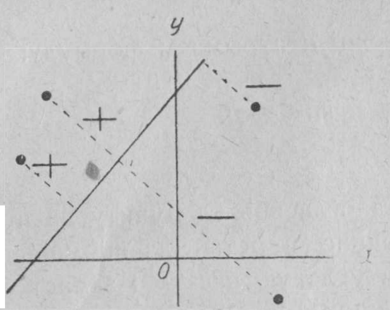
Калі будзем знаходзіць паводле агульнага правіла адлегласьць ад пачатку координат да простай, дык знойдзем:

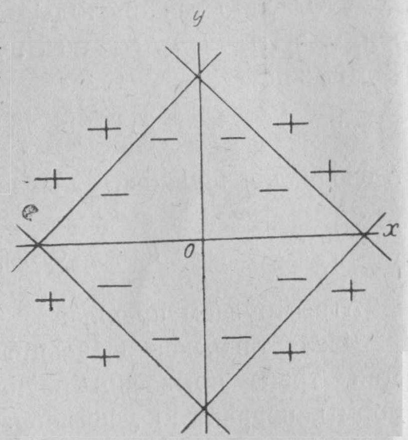
$$d = 0\,\mathrm{cs}\,\alpha + 0\,\mathrm{sn}\,\alpha - p = -p;$$

выяўляецца, што адлегласьць ад пачатку координат да простай заўсёды адмоўная. Адгэтуль выводзім:

1. Калі пункт і пачатак координат ляжаць па адзін бок ад простай, дык адлегласьць ад пункту да простай адмоўная (рыс. 31).

2. Калі пункт і пачатак ляжаць па розныя бакі ад простай, дык адлегласьць пункту да простай дадатная.

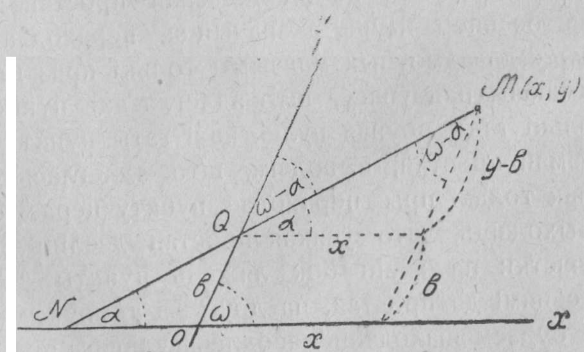




Рыс. 31

§ 4. РАЎНАНЬНІ ПРОСТАЙ У КОСАКУТНЫХ КООРДЫНАТАХ

1. Няхай маем косакутную сыстэму координат з координатным кутом ω і простую MN, якая адсякае на восі OY адцінак $OQ = b$ і стварае з восьсю X-аў кут α (рыс. 32).



Рыс. 32

Знойдзем раўнаньне гэтай простай у косакутных координатах.

Возьмем на нашай простай які-небудзь ппункт M з координатамі (x, y).

Правядзем праз пункт Q простую, роўналежную восі X. Утварыўся трыкутнік з двума бакамі $y - b$ і x і процілеглымі

кутамі α і $\omega - \alpha$, але бакі трыкутніка адносяцпа, як сінусы процілеглых кутоў, таму:

$$\frac{y - b}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$$

адкуль:

$$y = x\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)} + b \qquad (1)$$

Азначыўшы $\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ праз k, атрымаем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)} = k$$

$$y = kx + b \qquad (2).$$

Гэта ёсьць раўнаньне простай з кутавым коэфіцыентам у косакутных координатах.

Мы бачым, што гэтае раўнаньне зусім падобна да адпаведнага раўнаньня простай у простакутных координатах. Прымаючы $\omega = 90^\circ$ атрымаем:

$$k = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Раўнаньне простай з кутавым коэфіцыентам у простакутных координатах, чаго і трэ'было чакаць, зьяўляецца, як адсюль відаць, прыватным выпадкам раўнаньня (2).

2. Раўнаньне простай у адцінках (рыс. 33). Вывад зусім аналёгічны вываду гэтага раўнаньня ў простакутных координатах. Раўнаньне простай:

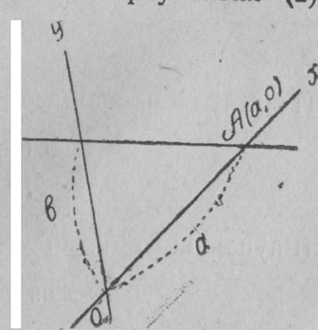
$$y = kx + b \qquad (2).$$

Простая праходзіць праз пункт $(a, 0)$, значыцца:

$$0 = ka + b;$$

адкуль

$$k = -\frac{b}{a}.$$



Рыс. 33

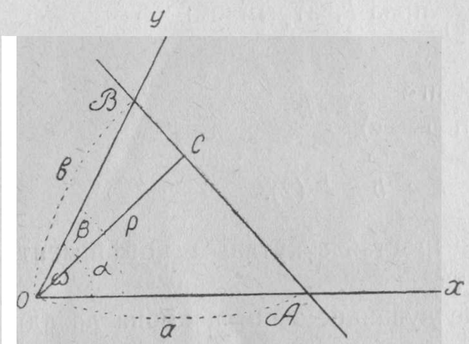
Падстаўляем гэтае значэньне k у раўнаньне (2):

$$y = -\frac{b}{a}x + b,$$

ці

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

3. Няхай дадзена сыстэма координат з кутом ω (рыс. 34) і простая, якая адсякае на восях адцінкі a і b; раўнаньне яе ў адцінках будзе:



Рыс. 34

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

Спусьцім з пачатку координат на простую пэрпэндыкуляр $OC = p$, і няхай ён утварае з восямі координат адпаведна куты α і β.

З простакутных трыкутнікаў OAC і OBC маем:

$$a = \frac{p}{\mathrm{cs}\,\alpha};$$

$$b = \frac{p}{\mathrm{cs}\,\beta}$$

Падстаўляем знойдзеныя значэньні a і b ў раўнаньне (3):

$$\frac{x\,\mathrm{cs}\,\alpha}{p} + \frac{y\,\mathrm{cs}\,\beta}{p} = 1$$

(Раўнаньне простай у нормальнай форме)

$$x\,\mathrm{cs}\,y + y\,\mathrm{cs}\,\beta = p \qquad (4).$$

4. Як прывесьці агульнае раўнаньне простай

$$Ax + By = C \qquad (5)$$

да нормальнага віду?

Дзеля гэтага неабходна знайсьці велічыню нормавальнага множніка. Але, па-першае, трэба знайсьці залежнасьць паміж трыгонометрычнымі функцыямі кутоў α, β і ω, адпаведную залежнасьці:

$$\mathrm{sn}^2\alpha + \mathrm{cs}^2\alpha = 1,$$

якой мы карысталіся ў выпадку простакутных координат.

З трыкутніка OAB (рыс. 34) знаходзім:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,.\,OB\,.\,\mathrm{cs}\,\omega =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{cs}\,\omega$$

але

$$a = \frac{p}{\mathrm{cs}\,\alpha};$$

$$b = \frac{p}{\mathrm{cs}\,\beta}$$

значыцца:

$$AB^2 = \frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha} + \frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\beta} - \frac{2p^2\,\mathrm{cs}\,\omega}{\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta} =$$

$$= \frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha\,\mathrm{cs}^2\beta}\left[\mathrm{cs}^2\beta + \mathrm{cs}^2\alpha - 2\,\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta\,\mathrm{cs}\,\omega\right] \qquad (6)$$

З другога боку, з простакутнага трыкутніка OBC:

$$BC = p\,\mathrm{tg}\,\beta$$

а з трыкутніка OAC:

$$AC = p\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Калі складзем апошнія роўнасьці, атрымаем:

$$AC + BC = AB = p\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)$$

З вядомай формулы трыгонометрыі

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{sn}\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta}$$

Значыцца:

$$AB = p\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) =$$

$$= \frac{p}{\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta}\,\mathrm{sn}\,(\alpha + \beta) = \frac{p}{\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta}\,\mathrm{sn}\,\omega$$

$$AB^2 = \frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha\, \mathrm{cs}^2\beta}\, \mathrm{sn}^2\omega \qquad (7).$$

Левыя часткі роўнасьцяй (6) і (7) роўныя, значыцца, роўныя і правыя, г. зн.:

$$\frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha\, \mathrm{cs}^2\beta}\left[\mathrm{cs}^2\beta + \mathrm{cs}^2\alpha - 2\,\mathrm{cs}\,\alpha\, \mathrm{cs}\,\beta\, \mathrm{cs}\,\omega\right] =$$

$$= \frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha\, \mathrm{cs}^2\beta}\, \mathrm{sn}^2\omega\,;$$

скарочваем на $\frac{p^2}{\mathrm{cs}^2\alpha\, \mathrm{cs}^2\beta}$, атрымаем:

$$\mathrm{sn}^2\omega = \mathrm{cs}^2\alpha + \mathrm{cs}^2\beta - 2\,\mathrm{cs}\,\alpha\, \mathrm{cs}\,\beta\, \mathrm{cs}\,\omega \qquad (8)$$

Гэта і ёсьць шуканая залежнасьць паміж трыгонюмэтрычнымі функцыямі кутоў α і β. Успомнім, што коэфіцыенты агульнага раўнаньня простай

$$Ax + By = C \qquad (5)$$

пасьля памножаньня ўсіх яго членаў на M павінны зрабіцца роўнымі адпаведна коэфіцыентам нормальнага раўнаньня

$$x\,\mathrm{cs}\,\alpha + y\,\mathrm{cs}\,\beta = p \qquad (4).$$

Значыцца:

$$MA = \mathrm{cs}\,\alpha,$$

$$MB = \mathrm{cs}\,\beta,$$

$$MC = p \qquad (9).$$

Уставім у роўнасьць (8) замест $\mathrm{cs}\,\alpha$ і $\mathrm{cs}\,\beta$ іхнія выразы з роўнасьцяй (9). Атрымаем:

$$\mathrm{sn}^2\omega = M^2A^2 + M^2B^2 - 2\,M^2AB\,\mathrm{cs}\,\omega$$

Адсюль, калі вынесем M^2 за дужкі, атрымаем:

$$M^2\,(A^2 + B^2 - 2\,AB\,\mathrm{cs}\,\omega) = \mathrm{sn}^2\omega$$

$$M^2 = \frac{\mathrm{sn}^2\omega}{A^2 + B^2 - 2\,AB\,\mathrm{cs}\,\omega}\,;$$

$$M = \pm\frac{\mathrm{sn}\,\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\,\mathrm{cs}\,\omega}} \qquad (10)$$

Адносна знака трэба трымацца таго-ж правіла, што і ў выпадку простакутных координат, які быў раней выведзены. Гэта значыць, знак M павінен быць аднолькавы са знакам C.

Задачы

1. Дадзена раўнаньне простай:

$$2x - 3y = 7.$$

Знайсьці: a) адцінкі, якія адсякаюцца на восях координат гэтай простай,

b) кут нахілу да восі X,

c) адлегласьць ад пачатку координат,

d) кут гэтай адлегласьці з восьсю X.

2. Напісаць раўнаньне простай, якая праходзіць праз пункт (3, — 5) і пункт перасеку простых:

$$x + y = 1$$

і

$$x - y = -1.$$

3. Праз пачатак координат правесьці простую пад кутом у 45° да простай

$$2x + 3y + 6 = 0.$$

4. Вылічыць плошчу трыкутніка, дадзенага раўнаньнямі бакоў:

$$x + y - 1 = 0,$$

$$x + 2y - 1 = 0,$$

$$4x + 5y - 7 = 0.$$

5. На простай

$$5x + y = 2$$

знайсьці пункт, які знаходзіцца ад простай

$$3x + 4y + 6 = 0$$

на адлегласьці, роўнай 4.

6. Вяршыні трыкутніка: $(3, 4)$, $(5, -6)$, $(-1, -3)$. Напісаць раўнаньні бакоў, вышынь, мэдыян і бісэктрыс. Давесьці аналітычна, што вышыні (мэдыяны, бісэктрысы) перасякаюцца ў адным пункту. Вылічыць велічыні вышынь, мэдыян, бісэктрыс, радыюса ўпісанай акружыны.

Знайсьці куты трыкутніка.

7. На восі абсцыс знайсьці гэткі пункт, каб простыя, якія злучаюць яго з двума дадзенымі пунктамі, былі пэрпэндыкулярныя паміж сабой.

8. Напісаць раўнаньне простай, якая на восі X адсякае адцінак 15, а на бісэктрысе кута паміж восямі ў другой чвэрці адсякае адцінак 10.

9. Коордынаты дзьвюх вяршынь трыкутніка: $(2, 1)$ і $(-1, 6)$. Знайсьці трэцюю вяршыню, калі яна ляжыць на простай

$$5x - 2y = 11,$$

і калі плошча трыкутніка роўна 5.

10. Знайсьці плошчу простакутнага трыкутніка, калі вяршыня простага кута ляжыць на простай

$$4x - y = 5,$$

другая вяршыня — у пачатку коордынат, а трэцяя — у пункце $(6, 5)$.

11. Дадзены дзьве вяршыні трыкутніка і яго плошча; трэцяя вяршыня ляжыць на восі X. Знайсьці цэнтр цяжару трыкутніка і цэнтр упісанай акружыны.

12. Раўнаньне боку AB простакутніка:

$$4x - 3y + 3 = 0.$$

Даўжыня

$$AB = 6,$$

а другі бок $= 2$. Напісаць раўнаньні іншых бакоў, калі вяршыня A ляжыць на аднэй з восяй, а пачатак коордынат унутры простакутніка.

13. Праз дадзены пункт (a, b) правесьці простую так, каб яна адсякала ад коордынатнага кута трыкутнік з найменшай плошчай.

14. Дадзен пункт (a, b); знайсьці простую, якая складае з дадатным напрамкам восі X — кут у $135°$ і сустракае восі коордынат у двух пунктах, якія сумесна з дадзеным пунктам складаюць вяршыні трыкутніка з плошчай, роўнай n^2.

15. Дадзены дзьве вяршыні трыкутніка $A(1, 2)$, $B(2, -1)$ і пункт перасеку мэдыян $N(1, -1)$. Знайсьці трэцюю вяршыню.

16. Дадзены роўналежныя простыя:

$$-x + 3y + 5 = 0;$$

$$x - 3y + 2 = 0.$$

Знайсьці: a) адлегласьць паміж імі, b) простую ім роўналежную і на аднолькавай адлегласьці ад аднэй і другой (сярэднюю лінію).

17. Дадзены вяршыні трыкутніка: $A(0, 2)$, $B(2, 3)$ і $C(1, 1)$. Знайсьці ўнутры трыкутніка гэткі пункт, каб простыя, якія злучаюць яго з вяршынямі трыкутніка, падзялілі яго плошчу на тры роўнавялікія часткі.

18. Дадзена вяршыня квадрата $M(1, 2)$ і пункт перасеку дыягоналяй $N(2, 1)$. Знайсьці астатнія тры вяршыні.

19. Дадзены раўнаньні двух бакоў трыкутніка:

$$x + 2y - 1 = 0$$

і

$$3x - y + 1 = 0$$

і пункт перасеку вышынь $H(2, 2)$. Знайсьці вяршыні і раўнаньне трэцяга боку.

20. Дадзена аснова роўнаплечнага трыкутніка:

$$x - 3y + 1 = 0,$$

адзін з роўных бакоў:

$$x + 2y - 1 = 0$$

і пункт $(-2, -2)$ на другім з роўных бакоў. Знайсьці вяршыні і даўжыню бакоў.

21. Знайсьці геомэтрычнае месца цэнтраў простакутнікаў, упісаных у дадзены трыкутнік.

22. Вяршыні чатырохкутніка, якія рухаюцца па бакох паралелёграма так, што дыягоналі ўвесь час застаюцца роўналежнымі бакам паралелёграма. Знайсьці геомэтрычнае месца пунктаў перасеку процілеглых бакоў чатырохкутніка.

23. Дадзен многакутнік. Правесьці простую так, каб сума квадратаў адлегласьцяй яе ад усіх вяршынь многа-

кутніка была найменшай. Давесьці, што гэтай умове здавальняюць дзьве ўзаемна-пэрпэндыкулярныя простыя, якія праходзяць праз пункт $\left(\frac{\Sigma x}{n}, \frac{\Sigma y}{n}\right)$.

§ 5. ГЕОМЭТРЫЧНАЕ ЗНАЧЭНЬНЕ РАЎНАНЬНЯЎ ПАМІЖ КООРДЫНАТАМІ

Мы ведаем, што раўнаньне 1-ай ступені з двума невядомымі x і y азначае простую лінію. Паглядзім, што азначае геомэтрычна якое-небудзь раўнаньне з двума невядомымі

$$f(x, y) = 0.$$

Гэта раўнаньне неазначанае, г. зн., яно мае нязьлічонае мноства пар разьвязкаў. Лічачы такую пару (x, y) за коордынаты пункту, мы атрымаем нязьлічонае мноства пунктаў. Як-жа разьмешчаны гэтыя пункты на роўніцы, у якім-небудзь парадку, ці без парадку? Дадзем аднаму са зьменных, напр. x, якое-небудзь значэньне a; тады для другога зьменнага y знойдзем (дакладна ці прыблізна) некалькі значэньняў. Выберам з іх толькі сапраўдныя значэньні:

$$y = b, b_1, b_2 \ldots;$$

атрымоўваем рад пунктаў (a, b), (a, b_1), $(a, b_2) \ldots$ Дадзем x новае значэньне A, якое крыху адрозьніваецца ад a; атрымаем рад новых пунктаў: (A, B), (A, B_1), $(A, B_2) \ldots$ Калі будзем зьмяняць x неперарыўна ад a да A, то, нагул кажучы, і y будзе зьмяняцца таксама неперарыўна. У выніку атрымаем некалькі неперарыўных радоў пунктаў, г. зн. некалькі ліній.

Такім чынам, усякае раўнаньне з двума зьменнымі x і y азначае адну ці некалькі ліній. Калі дадзена раўнаньне n-ай ступені адносна x і y, то лінія, якую выражае гэта раўнаньне, называецца лініей (крывой) n-ага парадку. Можна давесьці, што ўсякая крывая n-ага парадку перасякаецца ўсякай простай у n пунктах (сапраўдных і ўяўных). Гэта мы ўбачым для крывых 2-га парадку.

РАЗЬДЗЕЛ III

§ 1. КРЫВЫЯ ДРУГОГА ПАРАДКУ

Мы бачылі, што простая выражаецца раўнаньнем першай ступені адносна бягучых коордынат. Лініі, якія выражаюцца раўнаньнямі другога парадку адносна бягучых коордынат, называюцца крывымі II-га парадку.

Як пасьля ўбачым, усякія крывыя II-га парадку перасякаюць простую ў двух пунктах.

Акружына

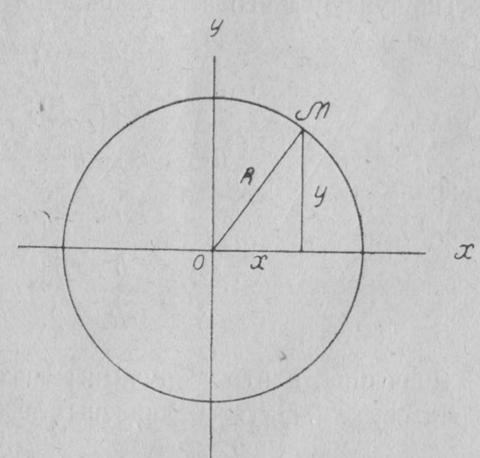
Акружына ёсьць геомэтрычнае месца пунктаў, роўна аддаленых ад некаторага пункту, які завецца цэнтрам.

На падставе гэтага азначэньня выводзіцца раўнаньне акружыны.

Разгледзім спачатку выпадак, калі пачатак коордынат супадае з цэнтрам акружыны.

Азначым радыюс акружыны праз R. З рысунка відаць, што для кожнага пункту M акружыны будзе справядлівай роўнасьць:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$



Рыс. 35

Гэта і ёсьць раўнаньне акружыны. Усякая пара яго разьвязкаў дае коордынаты пунктаў, якія ляжаць на акружыне. Возьмем цяпер выпадак агульнага зьместу, гэта значыць, акружыну з цэнтрам у адвольным пункце, які мае коордынаты (a, b).

З азначэньня акружыны выходзіць, што квадрат адлеглясьці адвольнага яе пункту ад цэнтру ёсьць велічыня сталая, роўная квадрату радыюса, гэта значыць:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (2).$$

Гэта і ёсьць раўнаньне акружыны, калі цэнтр яе ляжыць не ў пачатку координат.

Расчыніўшы дужкі, перанясем сталыя велічыні ў правую частку, атрымаем:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - a^2 - b^2 \qquad (3)$$

Калі параўнаць агульнае раўнаньне акружыны (3) з агульным раўнаньнем II-ой ступені

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

то лёгка прыйсьці да гэтакага вываду; агульнае раўнаньне II-ой ступені робіць вобраз акружыны ў тым выпадку, калі коэфіцыэнты пры x^2 і y^2 роўныя паміж сабою, а член з здабыткам xy адсутнічае.

З а д а ч а:

Пабудаваць акружыну па дадзенаму яе раўнаньню:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y = -30.$$

Параўнаўшы яго з раўнаньнем (3), знаходзім:

$$2a = 6;$$

$$2b = 10;$$

$$R^2 - a^2 - b^2 = -30,$$

адсюль

$$a = 3;$$

$$b = 5;$$

$$R = 2.$$

Значыцца, цэнтр акружыны знаходзіцца ў пункце (3, 5), а радыюс = 2. Па гэтых дадзеных лёгка пабудаваць акружыну.

Перасячэньне акружыны з простай

Пункт перасеку простай з акружынай павінен ляжаць, як на акружыне, так і на простай. З гэтай прычыны яго координаты здавальняюць адначасова раўнаньню простай:

$$y = kx + b \qquad (4)$$

і раўнаньню акружыны:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Значыцца, яны знойдуцца сумесным разьвязаньнем абодвух раўнаньняў:

$$y = kx + b \qquad (4)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

Падставім значэньне y з (4) раўнаньня ў раўнаньне (1), атрымаем:

$$x^2 + (kx + b)^2 = R^2,$$

альбо:

$$x^2\,(1 + k^2) + 2kbx + b^2 - R^2 = 0$$

Разьвязваючы атрыманае квадратовае раўнаньне, знаходзім:

$$x = \frac{-kb \pm \sqrt{k^2b^2 - (1 + k^2)\,(b^2 - R^2)}}{1 + k^2} =$$

$$= \frac{-kb \pm \sqrt{R^2\,(k^2 + 1) - b^2}}{1 + k^2}$$

Калі падставім знойдзенае значэньне x ў раўнаньне (4), то атрымаем адпаведны выраз для y.

Дасьледуем атрыманую формулу.

Калі падкарэнны выраз

$$R^2\,(k^2 + 1) - b^2 > 0,$$

то мы маем для x два розных сапраўдных значэньні.

У гэтым выпадку простая перасякае акружыну ў двух пунктах і, значыцца, зьяўляецца сякучай.

Калі

$$R^2\,(k^2 + 1) - b^2 = 0,$$

то абодва карані квадратовага раўнаньня робяцца роўнымі, і мы маем для x толькі адно значэньне. Значыцца, простая мае адзін агульны пункт з акружынай, гэта значыць, датычыцца яе.

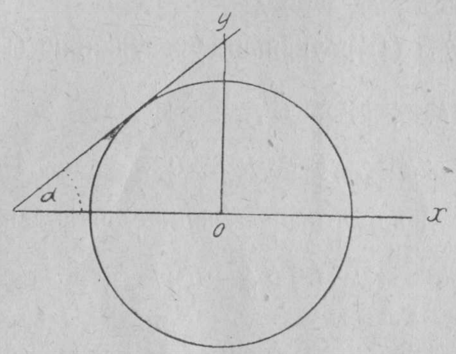
І нарэшце, калі падкарэнны выраз адмоўны, то абодва карані комплексныя.

Простая ў гэтым выпадку зусім не перасякае акружыны.

Калі ўвесьці ўяўныя пункты, то заўсёды выходзіць, што простая перасякае акружыну ў двух пунктах; гэтыя два пункты могуць быць living рознымі сапраўднымі (сякучая), могуць супадаць (датычная) і могуць быць уяўнымі (няма перасеку).

§ 2. ДАТЫЧНАЯ ДА АКРУЖЫНЫ

Няхай патрабуецца правесьці датычную да акружыны ў дадзеным на ёй пункце (x_1, y_1). Спачатку выведзем раўнаньне датычнай да ўсякай крывой, дадзенай агульным раўнаньнем:



Рыс. 36

$$f(x, y) = 0 \qquad (6)$$

раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт (x_1, y_1), мае выгляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5)$$

дзе

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

але tangens кута нахілу датычнае да восі абсцыс ёсьць выводная ардынаты па абсцысе (глядзі „Аналіз бязьмежна малых“):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Выраз $\frac{dy}{dx}$ выражае кутавы коэфіцыент датычнай для адвольнага (зьменнага) пункту дотыку. Каб атрымаць кутавы коэфіцыент для дадзенага пункту (x_1, y_1), трэба ў вырaзе выводнай $\frac{dy}{dx}$ замяніць бягучыя координаты (x, y), координатамі дадзенага пункту (x_1, y_1),

$$k = \frac{dy_1}{dx_1}$$

Устаўляем атрыманы выраз k у раўнаньне (5), атрымаем:

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \qquad (6)$$

атрыманае раўнаньне ёсьць раўнаньне датычнай да ўсякай крывой. Выводныя, якія ўваходзяць сюды, знаходзяцца з раўнаньня крывой.

Каб атрымаць раўнаньне дотычнай да акружыны

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

дыфэрэнцуем гэта раўнаньне:

$$2x + 2yy' = 0,$$

адкуль

$$y' = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y},$$

а для пункту дотыку атрымаем:

$$y'_1 = -\frac{x_1}{y_1} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Атрыманы выраз устаўляем у раўнаньне (6):

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Зробім ператварэньне:

$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1);$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2;$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \qquad (7).$$

Але пункт дотыку (x_1, y_1) ляжыць на акружыне, значыцца:

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2,$$

а таму раўнаньне (7) прымае просты выгляд:

$$xx_1 + yy_1 = R^2 \qquad (8).$$

Гэта і ёсьць шуканае раўнаньне датычнай да акружыны ў дадзеным пункце. Тут x і y—бягучыя координаты датычнай, а x_1 і y_1 — координаты пункту дотыку.

Прыклад. Знайсьці раўнаньне датычнай да акружыны

$$x^2 + y^2 = 25$$

у пункце (4, 3).

Раўнаньне датычнай будзе:

$$xx_1 + yy_1 = R^2$$

У нашым прыкладзе:

$$x_1 = 4;$$
$$y_1 = 3;$$
$$R^2 = 25,$$

адкуль шуканае раўнаньне датычнай наступнае:

$$4x + 3y = 25.$$

Каб атрымаць раўнаньне датычнай да акружыны:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

дыфэрэнцуем гэтае раўнаньне:

$$2\,(x - a) + 2\,(y - b)\,.\,y' = 0,$$

адкуль:

$$y' = -\frac{x - a}{y - b};$$

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}.$$

Падстаўляем знойдзеныя значэньні $\frac{dy_1}{dx_1}$ у раўнаньне (6), атрымаем:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\,(x - x_1).$$

Аслабанімся ад назоўніка і перанясем усе члены ў адзін бок:

$$(x - x_1)\,(x_1 - a) + (y - y_1)\,(y_1 - b) = 0.$$

Заменім тут

$$y - y_1$$

і

$$x - x_1$$

праз

$$(y - b) - (y_1 - b)$$

і

$$(x - a) - (x_1 - a);$$

$$[(x - a) - (x_1 - a)]\,(x_1 - a) + [(y - b) - (y_1 - b)]\,(y_1 - b) = 0;$$

расчынім квадратовыя дужкі:

$$(x - a)\,(x_1 - a) - (x_1 - a)^2 + (y - b)\,(y_1 - b) - (y_1 - b)^2 = 0.$$

Але

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2,$$

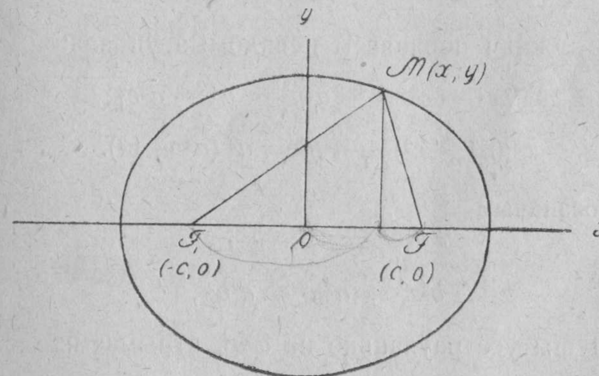
бо пункт дотыку ляжыць на акружыне, значыцца:

$$(x - a)\,(x_1 - a) + (y - b)\,(y_1 - b) = R^2 \qquad (9).$$

§ 7. ЭЛІПС

Эліпсам завецца геомэтрычнае месца пунктаў, сума адлегласьцяй якіх ад двух дадзеных пунктаў, што завуцца фокусамі, ёсьць велічыня сталая.

Абазначым гэту велічыню праз $2a$. Абярэм сыстэму простакутных коордынат так, каб вось X праходзіла праз абодва фокусы, а пачатак коордынат знаходзіўся на сярэдзіне адлегласьці паміж імі. Абазначым фокусную адлег-



Рыс. 37

ласьць FF_1 праз $2c$, тады коордынаты фокусаў F і F_1 будуць адпаведна $(c, 0)$ і $(-c, 0)$. Адлегласьці адвольнага пункту M (x, y) эліпса ад фокусаў паводле формулы адлегласьці (гл. разьзд. 1, § 2) будуць:

$$MF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

і

$$MF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Але

$$MF + MF_1$$

згодна ўмовы будуць $= 2a$, значыцца:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

Перанясем адзін з каранёў у правую частку, тады

$$\sqrt{(x-c^2)+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Узьвядзем атрыманае раўнаньне ў квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2;$$

расчынім дужкі, атрымаем:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c^2)+y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

альбо:

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx,$$

скарацім на 4 і узьвядзем ў другі раз ў квадрат, будзем мець:

$$a^2\,(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

расчынім дужкі і перанясем невядомыя ўправа:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2;$$

$$x^2\,(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Калі абазначым

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

атрымаем:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

ці падзяліўшы ўсё раўнаньне на a^2b^2, атрымаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1).$$

Гэта і ёсьць раўнаньне эліпса ў форме, якая найбольш ужываецца.

Дасьледваньне формы эліпса

Няхай у р—ні эліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$x = 0,$$

знойдзем

$$y = \pm b.$$

Няхай

$$y = 0,$$

знойдзем

$$x = \pm a.$$

Гэта азначае, што эліпс адсякае на восі X па абодва бакі ад пачатку адцінкі OA і OC, роўныя a; а на восі Y адцінкі OB і OD, роўныя b.

Адцінак

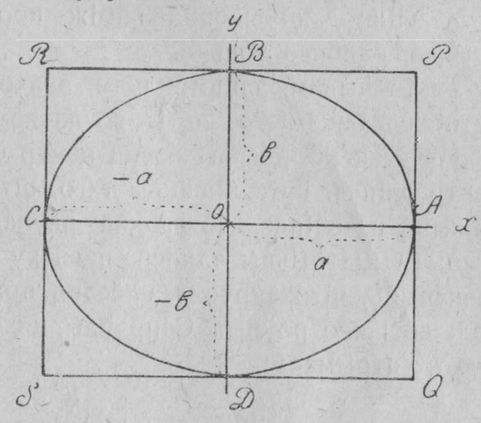
$$AC = 2a$$

завецца вялікай восьсю, а адцінак

$$BD = 2b$$

малой восьсю эліпса.

Для больш дэталёвага вывучэньня формы эліпса разьвяжам яго раўнаньне адносна y:



Рыс. 38

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1);$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

адгэтуль:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$$

альбо:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2).$$

Гэта формула паказвае, што x абсолютнай велічынёй ня можа быць больш за a, (інакш y будзе мець уяўнае значэньне). Значыцца, x зьмяняецца ў граніцах ад $-a$ да $+a$, і эліпс зьмяшчаецца паміж простымі PQ і RS.

Тая-ж формула (2) паказвае, што кожнаму значэньню x адпавядаюць два значэньні y, роўныя велічынёй і супроцьлеглыя па знаку.

Значыцца, эліпс ёсьць крывая, сымэтрычная адносна восі X.

Разьвяжам цяпер р—не (1) адносна x:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Дасьледваньне гэтай формулы прыводзіць да такога вываду: ардынаты эліпса зьмяняюцца ў граніцах ад $-b$ да $+b$, эліпс заключаецца паміж простымі PR і SQ і сымэтрычны адносна восі Y.

Такім чынам, эліпс цалкам знаходзіцца ўнутры простакутніка з бакамі $2a$, $2b$, і мае дзьве восі сымэтрыі.

Пачатак координат ёсьць цэнтр сымэтрыі, альбо проста цэнтр эліпса. Гэта відаць з таго, што калі пункт $(+x, +y)$ ляжыць на эліпсе, то згодна раўнаньня (1), на эліпсе ляжыць і сымэтрычны адносна пачатку пункт $(-x, -y)$. Трэба зазначыць, што акружына ёсьць прыватны выпадак эліпса, калі восі яго роўныя. Сапраўды, няхай у раўнаньні (1) эліпса $b = a$; атрымаем:

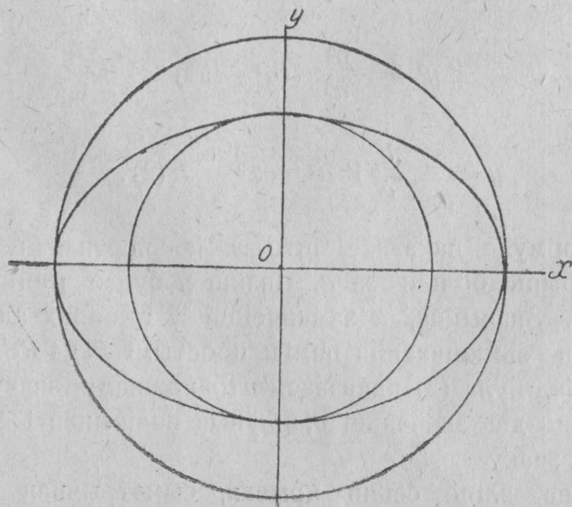
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ (р—не акр.)}.$$

Пабудова эліпса

Пабудова эліпса па пунктах.

Пабудуем на вялікай восі эліпса, як на дыямэтры, акружыну.



Рыс. 39

Р—не яе будзе:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Разьвязаўшы яго адносна y, знойдзем:

$$y \text{ акр.} = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (3)$$

Y эліпса выражаецца, як вядома:

$$y \text{ эл.} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2)$$

Калі падзелім (2) на (3), дык атрымаем:

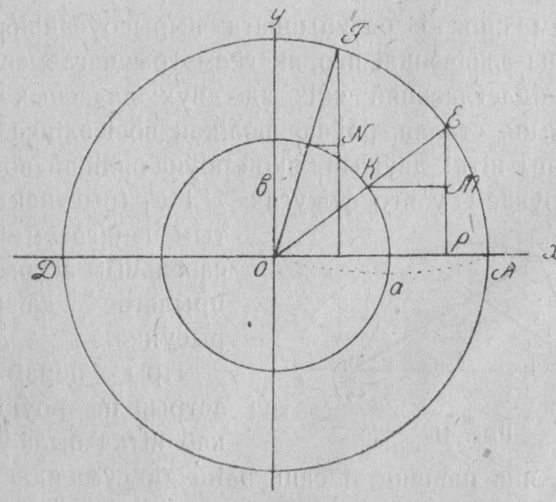
$$\frac{y \text{ эл.}}{y \text{ акр.}} = \frac{b}{a};$$

гэта азначае, што ордынаты эліпса і акружыны для аднолькавых абсцыс адносяцца, як $\frac{b}{a}$.

Адкуль

$$y \text{ эл.} = \frac{b}{a} \cdot y \text{ акр.} \qquad (4).$$

На падставе гэтага раўнаньня магчыма пабудаваць колькі трэба пунктаў эліпса па дадзеных восях $2a$ і $2b$.



Рыс. 40

Пабудуем дзьве концэнтрычныя акружыны з радыюсамі a і b.

Які-небудзь дыямэтр AD прымем за вялікую вось эліпса.

Возьмем на вялікай акружыне адвольны пункт E і зьвесім з яго на AD пэрпэндыкуляр Ep. Потым з пункту да перасеку радыюса OE з малой акружынай, зьвесім пэрпэндыкуляр KM на Ep. Давядзем, што пункт M належыць эліпсу. З падобных тр—каў OEp і KEM знаходзім:

$$\frac{pM}{pE} = \frac{OK}{OE} = \frac{b}{a};$$

адкуль

$$pM = \frac{b}{a}\, pE,$$

але pE ёсьць ордыната акружыны, значыцца:

$$pM = \frac{b}{a} \cdot y \text{ акр.} = y \text{ эл.}$$

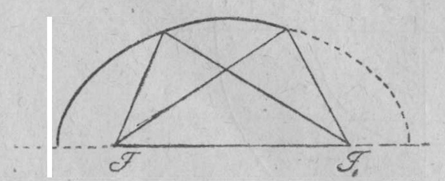
Значыцца, пункт M ёсьць пункт эліпса.

Узяўшы на вялікай акружыне другі пункт F і зрабіўшы тыя-ж дзеяньні, мы атрымаем другі пункт N эліпса.

Такім чынам, мы можам знайсьці колькі трэба пунктаў эліпса.

Пададзем спосаб бязупыннага вырысоўваньня эліпса, заснованы на азначэньні яго, як геомэтрычнага месца пунктаў, сума адлегласьцяй якіх ад двух дадзеных пунктаў ёсьць велічыня сталая, роўная вялікай восі эліпса.

Два канцы ніткі, даўжыня якой роўна вялікай восі эліпса ($2a$), замацоўваем у яго фокусах F і F_1 (рысунак 41) і затым нацягваем нітку рысавальным астрыём, якое прылягае да роўніцы рысунка.



Рыс. 41

Пры перамяшчэньні астрыя па роўніцы так, каб нітка была ўвесь час нацягнутай, яна павінна апісаць эліпс, бо сума адлегласьцяй астрыя ад фокусаў увесь час роўна даўжыні ніткі $= 2a$. Суадносіны:

$$y \text{ эл.} = y \text{ акр.} \frac{b}{a}$$

прыводзяць да вельмі важнага вываду: $\frac{b}{a}$ можна разглядаць, як косінус некаторага кута α. Тады атрымаем:

$$y \text{ эл.} = y \text{ акр.} \cos\alpha \qquad (5).$$

Значыцца, эліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

можна разглядаць, як проекцыю акружыны, роўніца якой нахілена да роўніцы эліпса пад кутом α, cosinus якога роўны $\frac{b}{a}$.

§ 4. ДАТЫЧНАЯ ДА ЭЛІПСА

Раўнаньне датычнае да усялякай крывой ёсьць (разьдзел III, § 2 (6)):

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \qquad (6).$$

Выраз выводнай $\frac{dy_1}{dx_1}$ знойдзецца дыфэрэнцаваньнем раўнаньня эліпса (1):

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0;$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Для дадзенага пункту дотыку (x_1, y_1):

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Раўнаньне (6) прымае выгляд:

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1);$$

$$(y - y_1)\, a^2y_1 = -b^2x_1(x - x_1);$$

альбо адчыняючы дужкі:

$$a^2yy_1 - a^2y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2x_1^2,$$

альбо

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x^2_1 + a^2y_1^2.$$

Падзелім атрыманае раўнаньне на a^2b^2:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Але пункт (x_1, y_1) належыць да эліпса, а таму:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Такім чынам, раўнаньне датычнай будзе:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

x і y—бягучыя коордынаты, x_1 і y_1—коордынаты пункту дотыку.

Раўнаньне датычнай да эліпса лёгка ўпомніць, калі кіравацца наступным правілам: уявім раўнаньне эліпса ў выглядзе:

$$\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} = 1$$

і зьменім адзін x на x_1 і адзін y на y_1, атрымаем:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

Такім-жа чынам можна ўпомніць раўнаньне датычнае да акружыны:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(р—не акр.)

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

(р—не дат.).

Збудаваньне датычнай да эліпса

Знойдзем пункт T перасеку датычнай да эліпса з восьсю X. Трэба ў раўнаньне (8) падставіць

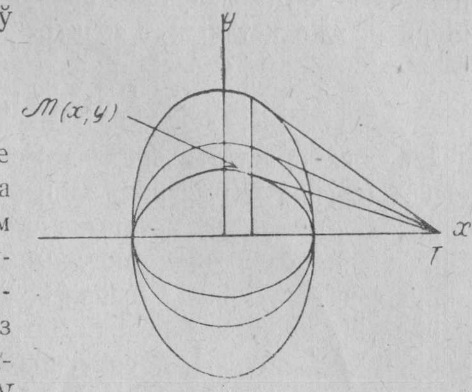
$$y = 0.$$

Знаходзім, што абсцыса пункту T ёсьць $\frac{a^2}{x_1}$. Гэта велічыня не залежыць ад b і ад y_1. Робім вывад, што датычныя да ўсіх эліпсаў з аднэй і тэй жа восьсю $2a$ (пры розных восях

$2b$) перасякаюць вось X у адным і тым-жа пункце T, калі пункт дотыку ляжыць на аднэй простай, паралельнай восі Y.

Сярод гэтых эліпсаў ёсьць акружына

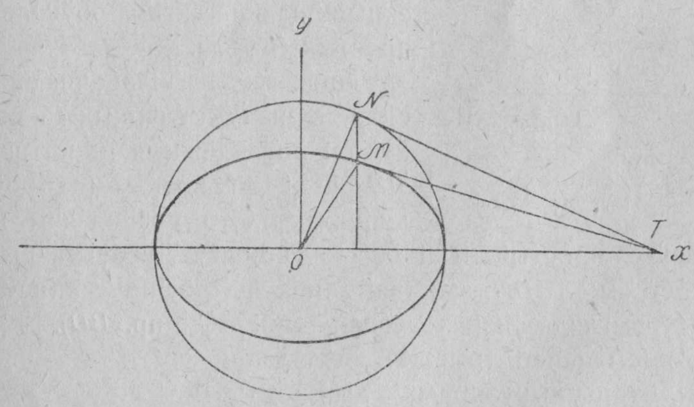
$$(b = a).$$



Рыс. 42

Гэта акалічнасьць дае збудаваньне датычнае да эліпса ў дадзеным на ім пункце M. Будуем акружыну радыюсам a, намецім на ёй пункт N з абсцысай, роўнай абсцысе пункту M і праз N праводзім датычную да акружыны ($\perp$ да радыюса ON) і атрымоўваем на восі X пункт T.

Злучаем пункт M з пунктам T.



Рыс. 43

Простая MT і будзе шуканай датычнай.

§ 5. ДЫЯМЭТРЫ ЭЛІПСА

Дыямэтрамі крывой завуцца простыя, якія праходзяць праз цэнтр крывой. Няхай дазены эліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

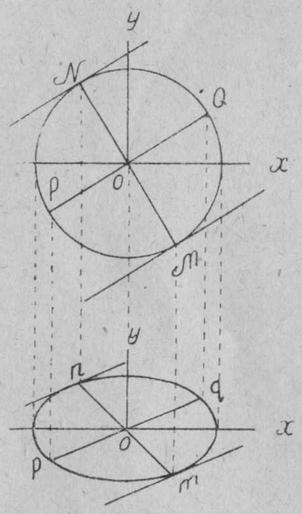
яго магчыма разглядаць, як проекцыю акружыны:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

пры чым акружына ляжыць на роўніцы, якая складае з роўніцай эліпса такі кут α, што

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}.$$

Няхай для прастаты абедзьве роўніцы перасякаюцца на восі X (рыс. 44), рысунак эліпса зьмешчаны ўніз і разьмешчана на аднэй роўніцы з рысункам акружыны. Зробім папапярэднія заўвагі.



Рыс. 44

1. Датычная да акружыны проектуецца датычнай да эліпса (датычная ёсьць граніца сякучай).

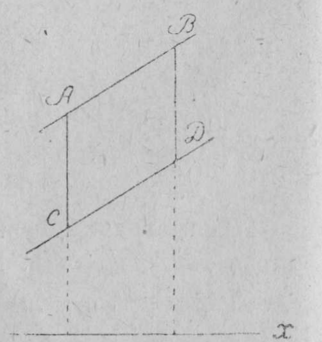
2. Сярэдзіна адцінка простай проектуецца таксама на сярэдзіну адцінка.

3. Роўналежныя простыя у проекцыях даюць таксама роўналежныя простыя (рысун. 45).

Аошняя заўвага відавочна для простых, пэрпэндыкулярных да восі X.

Калі роўналежныя простыя AC і BD не $\perp$ да восі X (на роўніцы акружыны), то праводзячы паміж імі дзьве простыя AC і $BD \perp$ да восі X, убачым, што паралелёграм $ABDC$ запроектуецца на роўніцу эліпсу таксама ў выглядзе паралелёграму (пр. $AC \parallel$ пр. BD).

Возьмем цяпер (рыс. 44) два ўзаемна пэрпэндыкулярных дыямэтры акружыны MN і PQ. Проекцыі іх (mn і pq) будзем называць спрэжанымі дыямэтрамі эліпса. Адносна іх давядзем пяць тэорэм.



Рыс. 45

Тэорэма 1. Сярэдзіны хорд, роўналежных аднаму з спрэжаных дыямэтраў эліпса, ляжаць на другім дыямэтры. Гэта відаць з таго, што усе хорды, паралельныя дыямэтру PQ, дзеляцца дыямэтрам MN напалам.

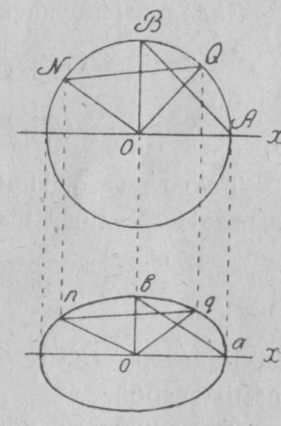
Застаецца толькі прыстасаваць заувагі другую і трэцюю. Першую тэорэму магчыма выказаць яшчэ і так: кожны дыямэтр эліпса ёсьць геомэтрычнае месца сярэдзін хорд, роўналежных спрэжанаму дыямэтру.

Тэорэма 2. Датычныя ў канцох дыямэтра эліпса роўналежны спрэжанаму дыямэтру.

Падставы. 1. Датычныя ў канцох дыямэтра акружыны MN роўналежны пэрпэндыкулярнаму дыямэтру PQ.

На падставе тэорэмы 2 можна сказаць, што дыямэтр эліпса ёсьць геомэтрычнае месца сярэдзін хорд, роўналежных датычнай у канцы яго.

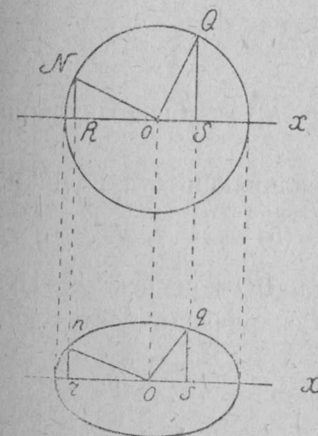
Тэорэма 3. (Апалонія). Плошча трыкутніка, збудаванага на спрэжаных паў-дыямэтрах эліпса, ёсьць велічыня сталая для дадзенага эліпса, роўная плошчы трыкутніка, збудаванага на паўвосях.



Рыс. 46

Падстава 1. $\Delta NOQ = \Delta BOA$ (рыс. 46).

2. Проекцыі роўнавялікіх плошч — роўнавялікі паміж сабой (бо як плошча проекцыі=проектаванай плошчы, памножанай на $\cos\alpha$. Такім чынам плошча noq= плошчы boa.



Рыс. 47

Тэорэма 4. (Апалонія). Сума квадратаў спрэжаных паўдыямэтраў роўна суме квадратаў паўвосяй.

Паводле тэорэмы Піфагора (рыс. 47):

$$OS^2 + SQ^2 = a^2 \qquad (1).$$

Але на падставе роўнасьці трыкутнікаў OSQ і ONR:

$$OS = RN$$

$$SQ = RO \qquad (2).$$

Заменім у роўнасьці (1) спачатку першы складнік, а потым другі складнік паводле формул (2). Атрымоўваем дзьве роўнасьці:

$$RN^2 + SQ^2 = a^2;$$

$$OS^2 + RO^2 = a^2.$$

Пераходзім з гэтымі роўнасьцямі на роўніцу проекцыі, другую роўнасьць перапішам у такім выглядзе:

$$OS^2 + rO^2 = Q^2 \qquad (3)$$

а першую спачатку памножым на $\frac{b^2}{a^2}$ (гэта значыць на $\cos^2\alpha$),

$$rn^2 + Sg^2 = b^2 \qquad (4).$$

Складаем роўнасьці (3) і (4):

$$OS^2 + rO^2 + rn^2 + Sq^2 = a^2 + b^2,$$

альбо

$$Oq^2 + On^2 = a^2 + b^2 \text{ (III т. 8).}$$

Т э о р э м а 5. Паміж кутавымі коэфіцыэнтамі спрэжаных дыямэтраў эліпса існуе залежнасьць:

$$K . R_1 = -\frac{b^2}{a^2}$$

Радыюсы OQ і ON акружыны (р, k_1) пэрпэндыкулярны паміж сабой.

Таму кутавыя коэфіцыэнты здавальняюць суадносінам:

$$K'K'_1 = -1 \qquad (5)$$

тут K ёсьць тангенс кута радыюса OQ і восьсю X. Пры пераходзе да проекцыі лінія тангенсу скарачаецца ў стасунку:

$$\frac{b}{a} \; (= \cos\alpha),$$

а радыюс застаецца бяз зьмен А таму кутавы коэфіцыэнт паўдыямэтру Oq эліпса

$$K' = K_1 \frac{b}{a}.$$

Гэтак сама кутавы коэфіцыэнт паўдыамэтра On эліпса

$$K'_1 = K_1 \frac{b}{a}.$$

Таму, памножыўшы роўнасьць (5) на $\frac{b^2}{a^2}$, атрымаем:

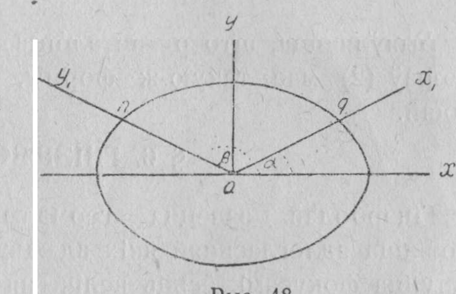
$$KK_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Раўнаньне эліпса адносна спрэжаных дыямэтраў

Ператворым раўнаньне эліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1),$$

прыняўшы за новыя восі спрэжаныя дыямэтры Oq і On. У формулах пераходу ад простакутнай сыстэмы координат у косакутную мы маем:



Рыс. 48

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta,$$

$$y = x_1 \operatorname{sn}\alpha + y_1 \operatorname{sn}\beta$$

куты α і β азначаюцца суадносінамі:

$$\operatorname{tg}\alpha = k;$$

$$\operatorname{tg}\beta = k_1;$$

прычым

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2};$$

р—не (1) прымае выгляд:

$$x_1^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{b^2}\right) + 2\,x_1y_1\left(\frac{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sn}\alpha\,.\,\operatorname{sn}\beta}{b^2}\right) + y^2\left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2\beta}{b^2}\right) = 1.$$

Другія дужкі:

$$\cos\alpha\,.\,\cos\beta\left(\frac{1}{a^2} + \frac{kk_1}{b^2}\right) = 0,$$

значыцца, атрымаем раўнаньне:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1 \qquad (2)$$

дзе

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{b^2};$$

$$\frac{1}{b_1^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\mathrm{sn}^2\beta}{b^2};$$

Выяўляецца, што р—не эліпса адносна спрэжаных дыямэтраў (2) мае такую-ж форму, як і раўнаньне адносна восяй.

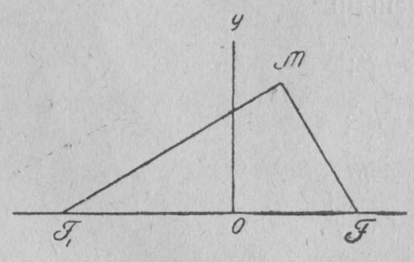
§ 6. ГІПЭРБОЛА

Гіпэрболай завецца геомэтрычнае месца пунктаў, розьніца адлегласьцяй якіх ад двух дадзеных пунктаў, што завуцца фокусамі, ёсьць велічыня сталая.

Абазначым яе праз $2a$.

Вывад раўнаньня гіпэрболы падобны да выводу раўнаньня эліпса (§ 7).

Абярэм сыстэму координат таксама, як і раней, пры вывадзе р—ня эліпса. Адлегласьць паміж фокусамі FF_1 абазначым праз $2c$.



Рыс. 49

Тады координаты будуць: для F—$(c, 0)$, а для F_1—$(-c, 0)$. Возьмем які-небудзь пункт гіпэрболы $M(x, y)$.

Адлегласьць

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

а

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Паводле азначэньня гіпэрболы, $MF_1 - MF$ ёсьць велічыня сталая $= 2a$, гэта азначае:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

альбо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Узводзім у квадрат:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

альбо:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Скарачаем на 4 і ўзводзім у другі раз у квадрат, атрымаем:

$$a^4 - 2a^2cx + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

або

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

канчаткова-ж будзе:

$$a^2(x^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (1)$$

Розьніца

$$(a^2 - c^2),$$

у нашым выпадку, адмоўная. Запраўды, у т—ку FMF_1, бок

$$FF_1 = 2c$$

больш розьніцы двух іншых бакоў F_1M і FM, але розьніца гэта $= 2a$. Значыцца:

$$2c > 2a;$$

$$c > a;$$

$$a < c;$$

$$a^2 < c^2$$

і

$$a^2 - c^2 < 0.$$

Дзеля гэтага мы маем права абазначыць розьніцу

$$a^2 - c^2$$

праз $-b^2$:

$$a^2 - c^2 = -b^2,$$

адкуль:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (3).$$

Падстаўляючы ў раўнаньне (1) $-b^2$ замест $a^2 - c^2$, атрымаем наступнае:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Калі падзелім гэта р—не на $-a^2b^2$, атрымаем канчаткова раўнаньне гіпэрболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Дасьледваньне формы гіпэрболы

Разьвяжам раўнаньне (2) адносна y:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1;$$

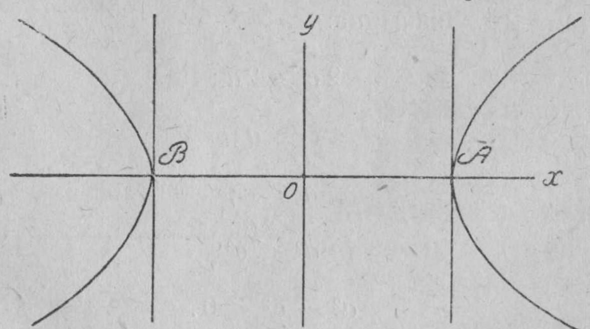
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2);$$

адкуль

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Пры x, меншым абсолютнай велічынёй за a, x^2-a^2 адмоўна і y будзе уяўным.

Значыцца, гіпэрбола ня мае такіх пунктаў, абсцысы якіх зьмяшчаліся-б паміж $+a$ і $-a$. Калі мы праводзім у пунк-



Рыс. 50

тах $(a, 0)$ і $(-a, 0)$ лініі, роўналежныя восі OY, то ў частцы роўніцы, зьмешчанай паміж гэтымі лініямі, ня будзе пунктаў, якія знаходзяцца на гіпэрболе. Такім чынам, гіпэрбола складаецца з дзьвюх асобных частак, якія завуцца яе галінамі.

Пры

$$y=0;$$

$$x=\pm a,$$

гіпэрбола адсякае на восі OX па абодва бакі ад пачатку адцінкі OA і OB, роўныя a. Адцінак AB, роўны $2a$, называецца сапраўднай восьсю гіпэрболы, а пункты A і B яе вяршынямі.

Згодна тых-жа меркаваньняў, што і для эліпса, мы знойдзем, што гіпэрбола, таксама, як і эліпс, сымэтрычны адносна восяй OX і OY.

Значыцца, дзьве галіны гіпэрболы сымэтрычны адносна восі OY, а кожная галіна складаецца з двух палавін, якія таксама сымэтрычны адносна восі OX.

Як і для эліпса, пачатак коордынат ёсьць цэнтр сымэтрыі, або проста цэнтр гіпэрболы. З формулы

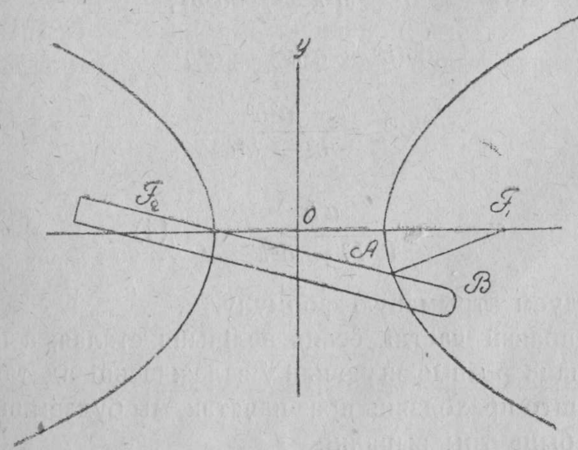
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

мы бачым, што калі x расьце абсолютнай велічынёй ад a да ∞, y расьце ад 0 да ∞.

Гэта азначае, што гіпэрбола ёсьць крывая несамкнутая і адыходзіць сваімі галінамі у бязьмежнасьць.

Збудаваньне гіпэрболы непарарыўным рухам

Возьмем два пункты F_1 і F_2 на адлегласьці $2c$ адзін ад аднаго (рыс. 51) і ў адным з іх F_1 замацуем нітку, а ў



Рыс. 51

другім F_2 канец лінейкі F_2B так, каб яна вярцелася вакол пункту F_2, як каля цэнтру. Калі прывяжам нітку другім канцом да лінейкі і нацягнем яе з дапамогай алоўка, прыціснутага да лінейкі, астрыё якога зьмяшчаецца ў пункце A, мы, вярцеўшы лінейку, нарысуем гіпэрболу, бо адлегласьць пункту A ад пункту F_1 і F_2 зьмяшчаецца на адну і тую-ж велічыню і, значыцца, розьніца гэтых адлегласьцяй застаецца сталай. Пры зьмяненьні роляй пунктаў F_1 і F_2, мы нарысуем другую галіну гіпэрболы.

§ 7. АСЫМПТОТЫ ГІПЭРБОЛЫ

Знойдзем перасек гіпэрболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

з адвольнай простай, якая праходзіць праз пачатак координат

$$y = kx \qquad (3).$$

Дзеля гэтага разьвяжам сумесна гэтыя два раўнаньні. Падставім выраз y-ка з раўнаньня (3) у р—не (2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$

пазбавімся ад назоўніка:

$$x^2b^2 - a^2k^2x^2 = a^2b^2,$$

$$x^2(b^2 - a^2k^2) = a^2b^2$$

і

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2}$$

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \qquad (4)$$

Дасьледуем атрыманую формулу.

Лічнік правай часткі ёсьць велічыня сталая, а назоўнік можа прымаць розныя значэньні ў залежнасьці ад таго, якія з простых, што праходзяць праз пачатак, мы будзем выбіраць.

Могут быць тры выпадкі:

1. $$b^2 > a^2k^2,$$

адкуль

$$a^2k^2 < b^2;$$

$$k^2 < \frac{b^2}{a^2};$$

$$|k| < \frac{b}{a};$$

у гэтым выпадку выраз, які знаходзіцца пад каранём у правай частцы формулы (4), дадатны і, значыцца, для x мы атрымаем два няроўных сапраўдных значэньні. Выходзіць, што пры

$$|k| < \frac{b}{a}$$

простая перасякае гіпэрболу у двух сапраўдных пунктах.

2. $$b^2 < a^2k^2,$$

або

$$a^2k^2 > b^2;$$

$$k^2 > \frac{b^2}{a^2};$$

$$|k| > \frac{b}{a};$$

у гэтым выпадку падкарэнны выраз у формуле (4) адмоўны, для x атрымаем 2 уяўных значэньні.

Простая гіпэрболы не перасякае, пункт перасеку уяўны.

3. $$b^2 = a^2k^2$$

і

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2};$$

$$k = \pm\frac{b}{a}.$$

Тады ў формуле (4) падкарэнны выраз пераходзіць у 0, і для x атрымаем:

$$x = \pm\infty,$$

г. зн., два пункты перасеку простай з гіпэрболай супадаюць і будуць ляжаць у ∞. Можна сказаць, простая датычыцца гіпэрболы ў бязьмежна-адсунутым пункце. Такія простыя завуцца асымптотамі. Дзеля таго, што для кутавога коэфіцыэнту k маем два значэньні:

$$\left(k = \pm \frac{b}{a}\right),$$

то робім вывад, што гіпэрбола мае дзьве асымптоты, якія сымэтрычна разьмешчаны адносна восі X.

Раўнаньні гэтых асымптот такія:

$$y = \pm \frac{b}{a} x .$$

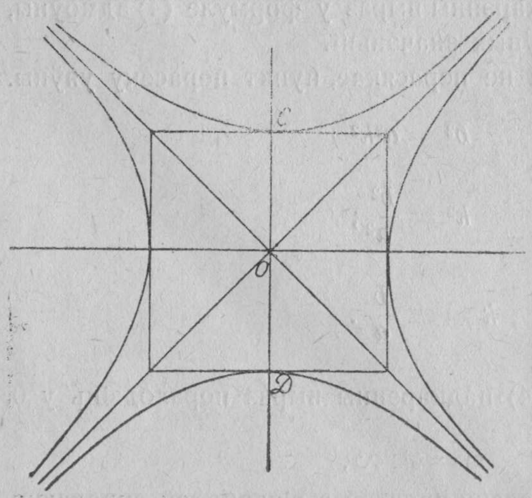
Дзеля збудаваньня асымптот адзначаем пункты з координатамі (a, b) і $(a, -b)$ і злучаем гэтыя пункты з пачаткам координат.

Спрэжаныя гіпэрболы

Калі ў левай частцы раўнаньня гіпэрболы (2) зьменім знакі, то атрымаем раўнаньне:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

якое дае таксама гіпэрболу, толькі разьмешчаную так, што яе галіны ідуць уздоўж восі Y. Атрыманая гіпэрбола завецца спрэжанай з дадзенай гіпэрболай.



Рыс. 52

Пры

$$x = 0,$$

$$y = \pm b$$

гэта азначае, што спрэжаная гіпэрбола адсякае на восі Y па абодвы бакі ад пачатку адцінкі OC і OD, роўныя b.

Адцінак AB $(= 2b)$ ёсьць, значыцца, вось спрэжанай

гіпэрболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

для пачатковай гіпэрболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гэты адцінак завецца ўяўнай восьсю.

Мы бачым, што ўяўная вось якой-небудзь гіпэрболы зьяўляецца сапраўднай восьсю спрэжанай гіпэрболы і наадварот.

Калі мы пачнем шукаць асымптоты спрэжанай гіпэрболы, то атрымаем наступнае раўнаньне:

$$y = \pm \frac{b}{a} x ,$$

гэта азначае, што дзьве спрэжаныя гіпэрболы маюць агульныя асымптоты.

§ 8. РАЎНАНЬНЕ ГІПЭРБОЛЫ АДНОСНА АСЫМПТОТ

Няхай дадзена гіпэрбола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Знойдзем, які выгляд мае гэта р—не, калі за восі координат прыняць яе асымптоты. З тэй прычыны, што кут паміж асымптотамі наогул ня ровен 90°, то новая сыстэма координат будзе косакутнай, і пэратварэньне трэба выконваць паводле формул пераходу ад простакутных у косакутныя координаты.

Абазначым куты паміж асымптотамі і восьсю X праз α і β.

Тады паводле формул $9a$ і $9b$, разьдзел I, § 4, будзем мець наступныя р—ні:

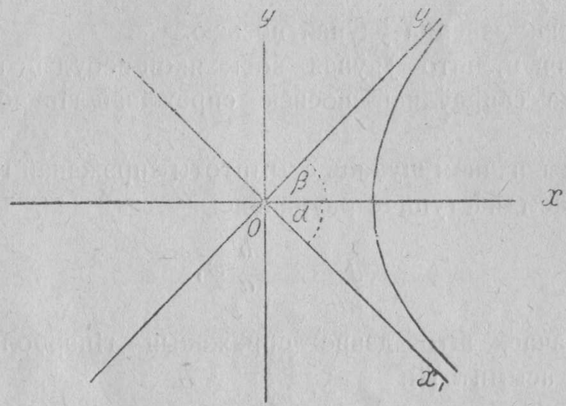
$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta \qquad (9a)$$

$$y = x_1 \operatorname{sn}\alpha + y_1 \operatorname{sn}\beta \qquad (9b)$$

Выражаем трыгономэтрычныя функцыі, якія ўваходзяць у гэтыя р—ні праз велічыні a і b; дзеля гэтага успомнім, што кутавы коэфіцыэнт асымптот роўны $\pm \frac{b}{a}$, гэта значыць:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = +\frac{b}{a}$$



Рыс. 53

З гэтых формул можна зрабіць вывад, што кут

$$\alpha = -\beta,$$

і значыцца,

$$\operatorname{sn} \alpha = -\operatorname{sn} \beta;$$

$$\cos \alpha = \cos \beta;$$

адкуль вынікае, што формулы (9a) і (9b) магчыма замяніць наступнымі:

$$x = x_1 \cos \beta + y_1 \cos \beta = (x_1 + y_1) \cos \beta;$$

$$y = -x_1 \operatorname{sn} \beta + y_1 \operatorname{sn} \beta = (-x_1 + y_1) \operatorname{sn} \beta;$$

але-ж

$$\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{sn}\beta = \cos\beta \,.\, \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Цяпер можам атрымаць канчатковы выгляд формулператварэньня такі:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (x_1 + y_1)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-x_1 + y_1).$$

Падстаўляем выразы x і y у раўнаньне гіпэрболы (2):

$$\frac{\frac{a^2 (x_1 + y_1)^2}{a^2 + b^2}}{a^2} - \frac{\frac{b^2 (-x_1 + y_1)^2}{a^2 + b^2}}{b^2} = 1$$

зьнішчым назоўнікі і расчынім дужкі:

$$(x_1 + y_1)^2 - (-x_1 + y_1)^2 = a^2 + b^2$$

$$x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - x_1^2 + 2x_1y_1 - y_1^2 = a^2 + b^2$$

адкуль:

$$x_1y_1 = \frac{a^2 + y^2}{4}$$

Абазначым новыя коордынаты проста праз x, y, атрымаем канчаткова:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = \text{constans}.$$

Гэта і ёсьць р—не гіпэрболы адносна асымптот. Для спрэжанае гіпэрболы будзем мець:

$$xy = -\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

§ 9. ДАТЫЧНАЯ ДА ГІПЭРБОЛЫ

Агульнае раўнаньне датычнае ёсьць:

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1} (x - x_1) \qquad (3).$$

Знойдзем $\frac{dy_1}{dx_1}$ з раўнаньня гіпэрболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дыфэрэнцыяваньнем раўнаньня гіпэрболы членамі знаходзім:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$

ці

$$y' = + \frac{b^2 x}{a^2 y};$$

$$y_1' = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

устаўляем гэты выраз ў раўнаньне (3), атрымаем:

$$(y - y_1)\, a^2 y_1 = b^2 x_1 (x - x_1),$$

або

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2,$$

ці

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = b^2 x_1 - a^2 y_1^2;$$

падзелім гэты выраз на $a^2 b^2$, атрымаем:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$

Але пункт дотыку (x_1, y_1) ляжыць на гіпэрболе, значыцца:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

А таму датычная (яе раўнаньне) прымае выгляд:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

З раўнаньня (10) магчыма атрымаць раўнаньне нормалі як простай, якая праходзіць праз пункт (x_1, y_1) і пэрпэндыкулярна да датычнай.

§ 10. ДЫЯМЭТРЫ ГІПЭРБОЛЫ

Спрэжаныя дыямэтры гіпэрболы ня маюць таго значэньня, якое маюць спрэжаныя дыямэтры эліпса. Таму абмяжуемся толькі тэорэмай.

Дыямэтр гіпэрболы ёсьць геомэтрычнае месца сярэдзін хорд, роўналежных датычнай у канцы яго.

Дадзена гіпэрбола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

і яе дыямэтр:

$$y = kx \qquad (2)$$

(k — дадзеная велічыня).

Праводзім праз канец (x_1, y_1) гэтага дыямэтру датычную:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

кутавы коэфіцыэнт датычнае:

$$k_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Але пункт (x_1, y_1) ляжыць на дыямэтры, значыцца,

$$y_1 = kx_1$$

і коэфіцыэнт

$$k_1 = \frac{b^2}{a^2 k};$$

ці

$$kk_1 = \frac{b^2}{a^2} \qquad (3)$$

Праводзім хорду, роўналежную датычнай:

$$y = k_1 x + m \qquad (4)$$

дзе k_1 — ёсьць кутавы коэфіцэнт хорды і датычнае. Будзем шукаць координаты $(x_\circ, y_\circ)$ сярэдзіны хорды.

Вядома, што

$$x_\circ = \frac{x_1' + x_2'}{2};$$

дзе x_1' і x_2' — абсцысы канцоў хорды. Дзеля азначэньня гэтых велічынь выключым y з раўнаньняў (1) і (4), атрымаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k_1^2 x^2 + 2k_1 mx + m^2}{b^2} = 1,$$

ці

$$(b^2 - a^2k_1^2)\,x^2 - 2\,a^2k_1mx - a^2m^2 = a^2b^2$$

Велічыні x'_1 і x'_2 — карані гэтых раўнаньняў. Нам-жа патрэбны ня самыя карані, а іх сума. З альгэбры мы ведаем, што сума каранёў квадратовага раўнаньня ёсьць:

$$x_1' + x_2' = \frac{2\,a^2k_1m}{b^2 - a^2k_1^2}$$

Таму абсцыса сярэдзіны хорды выражаецца так:

$$x_0 = \frac{a^2k_1m}{b^2 - a^2k_1^2}$$

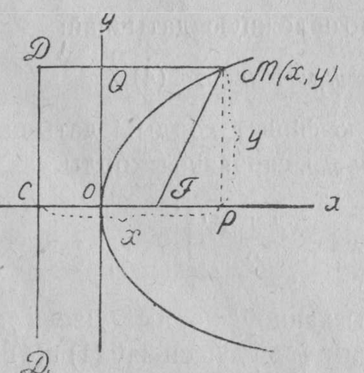
Ордыната y_0 сярэдзіны хорды знойдзецца з раўнаньня (4):

$$y_0 = k_1x_0 + m = \frac{a^2k_1^2m}{b^2 - a^2k_1^2} + m = \frac{b^2m}{b^2 - a^2k_1^2}$$

Простай праверкай пераконваемся, што на падставе суадносін (3) координаты x_0 і y_0 здавальняюць раўнаньню (2), а гэта паказвае, што c—сярэдзіна хорды ляжыць на дыямэтры.

§ 11. ПАРАБОЛА

Параболай завецца геомэтрычнае месца пунктаў, якія роўна аддалены ад дадзенага пункту, што завецца фокусам, і ад дадзенай простай, якая назыв. дырэктрысай.



Рыс. 54

Няхай (рыс. 54) пункт F ёсьць фокус, а простая DD_1 —дырэктрыса некаторай параболы.

Абазначым адлегласьць Fc — фокуса ад дырэктрысы праз p.

Абярэм простакутную сыстэму координат так, каб вось x-аў праходзіла праз фокус F і была-бы пэрпэндыкулярна да дырэктрысы DD_1, а пачатак знаходзіўся-б у сярэдзіне адцінка FC.

Тады координаты фокуса будуць відавочна $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Цяпер возьмем адвольны пункт параболы $M\,(x, y)$. Адлегласьці FM і DM—згодна азначэньня павінны быць роўныя. Але

$$DM = \frac{p}{2} + x;$$

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

адкуль знаходзім

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

узводзім атрыманы выраз ў квадрат і расчыняем дужкі:

$$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

інакш

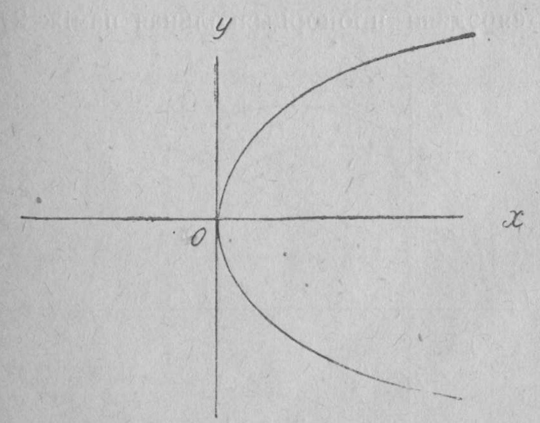
$$y^2 = 2\,px \qquad (1)$$

(р—не параболы).

Дасьледваньне формы параболы

Разгледзім паасобку два выпадкі. І-ы: $p > 0$; (рыс. 55). Калі ў р—ні (1) дапусьцім $x = 0$; то знойдзем $y = 0$. Гэта значыць, крывая праходзіць праз пачатак координат. Калі разьвяжам раўнаньне параболы адносна y, то знойдзем, што

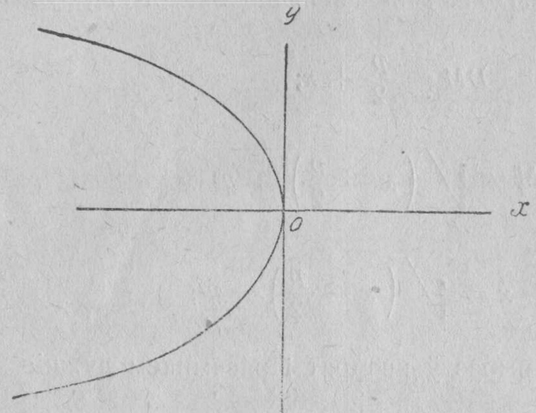
$$y = \pm\sqrt{2\,px}$$



Рыс. 55

пры $p > 0$ сапраўдныя значэньні y адпавядаюць толькі дадатным x-м, значыцца, парабола ўся разьмяшчаецца ўправа ад восі Y, як паказана на рысунку 55. Кожнаму значэньню x адпавядаюць 2 значэньні y, якія адрозьнiваюцца толькi знакамi. Значыцца, вось x-аў ёсьць вось сымэтрыi параболы. Калi x павялiчваць да бесканечнасьцi, y так сама бязьмежна ўзрастае.

Адгэтуль вынiкае, што парабола ёсьць крывая незамкнёная i адыходзiць у бесканечнасьць.



Рыс. 56

II-гi выпадак. Калi $p < 0$; то з раўнаньня

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

бачым, што сапраўдныя значэньнi y адпавядаюць адмоўным x-м. Парабола ў гэтым выпадку разьмяшчаецца ўлева ад восi Y (рыс. 56). Ува ўсiм астатнiм, дасьледваньне гэтакае-ж, як i ў першым выпадку, калi p было больш за нуль.

Збудаваньне параболы

1. Збудаваньне па пунктах.

З раўнаньня:

$$y^2 = 2px$$

бачым, што y ёсьць сярэдняя пропорцыянальная памiж $2p$ i x. На падставе гэтага робiм так (рысунак 57):

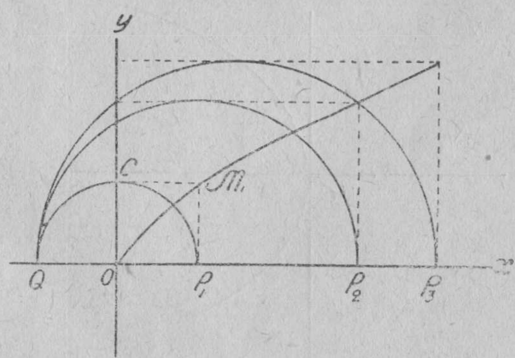
Адкладаем на восi X улева ад пачатку

$$OQ = 2p$$

i ўправа

$$Op_1 = x$$

i будуем на Q, як на дыямэтры, паўакружыну. Адцiнак OC восi Y, ад пачатку да перасеку з акружынай, ёсьць сярэдняя пропорцыянальная



Рыс. 57

памiж OP_1 i QO; праводзiм з пунктаў C i P_1 лiнii, паралельныя восям, атрымаем пункт M_1, якi ляжыць на параболе.

Такiм-жа чынам можна збудаваць адвольны лiк пунктаў параболы.

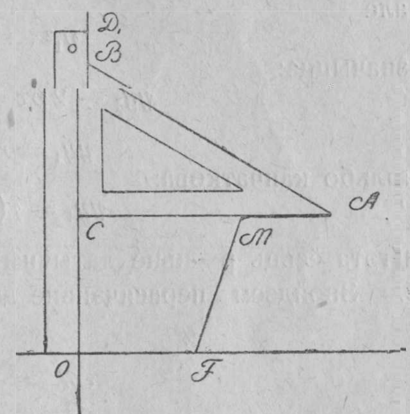
2. Асноўная ўласьцiвасьць параболы дае вельмi просты спосаб збудаваньня параболы неперарыўным рухам.

Замацуем (рыс. 58) усьцяж дырэктрысы DD_1 лiнейку i прыкладзем да яе трыкутнiк, да вяршынi A якога прымацуем нiтку, даўжынёю роўную катэту AC трыкутнiка Другi канец гэтай нiткi замацуем у фокусе F.

Цяпер нацягваем алоўкам нiтку так, каб астрыё яго прылягала да катэту AC (пун. M).

З роўнасьцi даўжынi нiткi $AM + MF$ i катэту AC, вынiкае, што $MF = MC$.

Адсюль вiдаць, што пункт M ляжыць на параболе. Рухаючы тр—нiкам усьцяж лiнейкi i прыцiскаючы нацягненую нiтку да катэту AC, мы i акрэсьлiм параболу.



Рыс. 58

§ 12. ДАТЫЧНАЯ ДА ПАРАБОЛЫ

Успамянем, што агульнае раўнаньне датычнай да ўсякай крывой ёсьць:

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).$$

Знойдзем $\frac{dy_1}{dx_1}$ для параболы. Калi будзем дыфэрэнцыяваць раўнаньне

$$y^2 = 2px \qquad (1),$$

атрымаем:

$$2yy' = 2p,$$

цi

$$y' = \frac{p}{y};$$

$$y'_1 = \frac{p}{y_1};$$

устаўляем гэты выраз у раўнаньне датычнай, атрымаем:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1),$$

або

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1;$$

але

$$y_1^2 = 2px_1,$$

значыцца:

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1,$$

$$yy_1 = px + px_1,$$

альбо канчаткова:

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

(гэта ёсьць р—ньне датычнай да параболы).

Знойдзем перасячэньне датычнай з восьсю X. Дзеля гэтага допусьцім

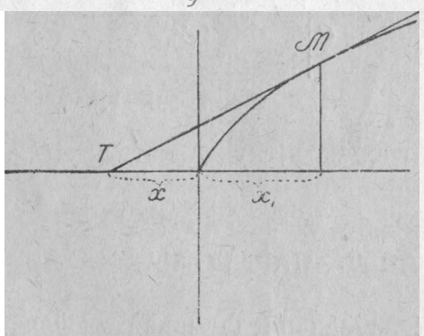
$$y = 0.$$

Атрымаем:

$$p(x + x_1) = 0,$$

ці

$$x = -x_1.$$



Рыс. 59

Гэта азначае, датычная да параболы адсякае на восі X, улева ад пачатку координат, адцінак, роўны велічынёю абсцысе пункту дотыку.

Гэта акалічнасьць дае просты спосаб збудаваньня датычнае да параболы ў дадзеным ёю пункце. Будуем для дадзенага пункту M абсцысу і адкладаем яе велічыню ўлева ад пачатку координат; простая TM і будзе шуканай датычнай. Лёгка збудаваць і нормаль для ўсякага пункту параболы, бо паднормаль для параболы ёсьць велічыня сталая, роўная p.

РАЗЬДЗЕЛ IV

Фокальныя ўласьцівасьці крывых другога парадку

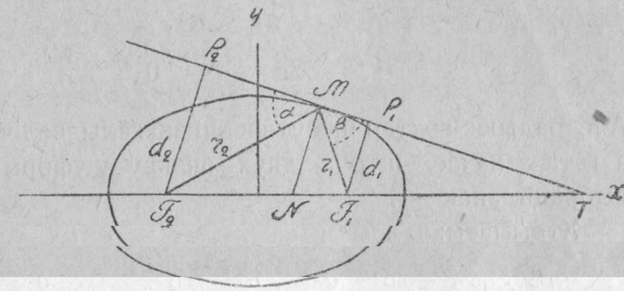
§ 1. ФОКАЛЬНЫЯ ЎЛАСЬЦІВАСЬЦІ ЭЛІПСА

Выразім адлегласьці r і r_1 адвольнага пункту эліпса $M(x, y)$ (рыс. 60) ад яго фокусаў, як функцыю аргумэнту x (гэтыя адлегласьці завуцца радыюсамі—вэктарамі).

З тэй прычыны, што координаты правага фокусу $(c, 0)$, то адлегласьць

$$MF_1 = r_1$$

паводле вядомай формулы выражаецца:



Рыс. 60

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \qquad (1)$$

але для эліпса y будзе ровен:

$$\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2)$$

значыцца,

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2b^2 - b^2x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{x^2(a^2 - b^2) - 2ca^2x + a^2(c^2 + b^2)}$$

Але для эліпса мы маем:

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

адкуль

$$c^2 + b^2 = a^2\,,$$

азначае:

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{x^2c^2 - 2\,a^2cx + a^4} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(xc - a^2)^2} = \pm\frac{xc - a^2}{a} \qquad (3).$$

Як мы бачылі раней, x і c для эліпса менш за a, а гэта значыць:

$$xc < a^2\,,$$

$$xc - a^2 < 0\,.$$

Але радыюс-вэктар па сутнасьці заўсёды велічыня дадатная, а гэта азначае, што з двух знакаў у формуле (3) трэба выбраць знак —.

Атрымаем:

$$r_1 = -\frac{xc - a^2}{a} = \frac{a^2 - xc}{a} = a - \frac{c}{a}\,x \qquad (4)$$

Каб атрымаць выраз радыюса-вэктара для левага фокусу, трэба ў роўнасьці (4) замяніць $+c$ на $-c$.

Тады атрымаем:

$$r_2 = a + \frac{c}{a}\,x \qquad (5).$$

Стасунак $\frac{c}{a}$, фокуснае адлегласьці $2c$ да вялікае восі $2a$, завецца эксцэнтрыцытэтам і абазначаецца літарай e. Для эліпса

$$c < a\,,$$

і значыцца,

$$\frac{c}{a} < 1.$$

Гэта азначае,—эксцэнтрыцытэт эліпса менш за адзінку. Калі ўставім у роўнасьці (4) і (5) e замест $\frac{c}{a}$, атрымаем канчаткова:

$$r_1 = a - ex\,,$$

$$r_2 = a + ex \qquad (6).$$

Адгэтуль вынікае, што радыюсы-вэктары эліпса—рацыянальныя функцыі x.

Калі складзем паміж сабой роўнасьці (6), атрымаем:

$$r_1 + r_2 = 2\,a\,.$$

Гэтага і трэ' было чакаць, бо апошняя роўнасьць выражае асноўную уласьцівасьць эліпса, прынятую намі за яго азначэньне.

Т э о р э м а. Датычная да эліпса ўтварае роўныя куты з радыюсамі-вэктарамі, якія праведзены ў пункт дотыку.

Шукаем адлегласьць кожнага з фокусаў ад датычнае, г. зн., даўжыні пэрпэндыкуляраў d_1 і d_2 (рыс. 60).

Дзеля гэтага прыводзім раўнаньне датычнай:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

да нормальнага выгляду. Абазначым нормавальны множнік літарай M (выраз для M нам не патрэбен).

Раўнаньне датычнай ў нормальнай форме будзе такое:

$$\frac{Mxx_1}{a^2} + \frac{Myy_1}{b^2} - M = 0$$

Дзеля таго, каб атрымаць адлегласьці, якія мы шукаем, d і d_2, падстаўляем у атрыманае раўнаньне коордынаты фокусаў, атрымаем:

$$d_1 = M\left(\frac{cx_1}{a^2} - 1\right);$$

$$d_2 = M\left(-\frac{cx_1}{a^2} - 1\right)$$

адкуль:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{cx_1}{a^2} - 1}{-\frac{cx_1}{a^2} - 1} = \frac{a^2 - cx_1}{a^2 + cx_1}.$$

Падзелім лічнік і назоўнік правай часткі апошняй роўнасьці на a, атрымаем:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{a - ex_1}{a + ex}\,,$$

ці

$$\frac{d_1}{a^2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Відаць, што ў простакутных т—ках MF_1P_1 і MF_2P_2 (рыс. 60) гіпотэнуза і катэт аднаго пропорцыянальны гіпотэнузе і катэту другога. Значыцца, гэтыя тр—кі падобныя, а гэта азначае, што куты α і β роўныя, што і патрэбна было давесьці.

Вынік. Нормаль эліпса падзяляе кут паміж радыюсамі-вэктарамі напалам, бо куты нормалі з радыюсамі-вэктарамі дапаўняюць α і β да простых кутоў. Апошняй ўласьцівасьцю тлумачыцца ўласьцівасьць эліптычных люстраў, праменьні якіх ідуць з аднаго фокуса, і пасьля адбіцьця праходзяць праз другі фокус.

Фокальныя ўласьцівасьці гіпэрболы

Паўтарэньне папярэдніх разважаньняў дае падобныя ўласьцівасьці гіпэрболы:

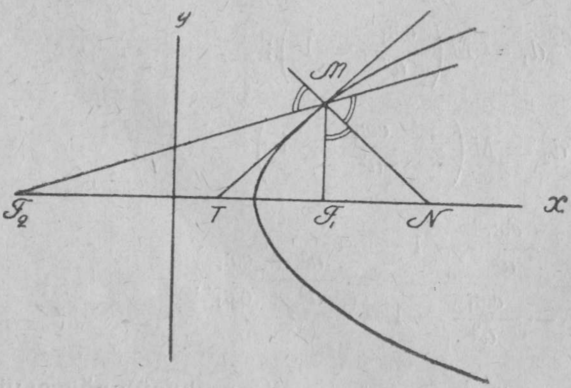
а) радыюсы-вэктары—рацыянальныя функцыі x, а як раз для правае галіны:

$$r_1 = ex - a;$$

$$r_2 = ex + a,$$

дзе e так сама, як і для эліпса, роўна $\frac{c}{a}$ і завецца эксцэнтрыцытэтам:

$$\frac{c}{a} > 1.$$



Рыс. 61

Эксц—тэт гіпэрболы больш за адзінку. Для левай галіны

$$(x < 0 \; |x| > a),$$

$$r_1 = a - ex,$$

$$r_2 = -a - ex.$$

Для кожнай галіны розьніца радыюсаў-вэктараў роўна $2a$.

b) Датычная падзяляе кут паміж радыюсамі-вэктарамі напалам, а нормаль утварае з імі роўныя куты (глядзі рысунак 61).

Фокальныя ўласьцівасьці параболы

Згодна азначэньня параболы, радыюс-вэктар для кожнага пункту яе ровен адлегласьці гэтага пункту да дырэктрысы, г. зн.:

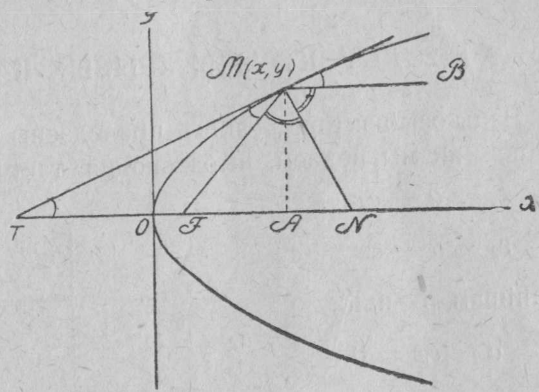
$$r = \frac{p}{2} + x.$$

Значыцца, радыюс-вэктар параболы так-сама рацыянальная функцыя x. Датычная да параболы ўтварае роўныя куты з радыюсамі-вэктарамі і з восьсю X. І сапраўды, мы ведаем, што калі TM—датычная да параболы ў пункце $M(x,y)$, то адцінак

$$TO = OA = x$$

і

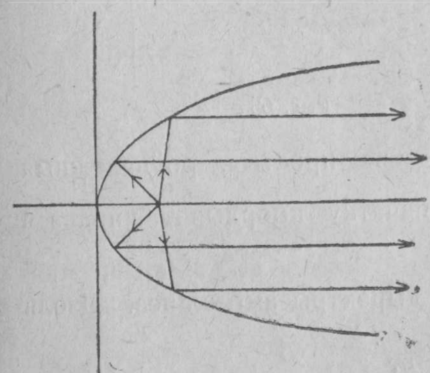
$$OF = \frac{p}{2},$$



Рыс. 62

так што

$$TF = x + \frac{p}{2}$$



Рыс. 63

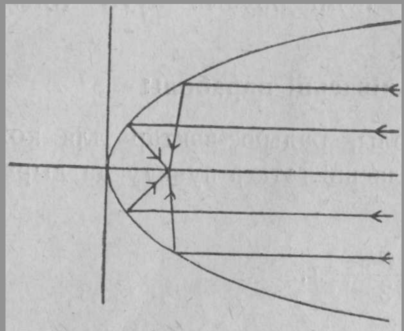
радыюс-вэктар FM таксама ровен

$$\frac{p}{2} + x,$$

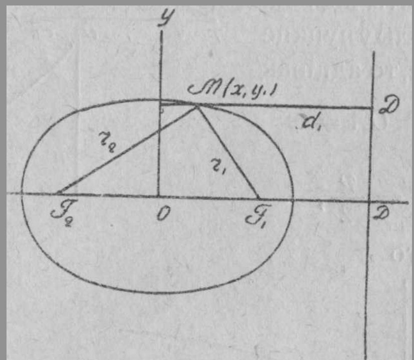
значыцца, трыкутнік TFM роўнаплечны і

$$\angle FTM = \angle FMT.$$

Калі правесьці нормаль MN і простую MB роўналежна восі X, то атрымаем роўныя куты NMF і NMB, гэта азна-



Рыс. 64



Рыс. 65

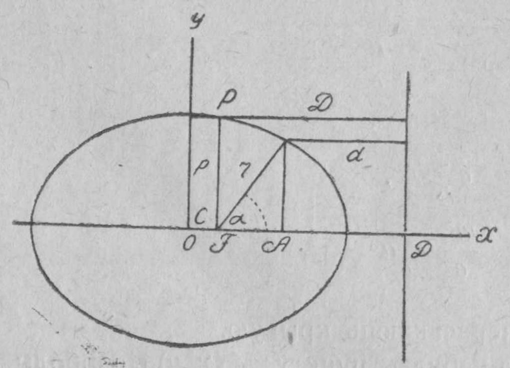
гэта азначае, што паказаная ўласьцівасьць падыходзіць і да гіпэрболы. Для кожнага пункту параболы адлегласьць r да фокуса роўна адлегласьці d да дырэктрысы, значыцца, для параболы

$$\frac{r}{d}=1.$$

Такім чынам, для ўсіх трох крывых другога парадку стасунак адлегласьцяй адвольнага пункту кожнай з іх да фокуса і дырэктрысы ёсьць вілічыня сталая, пры тым для эліпса гэты стасунак (эксцэнтрыцытэт) менш за адзінку, для гіпэрболы больш за адзінку і для параболы роўны адзінцы. Інакш магчыма сказазць так: кожная з крывых 2-га парадку (эліпс, гіпэрбола і парабола) ёсьць гэометрычнае месца пунктаў, адлегласьць якіх да дадзенага пункту (фокусу) і да дазенай простай (дырэктрысы) ёсьць велічыня сталая. Гэты сталы стасунак завецца эксцэнтрыцытэтам крывой.

§ 3. ПОЛЯРНАЕ РАЎНАНЬНЕ КРЫВЫХ ДРУГОГА ПАРАДКУ

Знаходзім выражэньне даведзенай вышэй ўласьцівасьці для двух пунктаў эліпса,—для пункту P як раз над фокусам, і для адвольнага пункту $M(x, y)$. Адлегласьць пункту P да фокуса, абазначым літарай p, адлегласьць пункту P да дырэктрысы абазначым літарай D. Значыцца, будзем мець:



Рыс. 66

$$\frac{p}{D}=e,$$

або

$$p=De \quad (1).$$

Для пункту M

$$\frac{r}{d}=e,$$

або

$$r=de.$$

Але

$$d=D-FA=D-r\cos\alpha,$$

значыцца,

$$r=dc=De-re\cos\alpha.$$

На падставе (1) гэтую роўнасьць магчыма напісаць карацей:

$$r=p-re\cos\alpha,$$

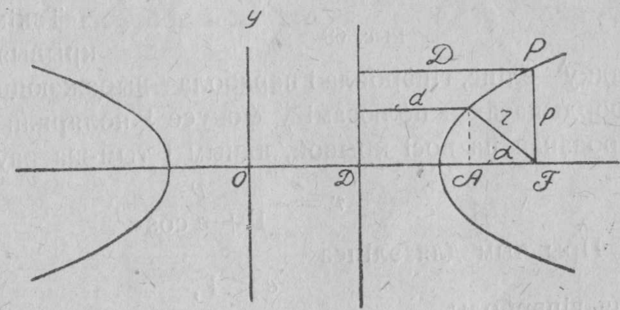
адгэтуль

$$r=\frac{p}{1+e\cos\alpha} \quad (2).$$

Гэта і ёсьць полярнае раўнаньне эліпса, прычым полюс знаходзіцца ў фокусе, а полярная вось супадае з вялікай восьсю эліпса. Магчыма полюс зьмяшчаць у левы фокус эліпса. Усе вялічыні будуць тыя-ж самыя, і атрымаем зноў раўнаньне (2). Толькі трэба зьвяртаць увагу на тое, што цяпер полярная вось накіравана ўлева ад левага фокусу (накіравана да левае дырэктрысы).

Для гіпэрболы полюс магчыма таксама ўзяць у кожным з фокусаў, нятрэба толькі забывацца, што полярная вось павінна быць накіравана да адпаведнае дырэктрысы.

Зьмесьцім полюс, напрыклад, у правым фокусе (рыс. 67).



Рыс. 67

Для пункту P

$$\frac{p}{D}=e,$$

альбо

$$p=De$$

Для пункту M:

$$d=D-AF=D-r\cos\alpha.$$

Значыцца, ўласьцівасьць

$$\frac{r}{a}=e,$$

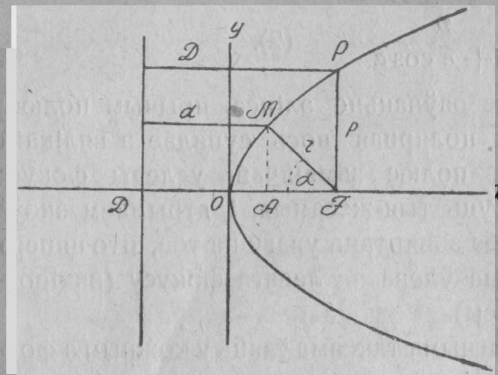
дае:

$$r=de=De-re\cos\alpha,$$

альбо

$$r=p-re\cos\alpha$$

Калі разьвяжам гэта раўнаньне адносна r, то прыдзем да таго-ж самага раўнаньня (2).



Рыс. 68

Для параболы

$$r = d = DF - AF,$$

альбо (рыс. 68):

$$r = p - r \,.\, \cos\alpha,$$

адкуль

$$r = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$$

Такім чынам, усе крывыя другога парадку—эліпс, гіпэрбола і парабола—выражаюцца ў полярных координатах з полюсамі ў фокусе і полярнай восьсю, накірованай па восі крывой, адным і тым-жа раўнаньнем:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}$$

Пры чым для эліпса

$$e < 1,$$

для гіпэрболы

$$e > 1$$

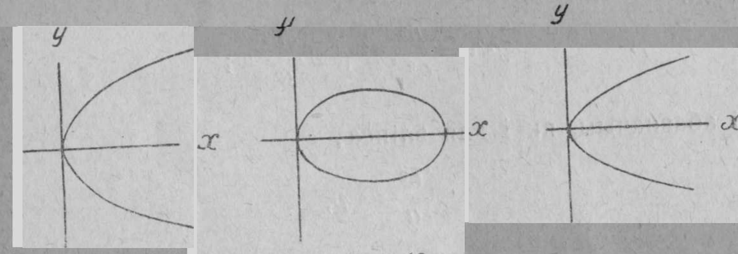
і для параболы

$$e = 1.$$

§ 4. РАЎНАНЬНІ ЭЛІПСА І ГІПЭРБОЛЫ АДНОСНА ВЯРШЫНЬ

Раўнаньні эліпса і гіпэрболы былі аднесены да восяй крывых, а раўнаньне параболы да восі і датычнае ў вяршыні. Раўнаньне эліпса і гіпэрболы з аднаго боку, а р—ні параболы з другога боку атрымаліся вельмі рознымі паміж сабою. Каб атрымаць раўнаньні, падобныя паміж сабою, трэба аднесьці крывыя да аднолькавых сыстэм координат. Дзеля таго, што ў параболе толькі адна вось, то прыходзіцца эліпсу і гіпэрболе раўняцца па параболе, гэта азначае, трэбаператварыць раўнаньні эліпса і гіпэрболы, прыняўшы за восі координат адну з восяй крывой і датычную ў вяршыні. Гэта магчыма дасягнуць простым пераносам пачатку координат у вяршыню, прычым дзеля таго, каб разьмяшчэньні крывых вакол пачатку координат былі

падобныя да разьмяшчэньня параболы, трэба для эліпса перанесьці пачатак координат у левую вяршыню, а для



Рыс. 69

гіпэрболы—у правую. Значыцца, для эліпса трэба x замяніць праз $x - a$, а для гіпэрболы x праз $x + a$ (y застаецца бяз зьмены).

Раўнаньне эліпса прымае форму:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ці

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x^2 - 2ax}{a^2} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$y^2 = \frac{(2ax - x^2)\,b^2}{a^2} = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,.\,x^2;$$

абазначым

$$\frac{b^2}{a} = p;$$

атрымаем канчаткова:

$$y = 2px - \frac{p}{a}\,x^2.$$

Гэта ёсьць раўнаньне эліпса адносна левае вяршыні.

Раўнаньне гіпэрболы пасьля ператварэньня прымае форму:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x}{a}+1-\frac{y^2}{b^2}=1$$

адкуль

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2+2\frac{b^2}{a}x;$$

калі абазначым, як і для эліпса,

$$\frac{b^2}{a}=p,$$

атрымаем канчаткова раўнаньне гіпэрболы адносна правае вяршыні:

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2.$$

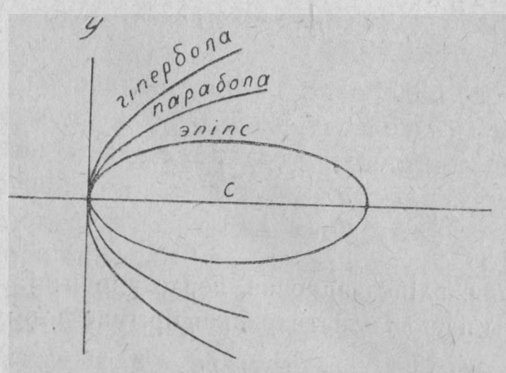
Такім чынам мы маем раўнаньні крывых другога парадку адносна вяршынь у такім выглядзе:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2 \quad \text{(эліпс)} \qquad (1)$$

$$y^2=2px \quad \text{(парабола)} \qquad (2)$$

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2 \quad \text{(гіпэрбола)} \qquad (3).$$

Калі ўвесьці эксцэнтрыцытэт, то гэтыя тры раўнаньні магчыма злучыць у адно:



Рыс. 70

$$y^2=2px+(e^2-1)x^2$$

пры чым для эліпса

$$e<1,$$

для параболы

$$e=1,$$

і для гіпэрболы

$$e>1.$$

Мы бачым, што раўнаньне эліпса атрымоўваецца адыманьнем, а раўнаньне гіпэрболы дадаваньнем да правае часткі раўнаньня параболы некаторай велічыні.

Уявім сабе, што цэнтр эліпса перасоўваецца ўправа па восі X, і што пры гэтым восі эліпса a і b павялічваюцца так, што стасунак $\frac{b^2}{a}$, г. зн., велічыня p, застаецца бяз зьмен. Можна дапусьціць:

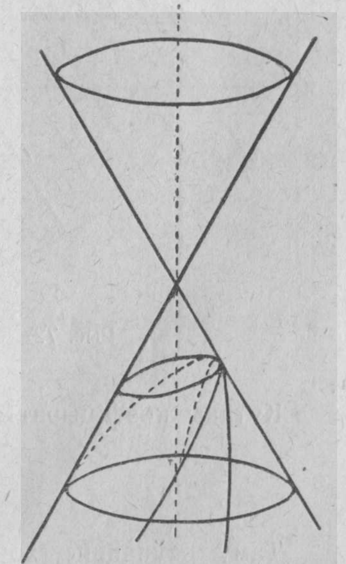
$$a=np,$$

$$b=p\sqrt{n}$$

і зьмяняць n ад некаторай дадатнай велічыні да $+\infty$, потым па адмоўных ліках ад $-\infty$ до 0 і ўрэшце па дадатных ліках ад 0).

Калі цэнтр ідзе ўправа ў ∞, а значыцца, восі эліпса ўзрастаюць да ∞ (але велічыня p застаецца бяз зьмен), то дроб $\frac{p}{a}$ памяншаецца да 0, і, як паказвае раўнаньне (1), эліпс пяройдзе ў параболу.

Калі цэнтр будзе перасоўвацца далей, то ён апынецца ўлева ад пачатку каардынат, і парабола пяройдзе ў гіпэрболу. Пры далейшым перасоўваньні цэнтра, гіпэрбола пяройдзе праз вось Y ізноў у эліпс. Відавочна, што пры перасоўваньні цэнтра ўлева гіпэрбола пяройдзе так сама ў параболу.


Рыс. 71

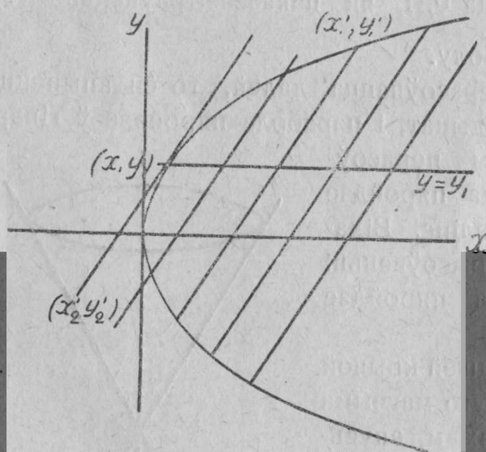
Прасачыць пераход аднэй крывой другога парадку ў іншую магчыма простым вопытным шляхам, апусьціўшы падвойны шкляны конус у ваду. Калі нахіліць конус так, каб адна з вытваральных была горызантальная, то паверхня вады дае на паверхні конуса параболу. Пры ўсякім іншым нахіле конуса, атрымаем альбо эліпсы, альбо гіпэрболы, у залежнасьці ад таго, ці перасякае паверхня вады адну палову конуса альбо дзьве паловы.

Такім чынам, мы вопытным шляхам пераконваемся, што калі конус перасякаць рознымі роўніцамі, то магчыма атрымаць усе крывыя другога парадку. Гэтыя палажэньні мажліва даказаць матэматычна дакладна. На падставе гэтага крывыя другога парадку завуцца часам конічнымі сячэньнямі.

§ 5. ДЫЯМЭТРЫ ПАРАБОЛЫ

Мы бачылі, што параболу можна разглядаць, як гранічнае палажэньне эліпса альбо гіпэрболы пры дапушчэньні, што цэнтр адыходзіць у бязьмежнасьць. Дыямэтр—простая, якая праходзіць праз цэнтр. Адсюль вывад: усе дыямэтры параболы роўналежныя паміж сабой (роўналежныя восі параболы).

Адносна эліпса і гіпэрболы мы ведаем, што кожны дыямэтр гэтых крывых ёсьць геомэтрычнае месца сярэдзін хорд, роўналежных датычнай у канцы гэтага дыямэтра. Гэта палажэньне правільнае і для дыямэтраў параболы.



Рыс. 72

Давядзем гэта. Няхай дадзена парабола:

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$

і яе дыямэтр

$$y = y_1 \qquad (2),$$

дзе y_1 — дадзеная велічыня).

Праводзім праз канец (x_1, y_1) гэтага дыямэтра датычную:

$$yy_1 = p\,(x + x_1)$$

Кутавы коэфіцыэнт яе будзе:

$$k = \frac{p}{y_1}.$$

Таму раўнаньне хорды, роўналежнай гэтай датычнай, ёсьць:

$$y = \frac{p}{y_1}\,x + m \qquad (3).$$

Будзем шукаць ордынату y_0 сярэдзіны гэтае хорды.

Вядома, што

$$y_0 = \frac{y_1' + y'_2}{2},$$

дзе y'_1 і y_2'—ордынаты канцоў хорды.

Дзеля азначэньня гэтых велічынь, выключаем x з раўнаньняў (1) і (3).

З (3) раўнаньня маем:

$$px = yy_1 - my_1.$$

Падстаўляем гэты выраз у раўнаньне (1), атрымаем квадратовае раўнаньне:

$$y^2 = 2\,(yy_1 - my_1).$$

Сума каранёў гэтага раўнаньня

$$y_1' + y_2' = 2\,y_1,$$

а таму

$$y_0 = y_1\,.$$

Гэта роўнасьць паказвае, што сярэдзіна ўзятае хорды ляжыць на дыямэтры (2). Хорда была праведзена роўналежна датычнай у канцы дыямэтра.

Робім вывад, што сярэдзіна кожнае хорды, роўналежнай датычнай у канцы дыямэтра, ляжыць на гэтым дыямэтры.

Гэты вывад даводзіць правільнасьць выказанага палажэньня.

Дасьледваньне і спрашчэньне раўнаньня крывых 2-га парадку

Няхай крывая другога парадку, якая аднесена да простакутнай сыстэмы координат, дадзена раўнаньнем:

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f = 0 \qquad (1).$$

Раўнаньне крывой можна значна спросьціць належным выбарам новае сыстэмы координат.

Пры гэтым будзем адрозьніваць два выпадкі, у залежнасьці ад таго, ці складаюць тры старэйшыя члены раўнаньня (1) поўны квадрат ці не.

Памножыўшы раўнаньне (1) на a, мы ўбачым, што старэйшыя члены

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

складаюць поўны квадрат у тым выпадку, калі

$$ac = b^2.$$

Разгледзім спачатку першы выпадак.

I. Старэйшыя члены дадзенага раўнаньня складаюць поўны квадрат (альбо $ac = b^2$).

Пасьля множаньня на a[1]) раўнаньне (1) прымае выгляд:

$$(ax + by)^2 + 2adx + 2aey + af = 0 \qquad (2)$$

Само сабой зьяўляецца жаданьне ператварыць раўнаньне (2) гэтак, каб квадрат двухчлена $ax + by$ замяніўся квадратам новага невядомага. Пакажам, што гэтага можна дасягнуць паваротам восяй координат на кут t, г. з. ператварэньнем:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos t - Y\sin t \\ y &= X\sin t + Y\cos t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Заўважым, што адгэтуль новыя координаты выражаюцца цераз ранейшыя гэтакім чынам:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos t + y\sin t \\ Y &= -x\sin t + y\cos t \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Возьмем ад раўнаньня (2) квадрат двухчлена $(ax + by)^2$ і ўвядзем множнік M. Узяты выраз пяройдзе ў

$$\frac{(Max + Mby)^2}{M^2}$$

Выберам множнік M гэтак, каб выраз у дужках атрымаўся роўны Y. На падставе (4) трэба дапусьціць:

---

1) Коэфіцыэнт a маем на ўвазе розны ад 0, бо ў процілежным выпадку дадзенае раўнаньне ад самага пачатку мела-б выгляд р-ня простай; звыш таго, мы можам лічыць коэфіцыэнт a дадатным лікам (у процілежным выпадку зьмяняем знакі ўсіх членаў раўнаньня (1). На падставе таго, што $ac = b^2$ пры дадатным a, коэфіцiэнт c таксама дадатны.

$$Ma = -\sin t;$$

$$Mb = \cos t \qquad (5)$$

Адгэтуль лёгка знойдзем значэньне множніка M:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a(a+c)}} \qquad (6)$$

Роўнасьці (5) даюць для азначэньня кута t роўнасьць:

$$\operatorname{tg} t = -\frac{a}{b} \qquad (7)$$

Пры гэтакім выбары кута t першы член раўнаньня (2) пяройдзе ў $\frac{Y^2}{M^2}$, альбо на падставе (6) у $a(a + c)\,Y^2$, а ўсё раўнаньне (2) на падставе формул (3) пяройдзе ў

$$(a + c)\,Y^2 + 2d\,(X\cos t - Y\sin t) +$$

$$2e\,(X\sin t + Y\cos t) + f = 0.$$

Замяняем тут $\sin t$ і $\cos t$ згодна формул (5), атрымаем:

$$(a + c)\,Y^2 + 2M\,(bd - ae)\,X + 2M\,(be + ad)\,Y + f = 0 \quad (8)$$ [1])

Гэта раўнаньне прасьцей за раўнаньне (1) (няма членаў з X^2 і XY).

Перанясем цяпер пачатак координат у пункт (α і β), г. зн., зробім ператварэньне:

$$X = x + \alpha;$$

$$Y = y + \beta \qquad (9).$$

(Новыя координаты азначаны тут ранейшымі літарамі x і y).

Пасьля такога ператварэньня раўнаньне (8) прымае выгляд:

$$(a + c)\,y^2 + 2M\,(bd - ae)\,x +$$

$$+ 2\,[(a + c)\,\beta + M\,(be + ad)]\,y + F = 0 \quad (10)$$

дзе

$$F = (a + c)\,\beta^2 + 2M\,(bd - ae)\,\alpha + 2M\,(be + ad)\,\beta + f$$

---

1) Пры $bd - ae = 0$, крывая (2) распадаецца на пару простых, паралельных восі X.

У далейшым будзем лічыць, што $bd - ae \neq 0$.

Відавочна, мы можам абраць дзьве адвольных велічыні α і β гэтак, каб у ператвораным раўнаньні зьніклі член з першаю ступеньню y і вольны член F.

Варта толькі дапусьціць:

$$(a+c)\beta + M(be+ad) = 0$$

і

$$F = 0,$$

альбо усё роўна:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -M\frac{be+ad}{a+c} \\ \alpha &= \frac{1}{2M(bd-ae)} \cdot \left[\frac{(be+ad)^2}{a(a+c)^2} - f\right] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ператворанае раўнаньне (10) прымае просты выгляд:

$$(a+c)\,y^2 + 2M(bd-ac)\,x = 0$$

альбо:

$$y^2 = 2px,$$

дзе

$$p = M\frac{ae-bd}{a+c} \quad (12)$$

Множнік M, які сюды ўваходзіць, вылічваецца з формулы (6), прычым бярэм знак (+) альбо (—) з гэтакім разьлікам, каб парамэтр p атрымаўся дадатным лікам. У гэтакім выпадку з двух разьвязаньняў (у межах ад 0° да 360°) трыгонамэтрычнага раўнаньня (7), трэба абраць гэтакае, каб знак для $\sin t$ быў узгоджаны са знакам, які здавальняе першую залежнасьць (5). Больш ясна будзе зрабіць такім чынам: узяць меншы кут t, які здавальняе роўнасьці (7) (тады $\sin t = +$), а для множніка M на падставе (5) узяць знак (—) мінус; калі парамэтр p зьявіцца пры гэтым адмоўным лікам, і пажадана зрабіць яго дадатным, дык прыйдзецца павярнуць восі коордынат яшчэ на 180°, замяніць x цераз $-x$.

Гэтакім чынам, у тым выпадку, калі старэйшыя члены дадзенага раўнаньня (1) складаюць поўны квадрат (альбо калі $ac = b^2$), раўнаньне выражае парabолу, спрошчанае раўнаньне якой (12) атрымліваецца вярчэньнем коордынатных восяй на кут t, які азначаецца роўнасьцю (7) і перанясеньнем пачатку коордынат у вяршыню параболы (11).

Пры гэтам, пры дадатным коэфіцыэнце a, бярэм для t меншы кут, а для множніка M знак мінус (—).

Нарэшце, заўважым, што часта раўнаньне параболы даецца ў такім выглядзе:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (13).$$

Гэтакае раўнаньне прыводзіцца да спрошчанага выгляду:

$$y = cx^2 \quad (14)$$

толькі перанясеньнем пачатку коордынат у пункт з коордынатамі:

$$\alpha = -\frac{b}{2c};$$

$$\beta = a - \frac{b^2}{4c} \quad (15).$$

II. Старэйшыя члены дадзенага раўнаньня (1) не складаюць поўнага квадрата (альбо $ac \neq b^2$).

У дадзеным выпадку вылічэньне будзе прасьцей, калі пачаць з перанясеньня пачатку коордынат.

Зробім ператварэньне:

$$x \,/\, x + \alpha$$

$$y \,/\, y + \beta \quad (16)$$

(Новыя коордынаты вызначаны тымі самымі літарамі x і y).

Раўнаньне (1) пяройдзе у:

$$\left.\begin{aligned} &ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(a\alpha + b\beta + d)\,x + \\ &\quad + 2(b\alpha + c\beta + e)\,y + F = 0 \\ &F = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + 2e\beta + f \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Выберам α і β так, каб у ператвораным раўнаньні зьніклі члены з першымі ступенямі x і y, г. зн., дапусьцім, што:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\beta + d &= 0 \\ b\alpha + c\beta + e &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)^{1)}$$

---

[1]) Гэтыя раўнаньні атрымліваюцца проста дыфэрэнцыяваньнем дадзенага р—ня (1) па x і y і наступнаю заменай x і y літарамі α і β.

Адгэтуль для α і β атрымаем канчатковыя значэньні ($ae \neq b^2$):

$$\alpha = \frac{be - cd}{ac - b^2}$$

$$\beta = \frac{bd - ae}{ac - b^2} \qquad (19)$$

Ператворанае раўнаньне (17) прымае выгляд:

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + F = 0 \qquad (20)$$

Гэтае раўнаньне паказвае, што калі пункт (x, y) ляжыць на крывой, дык і сымэтрычна разьмешчаны адносна пачатку координат пункт $(-x, -y)$ таксама знаходзіцца на крывой.

Значыцца, новы пачатак ёсьць цэнтр сымэтрыі, альбо проста цэнтр крывой.

Вольны член F раўнаньня (20) можна выразіць у выглядзе многачлена першай ступені адносна α і β.

Ї сапраўды, маем тожсамасьць:

$$a\alpha^2 + 2\,b\alpha\beta + c\beta^2 + 2\,d\alpha + 2\,e\beta + f =$$

$$= \alpha\,(a\alpha + b\beta + d) + \beta\,(b\alpha + c\beta + e) + (d\alpha + e\beta + f)$$

На падставе раўнаньняў цэнтра (18) і залежнасьці (17) маем:

$$F = d\alpha + e\beta + f \qquad (21)^{1)}$$

Падставіўшы сюды значэньні α і β р—ня (19), атрымаем:

$$F = \frac{-ae^2 + 2\,bde - cd^2}{ac - b^2} + f \qquad (21^1)$$

Павернем цяпер восі кoордынат на кут t, г. з., зробім падстаноўку (3).

Пакажам, што можна выбраць такі кут t, каб новае раўнаньне не зьмяшчала ў сабе члена са здабыткам xy, інакш кажучы, мела-б форму:

$$AX^2 + CY^2 + F = 0 \qquad (22)$$

[1]) Гэты выраз ёсьць палова паасобнай выводнай па z ад аднароднага многачлена:

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dxz + 2\,cyz + fz^2$$

рпы $z = 1$ і з заменаю x і y літарамі α і β.

Зрабіўшы адваротны паварот восяй, г. з., ужыўшы ператварэньне (4), мы павінны прыйсьці да раўнаньня (20). Гэтакім чынам раўнаньне:

$$A\,(x\cos t + y\sin t)^2 + C\,(-x\sin t + y\cos t)^2 + F = 0$$

павінна быць тожсамым з р—нем (20).

Таму

$$\left.\begin{aligned} A\cos^2 t + C\sin^2 t &= a \\ (A - C)\sin t \cdot \cos t &= b \\ A\sin^2 t + C\cos^2 t &= c \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Складаючы і аднімаючы першую і трэцюю роўнасьці, атрымаем:

$$A + C = a + c$$

$$(A - C)\cos 2\,t = a - c \qquad (24)^{1)}$$

Астатняя роўнасьць разам з другой роўнасьцю (23) дае раўнаньне для азначэньня t:

$$\operatorname{tg} 2\,t = \frac{2\,b}{a - c} \qquad (25)$$

Мы можам узяць гэтакі кут t, каб коэфіцыэнт A атрымаўся меншы за коэфіцыэнт C. Ї сапраўды, другая роўнасьць (23) і роўнасьць (25) даюць:

$$A - C = \frac{2\,b}{\operatorname{sn}\,2\,t}\,;$$

$$\sin 2\,t = \pm\frac{2\,b}{\sqrt{(a - c)^2 + 4\,b^2}}$$

а таму

$$A - C = \pm\sqrt{(a - c)^2 + 4\,b^2}$$

Каб здаволіць нашае запатрабаваньне $(A < C)$, патрэбна ўзяць корань са знакам (—), з прычыны чаго

$$A - C = -\sqrt{(a - c)^2 + 4\,b^2} \qquad (26)$$

а для $\sin 2t$ трэба ўзяць знак, адваротны знаку коэфіцыэнта b.

[1]) Калі ў дадзеным раўнаньні $a + c \neq o$, дык зробім так, каб гэта сума была дадатнай.

Таму пры адмоўным коэфіцыэнце b трэба ўзяць востры кут t:

$$(\sin 2t = +; \quad \operatorname{tg} 2t = \pm),$$

а пры дадатным коэфіцэнце b трэба ўзяць тупы кут t:

$$(\sin 2t = -; \quad \operatorname{tg} 2t = \pm)$$

Зьвернемся цяпер да р—ня (22). Ня будзем супыняцца на выпадку, калі $F = 0$: тады раўнаньне (22) дае альбо адзін пункт — пачатак коордынат — альбо пару простых, якія перасякаюцца ў пачатку; будзем лічыць, што $F \neq 0$.

Коэфіцыэнты A і C вызначаюцца з залежнасьцяй (24) і (26):

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[a + c - \sqrt{(a - c^2) + 4b^2}\right] \\ C &= \frac{1}{2}\left[a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Мы бачым, што коэфіцыэнт C — дадатны лік:

$$(a + c = +).$$

Коэфіцыэнт A будзе таксама дадатным пры

$$a + c > \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}$$

альбо пры

$$ac > b^2$$

і адмоўным пры

$$ac < b^2.$$

Дапусьцім спачатку, што

$$ac > b^2,$$

значыцца,

$$A > 0.$$

У такім выпадку раўнаньне (22) дае сапраўдную крывую толькі пры

$$F < 0;$$

атрымаем эліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (28),$$

дзе

$$a^2 = -\frac{F}{A};$$

$$b^2 = -\frac{F}{C} \qquad (29).$$

Дапусьцім цяпер, што

$$ac < b^2$$

і, значыцца,

$$A < 0.$$

У такім выпадку атрымаем адну з спрэжаных гіпэрбол:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{пры } F > 0) \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{пры } F < 0) \end{aligned}\right\} \qquad (30).$$

Для абедзьвюх гіпэрбол a^2 і b^2 азначаюцца формуламі (29); пры гэтым правыя часткі гэтых формул трэба замяніць абсолютнымі значэньнямі іх.

Гэтакім чынам, у тым выпадку, калі старэйшыя члены дадзенага раўнаньня (1) не складаюць поўнага квадрата (альбо калі $ac \neq b^2$)[1]), р—не выражае эліпс (пры $ac > b^2$), альбо гіпэрболу (пры $ac < b^2$)[2]). — Спрошчаньне раўнаньня гэтых крывых (28) і (30) атрымліваецца перанясеньнем пачатку коордынат у цэнтр, які азначаецца раўнаньнямі (18), альбо формуламі (19) і вярчэньнем восяй коордынат на кут t, які азначаецца формулаю [(25), [прычым, пры дадатным коэфіцыэнце b, бярэм тупы кут t, а пры адмоўным b — востры кут t.

Паўвосі a і b азначаюцца раўнаньнямі (29), прычым A і C даюцца формуламі (27), а F—формулаю (21[1]) альбо, лепш, формулаю (21).

П р ы к л а д 1.

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x + 6y + 5 = 0$$

У нашым выпадку:

$$a = 9; \quad b = 12; \quad c = 16; \quad d = 1; \quad e = 3; \quad f = 5$$

[1]) Трэба не забыцца зрабіць суму $(a + c)$ дадатнаю.

[2]) Эліпс можа адмяніцца ў пункт, а гіпэрбола ў пару простых, якія перасякаюцца.

(Не забываем аб двойках у коэфіцыэнтах раўнаньня (1) і аб тым, што коэфіцыэнт a павінен быць дадатным).

Тры старэйшыя члены дадзенага раўнаньня складаюць поўны квадрат:

$$(ac = b^2);$$

таму шукаем спачатку M; згодна формулы (6) бярэм знак (—), а потым p згодна формулы (12); атрымаем:

$$M = -\frac{1}{15};$$

$$p = -\frac{1}{25}.$$

Гэтакім чынам спрошчанае раўнаньне параболы мае выгляд:

$$y^2 = -0{,}08\,x$$

Гэтае раўнаньне атрымліваецца з дадзенага:

1) паваротам восяй коордынат на кут

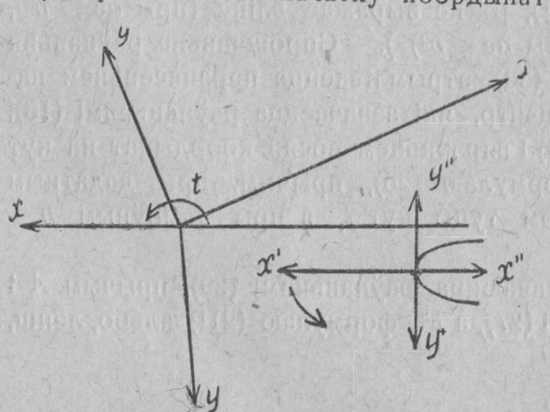
$$t = 180^\circ - 36^\circ 52{,}2' = 143^\circ 7{,}8'$$

(бярэм меншы кут);

2) перанясеньнем пачатку коордынат у пункт, які азначаецца формуламі (11):

$$\alpha = -2{,}32;$$

$$\beta = 0{,}12$$



Рыс. 73

Калі пажадана мець дадатны парамэтр параболы, дык робім паворот восяй яшчэ на 180°; гэтакім чынам, у агульным выніку паварачваем восі коордынат на кут

$$t = 323^\circ 7{,}8'.$$

Канчатковае раўнаньне параболы будзе гэтакім:

$$y^2 = 0{,}08\,x,$$

а збудаваньне будзе гэткае:

Паварачваем восі коордынат на кут

$$t = 145^\circ 7{,}8'.$$

Атрымліваем восі X і Y. Перанос пачатку коордынат дае восі x' і y'. Паварачваем іх на 180°, прыходзім да канчатковых восяй x'' і y''.

Пасьля ўсіх гэтыхператварэньняў дадзенае раўнаньне прымае выгляд простага раўнаньня:

$$y^2 = 0{,}08\,x$$

(пішам (x, y) замест (x'', y'')).

Прыклад 2.

$$3x^2 + 6x - 2y + 7 = 0,$$

альбо

$$y = \frac{7}{2} + 3x + \frac{3}{2}x^2.$$

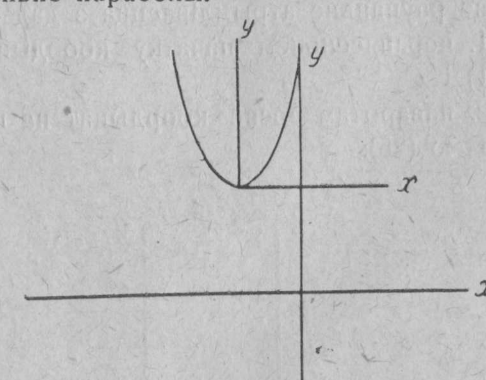
Старэйшы член $3x^2$ — поўны квадрат, значыцца, дадзенае раўнаньне ёсьць раўнаньне параболы.

Паводле формулы (15) маем, што для спрашчэньня раўнаньня неабходна перанесьці пачатак коордынат у пункт $(-1, 2)$; ператоранае раўнаньне будзе:

$$y = \frac{3}{2}x^2,$$

альбо

$$x^2 = \frac{2}{3}y.$$



Рыс. 74

Прыклад 3.

$$2x^2 - 72xy + 23y^2 + 68x + 26y + 28 = 0;$$

цяпер

$$a = 2;\quad b = -36;\quad c = 23;\quad d = 34;\quad e = 13;\quad f = 28$$

(сума $a + c$ дадатная).

Тры старэйшыя члены не складаюць поўнага квадрата $(ac \neq b^2)$. Дзеля таго шукаем спачатку цэнтр крывой з раўнаньняў (18) альбо формул (19), а затым F паводле формулы (21).

Атрымліваем:

$$\alpha = 1;$$
$$\beta = 1;$$
$$F = 75.$$

Далей з формул (27) знаходзім, што:

$$A = -25$$

і

$$C = 50.$$

Падстаўляем значэньні A, C і F у раўнаньне (22), атрымліваем раўнаньне гіпэрболы:

$$x^2 - 2y^2 = 3$$

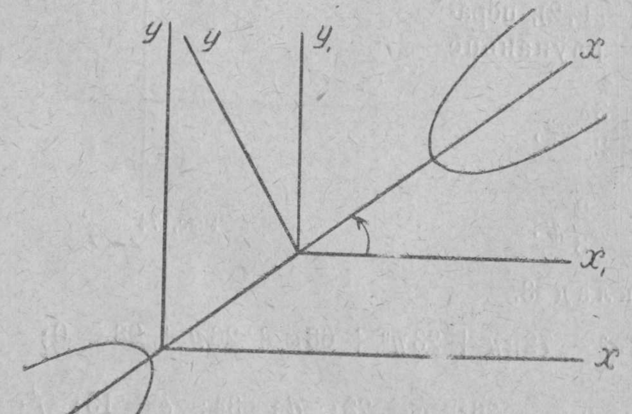
альбо

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1,5} = 1$$

Гэтае раўнаньне атрымліваецца з дадзенага:

1. перанясеньнем пачатку координат у цэнтр крывой $(1,1)$ і

2. паваротам восяй координат на кут t, які азначаецца фор—ю (25):



Р ы.

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{24}{7}$$

г. зн., на кут

$$t = 36°52,2'$$ [1]).

ЗАДАЧЫ НА КРЫВЫЯ ДРУГОГА ПАРАДКУ

1. Напісаць раўнаньне акружыны, якая праходзіць цераз пачатак координат, з цэнтрам у пункце (5,12).

2. Напісаць раўнаньне лініі цэнтраў дзьвюх акружын:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

3. Цераз дадзены пункт правесьці акружыну, якая датычыцца восяй координат.

4. Цераз пункт (0,—7) правесьці акружыну, якая датычыцца да простай, роўналежнай восі Y, у пункце $(-3, 2)$.

Адказ: $x^2 + y^2 - 24x - 4y - 77 = 0.$

5. Цераз пачатак координат правесьці акружыну, якая датычыцца простай:

$$x - 2y + 1 = 0$$

у пункце $(5, 3)$.

Адказ: $x^2 + y^2 - 44x + 62y = 0.$

6. Напісаць раўнаньне акружыны з цэнтрам у пачатку координат, калі простая

$$Ax + By = C$$

дае хорду, велічынёй $= a$.

7. Напісаць раўнаньне акружыны, якая датычыцца восяй координат і простай:

$$y = kx + b.$$

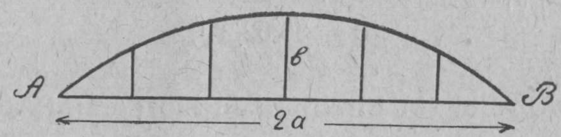
8. Знайсьці даўжыню датычнай з пункту $(-4, 7)$ да акружыны:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

9. Мост (гл. рыс. 76), даўжынёй $2a$ mt, падтрымліваецца старчаковымі стрыжнямі, якія замацаваны на дузе акружыны. Сярэдні стрыжань мае даўжыню b mt. Знасьці даўжыню

[1]) Бярэм востры кут t, бо коэфіцыэнт $b < 0$.

астатніх стрыжняў, калі яны разьмяркованы адзін ад аднаго на адлегласьці у n mt.



Рыс. 76

10. Да акружыны

$$x^2 + y^2 + 12x - 4y + 25 = 0$$

правесьці датычныя з пачатку координат.

11. Да дзьвюх акружын правесьці агульную датычную.

12. На кожную з простых, якія складаюць пучок простых, з дадзенага пункту праведзена па пэрпэндыкуляру. Якое геомэтрычнае месца асноў гэтых пэрпэндыкуляраў?

13. Да дадзенай акружыны праведзены датычныя аднэй і тэй-жа даўжыні. Знайсьці геомэтрычнае месца канцоў гэтых датычных.

Ува ўсіх наступных задачах эліпс і гіпэрбола аднесены да абедзьвюх восяй, а парабола да восі і да датычнай ў вяршыні.

14. Напісаць раўнаньне эліпса, які праходзіць праз два дадзеныя пункты. Пры якім палажэньні пунктаў задача неазначальная?

15. У якога эліпса адлегласьці дзьвюх вяршынь да аднаго з фокусаў роўны 2 і 8?

Адказ: 1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;$

2. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1.$

16. Пры якіх значэньнях координат пункт (x, y) ляжыць на дадзеным эліпсе, унутры альбо па-за ім?

17. У дадзены эліпс упісаць: a) квадрат, b) простакутнік так, каб бакі яго былі роўналежныя восям эліпса і прапарцыянальныя ім.

18. Да эліпса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

правесьці датычную: a) цераз пункт (10, 0), b) пад кутом 45° да восі X, c) роўналежна простай:

$$4x - 5y = 5,$$

d) так, каб яна адсякала на восях координат роўныя адцінкі.

19. Да дадзенага эліпса правесьці датычную так, каб раўняліся дадзенай велічыні: a) адцінак яе паміж восямі координат, b) плошча, якая адсечана ёю ад координатнага кута, c) адлегласьць яе да цэнтру.

20. Пры якіх умовах простая:

$$\varphi x + \psi y = 1$$

датыкаецца эліпса, гіпэрболы і параболы?

Адказ: $a^2\varphi^2 \pm b^2\psi^2 = 1;$

$$\psi^2 = -\frac{2\varphi}{p}.$$

21. Які эліпс з фокуснай адлегласьцю $2c$ датыкаецца простай:

$$y = kx + m?$$

Адказ: $\frac{x^2}{m^2 + c^2} + \frac{y^2}{m^2 - k^2c^2} = \frac{1}{1 + k^2}.$

22. Да дадзенага эліпса правесьці датычную найменшай даўжыні паміж восямі координат і знайсьці яе даўжыню.

Адказ: $\pm \frac{x}{\sqrt{a}} \pm \frac{y}{\sqrt{b}} = \sqrt{a + b};\quad a + b.$

23. Вяршыні квадрата, апісанага каля эліпса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ляжаць на восях эліпса, напісаць раўнаньне бакоў.

Адказ: $x \pm y = \pm 5.$

24. Знайсьці геомэтрычнае месца пунктаў, з якіх эліпс відаць пад простым кутом.

З а ў в а г а: Складаем умову пэрпэндыкулярнасьці дзьвюх датычных:

$$\frac{x_1x_2}{a^4} + \frac{y_1y_2}{b^4} = 0$$

і падстаўляем сюды выражэньні для x_1, x_2, і y_1, y_2.

Адказ: Акружына, якая апісана каля простакутніка, для якога восі эліпса зьяўляюцца сярэднімі лініямі.

25. Правесьці нормалі да эліпса праз канцы яго восяй.

26. Для якога пункту эліпса паддатычная роўна абсцысе?

27. Праз дадзены пункт правесьці хорду эліпса так, каб яна дадзеным дыямэтрам дзялілася папалам.

28. Для дадзенага эліпса знайсьці два спрэжаныя дыямэтры: a) роўныя паміж сабою, b) нахіленыя адзін да другога пад кутом у 135° (калі задача магчыма?) c) якія складаюць найбольшы кут.

29. Дыямэтр эліпса

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

складае $^3/_4$ спрэжанага яму дыямэтра. Знайсьці велічыню дыямэтраў, іх напрамак і кут паміж імі.

30. Знайсьці два спрэжаныя дыямэтры эліпса:

$$x^2 + 4y^2 = 4\,,$$

з якіх адзін: a) мае нахіл да вялікай восі пад кутом у 60°; b) праходзіць праз пункт перасячэньня эліпса з фокуснай хордай, роўналежнай восі Y; c) складае з другім кут у 45°.

31. Напісаць раўнаньне эліпса з фокуснай адлегласьцю ў 6 mm, калі дзьве простыя:

$$4x - 5y = 0$$

і

$$4x + 5y = 0$$

— спрэжаныя дыямэтры яго.

32. Давесьці, што дыягоналі апісанага каля эліпса пр—ма накіраваны па спрэжаных дыямэтрах, а бакі пр—ма, упісанага у эліпс, роўналежны спрэжаным дыямэтрам.

33. Найменшая адлегласьць зямлі ад сонца стасуецца з найбольшай, як 29 і 30. Знайсьці эксцэнтрыцытэт экліптыкі.

Адказ: $e = \frac{1}{59}$.

34. Вылічыць эксцэнтрыцытэт эліпса, малая вось якога відна з фокуса пад простым кутом.

Адказ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

35. Напісаць раўнаньне эліпса, калі адлегласьць паміж дырэктрысамі = 12,5, а эксцэнтрыцытэт = 0,8.

Адказ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

36. Знайсьці эксцэнтрыцытэт эліпса, калі фокусы дзеляць адлегласьць паміж дырэктрысамі на тры роўныя часткі.

Адказ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

37. Знайсьці поўвосі эліпса, эксцэнтрыцытэт якога = 0,5, калі радыюсы-вэктары аднаго з пунктаў эліпса роўны 5 і 7 mm.

Адказ: $a = 6$; $b = 3\sqrt{3}$.

38. На эліпсе

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

знайсьці пункт, для якога: a) радыюсы-вэктары пэрпэндыкулярныя паміж сабой; b) адзін радыюс-вэктар у 3 разы больш за другі.

39. Напісаць полярнае раўнаньне эліпса папярэдняе задачы, а таксама раўнаньне яго адносна вяршыні.

40. Знайсьці бакі квадрата, упісанага ў гіпэрболу, для якой $b > a$, калі бакі квадрата роўналежны восям.

41. Знайсьці адлегласьць паміж дзьвюх датычных да гіпэрболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

роўналежных простай:

$$2x - y = 4.$$

42. Знайсьці здабытак пэрпэндыкуляраў з фокусаў гіпэрболы на адвольную датычную.

43. Праз фокус гіпэрболы

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$$

правесьці датычную да спрэжанай гіпэрболы.

44. Правесьці да гіпэрболы датычную так, каб яна знаходзілася на аднольковай адлегласьці цэнтра і ад аднаго з фокусаў.

45. Давесьці, што датычныя да гіпэрболы ўтвараюць з асымптотамі роўнавялікія трыкутнікі.

46. Давесьці, што адцінак усякай датычнай да гіпэрболы паміж асымптотамі дзеліцца пунктам дотыку папалам.

47. Давесьці, што два адцінкі сякучай паміж асымптотамі і гіпэрболай роўныя паміж сабой. Дапасаваць гэту ўласьцівасьць да пабудовы пунктаў гіпэрболы, калі дадзены асымптоты і толькі адзін пункт гіпэрболы.

48. Давесьці, што простыя, якія праведзены праз якінебудзь пункт гіпэрболы паралельна асымптотам, утвараюць з асымптотамі пр—м сталай плошчы $\left(\frac{ab}{2}\right)$.

49. Знайсьці р—не гіпэрболы, вяршыні якой знаходзяцца ў фокусах, а фокусы ў вяршынях дадзенага эліпса.

50. Якім р—нем выражаецца нормаль да гіпэрболы?

51. Знайсьці геомэтрычнае месца пунктаў дотыку датычных з дадзенага пункту да ўсіх гіпэрбол з аднымі і тымі-ж асымптотамі.

52. Правесьці нормаль да гіпэрболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{10} = 1:$$

a) праз пункт (13, 0); b) даўжынёй у 5 адзінак; c) пад кутом у 45° к радыюсу-вэктару; d) так, каб адлегласьць яе ад аднаго фокуса была ў 2 разы больш адлегласьці яе ад другога фокуса.

53. Напісаць раўнаньне дыямэтра гіпэрболы: a) які дзеліць хорду

$$y = kx + m$$

папалам; b) відомы з фокуса пад дадзеным кутом.

54. Праз дадзены пункт правесьці хорду гіпэрболы так, каб яна дзялілася ў дадзеным пункце папалам.

Адказ: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$.

55. Прывесьці раўнаньне гіпэрболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \pm 1$$

да асымптот.

56. Раўнаньне гіпэрболы адносна асымптот ёсьць:

$$xy = 25.$$

Якое раўнаньне тэй-жа гіпэрболы адносна восяй, калі кут паміж асымптотамі

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{5}.$$

57. Напісаць раўнаньне гіпэрболы, якая праходзіць праз пункт (x_1, y_1), калі простая $y = kx$ — ёсьць асымптота яе.

58. Знайсьці на гіпэрболе пункт, з дзьвюх адлегласьцяй якога да асымптот адна ў 2 разы больш за другую.

59. Знайсьці геомэтрычнае месца цэнтраў цяжару трыкутнікаў, якія ўтвараюцца асымптотамі гіпэрболы і датычнымі да яе.

$$\textit{Адказ:}\quad \frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} = 1.$$

60. Знайсьці на гіпэрболе пункт, для якога адзін радыюсвэктар у два разы больш за другі.

61. Па эксцэнтрыцытэту гіпэрболы знайсьці кут паміж асымптотамі.

62. Знайсьці эксцэнтрыцытэт гіпэрболы, сапраўдная вось якой відна з фокусу спрэжанай гіпэрболы пад кутом у 60°.

63. Напісаць раўнаньне гіпэрболы, якая праходзіць праз пункт (5, 3), калі эксцэнтрыцытэт = 2.

Адказ: $\frac{x^2}{\ldots} - \frac{y^2}{\ldots} = 1$

64. Раўнаньне гіпэрболы адносна асымптот $xy = 6{,}25$. Знайсьці яе р—не адносна восяй, калі эксцэнтрыцытэт $= 1{,}25$.

65. Напісаць раўнаньне гіпэрболы, для якой $e = 1{,}5$, калі кут паміж асымптотамі роўны 120°.

66. Для якой гіпэрболы $e = 1{,}25$, а адлегласьць паміж дырэктрысамі $= 6{,}4$?

$$\text{Адказ: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

67. Знайсьці на гіпэрболе пункт, для якога радыюсывэктары складаюць кут, роўны куту паміж асымптот.

68. Знайсьці кут паміж асымптот гіпэрболы, калі адлегласьць паміж дырэктрысамі яе роўна 10, а адлегласьць паміж дырэктрысамі спрэжанай гіпэрболы роўна 6.

69. Які дыямэтр гіпэрболы падзяляецца дырэктрысамі на тры роўныя часткі?

70. Давесьці, што для ўсякага пункту гіпэрболы, радыюсвэктар роўны адлеглаьсці пункту да дырэктрысы, калі гэту адлегласьць узяць у напрамку, роўналежным да асымптоты.

71. Якая крывая выражаецца ў палярнай форме раўнаньнем:

$$r = \frac{25}{12 + 13\cos\alpha},$$

і ці магчыма правесьці датычную да гэтай крывой пад адвольным кутом да палярнай восі?

72. Азначыць геомэтрычнае месца асноў пэрпэндыкуляраў з фокусаў гіпэрболы на датычныя.

73. Адна вяршыня пр—ма супадае з вяршыняй кута ў 45°, дзьве другія вяршыні ідуць па бакох кута так, што плошча пар—ма застаецца бяз зьмен. Знайсьці геомэтрычнае месца 4-ой вяршыні пр—ма.

74. Дадзен эліпс:

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

напісаць раўнаньне гіпэрболы, вяршыні якой знаходзяцца ў фокусах, а фокусы ў вяршынях эліпса.

75. Напісаць раўнаньне эліпсаў, якія перасякаюць ортагональна гіпэрболу:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Увага: Датычныя да эліпса і гіпэрболы ў пунктах іх перасячэньня пэрпэндыкулярныя паміж сабой.

76. Напісаць раўнаньні ўсіх эліпсаў і ўсіх гіпэрбол, суфокусных з эліпсам:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

З усіх гэтых крывых выбраць такі эліпс, для якога парамэтр p ровен $3{,}2$ і такую гіпэрболу, для якой эксцэнтрыцытэт роўны $1{,}5$.

77. Давесьці, што суфокусныя эліпс і гіпэрбола перасякаюцца ортагональна.

78. Давесьці тэорэмы: а) калі праз пункт эліпса альбо гіпэрболы, якія знаходзяцца над фокусам, правесьці датычную, а затым пэрпэндыкуляр на яе з другога фокусу, дык датычная і пэрпэндыкуляр перасякаюць вось „Y“ у адным і тым-жа пункце на адлегласьці ад цэнтра, роўнай поўвосі „a“ крывой.

b) Так сама і датычная перасякае ў адным і тым-жа канцы (пункце) дырэктрысу і вось X. Гэта тэорэма справядлівая і для параболы.

79. Напісаць раўнаньне параболы, якая праходзіць праз пункты, $A\,(2, 3)$, $B\,(-2, -3)$.

80. Правесьці хорду параболы пэрпэндыкулярна да яе восі так, каб канец хорды знаходзіўся ад вяршыні на адлегласьці, роўнай адлегласьці хорды ад фокуса.

81. Знайсьці даўжыню хорды, якая праходзіць праз фокус параболы

$$y^2 = 4x$$

і нахілена да восі пад кутом у 45°.

82. Правесьці да параболы

$$y^2 = 6x$$

дзьве ўзаемна-пэрпэндыкулярныя датычныя так, каб паддатычная аднэй з іх раўнялася 6.

83. Праз пункт перасеку парабол:

$$y^2 = 2px$$

і

$$x^2 = 2py$$

правесьці датычныя і знайсьці:

a) кут паміж імі; b) плошчу чатырохкутніка паміж імі і восямі коордынат.

84. Правесьці да параболы датычную, якае дае на восі Y дадзены адцінак.

85. Напісаць раўнаньне параболы, якая будзе датыкацца простай:

$$y = kx + b$$

86. Пры якой умове простая:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

будзе датыкацца параболы:

$$y^2 = 2px?$$

87. Правесьці агульную датычную да параболы:

$$y^2 = 2px$$

і акружыны:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

88. Знайсьці геомэтрычнае месца вяршынь простага кута (так-сама кутоў 45°), бакі якога датыкаюцца дадзенай параболы.

89. Знайсьці геомэтрычнае месца цэнтраў кругоў, якія праходзяць праз дадзены пункт і датыкаюцца дадзенай простай.

Увага: пачатак коордынат узяць на сярэдзіне адлегласьці пункта да простай.

90. Давесьці, што аснова пэрпэндыкуляра з фокуса параболы на датычную ляжыць на восі Y.

91. Давесьці, што калі правядзем дзьве датычныя да параболы, дык абсцыса пунктаў перасячэньня ёсьць сярэдняя геомэтрычная абсцыс пунктаў дотыку, а ордыната— сярэдняя арытмэтычная ордынат пунктаў дотыку.

92. Да дазенай параболы правесьці нормаль: a) дадзенай велічыні;

b) якая адсякае на восі дадзены адцінак.

93. Знайсьці геомэтрычнае месца цэнтраў цяжару про-

стакутных трыкутнікаў, упісаных у параболу, калі ўсе вяршыні простых кутоў знаходзяцца ў вяршыні параболы.

Адказ: $y^2 = \frac{2}{3}p\left(x - \frac{4}{3}p\right)$.

94. Праз дадзены пункт правесьці хорду параболы так, каб яна дзялілася пунктам папалам.

95. Знайсьці геомэтрычнае месца сярэдзін фокальных хорд.

96. Правесьці дыямэтр параболы, які дзеліць папалам хорды, нахіленыя да восі пад кутом у 45°.

Адказ: $y = p$.

97. Правесьці дыямэтр параболы

$$y^2 = 6x,$$

які дзеліць напалам хорду:

$$3x - 6y = 1.$$

Адказ: $y = 6$.

98. Напісаць полярнае раўнаньне параболы

$$y^2 = 6x.$$

99. Дадзена полярнае раўнаньне крывой:

$$r = \frac{3}{2 + 2\cos\varphi}.$$

Напісаць раўнаньне гэтай крывой у дэкартавых коордынатах.

100. Якія крывыя выражаюцца раўнаньнямі:

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 + 60x - 30y + 15 = 0$$

$$11x^2 + 84xy - 24y^2 + 66x + 252y = 57$$

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 10x - 18y - 20 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 4y = 7$$

$$2y^2 + 8x + 12y = 3$$

$$y = 1 - 2x - 3x^2.$$

Напісаць раўнаньні гэтых крывых у прасьцейшай форме.

101. Знайсьці эксцэнтрыцытэт крывых:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

$$2xy + x - y = 13;$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 1 = 0.$$

102. Знайсьці парамэтр крывой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

103. Паказаць, што кожнае з раўнаньняў:

$$6x^2 + xy - 12y^2 + x + 44y = 40;$$

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + 18x - 12y = 1$$

выражае пару простых.

104. Якая крывая другога парадку:

а) праходзіць цераз пяць пунктаў (0,0), (2,0), (—3,—1), (0,—1), (3,3);

b) перасякае восі координат у пунктах: (—1,0), (3,0), (0,2), (0,—2) і праходзіць цераз пункт (3,2);

с) праходзіць цераз пункт (1,1) і датыкаецца восяй у пунктах (4,0) і (0,3).

Паясьненьне. Знаходзім коэфіцыэнты агульнага раўнаньня крывых другога парадку згодна дадзеных умоў. Тую ўмову, што крывая перасякае вось X у пунктах (—1,0) і (3,0) скарыстоўваем такім чынам: падставім у агульнае раўнаньне крывых другога парадку значэньне $y = 0$ і патрабуем, каб квадратовае раўнаньне

$$ax^2 + 2dx + f = 0$$

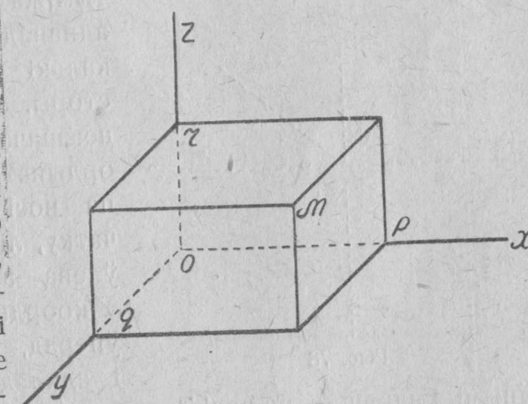
мела карані —1, і 3. Калі крывая датыкаецца восі X у пункце (4,0), то квадратовае раўнаньне павінна мець два роўных карані (4).

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕОМЭТРЫЯ Ў ПРАСТОРЫ

РАЗЬДЗЕЛ І

§ 1. МЭТОД КООРДЫНАТ У ПРАСТОРЫ

Вядома, што ў „Аналітычнай геомэтрыі" на роўніцы палажэньне пункту вызначаецца 2-ма лікамі—коордынатамі пункту, з дапамогай двух коордынатных восяй.



Рыс. 77

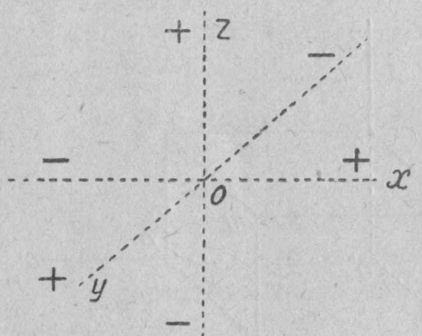
Паглядзім, як азначыць палажэньне пункту ў прасторы. Возьмем тры ўзаемна-пэрпэндыкулярныя простыя, якія выходзяць з аднаго пункту 0 (рыс. 77), і назавем іх адпаведна восямі X, Y і Z. Тады палажэньне ўсякага пункту прасторы M магчыма азначыць наступным чынам. Правядзем праз пункт M тры роўніцы, адпаведна пэрпэндыкулярныя да восяй X, Y і Z. Гэтыя роўніцы сякуць на восях адцінкі Op, Oq і Or. Вызначыўшы пэўную адзінку мераньня (маштаб мераньня) і вымераўшы з яе дапамогай адцінкі Op, Oq і Or, мы атрымаем тры лікі, якія азначаюць палажэньне пункту M у прасторы. Наадварот, задаючыся некаторымі 3-мя лікамі, мы з дапамогай выбранае адзінкі мераньня адкладаем нашы велічыні на восях і атрымоўваем адцінкі Op, Oq і Or. Затым праз пункты p, q і r праводзім роўніцы, пэрпэндыкулярныя да адпаведных восяй X, Y і Z. Перасячэньне гэтых роўніц і дасьць нам пункт M.

Такім чынам, кожны пункт азначае тры лікі, якія выражаюць даўжыні адцінкаў Op, Oq, і Or, і наадварот; тры лікі, як мы бачым, азначаюць палажэньне пункту ў прасторы.

З гэтай прычыны, гэтыя лікі завуцца координатамі пункту M і абазначаюцца праз x, y і z, лініі OX, OY і OZ завуцца восямі координат, а роўніцы XOY, XOZ, YOZ завуцца координатнымі роўніцамі.

Аднак, абазначаючы гэтакім чынам палажэньне пункту, атрымоўваем некаторую неазначанасьць (зусім аналёгічна таму, што было ў нас у аналітычнай геомэтрыі на роўніцы). Справа ў тым, што напрыклад, адцінак Op мы можам адкласьці на восі X, як управа, гэтак і ўлева ад пачатку.

Таксама адцінак Oq можно адкласьці па восі Y, як уперад, гэтак і назад, і адцінак Or восі Z, як уверх, гэтак і ўніз ад пачатку координат. Такім чынам ясна, што адным і тым-жа координатам, будзе адпавядаць не адзін, а некалькі (8) пунктаў у прасторы. Каб ухіліцца гэтай неазначанасьці, умовімся координаты, якія адкладзены па восі X управа ад пачатку, лічыць дадатнымі, а ўлева—адмоўнымі; па восі Y координаты, адкладзеныя ўперад, лічыць дадатнымі, і адкладзеныя назад — адмоўнымі, і нарэшце, па восі Z дадатнымі лічыць координаты, якія адкладзены ўверх, і адмоўнымі—уніз.



Рыс. 78

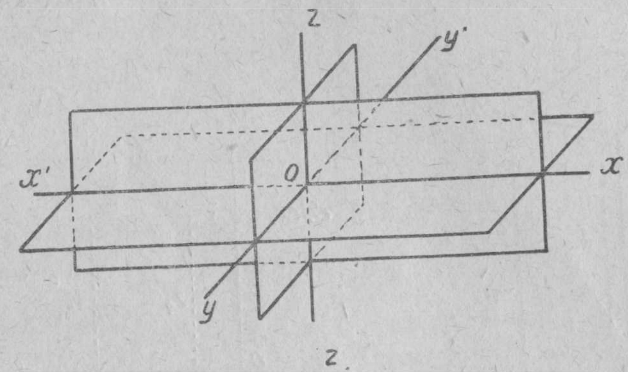
Ясна, што гэтым зусім адхіляецца паказаная неазначанасьць, і цяпер ужо кожным тром лікам будзе адпавядаць адзіны пункт у прасторы і наадварот.

З рыс. 79 бачым, што координатныя роўніцы дзеляць простору на 8 трохгранных кутоў, якія завуцца координатнымі кутамі.

Кут $OXYZ$, координаты ўсіх пунктаў якога дадатныя, завецца нормальным кутом.

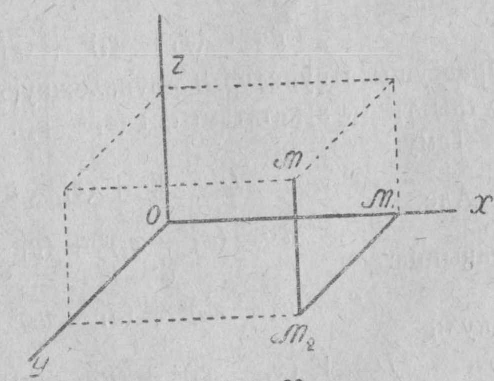
Увага 1. З гэтага рысунку добра відаць, што калі-б мы не дапасавалі правіла знакаў, то адным і тым-жа лікам—координатам адпавядалі-б 8 пунктаў у прасторы, па адным у кожным координатным куту.

Увага 2. Каб пабудаваць координаты пункту M, зусім не абавязкова рабіць так, як было паказана, г. зн. праводзіць пэрпэндыкулярныя роўніцы. Звычайна гэта робіцца наступным чынам (рыс. 80). З пункту M спускаюць пэрпэндыкуляр на якую-небудзь координатную роўніцу, напрыклад, MM_2 на роўніцу XOY, а з асновы пэрпэндыкуляру M_2—пэрпэндыкуляр на якую-небудзь вось на тэй самай роўніцы, напрыклад, на OX. З рысунку бачым, што даўжыні адцінкаў OM_1, M_1M_2, M_2M і будуць координатамі пункту M.



Рыс. 79

Разгледжаная намі сыстэма координат завецца простакутнай, бо куты паміж восямі простыя.



Рыс. 80

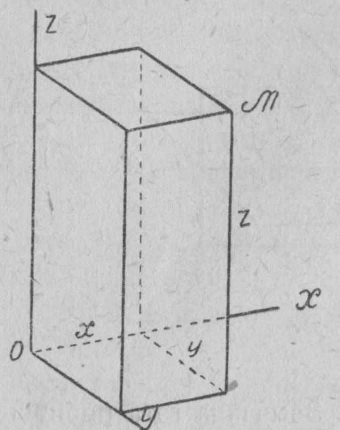
Існуюць таксама і косакутныя сыстэмы координат, напрыклад, на рысунку 81. Разьвязак задач у косакутных координатах вельмі складаны, а дзеля гэтага мы іх падрабязна разглядаць ня будзем.

§ 2.

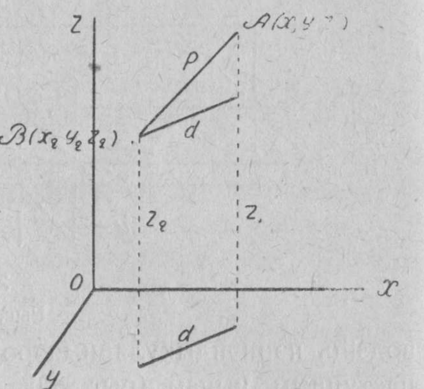
1. Адлегласьць паміж 2-ма пунктамі ў прасторы

Дадзены пункты $A\,(x_1, y_1, z_1)$ і $B\,(x_2, y_2, z_2)$, трэба вызначыць адлегласьць паміж імі D.

Пабудуем коордынаты z_1 і z_2. Атрымаем на роўніцы XOY два пункты з коордынатамі на роўніцы $(x_1\ y_1)$ і $(x_2\ y_2)$.



Рыс. 81



Рыс. 82

Адлегласьць d паміж імі вызначаецца формулай:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Правёўшы з пункту B роўналежную d, атрымаем простакутны тр—к з катэтамі d і $(z_1 - z_2)$.

Таму:

$$D^2 = d^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Але

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

значыцца:

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

адкуль

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

гэта і ёсьць формула, якая вызначае адлегласьць паміж двух пунктаў па іх коордынатах.

2. Дзяленьне адцінку ў дадзеным стасунку

Дадзены пункты $A\,(x_1, y_1, z_1)$ і $B\,(x_2, y_2, z_2)$. Патрэбна на адцінку AB знайсьці такі пункт M,—яго коордынаты (x, y, z),— каб стасунак

$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Правядзем праз пункты A, B і M роўніцы, роўналежныя

да восі X. На падставе геомэтрычнай тэорэмы, якая гаворыць, што адцінкі простых паміж роўналежнымі роўніцамі пропорцыянальныя пішам:

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{BM} = \frac{m}{n}$$

але

$$A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1$$

і

$$M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x,$$

значыцца:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}.$$

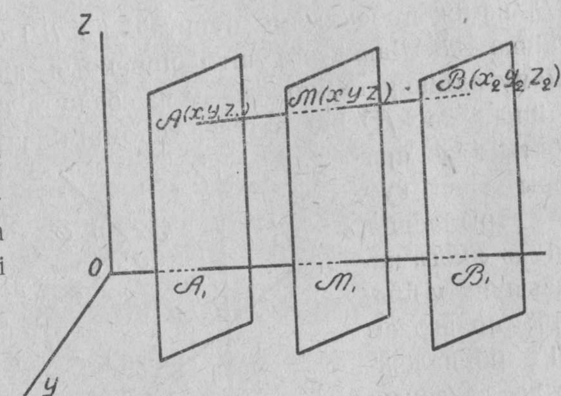
Разьвяжам гэтае раўнаньне адносна x, атрымаем:

$$x = \frac{x_2m + x_1n}{m + n}.$$

Зусім аналёгічна правёўшы праз пункты A, M і B пэрпэндыкулярныя роўніцы да восі Y і да восі Z, атрымаем:

$$y = \frac{y_2m + y_1n}{m + n};$$

$$z = \frac{z_2m + z_1n}{m + n}.$$



Рыс. 83

Калі $m = n$, тады для коордынат сярэдзіны адцінку атрымоўваем наступнае:

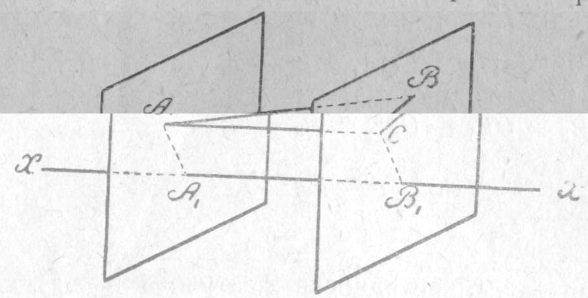
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

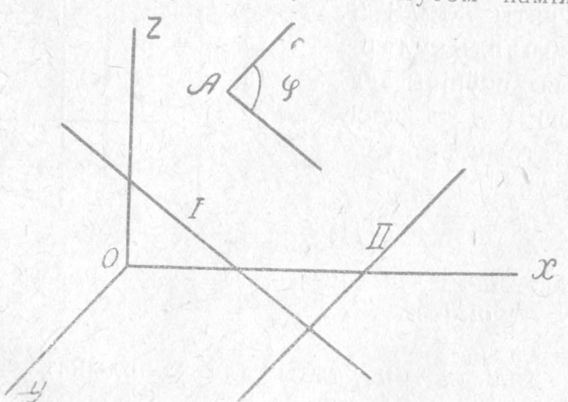
§ 3. АБ ПРОЕКЦЫЯХ

Няхай дадзена простая XX (рыс. 84) і які-небудзь пункт A. Проекцыяй пункту A на вось XX будзе зваццa пункт A_1, які атрымоўваецца, калі праз A правесьці роўніцу, пэрпэндыкулярную да восі XX.



Рыс. 84

Каб атрымаць проекцыю якога-небудзь адцінка AB на вось XX, трэба толькі спроектаваць яго канцы на вось. Адцінак A_1B_1 паміж проекцыямі пунктаў A і B і будзе проекцыяй адцінка AB. Давядзем, што проекцыя адцінка раўняецца самаму адцінку, памножанаму на cos кута паміж напрамкамі адцінка і восі. Перш за ўсё, успомнім, што кутом паміж простымі ў прасторы зав. кут, які атрымаецца, калі з якога-небудзь пункту прасторы правядзем лініі, роўналежныя да дадзеных простых.



Рыс. 85

Напрыклад, на рыс. 85, кут φ паміж простымі I-га і II атрымаем, калі з адвольнага цункту прасторы A правядзем лініі, роўналежныя да простых I-ай і II-ой.

Цяпер зьвернемся да нашага доваду. Правядзем праз пункт A лінію AC, роўналежную да восі XX. Тады кут φ і будзе кутом паміж AB і восьсю.

$$AC = A_1B_1,$$

як адцінкі роўналежных простых паміж роўналежнымі роў-

ніцамі. З простакутнага трыкутніка ABC маем:

$$AC = AB \cos\varphi,$$

значыцца,

$$A_1B_1 = AB \cos\varphi,$$

што і трэба было давесьці.

Вынік: з даведзенага відаць, што калі адцінак і вось роўналежныя, дык

$$\varphi = 0;$$

$$\cos\varphi = 1$$

і адцінак проектуецца ў натуральную велічыню.

Калі-ж адцінак пэрпэндыкулярны да восі проекцыі, дык

$$\varphi = 90^\circ,$$

$$\cos\alpha = 0,$$

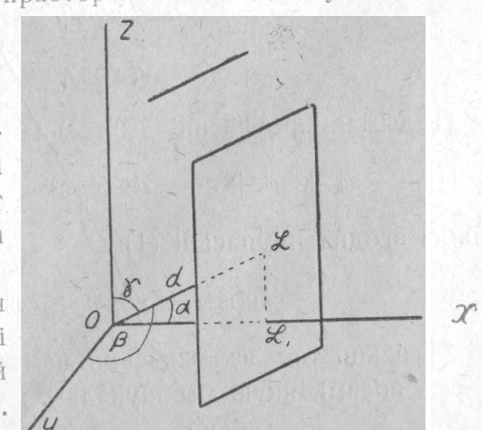
значыцца, адцінак проектуецца ў пункт. Таксама лёгка давесьці наступныя тэорэмы аб проекцыях:

1. Проекцыя замкнутай ламанай раўняецца нулю.
2. Проекцыя дзьвюх ламаных, якія маюць агульныя крайнія пункты, роўныя паміж сабою.

Довады іх зусім падобныя да довадаў адпаведных тэорэм у аналітычнай геомэтрыі на роўніцы (глядзі старонку 16).

§ 4. НАПРАМАК ПРОСТАЙ У ПРАСТОРЫ

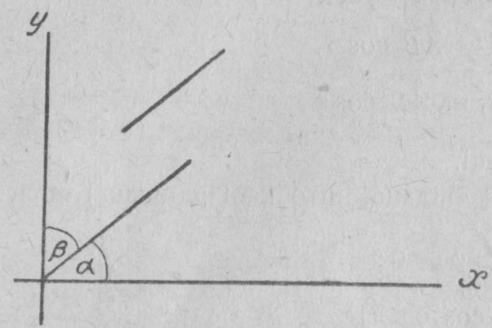
Напрамак простай у прасторы азначаецца кутамі, якія утварае простая з восямі координат. Каб атрымаць куты паміж простай I ай і восямі координат, даволі, як і раней, правесьці праз пачатак координат лінію OL, роўналежна простай I-ай.



Рыс. 86

Тады куты α, β і γ, якія паказаны на рыс. 86, і будуць кутамі простай I-ай з восямі координат.

Калі мы маем простую на роўніцы, дык паміж cosinus-амі кутоў простай з восямі існуе простая залежнасьць:



Рыс. 87

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

(вынік ўласьцівасьці $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Падобная залежнасьць ёсьць і паміж $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$.

Давядзем гэтую залежнасьць.

Возьмем на простай OL, адвольны пункт $L\ (x, y, z)$ і абазначым адлегласьць яе ад пачатку коордынат праз d.

Тады

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1)$$

Правядзем праз пункт L роўніцу, пэрпэндыкулярную да восі X. Адцінак OL будзе проекцыяй OL на вось X і абсцысай пункту L.

Значыцца, маем:

$$x = d\cos\alpha \qquad (2).$$

Проектуючы адцінак OL на восі Y і Z такім самым парадкам атрымаем роўнасьці:

$$y = d\cos\beta \qquad (3)$$

і

$$z = d\cos\gamma \qquad (4).$$

Падымаем роўнасьці (2), (3) і (4) у квадрат і складаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

альбо згодна роўнасьці (1):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

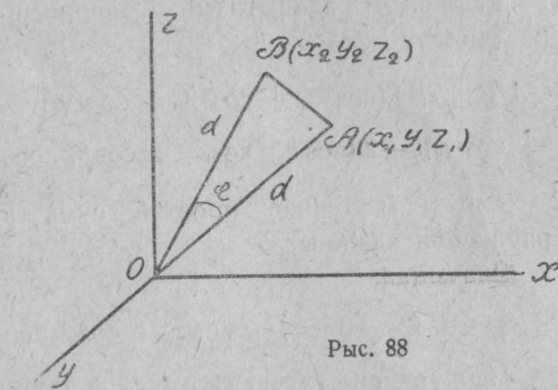
гэта і ёсьць тая залежнасьць паміж косінусамі кутоў простае з восямі, якую мы шукалі[1]).

[1]) Косінусы кутоў α, β і γ часта завуць кіравальнымі косінусамі простай.

§ 5. КУТ ПАМІЖ ПРОСТЫМІ У ПРАСТОРЫ

Няхай мы маем у прасторы дзьве простыя, І-ую і ІІ-ю. Каб атрымаць кут — φ паміж простымі, праводзім з пачатку коордынат простыя OA і OB, роўналежныя адпаведна да І-й і ІІ-ой, і адкладзем на іх аднолькавыя адцінкі:

$$OA = OB = d.$$



Рыс. 88

Каб знайсьці кут φ, скарыстаем тэорэму: квадрат боку трыкутніка раўняецца суме квадратаў двух іншых бакоў без падвойнага здабытку гэтых бакоў на косінус кута паміжі імі.

Значыцца:

$$AB^2 = d^2 + d^2 - 2\,dd\cos\varphi$$

$$AB^2 = d^2\,(2 - 2\cos\varphi) \qquad (1)$$

Але AB^2 можна вызначыць і праз коордынаты (паводле формулы адлегласьці паміж двума пунктамі), а менавіта:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \qquad (2)$$

Перайначым гэты выраз, увёўшы куты, якія ўтвараюць дадзеныя простыя з восямі коордынат.

Няхай простая І-я, а значыцца, і простая OA, утварае з восямі коордынат куты α_1, β_1 і γ_1, а простая ІІ, а значыцца і простая OB, куты α_2, β_2, і γ_2.

У гэтым выпадку, як нам вядома:

$$x_1 = d\cos\alpha_1$$
$$x_2 = d\cos\alpha_2$$

$$y_1 = d\cos\beta_1$$
$$y_2 = d\cos\beta_2$$

$$z_1 = d\cos\gamma_1$$
$$z_2 = d\cos\gamma_2$$

На падставе гэтых роўнасьцяй формула (2) будзе мець наступны выгляд:

$$AB^2 = d^2\left[(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)\right]$$

Расчыняем малыя дужкі і злучаем склады з квадратамі і падвойнымі здабыткамі ў асобныя групы, атрымаем наступнае:

$$AB^2 = d^2\left[(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) + (\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) - 2(\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2)\right].$$

Але для кожнай простай сума квадратаў косінусаў раўняецца адзінцы.

Значыцца:

$$AB^2 = d^2\left[2 - 2(\cos\gamma_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2)\right].$$

Параўнаўшы гэтую формулу з формулай (1), знаходзім тую формулу, якую мы шукалі:

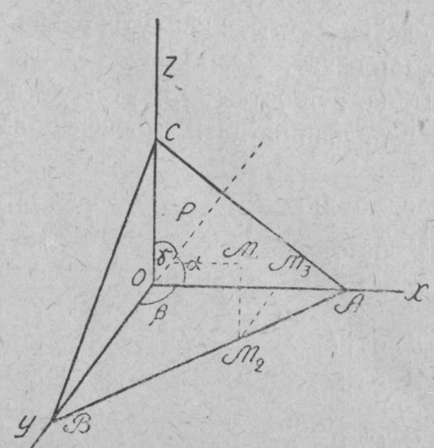
$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \gamma_2.$$

РАЗЬДЗЕЛ II

РОЎНІЦА

§ 1. РАЎНАНЬНЕ РОЎНІЦЫ

Няхай дадзена сыстэма коордынат (рыс. 89) і роўніца ABC. Спусьцім з пачатку коордынат O пэрпэндыкуляр Op на роўніцу і абазначым даўжыню яго праз p, а куты яго з восямі коордынат праз α, β γ. Палажэньне роўніцы, відавочна, цалкам вызначаецца парамэтрамі α, β, γ і p.



Рыс. 89

Возьмем на роўніцы адвольны пункт M, збудуем яго коордынаты:

$$OM_1 = x,$$

$$M_1M_2 = y$$

і

$$M_2M = z$$

Спроектуем ламаную $OM_1\, M_2\, Mp$ на лінію Op. Яе проекцыя будзе, бязумоўна, раўняцца проекцыі замкнутой Op:

$$\text{пр. } OM + \text{пр. } M_1M_2 + \text{пр. } M_2M + \text{пр. } Mp = \text{пр. } Op$$

Заўважым, што OM_1, M_1M_2 іM_2M адпаведна роўналежныя да восяй коордынат, значыцца, куты паміж імі і лініяй Op адпаведна роўныя α, β і γ.

Апрача таго, лінія Mp пэрпэндыкулярная да Op, а значыцца, проекцыя яе раўняецца нулю.

Атрымаем:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (1)$$

Атрыманае раўнаньне і ёсьць раўнаньне роўніцы ў нормальнай форме.

Відавочна, што коордынаты усякага пункту M, які знаходзіцца на нашай роўніцы, здавальняюць нашаму раўнаньню, а коордынаты усякага пункту, якія не знаходзяцца на роўніцы, не здавальняюць раўнаньню.

Трэба зьвярнуць увагу на тое, што, папершае, куты, якія ўваходзяць у атрыманае раўнаньне, ня куты роўніцы з восямі коордынат, а куты пэрпэндыкуляра да роўніцы з восямі коордынат, і гэтыя куты злучаны стасункам:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

і падругое, p — даўжыня пэрпэндыкуляра, які спушчаны з пачатку коордынат на роўніцу і лічыцца дадатнай велічынёй.

Атрыманае раўнаньне—I-ай ступені адносна бягучых коордынат. Значыцца, роўніца вызначаецца раўнаньнем першай ступеніі.

Давядзем, што ўсякае раўнаньне першай ступені адносна бягучых коордынат магчыма прывесьці да раўнаньня віду (1), г. зн. да нормальнага віду. Агульны выгляд раўнаньня першай ступені з трыма невядомымі будзе такі:

$$Ax + By + Cz = D.$$

Памножым усе члены гэтага раўнаньня на некаторы множнік M, які выбярэм так, каб коэфіцыэнты новага раўнаньня былі роўны коэфіцыэнтам раўнаньня:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (1).$$

Памножыўшы, атрымаем:

$$MAx + MBy + MCz = MD \qquad (2).$$

Параўнаўшы атрыманае роўнаньне з раўнаньнем (1), убачым, што:

$$MA = \cos\alpha;$$

$$MB = \cos\beta;$$

$$MC = s\cos\gamma$$

і

$$MD = p,$$

падымем першыя тры з атрыманых роўнасьцяй у квадрат і складзем, атрымаем:

$$M^2A^2 + M^2B^2 + M^2C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

адкуль:

$$M^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2};$$

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

З роўнасьці

$$MD = p$$

відаць, што знак M трэба выбіраць такім чынам, каб правая частка раўнаньня была дадатнай $(= p)$.

Падстаўляем знойдзенае значэньне M у раўнаньне (2), атрымаем:

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Такім чынам нашае раўнаньне прыведзена да нормальнага віду. Множнік M завецца нормавальным множнікам.

Адсюль, як вынік: усякае раўнаньне першай ступені паміж трыма координатамі ўяўляе ў прасторы роўніцу.

§ 2. ДАСЬЛЕДВАНЬНЕ РАЎНАНЬНЯ РОЎНІЦЫ

Возьмем агульнае раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (1)$$

і паглядзім, як будзе ляжаць роўніца ў прасторы, калі адзін альбо некалькі коэфіцыэнтаў, якія ўваходзяць у раўнаньне, роўныя нулю.

1) $$D = 0.$$

Тады раўнаньне будзе:

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (2).$$

Гэтаму раўнаньню здавальняюць значэньні:

$$x = 0;$$

$$y = 0$$

і

$$z = 0$$

і значыцца, роўніца праходзіць праз пачатак координат.

2) $$A = 0.$$

Раўнаньне прыме выгляд:

$$By + Cz = D \qquad (3).$$

Калі азначым нормавальны множнік праз M, то, як вядома,

$$MA = \cos\alpha,$$

і значыцца, у нашым выпадку

$$\cos\alpha = 0;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

З гэтага вынікае, што пэрпэндыкуляр да роўніцы—пэрпэндыкуляр да восі x-аў (трэба памятаць, што α, β і γ— куты, утвораныя пэрпэндыкулярам да роўніцы з восямі координат).

Вынік: сама роўніца роўналежная восі X.

Аналёгічна пры

$$B = 0,$$

$$\cos\beta = 0;$$

$$\beta = \frac{\pi}{2},$$

і роўніца, раўнаньне якой у гэтым выпадку будзе:

$$Ax + Cz = D$$

роўналежная восі Y; пры

$$c = 0$$

роўніца роўналежная восі Z[1]).

Выводзім правіла: Калі ў раўнаньні роўніцы адсутнічае якая-небудзь координата, то роўніца роўналежная адпаведнай восі.

3)
$$A = 0;$$
$$D = 0.$$

Раўнаньне роўніцы приме выгляд:

$$By + Cz = 0.$$

Гэта роўніца, згодна папярэдняга, павінна, папершае, праходзіць праз пачатак координат, і падругое, быць роўналежнай восі X.

Ясна, што наша роўніца праходзіць праз вось X. Аналёгічна раўнаньні:

$$Ax + Cz = 0 \; (B = 0;\; D = 0)$$

і

$$Ax + By = 0 \; (C = 0;\; D = 0)$$

ёсьць роўніцы, якія праходзяць адпаведна праз восі Y і Z.

4)
$$A = 0;$$
$$B = 0;$$

———

1) Да такога-ж самага выводу можна прыйсьці яшчэ наступным чынам: на роўніцы XY раўнаньне

$$Ax + By = D$$

уяўляе простую. Няхай гэтая простая рухаецца проста ўверх альбо ўніз, застаючыся роўналежнай самой сабе; пры такім руху простая ўтворыць роўніцу, роўналежную восі Z; відавочна, паміж координатамі x і y усякага пункту роўніцы існуе тая-ж залежнасьць:

$$Ax + By = D.$$

Значыцца, гэтае раўнаньне і ёсьць раўнаньне гэтае роўніцы, роўналежнай восі Z.

раўнаньне прыме выгляд:

$$Cz = D,$$

альбо

$$Z = \frac{D}{c} = \text{const}.$$

Роўніца павінна быць роўналежнай адначасова і восі X ($A = 0$) і восі Y ($B = 0$). Значыцца, наша роўніца будзе роўналежная координатнай роўніцы XOY і простастаўнай да восі Z[1]).

Аналёгічна, калі

$$A = 0$$

і

$$c = 0,$$

атрымліваем:

$$y = \text{const},$$

і роўніца, роўналежная роўніцы XOZ (пэрпэндыкулярная восі Y), і калі

$$B = 0$$

і

$$C = 0,$$

атрымаем раўнаньне:

$$x = \text{const}.$$

У гэтым выпадку роўніца роўналежная YOZ і пэрпэндыкулярна да восі X.

5.
$$A = 0;$$
$$B = 0;$$
$$D = 0;$$

раўнаньне прымае від:

$$Cz = 0,$$

альбо

$$z = 0.$$

Гэта роўніца павінна быць роўналежная р—цы XOY ($A = 0$ $B = 0$) і праходзіць праз пачатак координат ($D = 0$).

Значыцца, гэта і ёсьць роўніца XOY[2]).

———

1) Геомэтрычна ясна, што геомэтрычнае месца пунктаў, для якіх $z = h$ (const)—роўніца, роўналежная роўніцы XY на адлегласьці h ад яе.

2) Ясна, што для ўсіх пунктаў роўніцы XOY і пры гэтым толькі для гэтых пунктаў $z = 0$.

Аналёгічна раўнаньні:

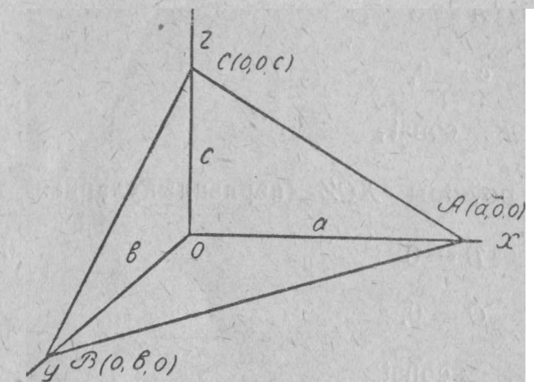
$$y = 0,$$

$$x = 0$$

уяўляюць адпаведна роўніцы XOZ і YOZ.

§ 3. РАЎНАНЬНЕ РОЎНІЦЫ Ў АДЦІНКАХ

Няхай роўніца (рыс. 90) адсякае ад восяй коордынат адцінкі a, b і c. Знойдзем яе раўнаньне, каб яно было выражана праз гэтыя адцінкі, як парамэтры.



Рыс. 90

Такое раўнаньне і будзе называцца раўнаньнем роўніцы ў адцінках.

Няхай агульнае раўнаньне роўніцы будзе:

$$Ax + By + Cz = D \quad (1)$$

Гэтаму раўнаньню павінны здавальняць координаты пунктаў A, B і C.

Значыцца, маем:

$$Aa = D;$$

$$Bb = D;$$

$$Cc = D;$$

адкуль:

$$A = \frac{D}{a};$$

$$B = \frac{D}{b}$$

і

$$C = \frac{D}{c}.$$

Падстаўляем у раўнаньне (1), замест коэфіцыэнтаў A, B і C, атрыманыя значэньні.

Будзем мець:

$$\frac{D}{a}x + \frac{D}{b}y + \frac{D}{c}z = D$$

скараціўшы на D, атрымаем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Гэта і ёсьць раўнаньне роўніцы у адцінках.

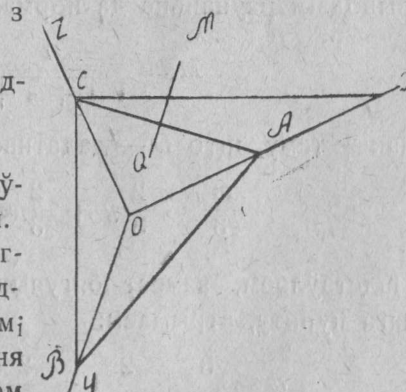
§ 4. АДЛЕГЛАСЬЦЬ ПУНКТУ ДА РОЎНІЦЫ

Дадзена роўніца ABC, раўнаньне якой ёсьць:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (1)$$

і пункт $M(x_1, y_1, z_1)$.

Адлегласьцю пункту да роўніцы завецца, як вядома, даўжыня пэрпэндыкуляраў з пункту на роўніцу.



Рыс. 91

На рыс. 91 яна ўяўляе адцінак

$$MQ = d.$$

Правядзем праз пункт M роўніцу, роўналежную дадзенай.

Відавочна, шуканая адлегласьць MQ будзе роўна адлегласьці паміж роўналежнымі роўніцамі. Для знаходжаньня гэтае адлегласьці прывядзем раўнаньне (1) да нормальнага віду.

Няхай атрыманае раўнаньне будзе:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Раўнаньне роўніцы, роўналежнай дадзенай, будзе:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p + d,$$

дзе α, β і γ тыя-ж самыя, што і для роўніцы ABC (з прычыны роўналежнасьці іх).

Апошняму раўнаньню павінны здавальняць координаты пункту M, бо роўніца праходзіць праз гэты пункт.

Значыцца:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = p + d$$

адкуль

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p.$$

Гэта роўнасьць дазваляе выказаць наступнае правіла. Каб знайсьці адлегласьць пункту да роўніцы, трэба прывесьці раўнаньне роўніцы да нормальнага віду, перанесьці ўсе члены ў левы бок і падставіць, замест бягучых координат, координаты дадзенага пункту.

Прыклад: Знайсьці адлегласьць пункту $(3, -1, 2)$ да роўніцы:

$$x - 2y + 2z = 1.$$

Пераносім усе члены у адзін бок:

$$x - 2y + 2z - 1 = 0$$

і прыводзім раўнаньне да нормальнага віду:

$$M = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}$$

[(знак + таму, што D — дадатнае $(=1)$]

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0.$$

Падстаўляем, замест бягучых координат, координаты нашага пункту, атрымаем:

$$d = \frac{3}{3} + \frac{2}{3}1 + \frac{2}{3}2 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Заўвага аб знаках. Знойдзем адлегласьці роўніцы

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

ад пачатку координат. Падстаўляючы замест бягучых координат координаты пачатку $(0, 0, 0)$, атрымаем:

$$d = -p.$$

Разважаючы аналёгічна, як пры знаходжваньні адлегласьці пункту да простае на роўніцы у І-ай частцы курсу (стар. 37—38), можам вывесьці наступнае: калі пункт і пачатак

координат знаходзяцца па адзін бок роўніцы, то адлегласьць пункту да роўніцы трэба лічыць адмоўнай, калі-ж пункт і пачатак координат ляжаць па розныя бакі роўніцы, то шуканая адлегласьць—дадатная.

§ 5. ПУЧОК РОЎНІЦ

Няхай дадзены пункт з координатамі $(x_1\, y_1\, z_1)$. Злучнасьць роўніц, якія праходзяць праз яго, завецца пучком роўніц. Выведзем раўнаньне пучка.

Возьмем агульнае раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D.$$

Гэтаму раўнаньню павінны здавальняць координаты пункту $(x_1\, y_1\, z_1)$; значыцца:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D.$$

Адняўшы атрыманую роўнасьць ад папярэдняй, атрымаем:

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) + C\,(z - z_1) = 0.$$

Гэтая роўнасьць пры зьменных парамэтрах A, B і C і будзе раўнаньнем пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт (x_1, y_1, z_1).

У прыватным выпадку, калі

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0,$$

будзем мець:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Гэта будзе раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пачатак координат.

Часам координаты цэнтру пучка не даюцца, але даюцца раўнаньні 3-х роўніц, перасячэньнем якіх вызначаецца пункт—цэнтр пучка.

Паглядзім, як у гэтым выпадку напісаць раўнаньне пучка.

Няхай дадзены раўнаньні 3-х роўніц:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Памножым першае раўнаньне на „p“, другое на „q“, і ўсе тры раўнаньні складзем, атрымаем:

$$p\ (Ax + By + Cz + D) + q\ (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +$$
$$+ (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (2).$$

Атрыманае раўнаньне будзе ўяўляць розныя роўніцы, у залежнасьці ад таго, якія значэньні мы будзем даваць для парамэтраў p і q.

Аднак, усе гэтыя роўніцы будуць праходзіць праз пункт перасеку роўніц (1). Сапраўды, няхай (x_o, y_o, z_o) будуць коордынаты пункту перасеку роўніц (1). Значыцца, яны зьмяняюць левыя часткі раўнаньняў у нуль. Відавочна, што тыя-ж коордынаты ў такім выпадку зьмяняюць у 0 левую частку раўнаньня (2), а гэтым самым і давядзем нашае палажэньне.

Вынік. Раўнаньне (2) ўяўляе пучок роўніц, якія праходзяць праз пункт перасеку роўніц (1).

§ 6. КУТ ПАМІЖ ДЗЬВЮМА РОЎНІЦАМІ

Няхай маем дзьве роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D;$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1.$$

Калі на кожную з гэтых роўніц спусьцім з пачатку коордынат пэрпэндыкуляр, то кут паміж пэрпэндыкулярамі будзе роўны куту паміж роўніцамі. Няха куты, утвораныя пэрпэндыкулярам да першай роўніцы з восямі коордынат,— α, β і γ, а пэрпэндыкулярам да другой з тымі-ж восямі—α_1, β_1 і γ_1.

Тады кут паміж пэрпэндыкулярамі азначыцца суадносінамі:

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1.$$

Але мы ведаем, што:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\alpha_1 &= \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\beta_1 &= \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\gamma_1 &= \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

значыцца:

$$\cos\varphi = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

§ 7. УМОВЫ ПЭРПЭНДЫКУЛЯРНАСЬЦІ І РОЎНАЛЕЖНАСЬЦІ РОЎНІЦ

Калі роўніцы ўзаемна-пэрпэндыкулярныя, то кут φ паміж імі роўны $90°$,

$$\cos\varphi = 0$$

і значыцца:

$$\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = 0.$$

Назоўнік левай часткі — велічыня скончаная, і яго такім чынам можна адкінуць.

Атрымаем умову пэрпэндыкулярнасьці дзьвюх роўніц:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Гэта азначае, што для пэрпэндыкулярнасьці 2-х роўніц неабходна, каб сума здабыткаў папарна адпаведных коэфіцыэнтаў пры невядомых была роўная нулю.

У выпадку роўналежнасьці дзьвюх роўніц, куты α, β і γ і α_1, β_1, і γ_1 відавочна, адпаведна роўныя адзін аднаму:

$$\alpha = \alpha_1;$$
$$\beta = \beta_1;$$
і
$$\gamma = \gamma_1.$$

Значыцца:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1;$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1;$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1.$$

Паводле формул (1) будзем мець:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

альбо

$$\frac{A}{A_1} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\frac{B}{B_1} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\frac{C}{C_1} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

адкуль

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

Гэта значыць, дзеля таго, каб роўніцы былі ўзаемна роўналежныя, неабходна, каб коэфіцыэнты пры адпаведных невядомых былі пропорцыянальныя.

Цяпер разьвяжам некалькі задач на роўніцу.

§ 8. ЗАДАЧЫ

1. Знайсьці пункт перасеку трох роўніц.

Няхай дадзены тры роўніцы:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Знойдзем пункт перасеку іх

Координаты гэтага пункту павінны здавальняць усім тром раўнаньням; значыцца, мы іх знойдзем ад сумеснага разьвязваньня дадзеных раўнаньняў. Разьвязваючы іх спосабам дэтэрмінантаў, мы атрымаем наступнае:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D & B & C \\ D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A & D & C \\ A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

дзе

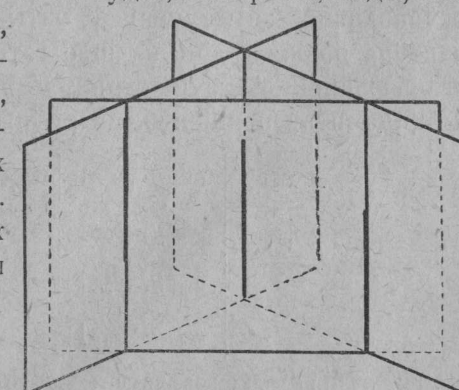
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Дасьледуем атрыманыя вынікі.

Калі $\Delta \neq 0$, то для координат пункту перасеку атрымаем зусім азначаныя канечныя значэньні, а значыцца, і зусім азначаны пункт перасеку.

Калі-ж $\Delta = 0$ і хоць бы адзін з лічнікаў ня роўны нулю, то адна хаця-бы координата атрымаецца бязьмежна вялікай.

У гэтым выпадку пункт перасеку адсунуты ў бязконцасьць (бязьмежнасьць). Гэта будзе, папершае, тады, калі роўніцы роўналежныя, альбо тады, калі ня роўналежныя паміж сабой, але папарна перасякаюцца па роўналежных простых (глядзі рыс. 92).



Рыс. 92

Нарэшце, калі назоўнік Δ і ўсе лічнікі роўныя нулю, атрымаем:

$$x = \frac{0}{0}; \quad y = \frac{0}{0};$$

$$z = \frac{0}{0}$$

координаты пункту перасеку не азначаны, а гэта значыць, што пунктаў перасеку бязьмежнае мноства. Гэта зноў магчыма толькі, папершае, тады, калі ўсе тры роўніцы перасякаюцца па аднэй простай, як лісты ў кнізе, і падругое, калі ўсе тры роўніцы супадаюць [1]).

2. Правесьці роўніцу праз тры пункты.

Дадзены тры пункты: $(x_1\, y_1\, z_1)$; $(x_2\, y_2\, z_2)$ і $(x_3\, y_3\, z_3)$.

Знойдзем раўнаньне роўніцы, якая праходзіць праз гэтыя тры пункты:

Пішам агульнае раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (1)$$

і ўмову таго, што кожны з трох дадзеных пунктаў ляжыць на роўніцы:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = D \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Зараз з трох апошніх раўнаньняў трэба было-б знайсьці якія-небудзь тры коэфіцыэнты праз чацьверты (напр A, B, C праз D) і падставіць атрыманы выраз у раўнаньне (1) (чацьверты коэфіцыэнт тады скароціцца).

Прасьцей выключыць парамэтры A, B, C, D з раўнаньняў (1) і (2) з дапамогай дэтэрмінантаў. Лічучы гэтыя парамэтры за невядомыя, мы маем сыстэму чатырох аднародных раўнаньняў I-ай ступені з чатырма невядомымі, прычым напэўна павінны лічыць, што гэта сыстэма мае не нулявыя разьвязаньні. У такім выпадку, як вядома, дэтэрмінант з коэфіцыэнтаў павінен быць роўны нулю.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3).$$

[1]) У такім выпадку коэфіцыэнты аднаго з раўнаньняў (1) адрозьніваюцца ад коэфіцыэнтаў другога раўнаньня толькі на сталы множнік., альбо., што тое самае, коэфіцыэнты раўнаньняў (1) прапорцыянальныя паміж сабой, г. зн.:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C};$$

і

$$\frac{A_2}{A} = \frac{B_2}{Б} = \frac{C_2}{C}.$$

Гэта і ёсьць раўнаньне роўніцы, якая праходзіць праз тры дадзеныя пункты.

Адсюль вельмі лёгка атрымаць умову разьмяшчэньня чатырох пунктаў у аднэй роўніцы. Няхай дадзены пункты: (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3); (x_4, y_4, z_4). Правядзем праз першыя тры з іх роўніцу. Яе раўнаньне будзе (3). Дзеля таго, каб роўніца праходзіла і праз пункт (x_4, y_4, z_4), неабходна, каб координаты чацьвертага пункту здавальнялі раўнаньне роўніцы.

Падстаўляючы ў раўнаньне (3), замест бягучых коордынат, коордынаты чацьвертага пункту, атрымаем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Роўнасьць гэта і будзе ўмовай разьмяшчэньня 4-х пунктаў у аднэй роўніцы.

3. Праз два дадзеныя пункты правесьці роўніцу, пэрпэндыкулярную да дадзенай роўніцы.

Коордынаты дадзеных пунктаў: (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) і раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (1).$$

Для разьвязаньня пастаўленай задачы напішам агульнае раўнаньне роўніцы:

$$A'x + B'y + C'z = D' \qquad (2)$$

і будзем шукаць парамэтры A', B', C' і D' так, каб роўніца, якую мы шукаем, праходзіла праз два дадзеныя пункты і была пэрпэндыкулярная да дадзенай роўніцы (1).

Атрымліваем тры умовы:

$$A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 = D'$$

$$A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 = D'$$

$$A'A + B'B + C'C = 0$$

Выключаем з гэтых трох раўнаньняў і раўнаньня (2) парамэтры A', B', C' і D'; атрымаем раўнаньне шуканай роўніцы:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4. Праз дадзены пункт правесьці роўніцу, роўналежную дадзенай роўніцы.

Кордынаты пункту: (x_1, y_1, z_1), а раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (1).$$

Правядзем праз дадзены пункт (x_1, y_1, z_1) пучок роўніц:

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) + C'(z - z_1) = 0 \qquad (2).$$

і выбярэм парамэтры A', B' і C' так, каб роўніца (2) была роўналежная роўніцы (1). А мы ведаем, што калі дзьве роўніцы роўналежныя, то коэфіцыэнты пры адпаведных невядомых пропорцыянальныя, значыцца:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Азначым кожны з гэтых стасункаў праз k, знаходзім:

$$A' = Ak;$$

$$B' = Bk$$

і

$$C' = Ck.$$

Падстаўляючы гэтыя выразы парамэтраў у раў—не (2) і скараціўшы яго на агульны множнік k, атрымаем раў—не шуканай роўніцы:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Зробім параўнаньне гэтага раўнаньня з раў—нем (2); бачым што можна было-б проста зрабіць замену парамэтраў A', B' і C' вядомымі велічынямі A, B і C.

РАЗЬДЗЕЛ III

ПРОСТАЯ

§ 1. СЫСТЭМА РАУНАНЬНЯЎ ПРОСТАЙ У ПРАСТОРЫ

Простую лінію ў прасторы магчыма вызначыць, як перасячэньне 2-х роўніц.

Дадзена сыстэма раўнаньняў:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кожнае з гэтых раўнаньняў паасобку ўяўляе роўніцу. Разамжа гэтыя раўнаньні ўяўляюць злучнасьць пунктаў, якія ляжаць аднача́сова на I-ай і на II-ай роўніцы, г. зн. простую іх перасячэньня.

Такім чынам, простая ў прасторы выражаецца двума раўнаньнямі I-ай ступені (2-ма раўнаньнямі роўніц, перасячэньнем якіх яна зьяўляецца).

Разьвяжам сыстэму раўнаньняў (1) адносна x, y:

Няхай:

$$\left.\begin{aligned} x &= pz + a \\ y &= qz + b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Гэта сыстэма роўназначная сыстэме (1). Таму яна выражае простую (1). А калі гэта так, то кожнае з раўнаньняў (2) уяўляе некаторую роўніцу, якая праходзіць праз нашу простую.

Што гэта за роўніцы? У першым раўнаньні (2) адсутнічае y, таму гэта роўніца роўналежная восі Y. Выходзіць, што роўніца

$$x = pz + a,$$

якая праходзіць праз простую (1), пэрпэндыкулярная да роўніцы XZ і таму зьяўляецца роўніцай, якая проектуе нашу простую на кордынатную роўніцу XZ.

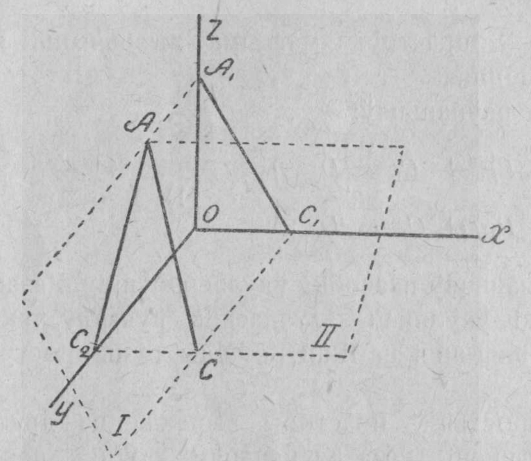
Гэтак сама роўніца

$$y = qz + b,$$

роўналежная восі X, проектуе нашу простую на другую координатную роўніцу YZ. Абедзьве роўніцы (2) сваім перасячэньнем вызначаюць простую.

На рысунку гэта простая AC перасякае координатныя роўніцы YZ і XY у пунктах A і C.

Проектавальныя роўніцы I і II даюць на координатных роўніцах XZ і YZ проекцыі нашай простай A_1C_1 і AC_2. Калі простая AC даецца сыстэмай раўнаньняў (2), то проекцыі яе A_1C_1 і AC_2 даюцца раў—мі:



Рыс. 93

$$\left.\begin{array}{l} x = pz + a \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

і

$$\left.\begin{array}{l} y = qz + b \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Раўнаньне

$$x = pz + a$$

на роўніцы XZ азначае простую A_1C_1, адгэтуль вынікае, што p — кутавы коэфіцыэнт гэтае простай—роўны tg кута простай з восьсю Z і адцінак a—ёсьць адцінак OC_1.

Таксама $q = \text{tg}$ кута проекцыі AC_2 з восьсю Z і b — адцінак OC_2.

Раўнаньне роўніцы, якая проектуе нашу простую на 3-ю координатную роўніцу XY, атрымліваецца выключэньнем Z з раў- няў (2). Гэта раўнаньне ёсьць:

$$(x - a)\, q = (y - b)\, p$$

калі далучыць да гэтага раўнаньня раўнаньне

$$Z = 0$$

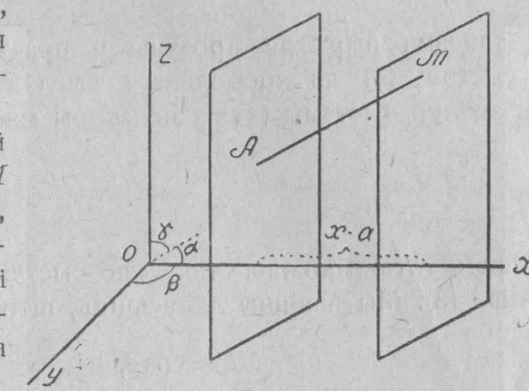
роўніцы XY, то сыстэма іх дае проекцыю нашае простай на 3-ю координатную роўніцу XY.

Такім чынам мы бачым, што простая ў прастсры вызначаецца сыстэмай раўнаньняў (1) альбо сыстэмай (2).

Пададзем іншыя формы раўнаньняў простай.

Простая ў прасторы зусім вызначаецца, калі дадзен які-небудзь пункт A (a, b, c), праз які яна праходзіць (глядзі рысунак), і куты α, β і γ, якія простая складае з восямі координат.

Возьмем на простай адвольны пункт M з координатамі x, y, z (яны будуць бягучымі координатамі простай) і спроектуем адцінак AM на восі координат.



Рыс. 94

Проекцыя на вось X — ёсьць $x - a$. Паводле тэоремы аб проекцыі простай:

$$x - a = AM \cdot \cos\alpha$$

Аналёгічна:

$$y - b = AM \cdot \cos\beta;$$

$$z - c = AM \cdot \cos\gamma;$$

адкуль атрымліваем:

$$AM = \frac{x - a}{\cos\alpha};$$

$$AM = \frac{y - b}{\cos\beta};$$

$$AM = \frac{z - c}{\cos\gamma}.$$

Калі параўнаць атрыманыя роўнасьці, будзем мець:

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma} \qquad (3)$$

Мы атрымалі сыстэму раўнаньняў простай, якая называецца нормальнай.

Тут $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$ завуцца кіравальнымі cos—нусамі, таму што яны вызначаюць кірунак простай у прасторы.

Няхай дадзена агульная сыстэма віду:

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \qquad (4),$$

якая таксама выражае простую ў прасторы. Прывядзем гэту сыстэму (4) да нормальнага выгляду (3). Памножым усе назоўнікі сыстэмы (4) на некаторы множнік M:

$$\frac{x-a}{Ml}=\frac{y-b}{Mm}=\frac{z-c}{Mn} \qquad (5)$$

і выбярэм гэты множнік так, каб сыстэма (5) супадала з сыстэмай (3). Мы павінны дапусьціць, што

$$Ml=\cos\alpha,$$

$$Mm=\cos\beta$$

і

$$Mn=\cos\gamma \qquad (6)$$

Апрача таго:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Маем 4 раўнаньні з чатырма невядомымі: M, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$.

Дзеля вызначэньня множніка M, узьвядзем раў—ні (6) ў квадрат і складзем; атрымаем:

$$M^2(l^2+m^2+n^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

адкуль

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Множнік M завецца нормавальным множнікам. Ведаючы велічыню M, знаходзім з раўнаньня (6) астатнія тры невядомых:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\\ \cos\beta&=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\\ \cos\gamma&=\pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Гэтыя формулы вызначаюць куты простай з восямі координат. Тут падвойны знак атрымліваецца таму, што кожная простая ўтварае з кожнай координатнай восьсю па два куты—востраму і тупому. Возьмем той альбо іншы кут, у залежнасьці ад таго, які напрамак простай мы прымем за дадатны.

Пакажам цяпер, як прывесьці сыстэму раўнаньняў простай (1) да формы (4), г. зн. да формы роўных стасункаў. Перш за ўсё, разьвязваем сыстэму (1) адносна якіх-небудзь двух невядомых, напр. x і y, г. зн., прыводзім сыстэму (1) да сыстэмы (2), а потым гэтай сыстэме (2) надаем шуканую форму:

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z}{1}.$$

Задача:

Знайсьці куты простай:

$$\left.\begin{aligned}x+3y-5z+2&=0\\ 2x-y+3z-3&=0\end{aligned}\right\}$$

з восямі координат.

Дзеля таго, каб разьвязаць задачу, неабходна раўнаньне простай прывесьці да формы роўных стасункаў. Разьвяжам раўнаньні адносна x і y:

$$x=-\frac{4}{7}z+1;$$

$$y=\frac{13}{7}z-1;$$

Перанясем вольныя члены ўлева і падзелім першае раўнаньне на 4, а другое на 13. Атрымаем:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{13}=\frac{z}{7}.$$

Цяпер ужо лёгка знайсьці косінусы шуканых кутоў:

$$\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{234}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{13}{\sqrt{234}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{7}{\sqrt{234}}.$$

Калі простая дадзена сыстэмай раўнаньняў:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By &= D \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

то разьвязваем першае раўнаньне адносна аднаго з невядомых.

Няхай:

$$y = kx + b.$$

У такім выпадку раў—не простай магчыма падаць у выглядзе:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-b}{k} = \frac{z-c}{0}.$$

Назоўнік 0 паказвае, што косінус кута простай з восьсю Z раўняецца 0, г. зн., простая пэрпэндыкулярна да восі Z; гэтага і трэ'было чакаць, таму што простая ляжыць у роўніцы

$$z = c,$$

г. зн., у роўніцы, роўналежнай да кoордынатнае роўніцы XOY

П р ы к л а д. Дадзены раўнаньні простай:

$$3x + 2z = 0;$$

$$y = 4.$$

Першае раўнаньне напішам у выглядзе:

$$3x = -2z,$$

адкуль

$$\frac{x}{-2} = \frac{z}{3};$$

а канчаткова:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z}{3}.$$

§ 2. КУТ ПАМІЖ 2-ма ПРОСТЫМІ Ў ПРАСТОРЫ

Няхай дадзены дзьве простыя:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-l}{n} \qquad (1)$$

і

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1} \qquad (2).$$

Абазначым куты кожнай простай, утвораныя з восямі координат, праз: α, β, γ і α_1, β_1, γ_1; скарыстаем формулу (7) § 1:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \\
\cos\beta &= \pm\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \\
\cos\gamma &= \pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \\
\cos\alpha_1 &= \pm\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}; \\
\cos\beta_1 &= \pm\frac{m_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}; \\
\cos\gamma_1 &= \pm\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (2')$$

Кут паміж простымі выражаецца паводле вядомай формулы:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\,.\,\cos\alpha_1 + \cos\beta\,.\,\cos\beta_1 + \cos\gamma\,.\,\cos\gamma_1:$$

пасьля падстаноўкі значэньня косінусаў з формул (2') атрымаем:

$$\cos\varphi = \pm\frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,.\,\sqrt{l^2_1+m^2_1+n^2_1}}$$

калі трэба ўзяць востры кут y, то бярэм такі знак, каб выраз

$$\pm(ll_1 + mm_1 + nn_1)$$

быў дадатным; калі-ж простыя пэрпэндыкулярныя, то кут паміж імі

$$\varphi = 90^\circ$$

і

$$\cos\varphi = 0,$$

а гэта магчыма толькі тады, калі лічнік

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

Гэта ёсьць умова пэрпэндыкулярнасьці дзьвюх простых.

Дзеля таго, каб простыя ў прасторы былі пэрпэндыкулярныя, неабходна, каб сума парных здабыткаў кутавых коэфіцыэнтаў раўнялася нулю.

Калі простыя роўналежныя, то:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1;$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1;$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1$$

і значыцца:

$$\pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

альбо

$$\frac{l}{l_1} = \pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

Аналёгічна атрымаем:

$$\frac{m}{m_1} = \pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};$$

$$\frac{n}{n_1} = \pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

Раўнаючы атрыманыя выразы, будзем мець:

$$\boxed{\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}}$$

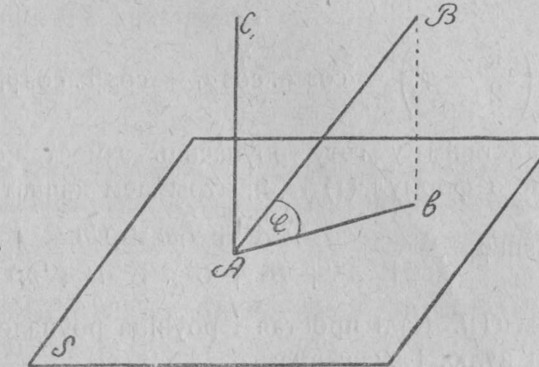
Атрымліваем такім чынам умову роўналежнасьці:

Дзьве простыя ў прасторы роўналежныя, калі кутавыя коэфіцыэнты іх пропорцыянальныя.

§ 3. КУТ ПАМІЖ ПРОСТАЙ І РОЎНІЦАЙ

Кутом паміж простай і роўніцай завецца кут простай з проекцыяй яе на роўніцу.

Так, на рысунку кут паміж простай AB і роўніцай S будзе кут φ, утворыны простай AB з проекцыяй яе Ab на роўніцу S.



Рыс. 95

Няхай сыстэма раўнаньняў простай будзе:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

і раўнаньне роўніцы:

$$Ax + By + Cz = D$$

Узьвядзем да роўніцы S пэрпэндыкуляр AC. Куты яе з восямі координат вызначацца формуламі:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Куты простае з восямі координат—формуламі:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1 &= \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\\ \cos\beta_1 &= \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\\ \cos\gamma_1 &= \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Знойдзем косінус кута паміж простай AB і пэрпэндыкулярам да роўніцы $S - AC$. З рысунка відаць, што кут гэты роўны $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1$$

Падставім у гэту роўнасьць замест косінусаў іх значэньне з формул (1) і (2); атрымаем канчаткова:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (3)$$

Вынік. Калі простая і роўніца роўналежныя, то кут φ ровен нулю, і значыцца:

$$\sin\varphi = 0.$$

Дроб (3) роўны нулю. Гэта можа быць, калі лічнік роўны нулю, г. зн.:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Атрымліваем умову роўналежнасьці простай і роўніцы. Словамі яе можна формуляваць так: дзеля таго, каб простая і роўніца былі роўналежныя, неабходна, каб сума папарных здабыткаў коэфіцыэнтаў пры невядомых у раўнаньні роўніцы і адпаведных кутавых коэфіцыэнтаў простай роўны былі нулю.

Калі простая і роўніца ўзаемна-пэрпэндыкулярныя, то простая роўналежная пэрпэндыкуляру, які спушчаны з пачатку координат на роўніцу і, значыцца, утварае з восямі координат такія-ж самыя куты, як і пэрпэндыкуляр да роўніцы, г. зн.:

$$\alpha = \alpha_1; \quad \beta = \beta_1; \quad \gamma = \gamma_1$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1;$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1;$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1$$

атрымаем:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \pm\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

адкуль лёгка атрымаем наступнае:

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{c} = \frac{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Умовай пэрпэндыкулярнасьці простай і роўніцы зьяўляецца пропорцыянальнасьць кутавых коэфіцыэнтаў простае адпаведным коэфіцыэнтам пры невядомых раўнаньня роўніцы.

§ 4. ПУНКТ ПЕРАСЕКУ ПРОСТАЕ З РОЎНІЦАЙ

Дадзены простая:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \qquad (1)$$

і роўніца:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (2).$$

Для знаходжаньня координат пункту перасеку простае і роўніцы неабходна разьвязаць сумесна раўнаньні (1) і (2).

Каб гэта было лягчэй зрабіць—абазначым кожны з стасункаў (1) праз S:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} = S$$

(дзе S пакуль невядома), атрымліваем:

$$x - a = lS;$$

$$y - b = mS;$$

$$z - c = nS,$$

альбо:

$$\left.\begin{aligned} x &= lS + a; \\ y &= mS + b; \\ z &= nS + c \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Падстаўляем знойдзеныя значэньні x, y і z у раўнаньне (2), атрымаем:

$$Aa + Bb + Cc + S\,(Al + Bm + Cn) = D$$

адкуль знойдзем, што:

$$S = -\frac{Aa + Bb + Cc - D}{Al + Bm + Cn} \qquad (4)$$

У правую частку атрыманай формулы ўваходзяць толькі вядомыя велічыні, а з гэтае прычыны мы ведаем і велічыню S.

Падстаўляючы яе ў раўнаньне (3), мы і атрымаем координаты x, y і z шуканага пункту перасеку простае і роўніцы.

Дасьледуем атрыманыя вынікі:

1) Калі назоўнік

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а лічнік ня ровен нулю, то

$$S = \infty$$

і, значыцца, x, y, z роўны таксама бязьмежнасьці. Такім чынам простая у гэтым выпадку роўналежная роўніцы. Атрымліваем знаёмую нам умову роўналежнасьці простае і роўніцы.

2. Калі

$$Aa + Bb + Cc - D = 0 \qquad (5)$$

і

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (6),$$

то

$$S = \frac{0}{0}.$$

Гэта азначае, што S і x, y і z неазначаныя.

Гэта паказвае, што пунктаў перасеку простае і роўніцы бязьмежны лік, значыцца, простая супадае з роўніцай (ляжыць у ёй).

Значыцца, роўнасьці (5) і (6) зьяўляюцца ўмовамі супаданьня простае і роўніцы.

Заўважым, што раўнаньне (5) ёсьць умова таго, што адзін з пунктаў простае (a, b, c) ляжыць на роўніцы, а раўнаньне (6) ёсьць умова раўналежнасьці простае і роўніцы.

§ 5. ДРУГІ СПОСАБ ПЕРАТВАРЭНЬНЯ РАЎНАНЬНЯ ПРОСТАЙ

Мы бачым, як сыстэму раўнаньняў простае, якая дадзена у форме:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= D_1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

прывесьці да віду:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \qquad (4).$$

Цяпер мы можам паказаць другі спосаб гэтага ператварэньня. Задача зводзіцца да адшуканьня координат якога-небудзь пункту простае (a, b, c) і кутавых коэфіцыэнтаў l, m, n. Дзеля вызначэньня (a, b, c) маем толькі два раўнаньні (1); таму для аднае координаты, напрыклад a, даем самі якое-небудзь значэньне (b і c потым знойдуцца). Кутавыя коэфіцыэнты l, m, n вызначаюцца на падставе простай заўвагі: простая, якая дадзена сыстэмай раўнаньняў (1), знаходзіцца на кожнай з роўніц (1). А калі гэта так, дык павінна здавальняцца ўмова роўналежнасьці простае (4) з кожнай роўніцай (1):

Значыцца:

$$\left.\begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0 \\ A_1l + B_1m + C_1n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

З гэтых раўнаньняў знаходзім дзьве (з велічынь l, m, n) праз трэцюю. Падставіўшы знойдзенае значэньне ў сыстэму (4), убачым, што трэцяя велічыня скарачаецца.

Прыклад: Дадзена простая:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -5 \\ x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

патрэбна падаць гэтую сыстэму у выглядзе (4). Шукаем спачатку координаты (a, b, c). Бярэм адвольную велічыню a. Няхай

$$a = 1.$$

Падставім у сыстэму (3) замест x адзінку і разьвязваем сыстэму адносна y і z. Знаходзім:

$$y = 2,$$

$$z = -1$$

Значыцца, простая (3) праходзіць праз пункт (1, 2, – 1), г. зн.,

$$a = 1,$$
$$b = 2,$$
$$c = -1$$

Каб вызначыць l, m і n, пішам умову (2) роўналежнасьці простае з кожнай з роўніц (1):

$$2l - 3m + n = 0$$
$$l + 2m + 3n = 0$$

Адкуль:

$$l = \frac{11}{5}m,$$
$$n = -\frac{7}{5}m$$

Гэтыя значэньні велічынь l і n можна ўставіць у сыстэму (4) і потым спросьціць назоўнікі (скараціць на m і памножыць на 5).

Але прасьцей дапусьціць

$$m = 5,$$

Тады:

$$l = 11,$$
$$n = -7.$$

Такім чынам сыстэма (3) ператвараецца ў сыстэму:

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{-7}$$

§ 6. ЗЬВЯЗАК РОЎНІЦ

Вядома, што сыстэма раўнаньняў:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

і

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1')$$

уяўляе простую, якая зьяўляецца перасячэньнем роўніц (1) і (1').

Першае раўнаньне памножым на адвольны лік „p“ і складзем яго з (1'), атрымаем:

$$p\,(Ax + By + Cz + D) + (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \qquad (2)$$

Апошняе раўнаньне наогул уяўляе сабой роўніцу, але калі мы для параметра „p“ будзем даваць розныя значэньні, дык атрымаем вельмі многа роўніц. Пакажам, што гэтыя роўніцы праходзяць праз простую, якая выражана раўнаньнямі (1) і (1'). Сапраўды, няхай x_0, y_0, z_0—коордынаты адвольнага пункту, які знаходзіцца на простай, выражанай раўнаньнямі (1) і (1'). Значыцца, яны (коордынаты), левыя часткі раўнаньняў (1) і (1') замяняюць на нуль. Адсюль відаць, што яны замяняюць на нуль і левую частку раўнаньня (2), а гэтым самым мы можам лічыць, што нашае палажэньне даведзена.

Значыцца, раў—не (2) уяўляе злучнасьць роўніц, якія праходзяць праз адну простую (падобна, як старонкі ў сшытку), альбо, як гавораць, зьвязак роўніц, якія праходзяць праз простую (1) і (1').

§ 7. ЗАДАЧЫ

1. Знайсьці простую, якая праходзіць праз пункт (x_0, y_0, z_0) роўналежна да простай:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \qquad (1).$$

Разьвязак: напішам раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1} \qquad (2),$$

дзе l_1 m_1 і n_1 — невядомыя пакуль што кутавыя коэфіцыэнты тэй простай, якую мы шукаем.

Простая (2), паводле умовы, роўналежна да 1-ай. Напішам умову роўналежнасьці простых:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} = k,$$

дзе k — назоўнік стасунку.

Адгэтуль мы можам атрымаць:

$$l_1 = lk;$$

$$m_1 = mk;$$

$$n_1 = nk,$$

альбо скарачаючы на k, атрымаем:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Мы бачым, што было магчыма проста ў раўнаньнях (2) невядомыя парамэтры l, m, n, замяніць вядомымі велічынямі l, m, n.

2. Праз дадзены пункт (a, b, c) правесьці простую, пэрпэндыкулярную да дзьвюх дадзеных простых:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

$$\frac{x - a_2}{l_2} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{n_2}$$

Разьвязак: шуканая простая павінна праходзіць праз пункт (a, b, c), таму раўнаньне яе будзе:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$$

Для вызначэньня невядомых пакуль што парамэтраў l, m і n складаем умову пэрпэндыкулярнасьці шуканай простай да дзьвюх дадзеных:

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$$

$$ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$$

З гэтых раўнаньняў вызначаем два парамэтры (праз трэці) і знойдзеныя значэньні падстаўляем у раўнаньні шуканай простай. Трэці парамэтр скароціцца.

3. Правесьці простую праз два пункты: $(x_1\ y_1\ z_1)$ і (x_2, y_2, z_2).

Пішам раўнаньні пучка простых, якія праходзяць праз пункт $x_1\ y_1\ z_1$:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (1),$$

дзе l, m, n невядомыя пакуль што кутавыя коэфіцыэнты простай.

Выбіраем з гэтага пучка простую, якая праходзіць праз пункт $(x_2\ y_2\ z_2)$.

Координаты гэтага пункту павінны здавальняць раўнаньню простых:

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} \qquad (2)$$

Каб пазбавіцца коэфіцыэнтаў l, m, n, падзяляем раўнаньне (1) на (2), атрымаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Гэта і ёсьць раўнаньне простай, якая праходзіць праз два дадзеныя пункты: (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2).

4. Правесьці праз дадзены пункт (x_0, y_0, z_0) роўніцу, пэрпэндыкулярную да простай:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \qquad (1)$$

Напішам раўнаньне пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт (x_0, y_0, z_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

A, B і C нам пакуль што невядомы.

З умовы, роўніца (2) пэрпэндыкулярная да простай 1-ай.

Пішам умову пэрпэндыкулярнасьці простай і роўніцы:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = k$$

(k — коэфіцыэнт пропорцыянальнасьці, альбо назоўнік стасунку), адкуль атрымоўваем наступнае:

$$A = kl;$$

$$B = km;$$

$$C = kn$$

Падстаўляем атрыманыя выразы ў раўнаньне (2) і скарачаем на k, маем:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

5. Праз дадзены пункт правесьці роўніцу, роўналежную дзьвюм дадзеным простым.

Няхай дадзены: пункт (a, b, c) і дзьве простыя:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

і

$$\frac{x - a_2}{l_2} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{n_2}$$

Раўнаньне пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт (a, b, c):

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0.$$

Шуканая роўніца павінна быць роўналежная абедзьвюм простым, таму:

$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$$

$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$$

Тры апошнія раўнаньні—аднародныя адносна A, B, C. Пасьля выключэньня з іх гэтых парамэтраў, атрымаем раўнаньне шуканай роўніцы:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Знайсьці раўнаньне пэрпэндыкуляра, які сцушчаны з пункту (a, b, c) на роўніцу:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Напішам раўнаньне пучка простых, якія праходзяць праз пункт (a, b, c):

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \qquad (2)$$

(l, m, n—невядомыя).

Паводле ўмовы простая (2) пэрпэндыкулярная да роўніцы (1), значыцца:

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C} = k,$$

адкуль:

$$l = Ak;$$

$$m = Bk;$$

$$n = Ck.$$

Падстаўляем у раўнаньне (2), атрымліваем:

$$\frac{x - a}{Ak} = \frac{y - b}{Bk} = \frac{z - c}{Ck};$$

альбо скарачаючы на k, маем:

$$\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C}$$

Гэта і ёсьць раўнаньне пэрпэндыкуляра, які мы шукалі.

7. Знайсьці роўніцу, якая праходзіць праз простую:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \qquad (1)$$

і пэрпэндыкулярна да роўніцы:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

Разьвязак. Напішам раўнаньне пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт $(a, b$ і $c)$:

$$A_1(x - a) + B_1(y - b) + C_1(z - c) = 0 \qquad (3)$$

(A_1, B_1, C_1 — невядомыя лікі).

Выбярэм з пучка роўніц роўналежную нашай простай (1). Такая роўніца будзе супадаць з простай (1), бо яны адначасова да яе роўналежныя, і маюць агульны пункт (a, b, c).

Умовы роўналежнасьці простай (1) і роўніцы (3) будуць:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0 \qquad (4)$$

Але роўніца (3) павінна быць пэрпэндыкулярнай да роўніцы. Дзеля гэтага неабходна, каб:

$$A_1A + B_1B + C_1C = 0 \qquad (5)$$

Раўнаньні (3), (4) і (5) магчыма разглядаць, як сыстэму трох аднародных раўнаньняў з трымя невядомымі A_1, B_1, C_1. Гэтыя раўнаньні маюць не нулявыя разьвязваньні, таму дэтэрмінант з коэфіцыэнтаў павінен раўняцца нулю.

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Гэтая роўнасьць і ёсьць раўнаньне шуканае роўніцы.

Калі простая дадзена раўнаньнямі:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

і трэба праз гэту простую правесьці роўніцу, пэрпэндыкулярную да роўніцы

$$Ax + By + Cz = D \qquad (7),$$

то, спачатку, пішам раўнаньне зьвязку роўніц, якія праходзяць праз простую (6):

$$p\ (A_1x + B_1y + C_1z - D_1) + (Ax + By + Cz - D) = 0 \qquad (8)$$

альбо:

$$(pA_1 + A_2)\,x + (pB_1 + B_2)\,y + (pC_1 + C_2)\,z = pD_1 - D_2 \qquad (9)$$

Невядомы пакуль што парамэтр p вызначаем з умовы пэрпэндыкулярнасьці роўніц (7) і (9):

$$A\ (pA_1 + A_2) + B\ (pB_1 + B_2) + C(pC_1 + C_2) = 0$$

$$p = \frac{AA_2 + BB_2 + CC_2}{AA_1 + BB_1 + CC_1}$$

Застаецца толькі падставіць значэньне парамэтра p у раўнаньне (8).

8. Правесьці роўніцу праз пункт (x_1, y_1, z_1) і цераз простую:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \qquad (1)$$

Раўнаньне пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт (x_1, y_1, z_1) ёсьць:

$$A\ (x - x_1) + B\ (y - y_1) + C\ (z - z_1) = 0 \qquad (2).$$

Выбярэм з гэтага пучка роўніц роўніцу, якая праходзіць праз пункт (a, b, c):

$$A\ (a - x_1) + B\ (b - y_1) + C\ (c - z_1) = 0 \qquad (3).$$

Далей, трэба, каб роўніца была роўналежная простай (1), г. зн.:

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (4)$$

Раўнаньні (2), (3) і (4) уяўляюць сыстэму трох аднародных раўнаньняў з трыма невядомымі A, B, і C. Гэта сыстэма мае не нулявыя разьвязваньні, таму дэтэрмінант з коэфіцыэнтаў павінен раўняцца нулю, г. зн.:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a-x_1 & b-y_1 & c-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Гэта і ёсьць раўнаньне шуканае роўніцы.

Калі простая дадзена сыстэмай раўнаньняў (6) раней напісанай задачы, то напішам раўнаньне зьвязку роўніц (8) і патрабуем, каб роўніца (8) праходзіла праз дадзены пункт $(x_1\ y_1\ z_1)$. Дзеля гэтага трэба выбраць парамэтр p такім чынам, каб:

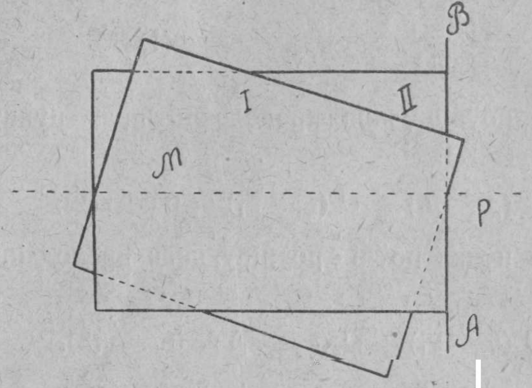
$$p\ (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 - D_1) + (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 - D_2) = 0,$$

адгэтуль знаходзім значэньне p (парамэтр), якое і падстаўляем у раўнаньне (8).

9. Знайсьці раўнаньне пэрпэндыкуляра, які спушчаны з пункту (x_1, y_1, z_1) на простую:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

Для таго, каб спусьціць з пункту M пэрпэндыкуляр на простую AB, неабходна правесьці дзьве роўніцы, з якіх першая праходзіць праз пункт M пэрпэндыкуляра на AB, а другая праз пункт M і праз AB. Перасячэньне гэтых роўніц ёсьць шуканы пэрпэндыкуляр Mp.



Рыс. 96

Раўнаньне роўніцы першай ёсьць:

$$l\,(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0$$

(глядзі задачу № 4), а роўніцы другой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a - x_1 & b - y_1 & c - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

(глядзі задачу 8). Сыстэма гэтых раўнаньняў і вызначае патрэбны нам пэрпэндыкуляр.

10. Правесьці роўніцу праз простую:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n},$$

роўналежна простай:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

Калі роўніца праходзіць цераз першую простую, то пункт (a, b, c) гэтае простай павінен ляжаць на роўніцы, а акрамя таго, павінна здавальняцца умова роўналежнасьці простай і роўніцы. Таму пішам спачатку раўнаньне пучка роўніц, якія праходзяць праз пункт (a, b, c):

$$A\,(x - a) + B\,(y - b) + C\,(z - c) = 0 \qquad (1)$$

і выбярэм парамэтры A, B, C такім чынам, каб роўніца (1) была роўналежная абедзьвюм дадзеным простым. Атрымаем роўнасьці:

$$Al + Bm + Cn = 0$$

і

$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$$

Выключэньне парамэтраў A, B, C дае раўнаньне шуканай роўніцы:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Знайсьці пункт перасячэньня дзьвюх простых:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \qquad (1)$$

і

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1} \qquad (2)$$

Вядома, што дзьве простыя ў прасторы не заўсёды перасякаюцца паміж сабой. Гэта магчыма ўбачыць з таго, што координаты пункту перасячэньня простых павінны здавальняць 4-м раўнаньням (1) і (2), а 4 раўнаньні з трыма невядомымі не заўсёды сумесныя, не заўсёды маюць разьвязваньні. Таму раней, чым шукаць пункт перасеку дзьвюх простых, неабходна ўпэўніцца ў тым, што яны перасякаюцца. Будзем шукаць умову перасячэньня дзьвюх простых у прасторы.

Азначым кожны з стасункаў (1) праз k і кожны з стасункаў (2) праз k_1, тады:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + lk; \\ y &= b + mk; \\ z &= c + nk \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + l_1k_1; \\ y &= b_1 + m_1k_1; \\ z &= c_1 + n_1k_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Для пункту перасячэньня роўнасьці (3) і (4) павінны даваць аднолькавыя значэньні коордынат x, y, z, таму:

$$a + lk = a_1 + l_1k_1$$
$$b + mk = b_1 + m_1k_1$$
$$c + nk = c_1 + n_1k_1$$

альбо:

$$\left.\begin{aligned} (a - a_1) + lk - l_1k_1 &= 0 \\ (b - b_1) + mk - m_1k_1 &= 0 \\ (c - c_1) + nk - n_1k_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Атрымалі тры раўнаньні з двума невядомымі k і k_1. Раўнаньні сумесныя толькі пры тэй умове, што дыскрымінант раўняецца нулю:

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & l & l_1 \\ b - b_1 & m & m_1 \\ c - c_1 & n & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

Гэта і ёсьць умова перасячэньня дзьвюх дадзеных простых. Калі ўмова выканана, то ўзяўшы два раўнаньні з сыстэмы (5), знойдзем k альбо k_1. Коордынаты пункту перасеку простых (x, y, z) цяпер лёгка можна знайсьці паводле формулы (3) альбо (4).

12. Знайсьці самую малую адлегласьць паміж дзьвюх простых.

Калі простыя роўналежныя паміж сабой, дык бярэм на дадзенай простай які-небудзь пункт і праводзім цераз яго роўніцу, пэрпэндыкулярную да простых. Будзем мець на кожнай простай па аднаму пункту. Адлегласьць паміж імі і будзе шуканай адлегласьцю.

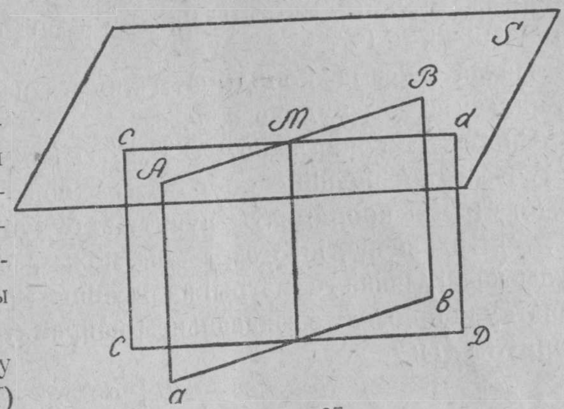
Няхай цяпер маем няроўналежныя простыя (гл. рыс. 97):

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} = 0 \quad (AB)$$

і

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1} = 0 \quad (CD)$$

Для пабудовы самай малой адлегласьці паміж дадзенымі простымі, праводзім спачатку цераз адну з простых, напр. AB, роўніцу S роўналежна другой простай CD. Потым пэрпэндыкулярна да гэтай роўніцы S праводзім цераз абедзьве дадзеныя простыя роўніцы $ABab$ і $CDcd$. Лінія перасеку гэтых роўніц (NM) і будзе шуканай самай кароткай адлегласьцю паміж простымі.



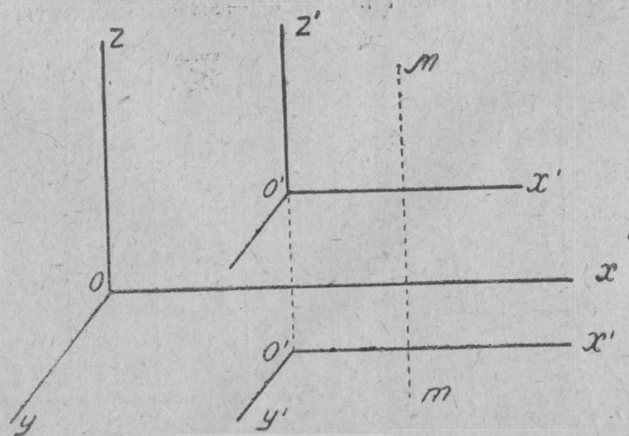
Рыс. 97

Калі не патрэбна мець адлегласьць NM, а трэба ведаць толькі яе велічыню, то абмяжоўваемся толькі тым, што праводзім роўніцу S і спускаем з якога-небудзь пункту C простай CD пэрпэндыкуляр на роўніцу S; велічыня гэтага пэрпэндыкуляра Cc і дае велічыню самай малой адлегласьці паміж простымі.

§ 8. ПЕРАТВАРЭНЬНЕ КООРДЫНАТ

1. Перанос пачатку коордынат

Няхай дзьве сыстэмы коордынат маюць розныя пачаткі,



Рыс. 98

а напрамкі адпаведных восяй аднолькавыя (гл. рыс. 98).

Няхай координаты якога-небудзь пункту прасторы M адносна старой сыстэмы будуць x, y, z, а адносна новай сыстэмы x', y' і z'.

Няхай таксама координаты новага пачатку O' паводле старой сыстэмы будуць a, b, c.

Спроектуем новыя восі $O'X'$, $O'Y'$ і пункт M па роўніцу XY. На гэтай роўніцы координаты новага пачатку будуць (a, b), старыя координаты пункту m будуць (x, y) і новыя—(x', y'). Відавочна, што зараз мы можам выкарыстаць формулы аналітычнай геомэтрыі на роўніцы—формулы пераносу пачатку координат з захаваньнем напрамку восяй, а менавіта формулы (7):

$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

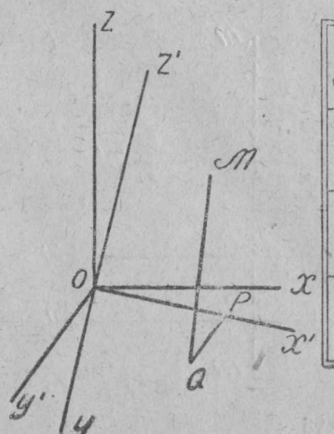
Калі спроектуем новыя восі координат на роўніцу YZ (альбо XZ), то знойдзем, што

$$z = z' + c$$

Такім чынам, як і ў геомэтрыі на роўніцы, старыя координаты роўныя новым плюс координаты новага пачатку, паводле старой сыстэмы.

2. Ператвареньне напрамку восяй

Няхай дзьве простакутныя сыстэмы координат маюць агульны пачатак, а восі новай сыстэмы павернуты адносна



восі	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Рыс. 99

старых восяй так, што новая вось OX' утварае са старымі восямі OX, OY і OZ адпаведна куты α_1, β_1, γ_1; вось OY з тымі-ж восямі куты α_2, β_2, γ_2 і вось OZ з тымі-ж восямі куты α_3, β_3, γ_3 (гл. табл. рыс. 99).

З дапамогай гэтай табліцы кут паміж кожнымі 2-ма восямі знойдзецца на перасеку адпаведных горызонтальных і вэртыкальных напрамкаў.

Возьмем у прасторы адвольны пункт M (рыс. 99); пабудуем яго новыя координаты x', y', z' і спроектуем ламаную $OPQM$ на вось OX. Яе проекцыя роўна проекцыі яе замыкальнай OM:

$$\text{пр. } OM = \text{пр. } OP + \text{пр. } PQ + \text{пр. } QM \qquad (1)$$

Але проекцыя OM на вось OX, відавочна, роўна старой координаце пункту M, г. зн., x:

$$\text{пр.}_{ox}\ OM = x$$

Калі яшчэ прыняць пад увагу, што адцінкі OP, PQ і QM, роўналежныя адпаведным восям OX', OY' і OZ' і, значыцца, куты, утвораныя імі з восьсю OX, ёсьць α_1, α_2 і α_3 (гл. табл.) то роўнасьць першая перапішацца гэтак:

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3$$

Проектуючы ламаную $OPQM$ на восі OY, OZ і разважаючы зусім аналёгічна, атрымаем формулы:

$$y = x' \cos\beta_1 + x' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3$$

$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3$$

Мы такім чынам атрымалі формулы для пераходу ад старых координат да новых. Калі трэ'было б зрабіць адваротны пераход, то вельмі лёгка, карыстаючыся адпаведнай табліцай, напісаць патрэбныя формулы:

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$$

$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2$$

$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3$$

З 9 кутоў, якія ўваходзяць у формулы ператварэньня, ня ўсе адвольныя. Паміж імі існуе шэсьць залежнасьцяў і як раз.

На падставе вядомых суадносін паміж косінусамі кутоў простае і восямі простакутнае сыстэмы коордынат маем:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

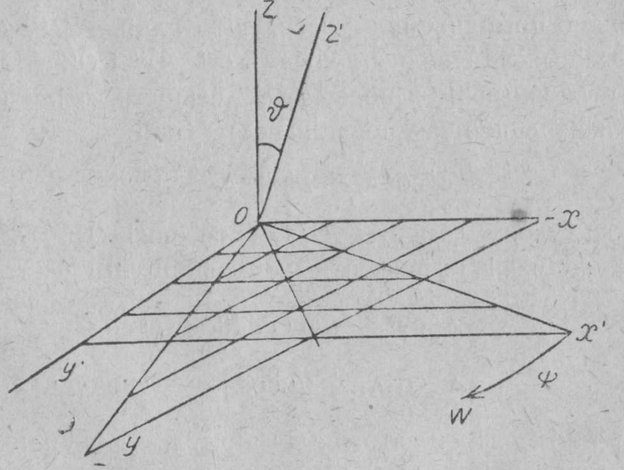
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

Далей з прычыны пэрпэндыкулярнасьці восяй X' і Y', Y' і Z', X' і Z', сыстэма коордынат простакутная; маем:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

$$\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 = 0$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 = 0$$



Рыс. 100

Значыцца, адвольныя толькі тры куты, а астатнія самі вызначаюцца, калі задацца якімі-небудзь трыма кутамі.

З прычыны гэтага лепш выбраць за незалежныя наступныя тры куты:

1) Кут φ паміж восьсю OX і простай OW (гл. рыс. 100), якая зьяўляецца перасекам роўніц XOY і $X'OY'$ і завецца яна вузлавой лініяй.

2) Кут ψ паміж восьсю OX', і тэй самай простай OW.

3) Кут ϑ паміж восямі Z і Z'.

4. Павернем сыстэму коордынат XYZ вакол восі Z на кут φ (сама вось застаецца на месцы), каб вось OX супадала з вузлавой лініяй OW. Тады вось OY зойме новае палажэньне OY''. Зроблены намі паварот ёсьць толькі паварот у роўніцы XOY, таму што вось Z засталася на месцы, значыцца, новыя восі засталіся ў тэй самай роўніцы.

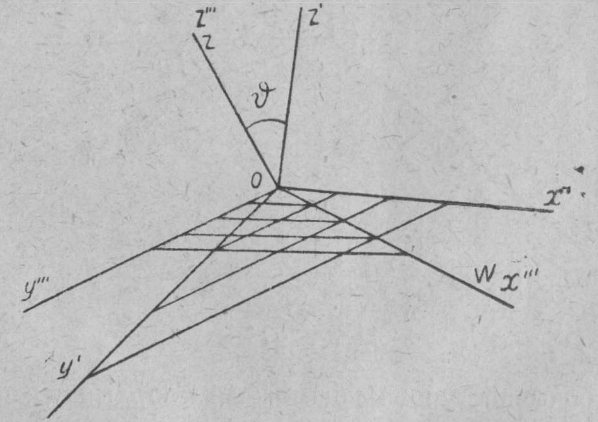
Значыцца, формулы ператварэньня будуць:

$$x = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi$$

$$y = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi$$

$$Z = Z''$$

Зараз робім паварот сыстэмы $X''Y''Z''$ вакол восі OX (OW) на кут V, каб роўніца $X''Y''$ супадала з роўніцай $X'Y'$ і, значыцца, вось Z'' (яна-ж Z) супадала з восьсю Z'. Атры-



Рыс. 101

маную такім чынам новую сыстэму назавем $X''' Y''' Z'''$. Мы будзем мець паварот восяй коордынат у роўніцы $Y''OZ''$ (альбо $Y''OZ$) і формулы ператварэньня будуць наступныя:

$$x'' = x'''. \; y'' = y''' \cos\vartheta - z''' \sin\vartheta;$$

$$z'' = y''' \sin\vartheta + z''' \cos\vartheta$$

Цяпер чатыры восі X', Y'; X''', Y''' (глядзі рысунак 101) ляжаць на аднэй восі. Нарэшце, павернем сыстэму $X''' Y''' Z'''$

вакол восі Z''' (яна-ж z'), каб вось OX''' (OW) супадала з восьсю OX'. Ясна, што тады і вось OY''' павінна супадаць з восьсю OY'.

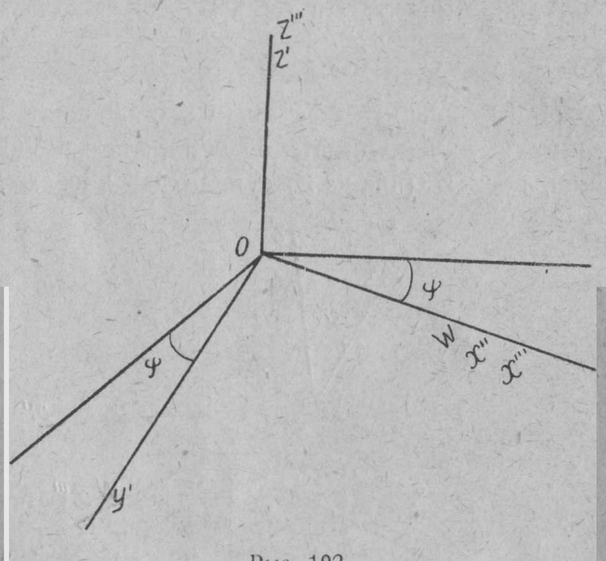
У дадзеным выпадку мы зьдзейсьніваем паварот восяй координат у роўніцы $X''' OY'''$, значыцца, формулы пера-тварэньня будуць наступныя:

$$x''' = x' \cos\psi - y' \sin\psi$$

$$y''' = x' \sin\psi + y' \cos\psi$$

і

$$z''' = z'$$



Рыс. 102

Выключаючы паступова дапаможныя координаты, атрымаем наступныя формулы:

1) $x = x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) - y' (\cos\varphi \sin\psi -$
$- \cos\varphi \cos\psi \cos\theta)$

2) $y = x' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) - y' (\sin\varphi \sin\psi -$
$- \cos\varphi \cos\psi \cos\theta)$

3) $z = x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta$

Яны завуцца формуламі *Эйлера*.

РАЗЬДЗЕЛ IV

§ 1. ГЕОМЭТРЫЧНАЕ ЗНАЧЭНЬНЕ РАЎНАНЬНЯЎ

Мы бачылі, што раўнаньне 1-ай ступені з трыма невядомымі x, y, z выражае роўніцу. Паглядзім, які геомэтрычны сэнс мае раўнаньне адвольнага выгляду з трыма невядомымі:

$$f(x, y, z) = 0$$

Гэтае раўнаньне неазначанае, значыцца, яно мае бязьмежнае мноства сыстэм разьвязкаў. Калі кожную сыстэму разьвязкаў (x, y, z) будзем лічыць за координаты пунктаў у прасторы, то нашае раўнаньне дае бязьмежнае мноства пунктаў, дае некаторае геомэтрычнае месца пунктаў. Паглядзім, як разьмеркованы гэтыя пункты ў прасторы. Возьмем спачатку раўнаньне толькі з двума невядомымі:

$$f(x, y) = 0$$

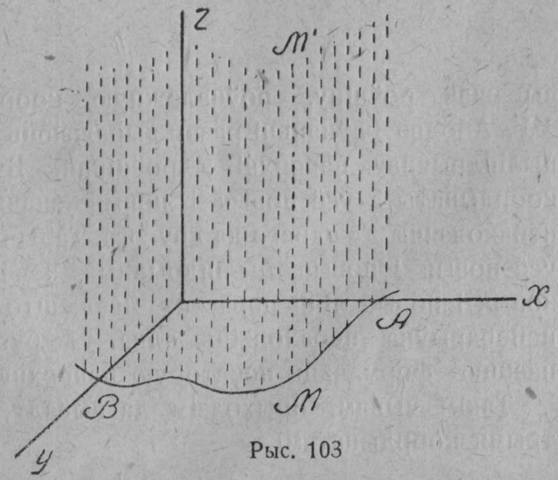
Будзем лічыць x і y координатамі пунктаў роўніцы XY.

У гэтым выпадку, як мы ведаем, раўнаньне

$$f(x, y) = 0$$

будзе выражаць некаторую крывую лінію AB на роўніцы XY.

Цяпер няхай гэтая крывая рухаецца проста ўверх і ўніз. Сваім рухам яна апіша цыліндрычную паверхню, простаінейныя формавальныя якой роўналежныя восі Z. Возьмем якую-небудзь формавальную MM'. Ясна, што калі (x, y)— роўнічныя координаты пункту M, і паміж імі ёсьць залежнасьць:



Рыс. 103

$$f(x, y) = 0,$$

то такімі самымі па велічыні будуць і прасторавыя коордынаты (x, y) кожнага пункту M'[1]), і паміж імі будзе такая-ж самая залежнасьць:

$$f(x, y) = 0.$$

Значыцца, раўнаньне з дзьвюма координатамі:

$$f(x, y) = 0$$

на роўніцы XY уяўляе крывую лінію, а ў прасторы—цыліндрычную паверхню, формавальныя якой роўналежныя восі Z, а кіравальнай зьяўляецца гэтая самая крывая.

Цяпер, няхай, маем раўнаньне з трыма координатамі:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Для некаторай координаты, напр. z, дадзем якое-небудзь азначанае значэньне:

$$z = h.$$

Данае раўнаньне пераходзіць у раўнаньне:

$$f(x, y, h,) = 0.$$

Гэтае раўнаньне, як мы толькі бачылі, уяўляе цыліндрычную паверхню, а раўнаньне

$$z = h$$

выражае роўніцу, роўналежную координатнай роўніцы XY. Абодва раўнаньні разам выражаюць лінію перасячэньня цыліндрычнае паверхні з роўніцай. Будзем даваць для координаты z усё новыя і новыя значэньні, неперарыўна пераходзячы ад аднаго да другога. Тады будзем атрымліваць усё новыя і новыя цыліндрычныя паверхні і роўніцы, усё новыя і новыя лініі перасеку. Ясна, што гэтыя лініі будуць неперарыўна пераходзіць адна ў другую і сваёю злучнасьцю—формаваць некаторую паверхню.

Такім чынам, црыходзім да вываду, што раўнаньне з трымя координатамі

$$f(x, y, z) = 0$$

уяўляе некаторую паверхню.

[1]) Незалежна ад вышыні разьмяшчэньня пункту M' на формавальнай, г. зн. незалежна ад велічыні z.

Калі нам дадзены два раўнаньні:

$$F(x, y, z) = 0$$

і

$$f(x, y, z) = 0,$$

то кожнае з іх паасобку выражае некаторую паверхню, а злучнасьць іх—геомэтрычнае месца пунктаў, якія знаходзяцца адначасова на абедзьвюх паверхнях, г. зн. лінію іх перасячэньня. Такім чынам злучнасьць двух раўнаньняў уяўляе ў прасторы лінію.

Відавочна, сыстэма 3-х раўнаньняў выражае адзін альбо некалькі пунктаў перасеку трох роўніц.

Калі левая частка раўнаньня

$$f(x, y, z) = 0$$

ёсьць цэлы многачлен n-ай ступені адносна координат x, y, z, то паверхня, якую выражае нашае раўнаньне, завецца альгебрычнай паверхняй n-га парадку, напр.:

$$x^2y - 2r = 0$$

ёсьць паверхня 3-га парадку. Прыпомнім, што формулы ператварэньня координат—першай ступені адносна координат. Дзеля гэтага, калі дадзена паверхня n-га парадку, і мы зробім ператварэньне координат, то для паверхні зноў атрымаем раўнаньне n-га парадку. Адсюль робім вывад, што парадак паверхні не зьмяняецца пры ператварэньні координат, а значыцца, не залежыць ад выбару сыстэмы координат.

Няцяжка пераканацца ў тым, што ўсякая простая перасякае паверхню n-га парадку ня больш, як у n сапраўдных пунктах.

І сапраўды, няхай раўнаньне n-га парадку ёсьць:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Знойдзем перасячэньне гэтай паверхні з восьсю X. Раўнаньні восі OX наступныя:

$$y = 0;$$

$$z = 0 \qquad (2)$$

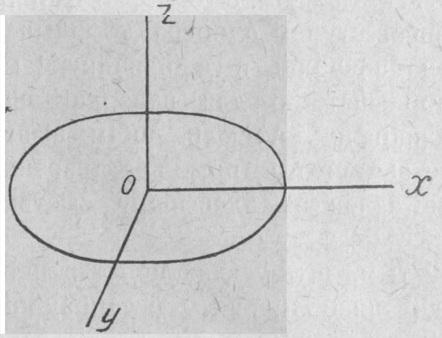
Развязжам сумесна раўнаньні (1) і (2), атрымаем:

$$F\ (x,\ 0,\ 0) = 0$$

Атрымаем раўнаньне ня вышэй n-ай, а таму з яго мы знойдзем для x ня болей n сапраўдных значэньняў (караней). Гэта паказвае на тое, што вось X з нашай паверхняй перасякаецца ня болей, як у n сапраўдных пунктах. Тое самае можна сказаць адносна ўсякае простае, бо пры адпаведных ператварэньнях коордынат усякую простую можна зрабіць восьсю X.

§ 2. ПАВЕРХНІ ДРУГОГА ПАРАДКУ

Кожная лінія другога парадку можа быць утворана непарарыўным рухам пунктаў па роўніцы і азначана, як геомэтрычнае месца пунктаў. Кожная паверхня другога парадку можа быць утворана неперарыўным рухам лініі ў прасторы і азначана, як геомэтрычнае месца ліній. Але ёсьць істотная розьніца: пункт пры сваім руху па роўніцы ня можа зьмяніцца, а лінія, рухаючыся ў прасторы, можа дэформавацца.



Рыс. 104

Азначэньне: эліпсоід ёсьць геомэтрычнае месца падобных[1]) і паралельна зьмешчаных эліпсаў, вяршыні якіх ляжаць на дадзеным кіравальным эліпсе. Для прастаты ўявім, што кіравальны эліпс знаходзіцца на роўніцы XZ і зададзены раўнаньнямі:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)^{2)}$$

[1]) Восі ўзаемна пропорцыянальныя.

[2]) Першае раўнаньне азначае эліптычны цыліндр, вось якога супадае з восьсю Y, а 2-е раўнаньне азначае роўніцу XZ.

а эліпсоід утвараецца рухам эліпса:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{m^2a^2} + \frac{y^2}{m^2b^2} &= 1 \\ z &= h \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

вышыні якога ідуць па кіравальнаму эліпсу (глядзі рыс. 104).

Множнік m, а таксама і вышыня палажэньня рухомага эліпса h—велічыні зьменныя. Відавочна, велічыня множніка m залежаць ад велічыні h. Гэтую залежнасьць ня цяжка знайсьці наступным парадкам. Калі вяршыня $(ma,\ o,\ h)$ эліпса (2) ляжыць на эліпсе (1), то:

$$m^2 = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

і раўнаньні зьменнага эліпсу (2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z &= h \end{aligned}\right\}$$

маюць толькі адзін зьменны парамэтр h.

Выключаючы h з апошніх раўнаньняў, знойдзем канчаткова раўнаньне эліпсоіда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Усе перасячэньні эліпсоіда роўніцамі даюць эліпс. Напр., перасячэньне роўніцай

$$x = H,$$

роўналежнай роўніцы YZ, дае крывую:

$$\frac{H^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ці калі азначым $1 - \frac{H^2}{a^2}$ праз M^2:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = M^2$$

$$x = H$$

і значыцца:

$$\frac{y^2}{M^2b^2}+\frac{z^2}{M^2c^2}=1$$

$$x=H$$

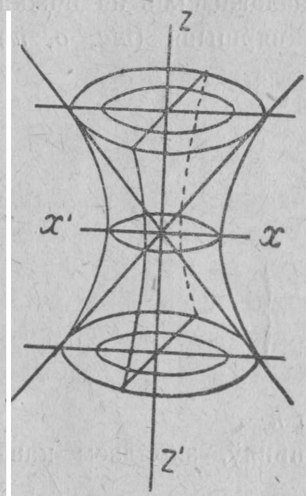
Атрымаем раўнаньні эліпса з паўвосямі Mb і Mc. Калі будзем зьмяняць велічыню H, то будзем атрымліваць падобныя эліпсы.

Калі-ж зьменім у азначаным эліпсоідзе дадзены кіравальны эліпс на гіпэрболу, то атрымаем азначэньне гіпэрболёіду. Для кіравальнае гіпэрболы будзем мець наступныя раўнаньні:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1\\ y&=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

і атрымаем аднаполы гіпэрболёід:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(рыс. 105).}$$



Рыс. 105

А для спрэжанае гіпэрболы:

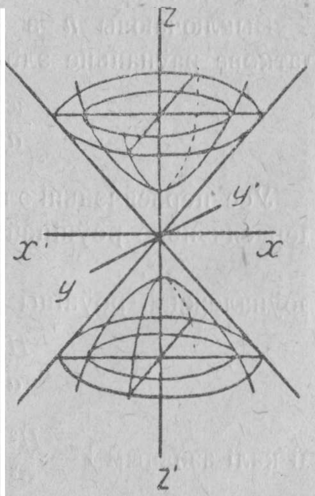
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$y=0$$

двухполы гіпэрболёід:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(глядзі рыс. 106).



Рыс. 106

Усе перасячэньні аднаполага гіпэрболёіду з роўніцамі, роўналежнымі XY — вытвараюць эліпсы, а з роўніцамі, роўналежнымі XZ і YZ — гіпэрболы і простыя (пры $x=a$ і $y=b$).

Двухполы гіпэрболёід перасякаецца роўніцамі, роўналежнымі XZ і YZ, па гіпэрболах і роўніцамі, роўналежнымі XY пры $|z|>c$, па эліпсах; пры $|z|<c$ няма перасеку і пры $|z|=c$ атрымліваюцца два пункты—дзьве вяршыні гіпорболёіду. Для ўтварэньня аднаполага гіпэрболёіду за кіравальную можна ўзяць простую, напрыклад, простую ў роўніцы, якая роўналежна да роўніцы YZ і перасякае вось X на адлегласьці „a“ ад пачатку, г. з. простую:

$$z=\frac{c}{b}y$$

$$x=a$$

Замяніўшы ў азначэньні эліпсоіду дадзены эліпс параболаю, атрымаем азначэньне параболёіду. Кіравальная парабола і ўтваральны эліпс дадзены раўнаньнямі:

$$\frac{x^2}{2p}=z$$

$$y=0$$

і

$$\frac{x^2}{2pm}+\frac{y^2}{2qm}=1$$

$$z=h$$

Вяршыня $(\sqrt{2pm},\ 0,\ h)$ ляжыць на параболе, а таму:

$$m=h.$$

Выключаючы парамэтры m і h, атрымаем раўнаньне эліптычнага параболёіду:

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z.$$

Эліптычны параболёід перасякаецца роўніцамі па эліпсах і параболах.

Для ўтварэньня гіпэрболічнага параболёіду за кіравальныя крывыя бярэм дзьве параболы: адну на роўніцы XZ угару, а другую на роўніцы YZ уніз.

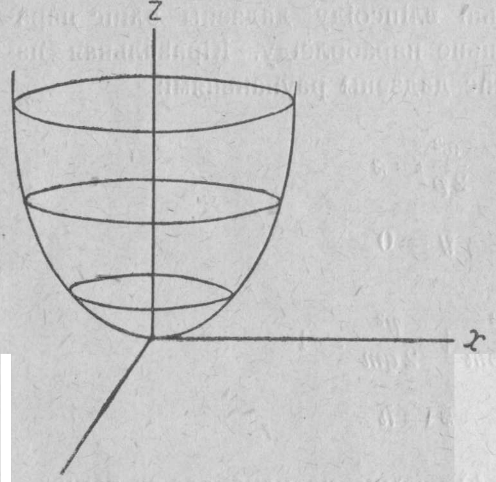
Раўнаньні гэтых парабол такія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{2p} &= z \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

і

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{2q} &= -z \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Утваральнымі крывымі ў гэтым выпадку будуць дзьве спрэжаныя гіпэрболы, з якіх адна сваімі вяршынямі ідзе па першай параболе ўгару, а другая па другой параболе —уніз. Раўнаньні гіпэрболы такія:



Рыс. 107

$$\frac{x^2}{2pm} - \frac{y^2}{2qm} = 1$$

$$z = h$$

і

$$-\frac{x^2}{2qm} + \frac{y^2}{2qm} = 1$$

$$z = -h$$

Вяршыня першае гіпэрболы $(\sqrt{2pm},\ 0,\ h)$ ляжыць на першай параболе, а вяршыня другое гіпэрболы $(0, \sqrt{2qm}, -h)$ ляжыць на другой параболе. Таму абодва разы

$$m = h$$

і, значыцца, ўтваральныя гіпэрболы выражаюцца раўнаньнямі:

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$$

$$z = h$$

і

$$-\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$$

$$z = -h$$

Выключыўшы з кожнае пары раўнаньняў зьменны парамэтр h, атрымаем адно і тое-ж раўнаньне—раўнаньне гіпэрболічнага параболёіду:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

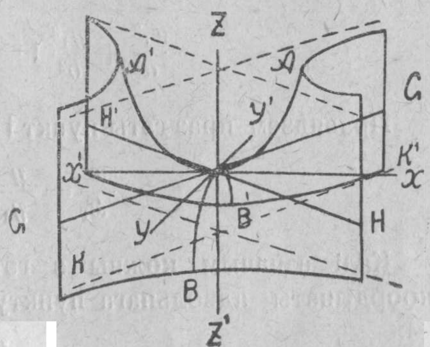
(гл. рысун. 108).

Гэты параболёід перасякаецца роўніцамі, роўналежнымі XZ і YZ, па параболах і роўніцамі, роўналежнымі XY, па гіпэрболах і простых (пры $z = 0$).

Да гэтага самага раўнаньня прыйдзем, калі за кіравальную возьмем параболу:

$$\frac{x^2}{2p} = z$$

$$y = 0,$$



Рыс. 108

а за ўтваральную параболу[1]):

$$y^2 = -2q\,(z - h)$$

$$x = m$$

Ня цяжка атрымаць і раўнаньне конуса і цыліндра. Кіравальнай для конуса зьяўляецца пара простых, якія перасякаюцца, а для цыліндра пара роўналежных простых.

Няхай, напрыклад, заместа гіпэрболы (3), кіравальнай будзе пара простых:

---

[1]) Утваральная парабола ідзе сваёю вяршыняю $(m, 0, h)$ па кіравальнай параболе так, што яе роўніца ўвесь час застаецца роўналежнай роўніцы YZ.

Відавочна, ўтваральная парабола пры сваім руху заўсёды перасякае пару простых:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0$$

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ [1]}$$

$$y = 0$$

Калі за ўтваральную возьмем эліпс, то атрымаем раўнаньне эліптычнага конуса, вяршыня якога знаходзіцца ў пачатку коордынат

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (6)$$

Давядзем, што гэта паверхня конусу з вяршыняй у пачатку коордынат. Няхай пункт (x_1, y_1, z_1) знаходзіцца на паверхні, г. зн. няхай:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} 1 - \frac{z_1^2}{c^2} = 0.$$

Правядзем праз гэты пункт і пачатак коордынат простую:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

Калі азначым кожны з гэтых стасункаў — праз k, то коордынаты адвольнага пункту выражаюцца такім чынам:

$$x = kx_1;$$

$$y = ky_1;$$

$$z = kz_1$$

Гэтыя выразы коордынат здавальняюць раўнаньне (6), значыцца, усякі пункт простай (7), інакш кажучы, уся простая (7) знаходзіцца на паверхні (6). Такім чынам робім вывад, што ўсе пункты, коордынаты якіх здавальняюць раўнаньне (6), разьмяшчаюцца па простых, якія сходзяцца

---

[1]) Першае раўнаньне падзяляецца на два раўнаньні:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$$

i

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

ў пачатку коордынат, г. зн. на конусе з вяршыняй у пачатку коордынат. У асобным выпадку, калі ўтваральнай зьяўляецца круг, атрымаецца паверхня вярчэньня.

Дапусьцім, што кіравальная выражаецца раўнаньнямі:

$$\left.\begin{aligned} f(x^2, z) &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8),$$

дзе $f(x^2, z)$ — адзін з многіх складоў:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1; \\ &2)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1; \\ &3)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1; \\ &4)\ \frac{x^2}{2p} - z \\ &5)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}; \\ &6)\ x^2 - a^2 \end{aligned}\right\} \qquad (9).$$

Утваральнай зьяўляецца круг:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= m^2 \\ z &= h \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Пункт круга $(m, 0, h)$ знаходзіцца на кіравальнай (8), а таму павінна здавальняцца раўнаньне:

$$f(m^2 h) = 0 \qquad (11)$$

і шуканая паверхня вярчэньня выражаецца раўнаньнямі (10), прычым зьменныя парамэтры m і h зьвязаны паміж сабою ўмоваю (11).

Выключаючы з (10) і (11) гэтыя парамэтры, атрымаем раўнаньне паверхні вярчэньня ў выглядзе:

$$f(x^2 + y^2, z) = 0.$$

Відавочна, што можна лічыць дадзеную крывую (8) за ўтваральную, а круг за кіравальную, г. зн., паверхні ўтвараюцца вярчэньнем крывой (8) каля восі Z (чым і апраўдваецца назва—паверхня вярчэньня).

Такім чынам, калі на роўніцы XZ дадзена крывая 2-га парадку (8) і (9), то раўнаньне адпаведнае паверхні вярчэньня атрымаецца простай заменаю ў першым з раўнаньняў (8) x^2 праз $x^2 + y^2$.

§ 3. КРУГАВЫЯ СЯЧЭНЬНІ

Дадзены раўнаньнем эліпсоід:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1),$$

прычым $a > b > c$. Правядзем роўніцу праз сярэднюю вось $2b$ (г. зн. праз вось Y) і вось Z. У сячэньні мы атрымаем эліпс з паўвосямі b і c. Роўніцу будзем паварачваць навакол восі Y.

Наш эліпс будзе дэформавацца такім чынам: большая паўвось—b ня будзе зьмяняцца зусім, а меншая будзе павялічвацца да таго часу, пакуль ня будзе раўняцца a (на роўніцы XY).

Відавочна, што будзе такі момант, калі паўвосі зробяцца роўнымі паміж сабой. У гэты момант эліпс прымае форму круга.

Гэта сячэньне эліпсоіду і будзе яго кругавым сячэньнем.

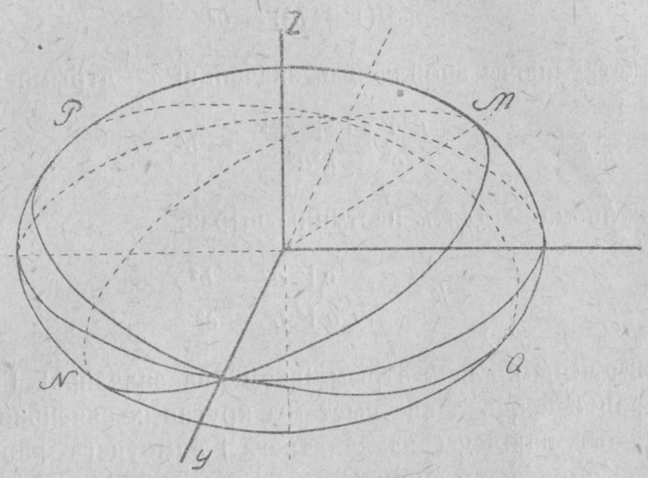
Зразумела, што такіх кругавых сячэньняў, якія праходзяць праз вось Y, будзе два—MN і PQ (рыс. 109); яны сымэтрычна разьмешчаны адносна роўніцы YZ. Лёгка пераканацца, што роўналежныя роўніцы перасякаюць эліпсоід па падобных эліпсах. Дзеля гэтага правёўшы ўсякія магчымыя роўніцы, роўналежныя роўніцам кругавых сячэньняў, MN і PQ, атрымаем дзьве сыстэмы роўналежных кругавых сячэньняў. Падыходзячы да паверхні эліпсоіду, кругавыя сячэньні бязьмежна памяншаюцца і ўрэшце зьмяншаюцца ў пункты. Гэтых пунктаў, якія завуцца пунктамі абкругленьня, чатыры.

Знойдзем куты нахілу да восі X роўніцы кругавых сячэньняў.

Роўніцы, якія праходзяць праз вось Y, выражаюцца ў выглядзе раўнаньняў:

$$z = kx.$$

Задача зводзіцца да адшуканьня кутавога коэфіцыэнта k,



Рыс. 109

пры ўмове, што паўвось

$$OM = b.$$

Каб знайсьці велічыню OM, трэба ведаць координаты пункту M. Гэты пункт знаходзіцца на эліпсоідзе (1) па роўніцы XZ ($y = 0$) і роўніцы

$$z = kx.$$

Значыцца, для гэтага пункту:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2}{c^2} = 1$$

адкуль

$$x^2 = \frac{a^2c^2}{c^2 + a^2k^2}$$

Адлегласьць

$$OM = \sqrt{x^2 + z^2}$$

але

$$z = kx;$$

дзеля гэтага:

$$OM = x\sqrt{1 + k^2}.$$

З умовы

$$OM = b\,,$$

альбо

$$OM^2 = b^2\,,$$

маем:

$$x^2\,(1 + k^2) = b^2$$

Падстаўляючы знойдзеныя значэньні x^2, атрымаем:

$$\frac{a^2c^2\,(1 + k^2)}{c^2 + k^2a^2} = b^2$$

Адкуль маем для k наступны выраз:

$$k = \pm\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}$$

Такім чынам для k атрымліваем два значэньні. Гэта паказвае, што ёсьць дзьве сыстэмы кругавых сячэньняў, якія аднолькава нахілены да дадатнага і адмоўнага напрамкаў восі X. Коордынаты пунктаў абкругленьня можна знайсьці, разьвязаўшы раўнаньне эліпсоіда—разам з раўнаньнямі простых, якія праходзяць праз пачатак коордынат і пэрпэндыкуляры да роўніцы кругавых сячэньняў.

Цяпер знойдзем кругавыя сячэньні аднаполага гіпэрболёіда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2) \qquad (a > b)$$

Перасячэм гіпэрболёід роўніцай XY. У сячэньні атрымаем эліпс з паўвосямі a, b $(a > b)$. Калі будзем роўніцу сячэньня паварачваць навокал восі X, то эліпсы сячэньня будуць мець паўвось a, якая застанецца бяз зьмены, а другая паўвось, якая ўвесь час павялічваецца $(b < a)$, зраўняецца з паўвосьсю a. У гэты момант будзем мець кругавое сячэньне.

Відавочна, што аднаполы гіпэрболёід, як эліпсоід, будзе мець дзьве сыстэмы кругавых сячэньняў, якія аднолькова нахілены да восі Y, як у адзін, так і ў другі бок. Дзеля вызначэньня кутоў гэтых сячэньняў і восі Y, шукаем коордынаты пункту перасячэньня гіпэрболёіда (2), роўніцы YZ $(x = 0)$ і роўніцы, якая праходзіць праз вось X $(Z = ky)$.

Знойдзем:

$$y^2 = \frac{b^2c^2}{c^2 - k^2a^2}$$

Затым пішам умову, што радыюс сячэньня, які знаходзіцца на роўніцы YZ, раўняецца паўвосі a:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = a\,,$$

альбо:

$$y^2 + k^2y^2 = a^2$$

Падстаўляем знойдзенае значэньне y^2:

$$\frac{b^2c^2\,(1 + k^2)}{c^2 - k^2b^2} = a^2$$

адкуль

$$k = \pm\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Двуполы гіпэрболёід мае так-сама дзьве сыстэмы кругавых сячэньняў. Каб у гэтым пераканацца, расьсякаем гіпэрболёід роўніцай, роўналежнай да роўніцы XY $(z = h$, пры $h > c)$. У сячэньні атрымаем эліпс. Пасьля гэтага паварачваем роўніцу сячэньня навокал большае восі эліпсу, аж пакуль не атрымаем кругавога сячэньня двухполага гіпэрболёіда.

Каб адшукаць кругавое сячэньне эліптычнага параболёіда, праводзім праз вось X роўніцу:

$$z = ky.$$

Яна расьсячэ эліптычны параболёід:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z,\ (p > q) \qquad (3)$$

па эліпсу. Будзем шукаць верхні пункт гэтага эліпса. Трэба будзе разьвязаць раўнаньне (3) сумесна з раўнаньнямі двух роўніц:

$$z = ky$$

і

$$x = 0.$$

Знаходзім, што верхні пункт ёсьць $M\ (0, 2qk,\ 2qk^2)$.

Значыцца, адна з восяй эліпса ёсьць:

$$OM = 2\,qk\sqrt{1 + k^2}.$$

Другая вось эліпса праходзіць праз сярэдзіну адцінка OM, г. зн. праз пункт $(0, qk, qk^2)$. Раўнаньні простай, якая праходзіць праз гэты пункт і роўналежна восі X, будуць:

$$y = qk$$

$$z = qk^2$$

Разьвяжам гэтыя раўнаньні сумесна з раўнаньнем (3). Знойдзем для пункту перасеку простай з параболёідам

$$x = \pm k\sqrt{pq}.$$

Адсюль робім вывад, што другая вось эліпса

$$= 2k\sqrt{pq}.$$

Для кругавога сячэньня восі павінны быць роўныя.

Значыцца:

$$2\,kq\sqrt{1 + k^2} = 2\,k\sqrt{pq},$$

адкуль:

$$k = \pm\sqrt{\frac{p - q}{q}}$$

Падвойны знак паказвае, што эліптычны параболёід мае дзьве сыстэмы кругавых сячэньняў. Відавочна, ён мае два пункты абкругленьня.

§ 4. ПРОСТАЛІНЕЙНАЯ ФОРМАВАЛЬНАЯ

Дадзены аднаполы гіпэрболёід:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

Перанясем адзін з дадатных членаў раўнаньня ў правы бок:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

У абедзьвюх частках раўнаньня маем розьніцу квадратаў.

Дзеля гэтага:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad (2)$$

Гэтае раўнаньне можна замяніць такімі двума раўнаньнямі:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= k\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

дзе k — адвольны лік.

Гэта дзеля таго, што выключэньне велічыні k прыводзіць сыстэму (3) да раўнаньня (2). Відавочна, што значэньне (x, y, z), якое здавальняе сыстэму (3), здавальняе і раўнаньне (2), а значыцца, і раўнаньне (1). Сыстэма (3) пры дадзеным k, выражае некаторую простую. Робім вывад, што ўсякі пункт, які знаходзіцца на гэтай простай, знаходзіцца і на гіпэрболёідзе (1).

Выходзіць, што ўся простая знаходзіцца на гіпэрболёідзе. Але пры адвольным k, сыстэма (3) вызначае бязьлічнае мноства простых, цэлую сям'ю простых, і ўсе гэтыя простыя знаходзяцца на гіпэрболёідзе.

Гэтыя простыя завуцца просталінейнымі формавальнымі. Апрача паказанае сыстэмы (3), на гіпэрболёідзе знаходзіцца яшчэ другая сыстэма просталінейных формавальных. Яе атрымаем, групуючы множнікі раўнаньня (2) такім чынам:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= m\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{m}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

дзе m — адвольны лік.

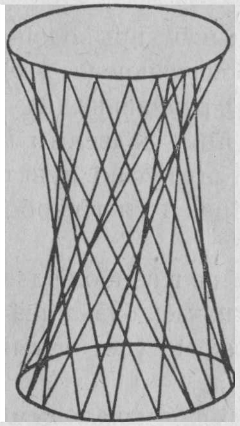
Такім чынам, аднаполы гіпэрболёід паказваюць дзьве сыстэмы простых, падвойная сетка просталінейных формавальных.

Т э о р э м а. Просталінейныя формавальная аднае і тае самае сыстэмы паміж сабой не перасякаюцца, а формавальныя розных сыстэм усе перасякаюцца паміж сабой.

Дзеля доваду першае часткі тэорэмы бярэм, напр. сыстэму (3) і дадзем парамэтру k два розныя значэньні — k і k_1. Атрымаем дзьве простыя аднае і тае самае сыстэмы (3). Каб гэтыя дзьве простыя перасякаліся, г. зн., каб чатыры іх раўнаньні мелі агульныя разьвязкі, неабходна, каб $k = k_1$. А гэта немагчыма, бо ўзяты розныя простыя.

Праўдзівасьць другое часткі тэорэмы вынікае з таго, што з 4-х раўнаньняў (3), (4) (пры дадзеным k і m) адно ёсьць вынік трох апошніх.

Сапраўды, перамножыўшы раўнаньні (3), а пасьля падзяліўшы атрыманае раўнаньне на адно з раўнаньняў (4), атрымаем другое раўнаньне (4). Калі гэта так, дык узяўшы з чатырох раўнаньняў (3) і (4) якія-небудзь тры раўнаньні, мы знойдзем каардынаты (x, y, z) пункту перасеку дзьвюх формавальных (3) і (4), бо знойдзенае значэньне каардынат здавальняе і чацьвертае раўнаньне.


Рыс. 110

Гіпэрболічны параболёід

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad (5)$$

таксама мае дзьве сыстэмы прасталінейных формавальных. Гэта дзеля таго, што раўнаньне (5), альбо, усёроўна, раўнаньне:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = z$$

можна замяніць альбо сыстэмай:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} &= kz \\ \frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} &= \frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

альбо сыстэмай:

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = m \qquad (7)$$

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = \frac{z}{m} \qquad (7)$$

Адносна ўзаемнага перасеку формавальных гіпэрболічнага параболёіду маюць тую самую асаблівасьць, як і формавальныя аднаполага гіпэрболёіду. Заўважым, што другое раўнаньне сыстэмы (6) і першае раўнаньне сыстэмы (7) ня маюць каардынаты z. Значыцца, кожнае з гэтых раўнаньняў выражае роўніцу, роўналежную да восі Z. Апрача таго, другое раўнаньне (6) пры розных значэньнях парамэтраў k, выражае роўніцы, роўналежныя паміж сабой.

Тое-ж самае можна сказаць і аб першым раў—ні (7). Гэтыя заўвагі прыводзяць да наступнага выніку: усе прасталінейныя формавальныя гіпэрболічнага параболёіду знаходзяцца ў дзьвюх сыстэмах роўніц, якія роўналежныя да восі Z. Усе роўніцы кожнай з сыстэм роўналежныя паміж сабой, прычым у аднэй сыстэме роўніц ляжаць усе формавальныя сыстэмы (6), а ў другой—сыстэмы (7).

ЗАДАЧЫ

1. Праведзены адцінак простай, даўжынёй 6 см, утварае з восямі X і Y куты ў 45° і 60°; пачатак адцінка зьмешчаны у пункце $(1, -2, 3)$. Знайсьці: a) кут паміж адцінкам і восьсю Z; b) каардынаты канца; c) даўжыні проекцый на восі каардынат і на роўніцы каардынат.

2. Адцінак простае мае пачатак у пункце $(4, 2, -3)$ і канчаецца ў пункце $(1, 4, -2)$. Знайсьці: a) куты адцінка з восямі каардынат і роўніцамі каардынат; b) каардынаты пункту перасячэньня адцінка з роўніцай, якая дзеліць папалам двугранны кут паміж роўніцамі XZ і YZ.

3. Вяршыні трыкутніка: $(2, -1, 0)$, $(1, 2, -1)$, $(0, 0, 1)$. Знайсьці: a) цэнтр цяжару; b) даўжыні бакоў і куты бакоў з восямі каардынат; c) плошчы проекцый трыкутніка на каардынатныя роўніцы; d) плошчу трыкутніка праз плошчу яго проекцый на каардынатныя роўніцы.

Паказаньне: Калі S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} — плошчы проекцый трыкутніка на каардынатныя роўніцы XY, YZ, XZ, дык плошча самога трыкутніка:

$$S = \sqrt{S^2_{xy} + S^2_{xz} + S^2_{yz}}$$

4. Знайсьці цэнтр і радыюс кулі, якая праходзіць праз чатыры пункты прасторы.

5. Знайсьці координаты пункту, сярэдзіна адлегласьці якога да пункту $(-1, 2, 3)$ ляжыць на восі Z, калі: a) пункт ляжыць на роўніцы XY, b) адлегласьць яго да пачатку координат $= 3$.

6. Давесьці, што простыя, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых кантаў чатырохкутніка, перасякаюцца ў адным пункце і ў ім дзеляцца напалам.

7. На простай, якая нахілена да восі Z пад кутом 45° і ўтварае роўныя куты з восямі X і Y, знайсьці пункт на адлегласьці, роўнай адзінцы ад пачатку координат.

8. Цэнтр цяжару трыкутнае піраміды, вяршыні якой: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) зьмяшчаюцца ў пункце:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right).$$

У якім стасунку ён падзяляе адцінак простае, якая злучае вяршыню піраміды з цэнтрам цяжару асновы?

Адказ: $3 : 1$.

9. У кожным з 8-мі координатных кутоў праведзена простая, якая ўтварае аднолькавыя куты з адпаведнымі восямі координат. Знайсьці куты паміж гэтымі простымі.

10. Напісаць раўнаньне роўніцы, якая праходзіць праз дадзены пункт і праз вось Z.

11. Правесьці роўніцу, роўналежную восі Z, праз пункты $(2, 1, -3)$ і $(4, -1, 2)$.

12. Якім чынам пабудаваць модэлі роўніц:

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$,

b) $9x - 4z = 7$,

c) $y = 3x$,

d) $z = 2y$;

e) $x + 4y = 0$,

f) $x - 2y + 3z = 6$.

Знайсьці велічыню пэрпэндыкуляраў з пачатку координат на гэтыя роўніцы і куты гэтых пэрпэндыкуляраў і саміх роўніц з восямі координат.

13. Праз пункты $(4, 0, 2)$ і $(0, 0, 2)$ правесьці роўніцу на адлегласьці, роўнай 1-цы ад пачатку координат.

14. Правесьці праз вось Z роўніцу, якая знаходзіцца ад пункту $(9, -1, 3)$ на адлегласьці, роўнай 2.

15. Праз пункт $(2, -1, 3)$ правесьці роўніцу: a) якая адсякае на восях X і Z адцінкі, адпаведна роўныя 3 і 4; b) пэрпэндыкулярную да дзьвюх роўніц:

$$x - y = 5$$

і

$$2x + z = 3.$$

16. Знайсьці адлегласьць паміж роўніцамі:

$$2x - y + z = 5$$

і

$$2x - y + z = -2.$$

17. Напісаць раўнаньне роўніцы, якая адсякае на координатных роўніцах трыкутнікі дадзеных плошчаў.

18. Ці ляжаць на аднэй роўніцы пункты $(0, 1, 3)$, $(7, 2, 0)$, $(2, -1, 1)$ і $(5, 0, 0)$?

19. Дадзены чатыры пункты. Які лік трэба прыкласьці да ўсіх координат аднаго з гэтых пунктаў, каб новы пункт ляжаў на аднэй роўніцы з астатнімі 3-ма?

20. Роўніца дае на восях координат адцінкі, адпаведна роўныя $2, -1$ і 3. Правесьці праз вось Y — роўніцу, аднолькава нахіленую як да дадзенай роўніцы, гак і да роўніцы XY.

21. Правесьці роўніцу праз вось X і праз пункт перасячэньня трох роўніц:

$$x - y + z = 4;$$

$$2x + y + 2z = 5;$$

$$3x + 5y + z = 0.$$

22. Дадзена роўніца:

$$2x - y + z = 3;$$

правесьці роўніцу, пэрпэндыкулярную да яе, якая праходзіць цераз лінію перасячэньня яе з роўніцай XY.

23. На восі X знайсьці пункт, які ляжыць на аднолькавай адлегласьці ад дзьвюх роўніц:

$$x - 2y + z = 3$$

і

$$2x - y - z = 4.$$

24. Правесьці роўніцу, якая дзеліць на дзьве роўныя паловы двухгранны кут паміж роўніцамі:

$$4x - 2y + 4z = 7$$

і

$$x - y - z = 3.$$

25. Дадзены дзьве простыя:

I.

$$x - y + 2z = 3,$$

$$2x + y - z = 4.$$

II.

$$2x + y = 4,$$

$$z = 3.$$

Вызначыць: a) пункты перасеку кожнай простай з каардынатнымі роўніцамі; b) адцінкі простых паміж каардынатнымі роўніцамі; c) проекцыі гэтых адцінкаў на каардынатныя роўніцы і на восі каардынат; d) раўнаньне проекцый на каардынатныя роўніцы; e) адлегласьць ад пачатку каардынат да кожнай простай, (f) кут паміж простымі; g) перасякаюцца простыя ці не? h) самую кароткую адлегласьць паміж простымі і i) самыя кароткія адлегласьці паміж проекцыямі на каардынатныя роўніцы кожнай простай; k) куты кожнай простай з роўніцай

$$x - y - z = 2.$$

26. Праз пункт $(2, -1, 3)$ правесьці: a) простую, якая з восьсю X дае кут 30°, а з восьсю Z кут 45°; b) роўналежную да простай:

$$x + 1 = 0$$

$$y + 2z = 3;$$

c) пэрпэндыкулярную да роўніцы

$$2x - 3y + z = 5;$$

d) роўналежную да дзьвюх роўніц:

$$2x - y = 5$$

і

$$3x + 4z = 7;$$

e) пэрпэндыкулярную да дзьвюх простых:

$$x = 2z - 1$$

$$y = 3z + 1$$

і

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4};$$

f) якая перасякае гэтыя простыя.

27. Знайсьці адлегласьць пункту $(0, 2, -3)$ да простай:

$$x + y - 2z = 4,$$

$$2x - y + z = 7$$

і напісаць раўнаньне гэтае адлегласьці.

28. Правесьці роўніцу: a) якая праходзіць праз простую:

$$x + y - 2z = 4$$

$$x + z = 5$$

і нахілена да роўніцы YZ пад кутом у 10°;
b) праз пункт $(2, 1, -2)$ і простую, якая ляжыць на роўніцы XY, калі раўнаньне яе на роўніцы XY ёсьць:

$$3x - 4y = 6;$$

c) праз простую

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

пэрпэндыкулярна да роўніцы

$$2x - y + 3z = 0;$$

d) праз пачатак каардынат і пункт $(1, -2, -4)$ роўналежна простай

$$2x + 3y = 0,$$
$$z = 1;$$

e) праз простую:

$$x + y - 2z = -2$$
$$x - y = 0$$

роўналежна простай:

$$3x + 2y = 1$$
$$y - 3z = -4;$$

f) праз пачатак координат пэрпэндыкулярна да простае:

$$x = 2z - 3$$
$$y = 3z + 2;$$

g) праз пачатак координат роўналежна дзьвюм простым:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$$

і

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{5};$$

h) якая праходзіць праз дзьве роўналежныя простыя.

29. Знайсьці адлегласьці паміж дзьвюма простымі:

$$x = z - 1$$
$$y = 3z + 2$$

і

$$y = z + 3$$
$$y = 3z - 1$$

30. Якая з простых:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{7}$$

ляжыць на роўніцы:

$$23x - 32y + 13z + 56 = 0?$$

Адказ: другая.

31. Знайсьці аснову пэрпэндыкуляра з пункту $(1, -1, 0)$ на роўніцу

$$2x - y + 4z = 5.$$

32. Знайсьці раўнаньне ортогональнае проекцыі простай

$$\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = z$$

на роўніцу

$$2x + y = 5.$$

Заўвага: проекцыя простай ляжыць на роўніцы, якая праходзіць праз простую пэрпэндыкулярна да дадзенай роўніцы.

33. Давесьці, што роўніцы, якія праходзяць цераз сярэдзіны бакоў трыкутніка пэрпэндыкулярна да іх, перасякаюцца па аднэй простай.

34. Знайсьці на роўніцы

$$x - y + 2z = 3$$

такі пункт каб простая, якая злучае яго з пачаткам координат, давала роўныя куты з восямі координат.

Заўвага: Неабходна скарыстаць формулу:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

35. На простай, якая праходзіць праз пачатак координат і перасякае простыя:

$$x = 2,$$
$$y = 3,$$

і

$$y = -4,$$
$$z = 3,$$

знайсьці пункт, які адстаіць ад восі Z, на адлегласьці роўнай 5.

36. Вылічыць адлегласьць ад простай:

$$x - y = 1$$
$$2y - z = 1$$

да роўніцы

$$x + y - z = 7.$$

37. Знайсьці пункт, сымэтрычны з пунктам $(2, -1, 0)$ адносна простай:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

38. Правесьці праз пачатак координат простую на роўніцы

$$x - 2y + z = 0$$

так, каб яна склала кут у 60° з простай:

$$x - y = 0,$$

$$x = 2z.$$

39. Правесьці на роўніцы XY простую, пэрпэндыкулярную да простай, якая злучае пункт (a, b, c) з пачаткам координат.

40. На якой вышыні трэба перасячы эліпсоід роўніцамі, роўналежнымі да роўніцы XY, дзеля таго, каб плошчы сячэньняў зьменшыліся ў 2,3... разы.

Заўвага: Плошча эліпса раўняецца πab, дзе a і b паўвосі эліпса.

41. Знайсьці кругавое сячэньне і пункты абкругленьня эліпсоіда

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

42. Знайсьці цэнтр эліпса, па якім эліпсоід перасякаецца роўніцай.

Разьвязваньне. Дадзены: эліпсоід

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

і роўніца

$$Ax + By + Cz = D \qquad (2).$$

Проектуем эліпс, які вызначаецца двума раўнаньнямі (1) і (2) на адну з координатных роўніц, напр., на роўніцу XY. Дзеля гэтага будуем проектуючы цыліндар з формавальнай, роўналежнай восі Z, які праходзіць цераз эліпс. Раўнаньне яго атрымаем, калі выключым Z з раўнаньняў (1) і (2). Атрыманае раўнаньне (з дзьвюма координатамі x і y), разам з раўнаньнем $z = 0$, роўніцы XY і дае проекцыю эліпса на роўніцы XY. Відавочна, што цэнтр эліпса проектуецца ў цэнтр проекцыі. Цэнтр (x_o, y_o) проекцыі знаходзіцца паводле формул (18), альбо (19) стар. 101-102. Гэтыя x_o, y_o

будуць дзьве координаты цэнтра эліпса. Трэцяя координата z знаходзіцца з раўнаньня роўніцы.

43. Няхай пабудованы на аднаполым гіпэрболёідзе два роўныя і паралельныя паміж сабой эліпсы на адлегласьці c ад роўніцы XY. Давесьці, што ўсе 8 прасталінейных формавальных, якія праведзены праз вяршыні аднаго з эліпсаў, праходзяць праз вяршыні другога эліпса і перасякаюць гарлавы эліпс у чатырох пунктах перасеку яго дыягоналямі апісанага каля яго простакутніка, бакі якога роўналежныя восям.

44. Пабудуем на гіпэрболічным парабалёідзе дзьве парабoлы, якія ляжаць на роўніцах XZ і YZ.

Давесьці, што праз кожны пункт аднэй параболы праходзяць дзьве прасталінейныя формавальныя, якія перасякаюць другую параболу ў сымэтрычна расстаўленых пунктах, прычым гэтыя пункты ад роўніцы XY стаяць на такой-жа адлегласьці, як і ўзяты пункт першай параболы.

ЗЬМЕСТ

ЧАСТКА ПЕРШАЯ

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕОМЭТРЫЯ НА РОУНІЦЫ

ЧАСТКА ДРУГАЯ

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕОМЕТРЫЯ У ПРАСТОРЫ

ЗАЎВАЖАНЫЯ ПАМЫЛКІ

Стар.		Надрукавана	Павінна быць
11	7 зьверху	$+ x_2P_3$	$+ x_3P_3$
17	4 зьверху	Азначым	Абазначым
17	1 зьнізу	адны і тыя самыя	тыя самыя
19	3 зьверху	$+ y \operatorname{sn} \beta$	$+ y_1 \operatorname{sn} \beta$
64	7 зьверху	$OS^2 + rO^2 = Q^2$	$os^2 + ro^2 = a^2$
64	9 зьверху	Sq^2	sq^2
64	11 зьверху	$OS^2 + rO^2 = rn^2 + Sq^2$	$os^2 + ro^2 + rn^2 + sq^2$
64	13 зьверуу	$Oq^2 + On^2$	$oq^2 + on^2$
64	8 зьнізу	восьсю X	восі X
64	13 зьнізv	KR_1	KK_1
65	4 зьнізу	$+ y^2 ($	$+ y_1^2 ($
80	. . . . . .	. . . .	на рыс. 57 дзьве верхнія пунктырныя лініі павінны быць праведзены з пунктаў перасеку адпаведных паўакружын з восьсю Y
85	1 зьнізу	$\frac{a - ex_1}{a + ex}$	$\frac{a - ex_1}{a + ex_1}$
101	5 зьнізу	$d \alpha$	$2d \alpha$
173	1 зьнізу	Паміж імі існуе шэсьць залежнасьцяй і як раз.	Паміж імі існуе шэсьць залежнасьцяй.
175	4 зьнізу	$x'' = x'''. y'' =$	$x'' = x'''; y'' =$