МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Е. Н. Крючков, С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия для студентов
учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям
1-56 01 01 Землеустройство, 1-56 01 02 Земельный кадастр,
1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий,
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство,
1-74 06 04 Техническое обеспечение мелиоративных
и водохозяйственных работ*

В двух частях

Часть 2

Горки
БГСХА
2020

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
К78

Одобрено методическими комиссиями землеустроительного факультета 27.05.2019 (протокол № 9), факультета механизации сельского хозяйства 27.05.2019 (протокол № 9), мелиоративно-строительного факультета 27.05.2019 (протокол № 9) и Научно-методическим советом БГСХА 29.05.2019 (протокол № 9)

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *Е. Н. Крючков*;
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Л. Васильев*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*

Крючков, Е. Н.
К78 Высшая математика : учебно-методическое пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Е. Н. Крючков, С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова. – Горки : БГСХА, 2020. – 151 с.
ISBN 978-985-467-992-1.

Приведены краткий теоретический материал по темам дисциплины «Высшая математика», задания для самостоятельной работы и рекомендуемая литература.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-56 01 01 Землеустройство, 1-56 01 02 Земельный кадастр, 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство, 1-74 06 04 Техническое обеспечение мелиоративных и водохозяйственных работ.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-467-992-1 (ч. 2)
ISBN 978-985-467-871-9

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного пособия – помочь студентам освоить основные понятия и утверждения учебной дисциплины на доступном для понимания уровне, сформировать ключевые компетенции, связанные с пониманием значимости дисциплины в освоении их будущей профессии. Пособие написано в соответствии с программой курса высшей математики для инженерных специальностей. Весь учебный материал разделен на отдельные главы. В каждой главе излагается необходимый теоретический материал, приводится решение типовых примеров, предлагается система упражнений для усвоения и закрепления данной темы. В случае необходимости читатель может изучить или восстановить в памяти доказательства необходимых формул и теорем, используя рекомендуемую литературу.

Пособие может быть использовано и другими категориями студентов, готовящихся к подготовке и сдаче зачетов и экзаменов по высшей математике в высших учебных заведениях.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М.: Наука, 1973.
2. Высшая математика для экономистов: учебник: в 3 т. / И. В. Гайшун [и др.]. – Минск: БГЭУ. – Т. 2. Теория вероятностей в экономике. Методы оптимизации и экономические модели.
3. Герасимович, А. И. Математический анализ / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Выш. шк., 1989. – Т. 1, 2.
4. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – Т. 1, 2.
5. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике / А. А. Гусак. – Минск: Выш. шк., 1988. – Т. 1, 2.
6. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск, 2000. – Т. 1.
7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980. – Т. 1, 2.
8. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под ред. А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007. – Ч. 4.

6. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

При изучении данной темы следует усвоить определения частных производных и правила их вычисления, обратить внимание на схему нахождения частных производных высших порядков. При решении задач на экстремум необходимо придерживаться последовательности действий по исследованию функции.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Определение функции двух и нескольких переменных. Область определения.
2. Частные производные функции двух переменных.
3. Полный дифференциал функции двух переменных.
4. Частные производные высших порядков.
5. Условия экстремума функции двух переменных.
6. Схема исследования функции двух переменных на экстремум.
7. Условный экстремум функции двух переменных.

6.1. Понятие функции двух переменных. Частные производные

Рассмотрим две независимые переменные x и y. Каждой паре значений x и y на плоскости xOy соответствует точка, для которой x и y являются координатами. Обозначим через D некоторое множество точек плоскости xOy.

Закон, по которому каждой точке $M(x;\ y) \in D$ ставится в соответствие вполне определенное единственное число z, называется ***функцией двух переменных величин*** x и y. Обозначается функция $z = f(x; y)$.

Множество точек $M(x;\ y)$, для которых функция $z = f(x;\ y)$ имеет смысл, называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$, а всевозможные значения зависимой переменной z, которые она принимает на $D(f)$, – ***областью значений функции*** и обозначается $E(f)$.

Как и функция одной переменной функция двух переменных может быть задана *аналитически*, *таблично* и *графически*.

Задать функцию аналитически означает определить формулу, по которой каждой паре значений независимых переменных $(x;\ y) \in D$ ставится в соответствие вполне определенное единственное значение зависимой переменной z.

Графиком функции двух независимых переменных является некоторая ***поверхность в пространстве***.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$. Положим $z = C$, где C – постоянная величина. Тогда уравнение $C = f(x; y)$ дает зависимость между переменными x и y, при которой заданная функция z сохраняет заданное значение C. Геометрически это означает, что поверхность $z = f(x; y)$ пересекается плоскостью $z = C$, параллельной плоскости xOy. В результате такого пересечения полученная линия проектируется на плоскость xOy и задается уравнением $C = f(x; y)$. При перемещении точки с координатами $(x; y)$ вдоль этой линии функция сохраняет постоянное значение, равное C.

Линия на плоскости xOy, в каждой точке которой функция $z = f(x; y)$ сохраняет постоянное значение, называется ***линией уровня*** этой функции.

Пример 1. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Поверхность, определяемая функцией $z = x^2 + y^2$, является параболоидом вращения. Линиями уровня являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = C$.

Предположим, что функция $z = f(x; y)$ определена в окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$. Дадим независимой переменной x приращение Δx. При этом переменная y будет сохранять свое значение. Тогда функция $z = f(x; y)$ получит приращение $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ по переменной x в точке $(x_0; y_0)$. Это приращение называется ***частным приращением функции по переменной x*** в точке $(x_0; y_0)$. Аналогично определяется ***частное приращение функции по переменной*** y в точке $(x_0; y_0)$: $\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной x называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Эта производная обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x; y).$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \qquad (6.2)$$

Она обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_y(x; y).$$

По определению частная производная функции двух переменных находится как производная функции одной переменной, в предположении, что вторая переменная остается постоянной. Поэтому вычисление частных производных ничем не отличается от вычисления производных функции одной переменной и выполняется по тем же правилам.

Пример 2. Найти частные производные функции двух переменных $z = 2x^3 y - 7xy^2 - 3x + 5$.

Решение. Найдем частную производную по переменной x, считая переменную y постоянной: $z'_x = 6x^2 y - 7y^2 - 3$. Теперь будем считать, что переменная x остается постоянной: $z'_y = 2x^3 - 14xy$.

6.2. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ вместе со своими частными производными $f'_x(x; y)$, $f'_y(x; y)$. Выберем приращение Δx и Δy так, чтобы точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ принадлежала рассматриваемой окрестности.

Полное приращение функции двух переменных $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y), \qquad (6.3)$$

где $(x; y), (x + \Delta x; y + \Delta y)$ – точки, принадлежащие области определения функции.

Его можно записать в виде

$$\Delta z = f'_x(x; y)\,\Delta x + f'_y(x; y)\,\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (6.4)$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy. Полный дифференциал обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\ . \qquad (6.5)$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ . \qquad (6.6)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = e^{x^2-y^2}$.

Решение. Найдем частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2-y^2}\cdot 2x\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)\ .$$

Тогда в соответствии с формулой (6.6) полный дифференциал запишем в виде $dz = (e^{x^2-y^2}\cdot 2x)dx + (e^{x^2-y^2}\cdot(-2y))dy = e^{x^2-y^2}(2xdx - 2ydy)$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{xy} + \frac{\sqrt{x}}{y}\ .$$

Решение. Найдем частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\cdot y + \frac{1}{2\sqrt{x}y}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}\cdot y - \frac{\sqrt{x}}{y^2}.$$

Тогда полный дифференциал запишем в виде

$$dz = \left(e^{xy}\cdot y + \frac{1}{2\sqrt{x}y}\right)dx + \left(e^{xy}\cdot x - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)dy\ .$$

6.3. Приближенное вычисление значений функции двух переменных

Пусть функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$. Из формулы полного приращения функции $\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0)$ следует, что

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) = f(x_0; y_0) + \Delta z\ . \qquad (6.7)$$

При малых приращениях независимых переменных полное приращение функции мало отличается от полного ее дифференциала, т. е.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\ . \qquad (6.8)$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (6.9)$$

Пример. Вычислить приближенно значение $1{,}04^{1{,}99}$, исходя из значения функции $z = x^y$ в точке $M_0(1; 2)$.

Решение. Из заданного выражения определим $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$.

Найдем значение функции $z(x_0; y_0) = 1^2 = 1$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1};\ \ \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2\cdot 1^1 = 2,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;\ \ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 1^2 \cdot \ln(1) = 0\,.$$

Полный дифференциал функции z равен:

$$dz = 0{,}04\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) - 0{,}01\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 2\cdot 0{,}04 - 0\cdot 0{,}01 = 0{,}08 + 0 = 0{,}08.$$

Тогда $1{,}04^{1{,}99} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08$.

Точное значение этого выражения: 1,08117587.

6.4. Частные производные высших порядков

Предположим, что частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Тогда частные производные от этих частных производных называются частными производными второго порядка или вторыми частными производными функции $z = f(x; y)$:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x,\ z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y,\ z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x,\ z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x;y)\right)'_x = f''_{xx}(x;y); \qquad (6.10)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x;y)\right)'_y = f''_{yy}(x;y); \qquad (6.11)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x;y)\right)'_y = f''_{xy}(x;y); \qquad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x;y)\right)'_x = f''_{yx}(x;y). \qquad (6.13)$$

Частные производные второго порядка, взятые по одной переменной, называются повторными, а по различным переменным – смешанными.

Если функция $z = f(x; y)$ и ее смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ и непрерывны в этой точке, то смешанные производные второго порядка этой функции равны $f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y)$.

Дифференцируя частные производные второго порядка как по x, так и по y, получаем частные производные третьего порядка и т. д.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$.

Решение. $z'_x = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$, $z'_y = 2x^3y - 9xy^2 - x$,

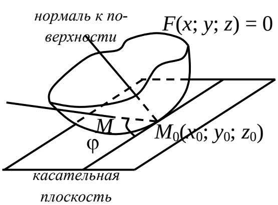
$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(3x^2y^2 - 3y^3 - y\right)'_x = 6xy^2,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(3x^2y^2 - 3y^3 - y\right)'_y = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(2x^3y - 9xy^2 - x\right)'_x = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(2x^3y - 9xy^2 - x\right)'_y = 2x^3 - 18xy.$$

6.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Пусть задана некоторая поверхность уравнением $F(x; y; z) = 0$.

Касательной плоскостью к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется плоскость, содержащая множество всех касательных, проведенных в этой точке.

Касательная плоскость определяется уравнением

$$F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)\cdot(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)\cdot(z - z_0) = 0. \qquad (6.14)$$

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в данной точке M_0. Уравнения нормали к поверхности в точке M_0 имеют вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;\, y_0;\, z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;\, y_0;\, z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;\, y_0;\, z_0)}\,. \qquad (6.15)$$

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, которая проектируется в точку $M(1;\ 1)$.

Решение. Найдем аппликату точки касания:

$$z=1^2-2\cdot1\cdot1+1^2-1+2\cdot1=1\,.$$

Значит, точка касания имеет координаты $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Запишем уравнение поверхности в виде $F(x;\ y;\ z)=0$:

$$z-x^2+2xy-y^2+x-2y=0$$

и вычислим частные производные первого порядка функции $F(x;\ y;\ z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+2y+1;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2x-2y-2;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1\,.$$

Значения частных производных первого порядка в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$ равны

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=1;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=-2;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=1.$$

Тогда уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$$1\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0 \text{ или } x-2y+z=0,$$

а уравнения нормали соответственно запишутся в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

6.6. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ определена в некоторой области и пусть точка $P_0(x_0;\ y_0)\in D$. Точка $P_0(x_0;\ y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z=f(x;\ y)$, если $f(x_0;\ y_0)$ есть наибольшее значение функции в окрестности этой точки. Точка $P_0(x_0;\ y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z=f(x;\ y)$, если $f(x_0;\ y_0)$ есть наименьшее значение функции в окрестности этой точки. Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.

Значение функции в точке максимума называется ***максимумом функции***, а значение функции в точке минимума – ***минимумом функции***. Максимум и минимум функции называются ***экстремумами функции***.

Если в точке $P_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю, т. е. $z'_x(x_0; y_0) = 0$ и $z'_y(x_0; y_0) = 0$. Это ***необходимые условия экстремума***.

Точка, в которой обе частные производные равны нулю, называется ***критической точкой*** функции $z = f(x; y)$. Для отыскания критических точек функции нужно найти ее частные производные, приравнять их к нулю и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Точки экстремума, если они есть, находятся среди критических точек функции.

Пусть $P_0(x_0; y_0)$ является критической точкой функции $z = f(x; y)$. Вычислим частные производные второго порядка в этой точке: $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $z''_{yy}(x_0; y_0) = C$. Составим выражение $AC - B^2$ и проанализируем его знак:

1) если $AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;

2) если $AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $AC - B^2 = 0$, то для определения экстремума нужны дополнительные исследования.

Рассмотренные условия называются ***достаточными условиями экстремума***.

Пример 1. Исследовать функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Решение. Найдем частные производные $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$, $z'_y = 2xy + 2y$ и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $2y\,(x + 1) = 0$, $y = 0$, $x = -1$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение: $6x^2 + 10x = 0$, $2x\,(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$.

Таким образом, найдены две критические точки $M_1(0;0)$, $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

Теперь в первое уравнение подставим $x = -1$: $6+y^2-10=0$, $y^2=4$, $y=-2$, $y=2$. Следовательно, стали известны еще две критические точки $M_3(-1;-2)$, $M_4(-1;2)$.

Найдем частные производные второго порядка: $z''_{xx}=12x+10$, $z''_{xy}=2y$, $z''_{yy}=2x+2$.

Проверим достаточные условия для точки $M_1(0;0)$:

$$A=z''_{xx}(0;0)=12\cdot 0+10=10,\ B=z''_{xy}(0;0)=2\cdot 0=0,$$

$$C=z''_{yy}(0;0)=2\cdot 0+2=2,\ AC-B^2=10\cdot 2-0^2=10.$$

Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция имеет экстремум. Поскольку $A>0$, то это минимум. При этом $z_{\min}=2\cdot 0^3-0\cdot 0^2+5\cdot 0^2+0^2=0$.

Аналогично установим, что в точке $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$ функция имеет максимум, причем $z_{\max}=2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^3+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0^2+5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2+0^2=4\frac{17}{27}$.

В точках $M_3(-1;-2)$ и $M_4(-1;2)$ экстремума нет.

Пример 2. Найти экстремум функции $z=x^2+xy-2$ при условии что переменные *x* и *y* удовлетворяют уравнению $4x^2-y-4=0$.

Решение. **Условным экстремумом** функции $z = f(x; y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные *x* и *y* удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$. Нахождение условного экстремума функции $f(x; y)$ сводится к **исследованию на экстремум функции Лагранжа** $F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$.

Составим функцию Лагранжа для рассматриваемого примера:

$$F(x;y;\lambda)=x^2+xy-2+\lambda(4x^2-y-4)$$

и найдем от нее частные производные первого порядка:

$$F'_x=2x+y+8\lambda x;\ F'_y=x-\lambda;\ F'_\lambda=4x^2-y-4.$$

Приравняем их к нулю и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}2x+y+8\lambda x=0,\\ x-\lambda=0,\\ 4x^2-y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+8\lambda x=0,\\ x=\lambda,\\ 4x^2-y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+8x^2=0,\\ 4x^2-y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6x^2+x-2=0,\\ y=4x^2-4\end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right) \text{ или } \left(\frac{1}{2};-3\right) .$$

Таким образом, имеем две критических точки

$$M_1\left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right) \text{ и } M_2\left(\frac{1}{2};-3\right).$$

Проверим характер критических точек на основании достаточных условий, для этого в каждой точке вычислим определитель:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{x\lambda}\\ F''_{yx} & F''_{yy} & F''_{y\lambda}\\ F''_{\lambda x} & F''_{\lambda y} & F''_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}.$$

Если в критической точке $\Delta<0$, значит, в ней заданная функция имеет условный максимум; если $\Delta>0$, то минимум.

Вычислим определитель в точке M_1:

$$\Delta(M_1)=-\begin{vmatrix}2 & 1 & -\frac{16}{3}\\ 1 & 0 & -1\\ -\frac{16}{3} & -1 & 0\end{vmatrix}=-\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right)+2=-\frac{26}{3}<0 .$$

Значит, в точке M_1 функция имеет условный максимум:

$$z_{\max}(M_1)=-\frac{2}{27}.$$

Вычислим определитель в точке M_2:

$$\Delta(M_2)=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}=-(-4-4)+2=10>0 .$$

Значит, в точке M_2 функция имеет условный минимум:

$$z_{\min}(M_2)=-\frac{13}{4}.$$

Контрольные задания

Задача 1. В задачах *а, б* найти области определения функций и изобразить их геометрически; в задаче *в* найти линии уровня и построить их график.

1.1. а) $z=\sqrt{9-x^2+y^2}$, б) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$,

в) $z=\dfrac{x}{y^2}$.

1.2. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, б) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$,

в) $z=\sqrt{xy}$.

1.3. а) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$, б) $z=\arcsin\left(1-x^2-y^2\right)$,

в) $z=\dfrac{y}{x^2}$.

1.4. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ б) $z=\arcsin(xy)$,

в) $z=\sqrt{x^2+2y}$.

1.5. а) $z=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y}$, б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$,

в) $z=x^3y$.

1.6. а) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$, б) $z=\arcsin(x+y)$,

в) $z=\dfrac{y^2}{x^3}$.

1.7. а) $z=\dfrac{xy}{x-y}$, б) $z=\arcsin(1-y)$,

в) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

1.8. а) $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$, б) $z=\ln x-\ln y$,

в) $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

1.9. а) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-y^2}$, б) $z=x+\arccos y$,

в) $z=x^2+y$.

1.10. а) $z=\dfrac{x}{x^2-y^2}$, б) $z=\arcsin x+\arcsin y$,

в) $z=xy^3$.

1.11. а) $z=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1}$, б) $z=\arcsin\left(x^2+y^2-2\right)$,

в) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

1.12. а) $z=\dfrac{1}{x-y+2}$, б) $z=\arccos(2xy)$,

в) $z=\dfrac{x^2}{y}$.

1.13. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$, б) $z=\ln(-x+y)$,

в) $z=x^2-2y$.

1.14. а) $z=\dfrac{2}{y+2}+\dfrac{1}{x}$, б) $z=\arcsin\left(2y\left(1+x^2\right)-1\right)$,

в) $z=x+y^2$.

1.15. а) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$, б) $z=\arccos x+2y$,

в) $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

1.16. а) $z=\dfrac{1+x}{x-y+2}$, б) $z=\arcsin x+\sqrt{y}$,

в) $z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

1.17. а) $z=\sqrt{6x^2-3y^2-6}$, б) $z=\arccos\dfrac{y}{x^2}$,

в) $z=x^2y$.

1.18. а) $z=\ln\left(x^2+y\right)$, б) $z=\arccos x\dfrac{x}{x+y}$,

в) $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1.19. а) $z=\ln\left(-x-y\right)$, б) $z=\cos\dfrac{2x}{x-y}$,

в) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x}$.

1.20. а) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$, б) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$,

в) $z=\dfrac{x^2+y}{x^2-y}$.

1.21. а) $z=\ln xy$, б) $z=\arccos x\dfrac{x-2}{y}$,

в) $z=y^2-2x$.

1.22. а) $z=\dfrac{4x+y}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$, б) $z=x+\sqrt{y}$,

в) $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

1.23. а) $z=\ln\left(4+4x-y^2\right)$, б) $z=\arcsin\left(1-x\right)$,

в) $z=xy^2+1$.

1.24. а) $z=\ln\left(1+y-x^2\right)$, б) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$,

в) $z=\dfrac{y^2}{x}$.

1.25. а) $z=\dfrac{1}{\ln\left(4-x^2-y^2\right)}$, б) $z=y+\sqrt{x}$,

в) $z=\sqrt{x^2-y}$.

1.26. а) $z=\ln x-\ln\sin y$, б) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$, в) $z=\dfrac{(y+1)^2}{x-1}$.

1.27. а) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$, б) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$,

в) $z=\dfrac{x^2+y^2}{y}$.

1.28. а) $z=\sqrt{x\cdot\sin y}$, б) $z=\ln\left(x\cdot\ln\left(y-x\right)\right)$,

в) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

1.29. а) $z=1+\sqrt{-\left(x-y\right)^2}$, б) $z=\operatorname{arctg}x\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$,

в) $z=\sqrt{x+y^2}$.

1.30. а) $z=\dfrac{1}{x-2}-\ln\left(xy\right)$, б) $z=y+\arcsin\left(x+2\right)$,

в) $z=y\left(x^2+1\right)$.

Задача 2. Найти производные второго порядка функции $z=f(x;y)$.

2.1. $z=\sin^2\left(2x+3y\right)$.

2.2 $z=x\cdot\ln\dfrac{y}{x}$.

2.3. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

2.4 $z=\cos\left(x+y\right)$.

2.5. $z=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

2.6. $z=x\cdot e^{-\sin y}$.

2.7. $z=\sin x\cdot\sin y$.

2.8. $z=x^3y^2+x\cdot\sin y$.

2.9. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

2.10. $z=\dfrac{x^3}{2y-3}$.

2.11. $z=e^x\cdot\ln y+\sin y\cdot\ln x$.

2.12 $z=y\cdot\ln x$.

2.13. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

2.14. $z=e^{x^2y+y^3}$.

2.15. $z=y^{5x}$.

2.16. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

2.17. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

2.18. $z = \sin\dfrac{x}{y}$.

2.19. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

2.20. $z = \arcsin(xy)$.

2.21. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2.22. $z = y^{\ln x}$.

2.23. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

2.24. $z = \ln(x^2 + y)$.

2.25. $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$.

2.26. $z = \cos^2\left(4x - 3y^2\right)$.

2.27. $z = \ln(x + e^{-y})$.

2.28. $z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

2.29. $z = x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

2.30. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$.

Задача 3. Применяя полный дифференциал функции, вычислить приближенно.

3.1. $\ln\left(0,09^3 + 0,99^3\right)$.

3.2. $\operatorname{arctg}\dfrac{1,02}{0,95}$.

3.3. $(1,02)^{4,05}$.

3.4. $\sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}$.

3.5. $\sqrt{(1,02)^{1,99} + \ln 1,02}$.

3.6. $(1,04)^{2,03}$.

3.7. $(0,97)^{2,02}$.

3.8. $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

3.9. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1,97}{1,02} - 1\right)$.

3.10. $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.

3.11. $1,002 \cdot (2,003)^2$.

3.12. $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$.

3.13. $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

3.14. $\sqrt{(0,99)^{2,01} + \ln 0,99}$.

3.15. $\ln\left(0,09^2 + 1,01^2\right)$.

3.16. $(0,97)^{1,05}$.

3.17. $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$.

3.18. $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$.

3.19. $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$.

3.20. $\sqrt[3]{7,93 \cdot 1,02}$.

3.21. $\sqrt{3,92\cdot 0,95}$. 3.22. $(1,04)^{2,02}$.

3.23. $\ln\left(\sqrt[3]{1,02}+\sqrt{0,98}-1\right)$. 3.24. $\sin 31°\cdot \mathrm{tg}44°$.

3.25. $\sqrt{(3,01)^2+(3,88)^2}$. 3.26. $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{4,01}{1,03}-3\right)$.

3.27. $(1,04)\cdot(3,01)^3$. 3.28. $\mathrm{tg}46°\cdot \sin 31°$.

3.29. $\sqrt[3]{(1,01)^3+(0,05)^3}$. 3.30. $\sqrt{(5e^{0,01}+(1,99)^2}$.

Задача 4. Требуется на поверхности $F(x; y; z) = 0$ найти точку, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, а затем составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в найденной точке.

4.1. $x^2+3y^2-4z^2+24=0$, $x-y+4z-13=0$.

4.2. $4x-3y^2+z^2=0$, $2x+2y+z-1=0$.

4.3. $x^2-4y^2+2z^2-6=0$, $x-4y+3z=0$.

4.4. $x^2-3y^2+6z=0$, $x+y+2z+1=0$.

4.5. $2x^2-xy-z=0$, $2x+3y+z-5=0$.

4.6. $4x^2-y^2-2z^2+6=0$, $4x-y-3z+8=0$.

4.7. $y^2-z^2-3x=0$, $x-4y+4z-8=0$.

4.8. $y=4xz+1=0$, $2x+2y+4z-7=0$.

4.9. $4x^2+y^2+z^2=36$, $x+y-z+3=0$.

4.10. $x^2-4y^2+3z^2+24=0$, $x+4y-z+5=0$.

4.11. $2xy-y^2-z=0$, $6x+4y-2z+1=0$.

4.12. $x^2+4y^2+z^2=36$, $x+y-z=0$.

4.13. $2xy-x^2-z=0$, $4x-4y-2z+11=0$.

4.14. $4x^2+y^2+4z^2-6=0$, $x+y+z-2=0$.

4.15. $x^2-y^2-3z=0$, $4x+4y-z+1=0$.

4.16. $x^2+y^2+z^2-676=0$, $3x-12y+4z=0$.

4.17. $4x^2+4y^2+z^2-4=0$, $12x-3y+2z+1=0$.

4.18. $4y-3x^2+z^2=0$, $2x+2y+z+3=0$.

4.19. $y^2-x^2+4z=0$, $x+2y-z-5=0$.

4.20. $y-2x^2+xz=0$, $2x+y+3z-7=0$.

4.21. $x-3yz+5=0$, $x-2y-3z+1=0$.

4.22. $x^2-2y^2+3z^2+60=0$, $x+4y-z=0$.

4.23. $x-2yz+z^2=0$, $2x-4y+6z-11=0$.

4.24. $4x^2-y^2-2z^2+6=0$, $4x-y-3z+1=0$.

4.25. $6x-3y^2+z^2=0$, $2x+y+z-3=0$.

4.26. $y-4xz+2=0$, $2x-y+2z=0$.

4.27. $xy-z=0$, $2x+y-z+7=0$.

4.28. $4-x^2-y^2-z=0$, $2x+2y+z=0$.

4.29. $x^2+3y^2-2z^2+60=0$, $x-y+4z+1=0$.

4.30. $y-2x^2-z^2=0$, $x-2y+z+2=0$.

Задача 5. Исследовать на экстремум функцию.

5.1. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$. 5.2. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

5.3. $z=8x^3+y^3-24xy-7$. 5.4. $z=x^2y+2xy^2-18xy$.

5.5. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$. 5.6. $z=\frac{1}{4}x^4+x^2y-y^2-x^2$.

5.7. $z=x^3-6x+y^3-3y$. 5.8. $z=x^2+y^2+y^3$.

5.9. $z=4y^3-2xy+x^2+3$. 5.10. $z=x^4-xy+y^2$.

5.11. $z=x^3+8y^3-6xy+1$. 5.12. $z=4y^3+x^2+6xy+2$.

5.13. $z=-x^3-y^2+12x-2y+1$. 5.14. $z=x^4+2x^2y-y^2-4x^2$.

5.15. $z=x^4-4xy+2y^2$. 5.16. $z=x^3+y^3-12(x+y)$.

5.17. $z=6xy-2x^2y-xy^2$. 5.18. $z=3y^2-x^3+3x^2+4y$.

5.19. $z=4x^3-2xy+y^2+5$. 5.20. $z=3x^2-y^3+3x+4y$.

5.21. $z=x^2y+xy^2+xy$. 5.22. $z=x^3+y^3-15xy$.

5.23. $z=x^3+y^3-12x-3y$. 5.24. $z=y^3-4xy+2x^2+17$.

5.25. $z=x^4-4xy+2y^2$. 5.26. $z=8x^3+y^3-24xy-7$.

5.27. $z=x^3+6xy+3y^2-9x$. 5.28. $z=6x-x^3-3xy-\frac{3}{2}y^2$.

5.29. $z=e^{x-y}\left(x^2-2y^2\right)$. 5.30. $z=\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

Задача 6. Найти экстремум функции $z = f(x;y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $\varphi(x;y) = 0$.

6.1. $z = xy$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

6.2. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x + y - 2 = 0$.

6.3. $z = x + y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0$.

6.4. $z = xy$, $2x + 3y - 5 = 0$.

6.5. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$

6.6. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$

6.7. $z = xy$, $x + y - 1 = 0$.

6.8. $z = 6 - 4x - 3y$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

6.9. $z = x + 2y$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

6.10. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

6.11. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, $y - x - \frac{\pi}{4} = 0$.

6.12. $z = xy$, $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.

6.13. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$.

6.14. $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10,\ x + y = 4$.

6.15. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ x^2 + y^2 = 25$.

6.16. $z = x + y,\ x^2 + y^2 = 18$.

6.17. $z = 10 + 2xy,\ x^2 + y^2 = 8$.

6.18. $z = 10 + 2xy - x^2,\ x^2 + y - 4 = 0$.

6.19. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

6.20. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

6.21. Найти наименьшее значение аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

6.22. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точку, наименее удаленную от точки (0; 2).

6.23. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и прямую $2x + 3y - 6 = 0$. На эллипсе найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой.

6.24. На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, наименее удаленную от прямой $x - y + 4 = 0$.

6.25. В эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти эту площадь.

6.26. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S.

6.27. В эллипс $x^2 + 3y^2 = 12$ вписать равнобедренный треугольник с основанием, параллельным большой оси, так, чтобы площадь треугольника была наибольшей.

6.28. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины.

6.29. На эллипсе $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x + y - 9 = 0$.

6.30. На параболе $x^2 + 2xy + y^2 - 4y = 0$ найти точку, ближайшую к прямой $9x - 7y +16 = 0$.

7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Для решения задач по этой теме следует обратить внимание на определения первообразной и неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла, усвоить таблицу основных интегралов и основные методы интегрирования. Успех в решении задач достигается правильным выбором метода интегрирования и накопленным опытом нахождения интегралов. Особое внимание необходимо уделить методам подстановки и интегрирования по частям. При нахождении интегралов от рациональных дробей нужно усвоить методику разложения рациональных дробей на простейшие дроби и их интегрирование.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Понятие первообразной.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Основные методы интегрирования.
5. Рациональные дроби, разложение на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Интегрирование тригонометрическихх выражений.

7.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Операция нахождения первообразной функции называется ***интегрированием***. Интегрирование функции является операцией, в некотором смысле противоположной дифференцированию функции. Ранее по известной функции мы находили от нее производную и с помощью производной исследовали функцию. Интегрирование предполагает решение задачи, в которой по известной производной некоторой функции необходимо восстановить саму функцию.

Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$. Это означает, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций и все они отличаются друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C . \tag{7.1}$$

Переменная x называется ***переменной интегрирования***, функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

Неопределенный интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3) неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т. е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$$

5) неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

6) результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)dt = F(t) + C$. Такое свойство называется ***инвариантностью формулы интегрирования***.

Ряд интегралов был однажды найден и занесен в таблицу:

1. $\int dx = x + C.$	2. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	4. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x\, dx} = \mathrm{tg} x + C.$
5. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C.$	6. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x dx} = -\mathrm{ctg} x + C.$
7. $\int e^x dx = e^x + C.$	8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$
9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$	10. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C.$
11. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	

Интегралы данной таблицы называют ***табличными***. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции. Нахождение неопределенных интегралов с помощью таблицы и свойств называют ***непосредственным интегрированием***.

Суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, что данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределенного интеграла сводится к табличным интегралам. При этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются «подведением под знак дифференциала»:

1) $du = d(u+a)$, где a – число;

2) $du = \frac{1}{a} d(au)$, где a – некоторое не равное нулю число;

3) $udu = \frac{1}{2} d(u^2)$;

4) $\cos u \cdot du = d(\sin u)$;

5) $\sin u \cdot du = -d(\cos u)$;

6) $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$;

7) $\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\mathrm{tg} u)$.

Если подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя, то такой интеграл равен натуральному логарифму от абсолютной величины знаменателя, т. е.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C .$$

Примеры 1–4. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x^6 dx$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right) dx$;

в) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$;

г) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$.

Решения. а) $\int x^6 dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} + C = \dfrac{x^7}{7} + C$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right) dx = 2\int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 5\int dx = 2 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 4 \cdot \dfrac{x^3}{3} +$

$+5 \cdot x + C = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 5x + C$;

в) $\int \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int x^2 dx - \int \dfrac{1}{x} dx + \int e^x dx -$

$-4\int \sin x dx + \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4 \cdot (-\cos x) + \mathrm{tg} x + C =$

$= \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4\cos x + \mathrm{tg} x + C$;

г) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{1+x^2} \right) dx = 3\int x^{\frac{3}{4}} dx - 2\int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx + \int \dfrac{1}{1+x^2} dx =$

$= 3\int x^{\frac{3}{4}} dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \dfrac{1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2 \cdot \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \mathrm{arctg} x + C =$

$= 3 \cdot \dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 2 \cdot \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \mathrm{arctg} x + C = \dfrac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - 3\sqrt[3]{x^2} + \mathrm{arctg} x + C$.

7.2. Основные приемы интегрирования

При интегрировании функций не всегда можно сразу использовать таблицу интегралов. Как правило, вначале нужно данный интеграл преобразовать таким образом, чтобы свести его к одной или нескольким формулам таблицы. Для этого используются специальные методы интегрирования, основными из которых являются ***замена переменной (или метод подстановки), метод интегрирования по частям***.

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью ***метода замены переменной (подстановки)***. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Примеры 1–5. Найти интегралы:

а) $\int \sin 3x\, dx$; б) $\int (3-x)^5\, dx$; в) $\int \sqrt[5]{3x-4}dx$; г) $\int x e^{x^2}\, dx$;

д) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx$.

Решения: а) $\int \sin 3xdx = \{$заменим $t = 3x$, тогда $dt = 3dx$, $dx = \frac{dt}{3}\} =$

$= \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin tdt = \frac{1}{3}(-\cos t) + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$;

б) $\int (3-x)^5\, dx = \{$заменим $t = 3-x$, $dt = -dx$, $dx = -dt\} = \int t^5(-dt) =$

$= -\int t^5 du = -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{(3-x)^6}{6} + C$;

в) $\int \sqrt[5]{3x-4}dx = \{t = 3x-4,\ dt = 3dx,\ dx = \frac{dt}{3}\} = \int \sqrt[5]{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x-4)^6} + C$;

г) $\int x e^{x^2}\, dx = \{\ t = x^2,\ dt = 2xdx,\ xdx = \frac{dt}{2}\ \} = \int e^t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt =$

$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$;

д) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx = \{t = x^3-3x+5,\ dt = \left(3x^2-3\right)dx = 3\left(x^2-1\right)dx$,

$\left(x^2-1\right)dx = \frac{dt}{3}\} = = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-3x+5\right| + C$.

К сожалению, формулы нахождения интеграла от произведения двух функций в общем случае не существует. Однако в некоторых случаях такие интегралы могут быть найдены. В частности, если одна из функций представляет собой многочлен, а в качестве другой выступает логарифмическая, показательная, тригонометрическая или обратная тригонометрическая функции, то применим ***метод интегрирования по частям***. При этом интеграл, удовлетворяющий данным требованиям, должен быть представлен в следующем виде: $\int udv$. Как правило, за функцию u принимают ту функцию, которая после дифференцирования становится более простой. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал dv некоторой функции v.

Для нахождения интеграла вида $\int udv$ используют ***формулу интегрирования по частям***

$$\int udv = uv - \int vdu . \qquad (7.2)$$

Если в результате получилось, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то применение этой формулы оправдано. При использовании данного метода интегрирования удобно пользоваться следующими рекомендациями:

– в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin xdx$, $\int P(x)\cos xdx$ имеет смысл положить $u = P(x)$, а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

– в интегралах вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$ следует положить $dv = P(x)\,dx$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u;

– в интегралах вида $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ можно положить $u = e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за dv.

Примеры 6–9. Найти интегралы:

а) $\int x\cos xdx$; б) $\int (2x+1)e^{3x}dx$; в) $\int \ln xdx$; г) $\int x^2e^{5x}dx$.

Решения: а) $\int x\cos xdx = \{u = x,\ du = dx,\ dv = \cos xdx,$

$\int dv = \int \cos xdx,\ v = \sin x\} = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$;

б) $\int (2x+1)e^{3x}dx = \{u = 2x+1,\ du = 2dx,\ dv = e^{3x}dx,\ \int dv = \int e^{3x}dx,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}\} = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x+\frac{1}{3}\right) + C;$$

в) $\int \ln x dx = \{u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx,\ dv = dx,\ \int dv = \int dx,\ v = x\} =$

$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$;

г) $\int x^2 e^{5x}dx = \{u = x^2,\ du = 2xdx,\ dv = e^{5x}dx,\ \int dv = \int e^{5x}dx,$

$v = \frac{1}{5}e^{5x}\} = x^2 \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} \cdot 2xdx = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \{$ к интегралу еще раз применим интегрирование по частям: $u = x,\ du = dx,$

$dv = e^{5x}dx,\ \int dv = \int e^{5x}dx,\ v = \frac{1}{5}e^{5x}\} = \frac{1}{5}x^2e^{5x} -$

$-\frac{2}{5}\left(x \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right) = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}e^{5x}\right) + C =$

$= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{25}xe^{5x} + \frac{2}{125}e^{5x} + C = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right) + C$.

7.3. Интегрирование рациональных и иррациональных функций

Функция вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ называется ***рациональной дробью***, если ее числитель и знаменатель являются многочленами. Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень ее числителя меньше степени знаменателя; если же степень ее числителя больше либо равна степени ее знаменателя, то рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякая неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1. Представить неправильную дробь $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим числитель на знаменатель (деление многочленов) и получим $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$.

Дроби вида $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ называются простейшими рациональными дробями. Всякую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Пример 2. Разложить правильную дробь $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$ на простейшие.

Решение. Для разложения дроби на простейшие используем метод неопределенных коэффициентов: $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}=$

$$=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}.$$

Начальная дробь равна конечной и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители: $\begin{cases}A+B=2,\\ -3A+B=-3.\end{cases}$

Решая данную систему уравнений, найдем: $A=\dfrac{5}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$. Тогда разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{5}{4}\cdot\frac{A}{x+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{B}{x-3}.$$

При интегрировании простейших рациональных дробей можно использовать формулы:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=$

$$=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C;$$

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx$, где $Д = 4p^2 - 4q < 0$.

Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2 + 2px + q = x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = (x + p)^2 + (q - p^2)$. Заменим $t = x + p$, $dt = dx$, $x = t - p$, тогда $x^2 + 2px + q = t^2 + a^2$, где $a^2 = q - p^2$.

Получим $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{A(t-p)+B}{t^2+a^2}dt = \int \frac{At-Ap+B}{t^2+a^2}dt =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}dt + (B-Ap)\int \frac{1}{t^2+a^2}dt = \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{(B-Ap)}{a}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) +$$

$$+C = \frac{A}{2}\ln(x^2+2px+q) + \frac{B-Ap}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{a}\right) + C.$$

При интегрировании использовались следующие формулы:

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln\left|f(t)\right| + C;$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{t^2}{a^2}\right)+1}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{\left(\frac{t^2}{a^2}\right)+1}d\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{t^2}{a^2}\right)+1}d\left(\frac{t}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5}dx$.

Решение.

$\int \frac{6x-4}{3x^2-7x+5}\mathrm{d}x =${Выделим в знаменателе полный квадрат

$$3x^2-7x+5 = 3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}\right) = 3\left(x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\frac{49}{36}+\frac{5}{3}-\frac{49}{36}\right) =$$

$= 3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right)$. Заменим $t = x-\frac{7}{6}$, $dt = dx,\ x = t+\frac{7}{6}$} $=$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6\left(t+\frac{7}{6}\right)-4}{t^2+\frac{11}{36}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{6t+3}{t^2+\frac{11}{36}}dt = \int \frac{2t+1}{t^2+\frac{11}{36}}dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+\frac{11}{36}}dt + \int \frac{1}{t^2+\frac{11}{36}}dt = \ln\left(t^2+\frac{11}{36}\right) + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6t}{\sqrt{11}}\right) + C =$$

$$= \ln\left|x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}\right| + \frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-7}{\sqrt{11}}\right) + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3}dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби, предварительно разделив числитель на знаменатель: $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} = x - 2 + \frac{7x - 3}{x^2 + 2x - 3}$. Разложим полученную правильную рациональную дробь на простейшие. Для этого вначале знаменатель разложим на множители: $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$. Тогда $\frac{7x-3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} =$

$$= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{Ax - A + Bx + 3B}{(x+3)(x-1)} =$$

$= \frac{(A+B)x - A + 3B}{(x+3)(x-1)}$. Так как $\frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + 3B}{(x+3)(x-1)}$, то

$\begin{cases} A + B = 7, \\ -A + 3B = -3. \end{cases}$ Решив данную систему, найдем $B = 1,\ A = 6$. Тогда

$\frac{7x-3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{6}{x+3} + \frac{1}{x-1}$. Подставим в подынтегральную функцию: $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3}dx = \int\left(x - 2 + \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)}\right)dx =$

$$= \int\left(x - 2 + \frac{6}{x+3} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 6\ln|x+3| + \ln|x-1| + C .$$

Если подынтегральная функция иррациональная, то с помощью замены переменной во многих случаях можно привести ее к рациональному виду или к такой функции, интеграл от которой является табличным. Интегрирование при помощи замены переменной, которая приводит подынтегральное выражение к рациональному виду, называется ***интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения***.

Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt[n_1]{x^{m_1}}; \sqrt[n_2]{x^{m_2}}; ...; \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, ..., n_s$.

Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt[m]{ax+b}\right)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}dx$.

Решение. Показателями степеней корней являются числа 3 и 2. Их наименьшее общее кратное равно 6. Поэтому применим подстановку $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5 dt,\ \sqrt[3]{x} = t^2,\ \sqrt[3]{x^2} = t^4,\ \sqrt{x} = t^3$. В результате $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}dx = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5 dt = 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)}dt = 6\int \frac{t^4}{t-1}dt$. В подынтегральной функции выделим целую часть: $\frac{t^4}{t-1} = \frac{t^4 - 1 + 1}{t-1} = \frac{t^4 - 1}{t-1} +$

$$+\frac{1}{t-1} = \frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}{t-1} + \frac{1}{t-1} =$$

$= (t+1)\left(t^2+1\right) + \frac{1}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}$. Тогда $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}dx =$

$$= 6\int \frac{t^4}{t-1}dt = 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + C =$$

$=\{$подставим $\sqrt[6]{x}$ вместо $t\}$$= \frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C =$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C.$$

7.4. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

При нахождении интегралов $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$,

$\int \sin ax \cdot \sin bxdx$ подынтегральные функции из произведений преобразовываются в суммы с помощью формул:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right);$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right);$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

При интегрировании таких функций удобно пользоваться формулами $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$ и $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C$.

Примеры 1–3. Найти интегралы: а) $\int \sin 3x \cdot \cos 5xdx$;

б) $\int \cos^3 xdx$; в) $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x\, dx$.

Решения: а) Так как $\sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}\left(\sin(3-5)x + \sin(3+5)x\right) =$

$= \frac{1}{2}(-\sin 2x + \sin 8x)$, то $\int \sin 3x \cdot \cos 5xdx = \frac{1}{2}\int(-\sin 2x + \sin 8x)dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8}\right) + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C$;

б) $\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 \cdot \cos xdx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos xdx$ = {применим

подстановку $t = \sin x$, тогда $dt = \cos xdx$ }$= \int\left(1-t^2\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

в) $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 xdx = \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin xdx =$

$= \int \cos^2 x \cdot \left(\sin^2 x\right)^2 \cdot \sin x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \sin x\, dx =${применим

подстановку $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin xdx$, $\sin xdx = -dt$ }=

$= \int t^2\left(1-t^2\right)^2(-dt) = -\int t^2\left(1-2t^2+t^4\right)dt = -\int\left(t^2-2t^4+t^6\right)dt =$

$= -\left(\frac{t^3}{3} - 2\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right) + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$

Контрольные задания

Задача 1. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

1.1. $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

1.2. $\int\left(2x-4\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$.

1.3. $\int\left(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{5}{x^6}\right)dx$.

1.4. $\int\left(x^2+\frac{3}{x^4}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$.

1.5. $\int\left(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{5}{x^6}\right)dx$.

1.6. $\int\left(4x^3+8\sqrt[5]{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

1.7. $\int\left(3x-4\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

1.8. $\int\left(4-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}-7\sqrt[6]{x}\right)dx$.

1.9. $\int\left(4x^3+5\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)dx$

1.10. $\int\left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{x^5}\right)dx$.

1.11. $\int\left(3x^5+5\sqrt[4]{x}-\frac{7}{x^2}\right)dx$.

1.12. $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

1.13. $\int\left(3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^4}\right)dx$.

1.14. $\int\left(x^4-5\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x^5}\right)dx$.

1.15. $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}+7\sqrt[5]{x}\right)dx$.

1.16. $\int\left(2-\frac{1}{x^3}+\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$.

1.17. $\int\left(1+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^4}\right)dx$.

1.18. $\int\left(7x^6+5\sqrt[3]{x^2}-\frac{8}{x^5}\right)dx$.

1.19. $\int\left(2x-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$.

1.20. $\int\left(x^3+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$.

1.21. $\int\left(2-\frac{5}{x^6}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$.

1.22. $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

1.23. $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$.

1.24. $\int\left(3-\frac{2}{x^5}+7\sqrt[5]{x}\right)dx$.

1.25. $\int\left(7x^6-11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$.

1.26. $\int\left(2-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

1.27. $\int\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{x^6}+14\sqrt[6]{x}\right)dx$. 1.28. $\int\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{x^3}+\frac{12}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

1.29. $\int\left(x^3+\frac{6}{x^4}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$. 1.30. $\int\left(6x+\frac{8}{x^5}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы.

2.1. $\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx$. 2.2. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1+x\sqrt{x}e^x\right)^3}{\sqrt{x^3}}dx$.

2.3. $\int\frac{\cos^3 x-8\sqrt[5]{x^3}\cdot\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$ 2.4. $\int\frac{5x^2-2\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

2.5. $\int\frac{(1-x)^2-x^2\cos x}{x^2}dx$. 2.6. $\int\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}dx$.

2.7. $\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)dx$. 2.8. $\int\frac{\sqrt[3]{x}\sin^2 x-1+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

2.9. $\int\frac{4\sqrt[3]{x^2}-2+\sqrt[3]{x}\cdot e^x}{\sqrt[3]{x}}dx$. 2.10. $\int\frac{x-2\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x+\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$.

2.11. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$. 2.12. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$.

2.13. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^3dx$. 2.14. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$.

2.15. $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$. 2.16. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.17. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$. 2.18. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

2.19. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$. 2.20. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}{x}dx$.

2.21. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$.

2.22. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

2.23. $\int\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx$.

2.24. $\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$.

2.25. $\int\left(x-1\right)^2\cdot x\sqrt[4]{x}dx$.

2.26. $\int\frac{\cos^2 x-\sin x\cos^2 x+1}{\cos^2 x}dx$.

2.27. $\int\frac{x\sin 2x+\sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x}dx$.

2.28. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

2.29. $\int\frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx$.

2.30. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Задача 3. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной.

3.1. $\int\frac{dx}{1+25x^2}$.

3.2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$.

3.3. $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

3.4. $\int\mathrm{ctg}3xdx$.

3.5. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{4x+1}}$.

3.6. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{4x^4+1}}$.

3.7. $\int\mathrm{ctg}\left(2x+3\right)dx$.

3.8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}$.

3.9. $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

3.10. $\int\frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$.

3.11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

3.12. $\int\cos^3 x\cdot\sin xdx$.

3.13. $\int\mathrm{tg}2xdx$.

3.14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$.

3.15. $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$.

3.16. $\int\frac{\left(6x-5\right)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

3.17. $\int 3e^{-x^3}x^2dx$.

3.18. $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}dx$.

3.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$.

3.20. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2}}$.

3.21. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+2)}}$.

3.22. $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$.

3.23. $\int e^{\sin 3x}\cdot\cos 3xdx$.

3.24. $\int \frac{5x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

3.25. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3.26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

3.27. $\int \sqrt[3]{2-\cos 5x}\cdot\sin 5xdx$.

3.28. $\int \frac{e^{2x}dx}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$.

3.29. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

3.30. $\int \frac{\mathrm{arctg}^2\, 2x}{1+4x^2}dx$.

Задача 4. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

4.1. $\int x\cos xdx$.

4.2. $\int x^2 \sin xdx$.

4.3. $\int xe^{2x}dx$.

4.4. $\int x^2e^xdx$.

4.5. $\int x\ln xdx$.

4.6. $\int x\ln^2 xdx$.

4.7. $\int x^2\ln xdx$.

4.8. $\int \sqrt{x}\ln xdx$.

4.9. $\int \ln xdx$.

4.10. $\int x\cos 3xdx$.

4.11. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

4.12. $\int x\cdot 2^x dx$.

4.13. $\int x^2e^{-x}dx$.

4.14. $\int x\sin 4xdx$.

4.15. $\int (x+1)\cdot e^xdx$.

4.16. $\int (x-3)\cdot\cos xdx$.

4.17. $\int (x+2)\cdot\sin xdx$.

4.18. $\int (x^2+2)\cdot e^xdx$.

4.19. $\int (x^2-1)\cdot\sin xdx$.

4.20. $\int (x^2+3)\cdot\cos xdx$.

4.21. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

4.22. $\int \ln(x^2+4) dx$.

4.23. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

4.24. $\int \arcsin x dx$.

4.25. $\int \arccos x dx$.

4.26. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

4.27. $\int \ln^2 x dx$.

4.28. $\int x \cos^2 x dx$.

4.29. $\int e^x \sin x dx$.

4.30. $\int \sin \ln x dx$.

Задача 5. Найти неопределенные интегралы от простейших рациональных дробей.

5.1. $\int \frac{2}{x-4} dx$.

5.2. $\int \frac{3}{5-x} dx$.

5.3. $\int \frac{1}{(x+3)} dx$.

5.4. $\int \frac{5}{(x-3)^5} dx$.

5.5. $\int \frac{8}{(7-x)^9} dx$.

5.6. $\int \frac{4}{(x+6)^5} dx$.

5.7. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$.

5.8. $\int \frac{x}{x^2-7x+13} dx$.

5.9. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$.

5.10. $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx$.

5.11. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+8} dx$.

5.12. $\int \frac{3x+1}{x^2+3x+4} dx$.

5.13. $\int \frac{6-4x}{x^2-3x+9} dx$.

5.14. $\int \frac{3x-2}{x^2+x-2} dx$.

5.15. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+2} dx$.

5.16. $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$.

5.17. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

5.18. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$.

5.19. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$.

5.20. $\int \frac{3-4x}{3x^2-3x+1} dx$.

5.21. $\int \frac{(x+5)dx}{2x^2+2x+3}$.

5.22. $\int \frac{(4x+8)dx}{3x^2+2x+5}$.

5.23. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx$.

5.24. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-x+5}$.

5.25. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

5.26. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

5.27. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

5.28. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$.

5.29. $\int \frac{xdx}{3x^2-6x+5}$.

5.30. $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2+x+1}$.

Задача 6. Найти интегралы от рациональных дробей.

6.1. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

6.2. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

6.3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^2-4x}dx$.

6.4. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

6.5. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$.

6.6. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$.

6.7. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

6.8. $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$.

6.9. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

6.10. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

6.11. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

6.12. $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx$.

6.13. $\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$.

6.14. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

6.15. $\int \frac{3x^3+4x}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$.

6.16. $\int \frac{5xdx}{x^3+2x^2+5x}$.

6.17. $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

6.18. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

6.19. $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.

6.20. $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$.

6.21. $\int \frac{2x^5 - 2x^4 + 4}{x^4 + 4x^2} dx$.

6.22. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

6.23. $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx$.

6.24. $\int \frac{9x}{(x-5)(x^2 + 2x + 10)} dx$.

6.25. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}$.

6.26. $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.

6.27. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx$.

6.28. $\int \frac{12dx}{x^4 + x^3 - x - 1}$.

6.29. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

6.30. $\int \frac{xdx}{(x^3+1)}$.

Задача 7. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций.

7.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$.

7.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x+3)^2}}$.

7.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.

7.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}$.

7.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$.

7.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$.

7.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$.

7.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$.

7.9. $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$.

7.10. $\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$.

7.11. $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$.

7.12. $\int \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 8x + 7}} dx$.

7.13. $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$.

7.14. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx$.

7.15. $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 9}} dx$.

7.16. $\int \frac{8x - 11}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx$.

7.17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

7.18. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$.

7.19. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

7.20. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

7.21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

7.22. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$.

7.23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

7.24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

7.25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\cdot(\sqrt[3]{x}-1)}$.

7.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

7.27. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}dx$.

7.28. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$.

7.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

7.30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Задача 8. Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций.

8.1. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

8.2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$.

8.3. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

8.4. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

8.5. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}dx$.

8.6. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$.

8.7. $\int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$.

8.8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

8.9. $\int \cos^3 x\cdot\sin 2x\,dx$.

8.10. $\int \cos 2x\cdot\sin 3x dx$.

8.11. $\int \sin 2x\cdot\sin 5x\,dx$.

8.12. $\int \cos x\cdot\sin 3x dx$.

8.13. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

8.14. $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$.

8.15. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$.

8.16. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x-3}$.

8.17. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

8.18. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$.

8.19. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

8.20. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$.

8.21. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

8.22. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

8.23. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

8.24. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

8.25. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x}$.

8.26. $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

8.27. $\int \cos^2 x\, dx$.

8.28. $\int \sin^2 x\, dx$.

8.29. $\int \cos^4 x\, dx$.

8.30. $\int \sin^6 x\, dx$.

8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Изучение темы следует начинать с задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Необходимо усвоить определение и свойства определенного интеграла, формулу Ньютона – Лейбница и ее применение. Изучить методы вычисления определенного интеграла и их специфику по сравнению с аналогичными методами в неопределенном интеграле, обратить внимание на применение определенного интеграла в геометрии и при решении конкретных практических задач.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определенный интеграл и его свойства.
3. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Методы вычисления определенного интеграла.
5. Применение определенного интеграла для вычисления площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой и объема тела вращения.
6. Применение определенного интеграла в задачах практического характера.

8.1. Определенный интеграл и его основные свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$.

1. Разобьем отрезок [a; b] точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n = b$ на n отрезков $[x_0;\ x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$, которые назовем частичными.

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольно выберем точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

3. Составляем интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

4. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ при $n \to \infty$ и $\Delta x_i \to 0$, $i = \overline{1, n}$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a; b], ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $c_i \in [a;\ b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ . \tag{8.1}$$

Числа a и b называются ***нижним и верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***, [a; b] – ***отрезком интегрирования***.

Пусть на отрезке [a; b] задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией***.

Определенный интеграл от неотрицательной функции $y = f(x)$ ***численно равен площади криволинейной трапеции***. В этом состоит ***геометрический смысл определенного интеграла***.

Основными свойствами определенного интеграла являются следующие:

1) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке [a; b] функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

3) если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак на противоположный, т. е. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю, т. е. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

5) если отрезок интегрирования [*a*; *b*] разбит на две части [*a*; *c*] и [c; *b*] и если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Для вычисления определенных интегралов используется формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная функция для *f*(*x*).

8.2. Методы вычисления определенных интегралов

При вычислении определенных интегралов используются методы ***непосредственного интегрирования, замены переменной (подстановки) и интегрирования по частям***.

Непосредственное интегрирование предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использованию формулы Ньютона – Лейбница.

Примеры 1–5. Вычислить интегралы: а) $\int_1^2 x dx$; б) $\int_0^\pi \sin x dx$; в) $\int_0^1 e^x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$; д) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx$.

Решения:

а) $\int\limits_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$;

в) $\int\limits_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}$;

д) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^4}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} x^{-4}dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\left.\frac{1}{3x^3}\right|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{3\cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right) = 2\frac{5}{8}$.

Метод замены переменной в определенном интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной и при этом справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (8.2)$$

Часто вместо замены $x = \varphi(t)$ применяют обратную замену $t = \psi(x)$.

Примечание. Возвращаться к старой переменной при вычислении определенного интеграла не надо. Необходимо лишь переопределить пределы интегрирования для новой переменной.

Примеры 6–8. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \sqrt{1-4x}\, dx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$.

Решения:

а) выполним замену $t = x+1$, $dt = dx$. Вычислим пределы интегрирования для переменной *t*:

x	0	1
t	1	2

Тогда $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

б) выполним замену $t = 1-4x$ и продифференцируем обе части равенства: $dt = -4dx$, $dx = -\frac{dt}{4}$. Изменим пределы интегрирования:

x	–2	0
t	9	1

В результате $\int_{-2}^{0} \sqrt{1-4x}dx = \int_9^1 \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{4}\right) = -\frac{1}{4}\int_9^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 =$

$= \frac{1}{6}\sqrt{t^3}\Big|_1^9 = \frac{1}{6}\sqrt{9^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3} = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$.

в) в данном случае выполним замену $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x\,dx$. Для переменной *t* вычислим пределы интегрирования:

x	0	π/2
t	0	1

Получим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Формулы для нахождения определенного интеграла от произведения двух функций в общем случае, так же как и неопределенного, не существует. Однако, по аналогии с неопределенным, в некоторых случаях такие интегралы могут быть найдены. В частности, если одна из функций представляет собой многочлен, а в качестве другой выступает логарифмическая, показательная, тригонометрическая или обратная тригонометрическая функции, то применим ***метод интегрирования по частям***. При этом интеграл, удовлетворяющий данным требованиям, должен быть представлен в виде: $\int\limits_a^b udv$. Как правило, за функцию u принимают ту функцию, которая после дифференцирования становится более простой. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал dv некоторой функции v.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда для определенного интеграла справедлива ***формула интегрирования по частям***

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\ . \tag{8.3}$$

Примеры 9–10. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos x dx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$.

Решения:

а) положим $u = x$, тогда $du = dx$. Оставшуюся часть подынтегрального выражения примем за dv: $dv = \cos x\, dx$. Проинтегрируем это выражение: $\int dv = \int \cos x dx$, $v = \sin x$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos x\, dx = x\sin x\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx =$

$$= 2\pi\sin 2\pi - \pi\sin\pi - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 1-(-1) = 2;$$

б) положим $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{x^5}dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}dx$, $\int dv = \int \frac{1}{x^5}dx$, $v = \int x^{-5}dx$, $v = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}$. По формуле интегрирования по частям запишем $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4}\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right)\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{4\cdot 2^4}\ln 2 +$

$$+\frac{1}{4\cdot 1^4}\ln 1 + \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \frac{1}{x^5}dx = \frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-4}}{-4}\Bigg|_1^2 = \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x^4}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) = \frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}.$$

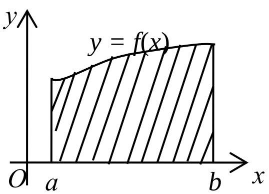
8.3. Применение определенных интегралов Вычисление площади плоской фигуры

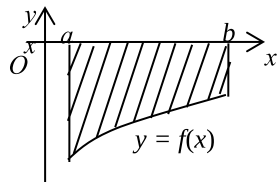
Исходя из геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции

$$f(x):\ S=\int_a^b f(x)dx\,. \tag{8.4}$$

Если плоская фигура ограничена сверху осью Ox, снизу – графиком функции $y = f(x)$, слева – прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, то площадь такой фигуры вычисляется по формуле

$$S=-\int_a^b f(x)dx\,. \tag{8.5}$$

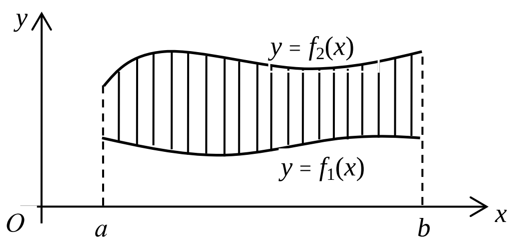




Пусть фигура ограничена снизу графиком функции $y = f_1(x)$, сверху – графиком функции $y = f_2(x)$, слева – прямой $x = a$ и справа – прямой $x = b$.

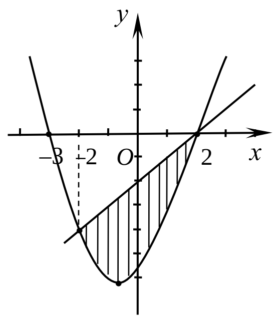
Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx\,. \tag{8.6}$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью Ox: $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и найдем площадь заштрихованной фигуры. Для этого найдем абсциссы точек пересечения линий:



$x^2 + x - 6 = x - 2$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$\int_{-2}^{2} \left(x - 2 - \left(x^2 + x - 6 \right) \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Рассмотрим в плоскости xOy кривую AB, заданную в параметрическом виде: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[\alpha; \beta]$, то кривая AB спрямляема и ее длина вычисляется по формуле

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{8.7}$$

Пример 2. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Используя формулу длины кривой, получим:

$$s = a \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a \int_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a.$$

Если кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где $y = f(x)$ непрерывная вместе со своей производной на отрезке $[a;\ b]$ функция, то длина плоской кривой вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \text{ или } s = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (8.8)$$

В случае когда плоская кривая AB задана в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $f(\varphi)$ – функция, имеющая для $\alpha \le \varphi \le \beta$ непрерывную производную, длина кривой вычисляется по формуле

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)}\,d\varphi \text{ или } s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \qquad (8.9)$$

Пример 3. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$.

Решение. Используя формулу длины дуги кривой, заданной в полярных координатах, получим:

$$s = 2a\int_0^\pi \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 4a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a.$$

Вычисление объема тела вращения

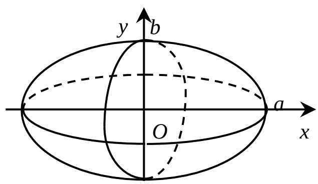
Объем тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (8.10)$$

Аналогично вычисляется объем тела вращения вокруг оси Oy:

$$V_{Oy} = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (8.11)$$

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.



Решение. Выразим из уравнения эллипса y, тем самым получим уравнения контуров фигур, образующих при вращении вокруг оси Ox рассматриваемое тело:

$$f(x) = \pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,.$$

Эти контуры будем рассматривать на отрезе [$-a$; a]

Объем вычислим по формуле $V_{Ox} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

$$V_{Ox} = \pi\int\limits_{-a}^{a} b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx = \pi b^2\int\limits_{-a}^{a} dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a} x^2 \quad dx = \pi b^2 x\Bigg|_{-a}^{a} - \frac{\pi b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \pi b^2(a+a) - \frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3+a^3) = \frac{4}{3}\pi ab^2\,.$$

Контрольные задания

Задача 1. Вычислить определенный интеграл.

1.1. $\int\limits_0^1 (4x^3 + 4\sqrt[3]{x} + 2)dx$.

1.2. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}+x^2}{x^2}dx$.

1.3. $\int\limits_1^2 \frac{(x-2)^3}{x}dx$.

1.4. $\int\limits_1^8 \left(3x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2} - \sqrt[3]{x^2} - 1\right)dx$.

1.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x - \frac{1}{2}\cos x + 3\sin x - \frac{x}{3}\right)dx.$

1.6. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 3e^x - \frac{x-3}{2} - 1\right)dx$.

1.7. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x(x-3)^3 + 3x^2}{x}dx$.

1.8. $\int\limits_{-8}^0 \left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + 1\right)dx$.

1.9. $\int\limits_1^9 \frac{x^{\frac{3}{2}} + 2x^3 - 3x}{x}dx$.

1.10. $\int\limits_0^8 \left(\frac{\cos x}{\sin 8} - 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x\right)dx.$

1.11. $\int\limits_4^9 \left((2x-1)^2 + (1-\sqrt{x})^2\right)dx$.

1.12. $\int\limits_1^4 \frac{\left(2x+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$.

1.13. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - 3\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

1.14. $\int\limits_1^2 \left(4x^3 - \frac{1}{x\ln 2} + 4x - 2\right)dx$.

1.15. $\int_1^4 \left(2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

1.16. $\int_2^{\pi} \left(6x-\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\pi}\right)dx$.

1.17. $\int_0^4 \frac{(x+\sqrt[3]{x})^3}{x}dx$.

1.18. $\int_0^1 (x+1)^2 \cdot \sqrt[4]{x}dx$.

1.19. $\int_1^8 \left(5x^2-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

1.20. $\int_{-2}^{0} \frac{x\left(x^3-\frac{1}{8}\right)}{x-0,5}dx$.

1.21. $\int_0^9 \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^3 dx$.

1.22. $\int_1^4 \frac{x-1+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}dx$.

1.23. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{\sin^2 x}+9x^2-x\right)dx$.

1.25. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

1.26. $\int_{-2}^{2} \left(\sqrt[3]{2x}+2x\right)dx$.

1.27. $\int_0^1 \left(3^x \ln 3+\frac{x^3-4x}{x}\right)dx$.

1.28. $\int_{-1}^{9} (x+\sqrt[3]{x})\cdot(x+2)dx$.

1.29. $\int_4^{16} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}-2\right)dx$.

1.30. $\int_1^9 \frac{7x-x\sqrt{x}+3x^3}{x}dx$.

Задача 2. Вычислить определенный интеграл.

2.1. $\int_0^4 \sqrt{3x+4}\,dx$.

2.2. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$.

2.3. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$.

2.4. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{3x^3+1}}$.

2.5. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$.

2.6. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

2.7. $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^3}dx$.

2.8. $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$.

2.9. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x\, dx$.

2.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

2.11. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1+\ln x}{x} dx$.

2.12. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

2.13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos^2 x) \cdot \sin x\, dx$.

2.14. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x-2,5}{x^2-5x+7} dx$.

2.15. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{x-\pi}{3}\right) dx$.

2.16. $\int\limits_{\sqrt{8}}^{\sqrt{6}} x\sqrt{2x^2-3}\, dx$.

2.17. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x \cdot e^{3x^2+1} dx$.

2.18. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

2.19. $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$.

2.20. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

2.21. $\int\limits_{-5}^{-1} \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} dx$.

2.22. $\int\limits_{0}^{5} \frac{x\, dx}{\sqrt{x+4}}$.

2.23. $\int\limits_{1}^{4} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}}$.

2.24. $\int\limits_{0}^{7} x\sqrt[3]{x+1} dx$.

2.25. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.

2.26. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2.27. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.

2.28. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x) \cdot \sin 2x\, dx$.

2.29. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$.

2.30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Задача 3. Вычислить определенный интеграл.

3.1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\,dx$.

3.2. $\int\limits_{0}^{1} xe^{x}dx$.

3.3. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

3.4. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin\,x\,dx$.

3.5. $\int\limits_{1}^{e} x\ln x\,dx$.

3.6. $\int\limits_{1}^{3} \ln x\,dx$.

3.7. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$.

3.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\sin x\,dx$.

3.9. $\int\limits_{1}^{2} (x^2+3)\ln x\,dx$.

3.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx$.

3.11. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos\frac{x}{2}dx$.

3.12. $\int\limits_{1}^{1} \ln(x^2+1)dx$.

3.13. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cdot\cos x dx$.

3.14. $\int\limits_{-3}^{3} x\sin\frac{x}{3}dx$.

3.15. $\int\limits_{-\pi}^{0} x^2\sin x dx$.

3.16. $\int\limits_{1}^{e} x^2\ln x dx$.

3.17. $\int\limits_{0}^{3} \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3.18. $\int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} (x+1)e^{-2x}dx$.

3.19. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

3.20. $\int\limits_{1}^{8} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3.21. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos x dx$.

3.22. $\int\limits_{2-\pi}^{2+\pi} x\sin\frac{x-2}{2}dx$.

3.23. $\int\limits_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{3}}dx$.

3.24. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\sin^2 x}dx$.

3.25. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos^2 xdx$.

3.26. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \ln\frac{1}{x}dx$.

3.27. $\int\limits_{0}^{1} x^2\operatorname{arctg}xdx$.

3.28. $\int\limits_{0}^{\pi} 2x\sin^2 xdx$.

3.29. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3.30. $\int\limits_{2}^{3} \frac{\ln x}{(x-1)^2}dx$.

Задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

4.1. $y = 6x - x^2;\quad y = 0$.

4.2. $y = x^2 - 4;\quad y = 0$.

4.3. $y = x^2;\quad y = 8 - x^2$.

4.4. $y = -x^2;\quad x + y + 2 = 0$.

4.5. $xy = 6;\quad y = 7 - x$.

4.6. $y = \sqrt{x}\,;\quad y = \sqrt[3]{x}$.

4.7. $y = x;\quad y = (x-2)^2;\ y = 0$.

4.8. $y = x^2 - 3x;\quad y = -2$.

4.9. $\begin{cases} y = \cos x,\ y = 3\cos x \\ \text{на одном периоде.} \end{cases}$

4.10. $y = \ln x,\quad x = e,\quad y = 0$.

4.11. $4y = 8x - x^2,\quad 4y = x + 6$.

4.12. $y = x^2 + 4x,\quad x - y + 4 = 0$.

4.13. $y = x^3,\quad y = x,\quad y = 4x$.

4.14. $x^2 + y^2 = 4x,\quad y = 2x$.

4.15. $xy = 2,\quad x^2 + y^2 = 5$.

4.16. $y = x^2,\quad y = 2x^2,\quad y = 3$.

4.17. $y = \sin x,\ y = \cos x,\quad x = 0$.

4.18. $x^2 = 2y, \quad y = 3x - x^2$.

4.19. $y = 0,25x^2, \quad y = 3x - 0,5x^2$.

4.20. $xy = 4\sqrt{2}, \quad x^2 - 6x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad x = 4$.

4.21. $y = \dfrac{16}{x^2}, \quad y = 17 - x^2$ (I четверть).

4.22. $4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$.

4.23. Одной аркой циклоиды $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ и осью Ox.

4.24. Эллипсом $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t$.

4.25. Астроидой $x = 3\cos^3 t, \quad y = 3\sin^3 t$.

4.26. Первым витком спирали Архимеда $\rho = 6\varphi$ и полярной осью.

4.27. Кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

4.28. Трехлепестковой розой $\rho = a\cos\varphi$.

4.29. Окружностями $\rho = 3, \quad \rho = 6$.

Задача 5. Вычислить длину дуги кривой.

5.1. $y = 2x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 7$.

5.2. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$.

5.3. $y = 1 - \ln\cos x$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$.

5.4. $y = -\ln\sin x$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.5. $y = \dfrac{x^2}{2}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

5.6. $y = \ln x$ от $x_1 = \dfrac{3}{4}$ до $x_2 = 2,4$.

5.7. $y = \ln(1 - x^2)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{1}{4}$.

5.8. $y = \ln(x^2 - 1)$ от $x_1 = 2$ до $x_2 = 3$.

5.9. $y = -\ln\cos x$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

5.10. $y = \ln \sin x$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.11. $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения с осью Ox.

5.12. Кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = 2\pi$.

5.13. $\rho = \varphi^2$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

5.14. $\rho = a\sin\varphi$.

5.15. $\rho = ae^{\varphi}$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

5.16. $\begin{cases} 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$ от $t_1 = 1$ до $t_2 = 2$.

5.17. $\begin{cases} 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$.

5.18. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - 1, \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$ от $x_1 = 0$ до $t = \sqrt{5}$.

5.19. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^t \cos t, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin t \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \ln 2$.

5.20. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} t^3 - t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$.

Вычислить площадь поверхности полученной при вращении вокруг оси Ox заданной линии на указанном промежутке.

5.21. $x^2 + y^2 = 9$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 3$.

5.22. $y = x^3$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$.

5.23. $y^2 = 2x + 1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$.

5.24. Дуги параболы $y^2 = x$, отсеченной прямой $x = 4$.

5.25. Окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

5.26. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ от $t_1 = c$ до $t_2 = \pi$.

5.27. Эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

5.28. Астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ Вокруг оси oxy .

5.29. $x = \sqrt{y+1}$ от $y_1 = 1$ до $y_2 = 5$.

5.30. Параболы $y = 2x^2$, отсеченной прямой $y = 4$.

Задача 6. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг координатных осей или прямой криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями.

Вокруг оси *Ox*:

6.1. $xy = 3,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3$.

6.2. $y^2 = 4x$, $x = 2$.

6.3. $y = x^2 + 1$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

6.4. $y = 3x - x^2$, $y = 0$.

6.5. $y = x^2 - 4x - 6$, $y = -1$.

6.6. $y = \sin x$ (одной волной) $y = 0$.

6.7. $y^2 = x$, $x^2 = y$.

6.8. $3y = x^2$, $2x + 3y - 3 = 0$.

6.9. $y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$.

6.10. $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{x^3}{8}$.

6.11. $xy = 2$, $x = 1,\ x = 2,\ y = 0$.

6.12. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1,\ y = 0$.

6.13. $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$.

6.14. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right),\ x = 0,\ y = 0$.

6.15. Арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Вокруг оси *Oy*:

6.16. $xy = 9$, $y = 3,\quad y = 9$.

6.17. $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

6.18. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

6.19. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, $y=0$, $y=3$.

6.20. $y^2+x^2-9=0$, $x=0$.

6.21. $y=x^2$, $3x+y=0$.

6.22. $y=2-\frac{x^2}{2}$, $x+y=2$.

6.23. $4x=y^2$, $x=1$, $y=0$.

6.24. $y=x^3$, $x=-2$, $y=0$.

6.25. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, $x=0$, $y=0$.

6.26. $y^2=(x+4)^2$, $x=0$.

6.27. $y=x\sqrt{-x}$, $x=-4$, $y=0$.

6.28. $x=4y-y^2$.

6.29. Вращением вокруг прямой $x = 3$ фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

6.30. Вращением прямой $x = -2$ фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4$.

Задача 7.

7.1. Скорость движения точки задается законом $V=3t^2+\frac{3\sqrt{t}}{2}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 16 с.

7.2. Скорость движения тела задается законом $V=\frac{1}{(3t-2)^2}$ км/ч. Найти путь, пройденный телом, начиная отсчет через 1 ч от начала движения в течение последующих 5 ч.

7.3. Тело движется с переменным ускорением $a = 2t - 5$ м/с^2. Найти скорость и пройденный телом путь через 9 с от начала движения.

7.4. Ускорение тела изменяется по закону $a=\sqrt{3t+4}$ м/с^2. Определить скорость и пройденный телом путь за время 4 с от начала движения.

7.5. Тело движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной квадрату времени. Найти путь, пройденный телом за 8 с, если за 4 с пройден путь, равный 16 м.

7.6. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см? (Закон Гука $F = kx$.)

7.7. Сила в 5 Н деформирует тело на 1 см. Какую работу выполнит сила при деформации тела на 3 см, если деформация подчинена закону Гука?

7.8. Под действием силы $F = \sqrt{3x+1}$ тело переместилось вдоль оси Ox на расстояние 5 м от начала движения. Найти работу, выполненную этой силой.

7.9. С определенного момента движения тела под действием силы ее значения становятся обратно пропорциональны квадрату пройденного телом пути от начала движения. Какую работу выполнит сила на пути от 1 до 5 м от начала движения, если ее значение в конце пути будет равным 4 м?

7.10. Вычислить работу, выполненную силой $F = 3l^2 - 5$ на прямолинейном участке пути на расстоянии 5 м от начала движения, где l – расстояние от начала движения до движущейся точки.

7.11. Количество товара, поступающего на склад в единицу времени, $k = \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ единиц в сутки. Какой запас товара образуется на складе за 16 суток?

7.12. Нагрузка на электростанцию $y = bxe^{-ax^2}$ кВт · ч (где x – число часов, отсчитанное от начала суток). Найти расход электроэнергии в течение суток.

7.13. Объем продукции определенного типа растет по закону $\Pi(t) = a + bt$. Найти количество продукции, изготовленной за время $t = t_0$.

7.14. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м.

7.15. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на плотину, если верхнее основание плотины равно 90 м, нижнее – 50 м, а высота – 20 м.

7.16. Вычислить силу давления воды на погруженную в нее вертикальную пластинку, имеющую форму треугольника с основанием $b = 6$

и высотой $h = 3$, считая, что вершина треугольника лежит на свободной поверхности жидкости, а основание параллельно ей.

7.17. Найти величину силы давления воды на пластину в форме полукруга, диаметр которой равен 6 м и которая находится на поверхности воды. Плотность воды составляет 1000 $кг/м^3$.

7.18. Вычислить силу давления воды на прямоугольную пластину длиной a и шириной b ($a > b$), если она наклонена к горизонту воды под углом α и верхнее основание находится на поверхности воды.

7.19. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрической емкости высотой $H = 3{,}5$ м и радиусом основания $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если плотность $\rho = 900$ $кг/м^3$.

7.20. Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью полностью заполнена бензином. Определить силу давления бензина на плоскую стенку цилиндра, если радиус ее равен 2 м.

7.21. Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 м, если его верхняя точка находится на поверхности воды.

7.22. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды с резервуара в форме куба с ребром $a = 2$ м.

7.23. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H = 4$ м и радиусом основания $r = 1$ м. Плотность масла $\rho = 800$ $кг/м^3$.

7.24. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды с резервуара в виде конической воронки высотой $h = 2$ м и радиусом основания $r = 1$ м.

7.25. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла с резервуара в форме параллелепипеда со сторонами основания $a = 2$, $b = 3$, высотой $h = 2$ м.

7.26. Цилиндр высотой $h = 1$ м и радиусом $r = 2$ м наполнен газом под атмосферным давлением (10330 $кг/м^3$) и закрыт поршнем. Определить работу, затраченную на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние 0,5 м в глубь цилиндра.

7.27. Вычислить массу прямолинейной нити длиной 3 м, если плотность $\rho = 3S + 1$ (кг/м) (где S – расстояние от начала нити).

7.28. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 200$ км. Масса спутника равна 6 м, радиус Земли $R_З = 6380$ км. Гравитационная сила

$$F = \gamma \frac{m \cdot M_З}{r^2}, \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2).$$

7.29. Резервуар в виде параллелепипеда с основанием 2×2 м и высотой 3 м заполнен водой. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью S = 0,01 м^2, если принять, что скорость течения воды $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где h – высота уровня воды над отверстием.

7.30. Цилиндрический резервуар высотой h = 2 м и радиусом основания r = 1 заполнен водой. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью S = 0,01 м^2.

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обратить внимание на методы решения дифференциальных уравнений первого порядка:

1) с разделяющимися переменными;
2) однородные;
3) линейные.

Усвоить методику нахождения общего и частного решений.

Изучить методы решения дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка со специальной правой частью.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
3. Задача Коши.
4. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные.
5. Дифференциальные уравнения второго порядка.
6. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
8. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

9.1. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение

При изучении различных явлений часто не удается найти закон, который непосредственно связывает независимую переменную и искомую функцию, но можно установить связь между искомой функцией и ее производными. Соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называется ***дифференциальным уравнением***:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'';\ ...;\ y^{(n)}) = 0\ , \qquad (9.1)$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция;

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные соответствующего порядка от искомой функции (обязательно наличие хотя бы одной производной).

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x; y; y') = 0. \qquad (9.2)$$

Так как в уравнение (9.2) входит производная только первого порядка, то оно называется дифференциальным уравнением ***первого порядка***. Если его можно разрешить относительно производной и записать в виде

$$y' = f(x; y), \qquad (9.3)$$

то такое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Во многих случаях целесообразно рассматривать уравнение вида

$$P(x; y)\, dx + Q(x; y)\, dy = 0, \qquad (9.4)$$

которое называется дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в ***дифференциальной форме***. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (9.3) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y) \ \text{ или } \ f(x; y)dx - dy = 0\,,$$

где $P(x; y) = f(x; y)$ и $Q(x; y) = -1$.

Это означает, что уравнение (9.3) преобразовано в уравнение (9.4).

Запишем уравнение (9.4) в виде

$$P(x; y) + Q(x; y)\frac{dy}{dx} = 0\ .$$

Тогда $Q(x;y)y' = -P(x;y)$, $y' = -\dfrac{P(x;y)}{Q(x;y)}$, $Q(x;y) \neq 0$, т. е. получено уравнение вида (9.3). Таким образом, уравнения (9.3) и (9.4) равносильны.

Решением дифференциального уравнения (9.2) или (9.3) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение (9.2) или (9.3) обращает его в тождество:

$$F(x;\ \varphi(x);\varphi'(x)) \equiv 0 \text{ или } \varphi'(x) \equiv f(x;\varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его ***интегрированием***, а график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде $\Phi(x;\ y) = 0$, то оно называется ***интегралом*** данного дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций вида $y = \varphi(x;\ C)$, каждая из которых является решением данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной C. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при конкретном значении произвольной постоянной C, включая $\pm\infty$.

9.2. Задача Коши и ее геометрическая интерпретация

Уравнение (9.2) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения (9.2) при заданных условиях называется ***задачей Коши***. Эта задача является одной из важнейших в теории дифференциальных уравнений.

Формулируется задача Коши следующим образом: *среди всех решений уравнения* (9.2) *найти такое решение* $y = y(x)$, *в котором функция* $y(x)$ *принимает заданное числовое значение* y_0, *если независимая переменная* x *принимает заданное числовое значение* x_0, *т. е.*

$$y(x_0) = y_0,\ (x_0;\ y_0) \in D, \qquad (9.5)$$

где D – область определения функции $f(x)$.

Значение y_0 называется ***начальным значением функции***, а x_0 – ***начальным значением независимой переменной***. Условие (9.5) называется ***начальным условием*** или ***условием Коши***.

С геометрической точки зрения задачу Коши для дифференциального уравнения (9.2) можно сформулировать следующим образом: *из множества интегральных кривых уравнения* (9.2) *выделить ту, которая проходит через заданную точку* $M_0(x_0;\, y_0)$.

9.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Одним из простейших видов дифференциальных уравнений является дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее искомой функции:

$$y' = f(x). \tag{9.6}$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ или $dy = f(x)dx$. Интегрируя обе части последнего уравнения, получим: $\int dy = \int f(x)dx + C$ или

$$y = \int f(x)\,dx + C\,. \tag{9.7}$$

Таким образом, функция (9.7) является общим решением уравнения (9.6).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$ или $dy = \left(3x^2 - x^{\frac{1}{4}}\right)dx$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$\int dy = \int \left(3x^2 - x^{\frac{1}{4}}\right)dx$, $y = \dfrac{3x^3}{3} - \dfrac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C$. Окончательно запишем

$$y = x^3 - \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C\,.$$

Пример 2. Найти решение уравнения $y' = \frac{1}{x}$ при условии $y(1) = 2$.

Решение. Найдем общее решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},\ dy = \frac{1}{x}dx,\ \int dy = \int \frac{1}{x}dx,\ y = \ln|x| + C.$$

По условию $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Подставим в общее решение: 2 = ln 1 + C или C = 2. Найденное значение произвольной постоянной подставим в формулу общего решения: $y = \ln|x| + 2$. Это и есть частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию.

Уравнение

$$y' = f(y) \tag{9.8}$$

называется ***дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим независимой переменной***.

Запишем его в виде $\frac{dy}{dx} = f(y)$ или $dx = \frac{dy}{f(y)}$. Проинтегрируем обе части последнего уравнения: $\int dx = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ или $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ – общее решение уравнения (9.8).

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' = y^2$.

Решение. Запишем это уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = y^2$ или $dx = \frac{dy}{y^2}$.

Тогда $\int dx = \int \frac{dy}{y^2}$, $x = \int y^{-2}dy$, $x = \frac{y^{-1}}{-1} + C$, $x = -\frac{1}{y} + C$. Таким образом, $x = -\frac{1}{y} + C$ – общее решение данного уравнения.

Уравнение вида

$$y' = f(x)\,\varphi(y) \tag{9.9}$$

интегрируется с помощью разделения переменных. Для этого уравнение запишем в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$, а затем с помощью операций умножения и деления приведем его к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал dx, а во вторую часть – функция от y и дифференциал dy. Для этого обе части уравнения нужно умножить на dx и разделить на $\varphi(y)$. В результате получим уравнение

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \tag{9.10}$$

в котором переменные x и y разделены. Проинтегрируем обе части уравнения (9.10):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Полученное соотношение является общим интегралом уравнения (9.9).

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $y' = \cos^2 y \cdot e^x$.

Решение. Преобразуем уравнение и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cdot e^x, \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = e^x dx.$$

Проинтегрируем части равенства $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int e^x dx$, в результате получим $\operatorname{tg} y = e^x + C$ или $\operatorname{tg} y - e^x - C = 0$ – общий интеграл данного уравнения.

Пусть уравнение задано в виде

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{9.11}$$

Такое уравнение называется ***дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными*** в симметрической форме.

Для разделения переменных нужно обе части уравнения разделить на $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0 \text{ или } \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{9.12}$$

Полученное уравнение называется ***дифференциальным уравнением с разделенными переменными***. Проинтегрируем уравнение (9.12):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_1(y)}{N_1(y)}dy = C. \tag{9.13}$$

Соотношение (9.13) является общим интегралом дифференциального уравнения (9.11).

Пример 5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(xy^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - x^2 y\right)dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в виде $y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$ и разделим обе его части на x^2y^2, $x \neq 0, y \neq 0$. Полученное уравнение: $\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$ является уравнением с разделенными переменными.

Проинтегрируем его:

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C, \quad \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{y^2}dy - \int \frac{1}{y}dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C, \quad \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом данного дифференциального уравнения.

Пример 6. Найти частное решение дифференциального уравнения $2xyy' + 1 + y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде

$$2xy\frac{dy}{dx} + 1 + y^2 = 0 \text{ или } 2xydy + \left(1 + y^2\right)dx = 0.$$

Разделим переменные: $\frac{2y}{1+y^2}dy + \frac{1}{x}dx = 0$.

Проинтегрируем уравнение:

$$\int \frac{2y}{1+y^2}dy + \int \frac{1}{x}dx = 0, \quad \ln\left(1+y^2\right) + \ln|x| = \ln|C|, \quad \left(1+y^2\right)x = C.$$

Полученное соотношение является общим интегралом данного уравнения. По условию $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Подставим в общий интеграл и найдем *C*: $\left(1+1^2\right)\cdot 1 = 1$, $C = 1$. Тогда выражение $\left(1+y^2\right)\cdot x = 1$ является частным решением данного дифференциального уравнения, записанным в виде частного интеграла.

9.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{9.14}$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в это уравнение линейно, а функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{9.15}$$

называется ***линейным однородным***. Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (9.14) называется ***линейным неоднородным***.

Для нахождения решения уравнения (9.14) обычно используют ***метод подстановки (Бернулли)***, суть которого заключается в следующем.

Решение уравнения (9.14) будем искать в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x), \tag{9.16}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые непрерывные функции.

Подставим $y = uv$ и производную $y' = u'v + uv'$ в уравнение (9.14):

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \text{ или } u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Функцию v будем подбирать таким образом, чтобы выполнялось условие $v' + p(x)v = 0$. Тогда $u'v = q(x)$. Таким образом, для нахождения решения уравнения (9.14) нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Первое уравнение системы является линейным однородным уравнением и решить его можно методом разделения переменных:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,\ \frac{dv}{dx} = -p(x)dx,\ \int \frac{dv}{dx} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|,\ v = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

В качестве функции $v(x)$ можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т. е. при $C = 1$ $v = e^{-\int p(x)dx}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ или $u' = e^{\int p(x)dx}q(x)$. Тогда $u = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$.

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right). \qquad (9.17)$$

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Решение уравнения будем искать в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение: $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}$ или $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{\sin x}{x}$. Функцию v выберем таким образом, чтобы выполнялось равенство $v' + \frac{v}{x} = 0$. Тогда $u'v = \frac{\sin x}{x}$. Решим первое из этих уравнений методом разделения переменных:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln|v| = -\ln|x|,\ v = \frac{1}{x}.$$

Функцию v подставим во второе уравнение: $u'\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $u' = \sin x$, $u = \int \sin x dx$, $u = -\cos x + C$. Общим решением данного уравнения является $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$.

9.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

9.5.1. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \qquad (9.18)$$

т. е. уравнение, которое содержит искомую функцию и ее производные только в первой степени и не содержит их произведений. В данном уравнении p_1 и p_2 – некоторые числа, а функция $f(x)$ задана на некотором интервале $(a; b)$.

Если $f(x) \equiv 0$ на интервале $(a; b)$, то уравнение (9.18) принимает вид

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad (9.19)$$

и называется ***линейным однородным***. В противном случае уравнение (9.18) называется ***линейным неоднородным***.

Рассмотрим комплексную функцию

$$y(x) = u(x) + iv(x)\,, \tag{9.20}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – действительные функции. Если функция (9.20) является комплексным решением уравнения (9.18), то и действительная часть $u(x)$, и мнимая часть $v(x)$ решения $y(x)$ в отдельности являются решениями этого же однородного уравнения. Таким образом, всякое комплексное решение уравнения (9.18) порождает два действительных решения этого уравнения.

Решения однородного линейного уравнения обладают следующими свойствами:

1) если y_1 есть решение уравнения (9.18), то и функция $y(x) = Cy_1$, где C – произвольная постоянная, также будет решением уравнения этого уравнения;

2) если y_1 и y_2 есть решения уравнения (9.18), то и функция $y(x) = y_1 + y_2$ также будет решением этого уравнения;

3) если y_1 и y_2 есть решения уравнения (9.18), то их линейная комбинация $y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ также будет решением этого уравнения, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на интервале $(a; b)$, если существуют такие числа α_1 и α_2, не равные нулю одновременно, что на этом интервале выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0\,. \tag{9.21}$$

Если равенство (9.21) имеет место только тогда, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале $(a; b)$.

Пример 1. Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = 2x$ линейно зависимы, так как $2y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ на всей числовой прямой. В этом примере $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -1$.

Пример 2. Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x^2$ линейно независимы на любом интервале, так как равенство $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \equiv 0$ возможно лишь в случае, когда и $\alpha_1 = 0$, и $\alpha_2 = 0$.

9.5.2. Построение общего решения линейного однородного уравнения

Для того чтобы найти общее решение уравнения (9.19), нужно найти два его линейно независимых решения y_1 и y_2. Линейная комбинация этих решений $y_0(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, и даст общее решение линейного однородного уравнения.

Линейно независимые решения уравнения (9.19) будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{9.22}$$

где λ – некоторое число. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставим эти выражения в уравнение (9.19):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_2 e^{\lambda x} = 0 \text{ или } e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0 .$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$. Таким образом, функция будет решением уравнения (9.19), если λ будет удовлетворять уравнению

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0. \tag{9.23}$$

Уравнение (9.23) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (9.19). Это уравнение является алгебраическим квадратным уравнением.

Пусть λ_1 и λ_2 есть корни этого уравнения. Они могут быть или действительными и различными, или комплексными, или действительными и равными. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения действительные и различные. Тогда решениями уравнения (9.19) будут функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Эти решения линейно независимы, так как равенство $\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} \equiv 0$ может выполняться лишь тогда, когда и $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Поэтому общее решение уравнения (9.19) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{9.24}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' - 7y = 0$.

Решение. Для данного линейного однородного уравнения составим характеристическое $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$. Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$. Тогда функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{7x}$ есть линейно независимые решения данного линейного однородного уравнения, а его искомое общее решение имеет вид $y_0(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{7x}$.

2. Пусть корни характеристического уравнения действительные и равные, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда решениями уравнения (9.19) являются функции $y_1(x) = e^{\lambda x}$ и $y_2 = xe^{\lambda x}$. Эти решения линейно независимы, так как выражение $\alpha_1e^{\lambda x} + \alpha_2xe^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\alpha_1 + \alpha_2x)$ может быть тождественно равным нулю только тогда, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Следовательно, общее решение уравнения (9.22) имеет вид

$$y_0(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}. \tag{9.25}$$

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическим уравнением для данного дифференциального уравнения является $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$. Тогда искомым общим решением является

$$y_0(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}.$$

3. Пусть корни характеристического уравнения комплексные, т. е. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Решения уравнения (9.19) можно записать в виде $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)}$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)}$. По формулам Эйлера

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Тогда $y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Как известно, если комплексная функция является решением линейного однородного уравнения, то решениями этого уравнения являются и действительная, и мнимая части этой функции. Таким образом, решениями уравнения (9.19) будут функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Так как равенство

$$\alpha_1e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(\alpha_1\cos\beta x + \alpha_2\sin\beta x) \equiv 0$$

может выполняться только в том случае, если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, то эти решения линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (9.19) имеет вид

$$y_0(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{9.26}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Для этого уравнения составим характеристическое

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

и решим его: $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$, $\lambda_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$,

$\lambda_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{-36}}{2} = -2 - 3i$.

Функции $y_1 = e^{-2x} \cos 3x, y_2 = e^{-2x} \sin 3x$ являются решениями данного дифференциального уравнения и линейно независимы. Поэтому $y_0(x) = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$ – искомое общее решение дифференциального уравнения.

9.5.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Общее решение линейного неоднородного уравнения (9.18) равно сумме любого частного решения $\overline{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_0(x).$$

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти довольно просто по виду правой части $f(x)$ уравнения (9.18). Рассмотрим случаи, когда это возможно.

Пусть неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, \qquad (9.27)$$

т. е. правая часть неоднородного уравнения является многочленом степени m. Если $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде многочлена степени m, т. е.

$$\overline{y}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m$ определяются в процессе нахождения частного решения.

Если же $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\overline{y}(x) = x \cdot \left(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \right).$$

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$.

Р е ш е н и е. Запишем однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y''-3y'-4y=0$. Характеристическим уравнением для него является $\lambda^2-3\lambda-4=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$. Тогда $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{4x}$ являются частными решениями однородного уравнения, а $y_0(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$ есть общее решение однородного уравнения.

Так как λ = 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\overline{y}(x)=Ax+B$. Найдем производные первого и второго порядков и подставим в уравнение:

$\overline{y}'=A,\ \overline{y}''=0,\ \ 0-3A-4(Ax+B)=3x-2,\ \ -4Ax-3A-4B=3x-2.$

Тогда $\begin{cases}-4A=3,\\ -3A-4B=-2.\end{cases}$

Решив эту систему уравнений, найдем: $A=-\dfrac{3}{4},\ B=-\dfrac{17}{8}$. Следовательно, частным решением неоднородного уравнения будет функция $\overline{y}(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{17}{8}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{17}{8}+C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-8y'=2x+5$.

Р е ш е н и е. Данному линейному неоднородному уравнению соответствует однородное $y''-8y'=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2-8\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0, \lambda_2=8$. Линейно независимыми решениями однородного уравнения будут $y_1=e^{0x}=1$ и $y_2=e^{8x}$, а его общее решение имеет вид $y_o(x)=C_1+C_2e^{8x}$.

Так как λ = 0 является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\overline{y}(x)=x\cdot\left(Ax+B\right)=Ax^2+Bx$. Найдем производные первого и второго порядков: $\overline{y}'=2Ax+B$, $\overline{y}''=2A$. Подставим эти выражения в неоднородное уравнение:

$$2A-8\left(2Ax+B\right)=2x+5\,,\ 2A-16Ax-8B=2x+5\,.$$

Приравняем коэффициенты при x и свободные члены:

$$\begin{cases} -16A=2, \\ 2A-8B=5. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $A=-\dfrac{1}{8}, B=-\dfrac{21}{32}$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\overline{y}(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{21}{32}x\,,$$

а общим его решением является

$$y(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{21}{32}x+C_1+C_2e^{8x}\,.$$

Пусть неоднородное уравнение имеет вид

$$y''+p_1y'+p_2y=e^{ax}\left(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m\right). \tag{9.28}$$

Если λ = 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\overline{y}(x)=e^{ax}\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m\right)$. Если же λ = 0 есть корень характеристического уравнения кратности k (k = 1 или k = 2), то в этом случае частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид $\overline{y}(x)=e^{ax}x^k\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m\right)$.

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+3y'+2y=e^{3x}\cdot 4x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$ соответствующего однородного имеет корни λ_1 = –1, λ_2 = –2. Функции $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{-2x}$ есть линейно независимые решения однородного уравнения, а его общим решением является $y_0(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

Так как λ = 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\overline{y}(x)=e^{3x}(Ax+B)$. Найдем производные первого и второго порядков:

$$\overline{y}'=3e^{3x}\left(Ax+B\right)+e^{3x}A \text{ или } \overline{y}'=e^{3x}\left(3Ax+A+3B\right),$$

$$\overline{y}''=3e^{3x}\left(3Ax+A+3B\right)+e^{3x}A \text{ или } \overline{y}''=e^{3x}\left(9Ax+6A+9B\right).$$

Подставим в неоднородное уравнение:

$e^{3x}\left(9Ax+6A+9B\right)+3e^{3x}\left(3Ax+A+3B\right)+2e^{3x}\left(Ax+B\right)=e^{3x}\cdot 4x$ или $20Ax+9A+20B=4x$.

Решив систему

$$\begin{cases} 20A=4, \\ 9A+20B=0, \end{cases}$$

найдем: $A=\frac{1}{5},\ B=-\frac{9}{100}$. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\overline{y}(x)=e^{3x}\left(\frac{1}{5}x-\frac{9}{100}\right),$$

а общим решением неоднородного уравнения является

$$y(x)=e^{3x}\left(\frac{1}{5}x-\frac{9}{100}\right)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

Пример 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'-5y=e^{5x}(x-1).$$

Решение. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид $\lambda^2-4\lambda-5=0$, и его корнями являются $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$. Функции $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{5x}$ – линейно независимые решения неоднородного уравнения, и

$$y_0(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}$$

есть общее решение этого уравнения.

Так как $\lambda=5$ – корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\overline{y}(x)=e^{5x}x\left(Ax+B\right)=e^{5x}\left(Ax^2+Bx\right).$$

Найдем производные первого и второго порядков:

$$\overline{y}'=5e^{5x}\left(Ax^2+Bx\right)+e^{5x}\left(2Ax+B\right)=e^{5x}\left(5Ax^2+5Bx+2Ax+B\right),$$

$$\overline{y}''=5e^{5x}\left(5Ax^2+5Bx+2Ax+B\right)+e^{5x}\left(10Ax+5B+2A\right)=$$

$$=e^{5x}\left(25Ax^2+25Bx+20Ax+10B+2A\right).$$

Подставим в неоднородное уравнение:

$$e^{5x}\left(25Ax^2+25Bx+20Ax+10B+2A\right)-4e^{5x}\left(5Ax^2+5Bx+2Ax+B\right)-$$

$$-5e^{5x}\left(Ax^2+Bx\right)=e^{5x}(x-1).$$

Сократим обе части этого равенства на e^{5x}, приведем подобные члены и получим $12Ax + 2A + 6B = x - 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ 2A + 6B = -1. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $A = \dfrac{1}{12}$, $B = -\dfrac{7}{36}$.

Частным решением неоднородного уравнения является

$$\overline{y}(x) = e^{5x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{36}x\right),$$

а общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{5x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{36}x\right) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}.$$

9.5.4. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных можно применять к любому неоднородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами независимо от вида правой части. Этот метод позволяет всегда найти общее решение неоднородного уравнения, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (9.19). Тогда общим решением этого уравнения является $y_0(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Суть метода вариации произвольных постоянных состоит в том, что общее решение уравнения (9.18) ищется в виде

$$y_0(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \tag{9.29}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – новые неизвестные функции, которые необходимо найти. Так как неизвестных функций две, то для их нахождения необходимы два уравнения, содержащие эти функции. Эти два уравнения составляют систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases}$$

которая является линейной алгебраической системой уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решая данную систему, найдем $C_1'(x) = \varphi_1(x)$ и $C_2'(x) = \varphi_2(x)$. Интегрируя обе части полученных равенств, найдем

$C_1(x)=\int \varphi_1(x)dx+C_1$ и $C_2(x)=\int \varphi_2(x)dx+C_2$. Подставив эти выражения в правую часть равенства (9.29), получим общее решение неоднородного линейного уравнения (9.18).

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

Решение. Данному уравнению соответствует однородное $y''+4y=0$, для которого уравнение $\lambda^2+4=0$ является характеристическим с корнями $\lambda_1=2i$ и $\lambda_2=-2i$. В этом случае функции $y_1=\cos 2x$ и $y_2=\sin 2x$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения, а $y_0(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ является его общим решением.

Общее решение данного уравнения будем искать в виде $y(x)=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$. Составим систему для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2\cos^2 2x+2\sin^2 2x=2,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}=\mathrm{tg}2x,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}=1,$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\mathrm{tg}2x}{2},\ C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{2}.$$

Тогда $C_1(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{tg}2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|+C_1$,

$C_2(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}+C_2$.

Подставим в формулу общего решения:

$$y(x)=\left(-\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|+C_1\right)\cos 2x+\left(\frac{x}{2}+C_2\right)\sin 2x.$$

9.6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y'' = f(x; y')$ не содержат в явном виде y.

Заменой $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно $z(x)$: $z' = f(x, z)$. Решая его, находим $z(x) = \varphi(x, C_1)$, т. е. $y' = \varphi(x, C_1)$. Интегрируя еще раз, получим $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 3\frac{y'}{x} = x$.

Решение. Пусть $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$ и уравнение примет вид $z' - 3\frac{z}{x} = x$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его, найдем $z(x) = C_1x^3 - x^2$, или $y' = C_1x^3 - x^2$. Интегрируя еще раз, получим $y = C_1\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2$.

2. Уравнения вида $y'' = f(y, y')$ не содержат в явном виде x.

Заменой $y' = z(y)$, $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z(y)$ уравнение сводится к уравнению первого порядка относительно $z(y) : z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$.

Решая его, найдем $z = \varphi(y, C_1)$ или $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$ и проинтегрировав его, найдем общее решение данного уравнения:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $yy'' - 2y'^2 = 0$.

Решение. Пусть $y' = z(y)$, тогда $y'' = \frac{dz}{dy}z$.

В результате замены уравнение примет вид $y\frac{dz}{dy}z - 2z^2 = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим $z = C_1y^2$. Так как $z = \frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2 \text{ или } \frac{dy}{y^2} = C_1dx. \text{ Отсюда } y = -\frac{1}{C_1x + C_2}.$$

По аналогии могут быть решены дифференциальные уравнения порядка выше второго, допускающие понижение порядка.

Контрольные задания

Задача 1. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1.1. $\mathrm{tg}y dx - x\ln x dy = 0$, $y(e) = \frac{\pi}{2}$.

1.2. $2y(x^2+1)y' - \sqrt{y^2+2} = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

1.3. $x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0$, $y(0) = \sqrt{3}$.

1.4. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$, $y(0) = \sqrt{6}$.

1.5. $\sqrt{3+y^2}dx = (y + x^2y)dy$, $y(0) = 1$.

1.6. $y(e^x+4)dy - e^xdx = 0$, $y(0) = 0$.

1.7. $(1+x^2)dy = 2x(y+3)dx$, $y(0) = 0$.

1.8. $(e^x+8)dy - ye^xdx = 0$, $y(0) = 7$.

1.9. $(1+x^2)y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

1.10. $y' = (2y-1)\mathrm{ctg}x$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5$.

1.11. $(x+2)dy = (y-1)dx$, $y(1) = 2$.

1.12. $(1+x^2)yy' = 1 + y^2$, $y(1) = 2$.

1.13. $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)y^2dy = 0$, $y(0) = -1$.

1.14. $x + xy + yy'(1 + x) = 0, \quad y(0) = 0$.

1.15. $(1 + y^2)dx - xydy = 0, \quad y(1) = 0$.

1.16. $y(x^2 + 1)dy + \sqrt{y^2 + 2}dx = 0, \quad y(0) = 2$.

1.17. $y'\mathrm{tg}x = 1 + y, \quad y(0) = 1$.

1.18. $xy' \ln x = y, \quad y(e) = 1$.

1.19. $\sqrt{1 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0, \quad y(1) = 1$.

1.20. $x + xy^2 - (y + yx^2)y' = 0, \quad y(1) = 1$.

1.21. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$.

1.22. $\sqrt{5 + y^2}dx = -4y(x^2 + 1)dy, \quad y(0) = 2$.

1.23. $(y - xy)dy + dx = 0, \quad y(2) = 0$.

1.24. $x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0, \quad y(0) = 0$.

1.25. $y' = 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(e) = 1$.

1.26. $x + xy + y'(xy + y) = 0, \quad y(0) = e - 1$.

1.27. $y'x^3 = 2y, \quad y(1) = e$.

1.28. $2x^2 ydy = (1 + x^2)dx, \quad y(1) = 1$.

1.29. $y' = (2y + 1)\mathrm{ctg}x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

1.30. $x^2 y' + y^2 = 0, \quad y(-1) = 1$.

Задача 2. Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

2.1. $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$.

2.2. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$.

2.3. $xy' + 2y = x^3, \quad y(-1) = 1$.

2.4. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$.

2.5. $y' - y\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

2.6. $y' + y\operatorname{tg}x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

2.7. $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$.

2.8. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$.

2.9. $y' - \frac{1}{x}y = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2.10. $y' + \frac{1}{x}y = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

2.11. $y' + \frac{1}{2x}y = x^2, \quad y(1) = 1$.

2.12. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$.

2.13. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4$.

2.14. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e$.

2.15. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1$.

2.16. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0$.

2.17. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$.

2.18. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3$.

2.19. $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$.

2.20. $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$.

2.21. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1$.

2.22. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1$.

2.23. $y' + \frac{1}{2}\ \frac{x}{1-x^2}\, y = \frac{1}{2}x, \quad y(0) = \frac{2}{3}$.

2.24. $y' + xy = x^3, \quad y(0) = 3$.

2.25. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \frac{1}{e}$.

2.26. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$.

2.27. $y' + \frac{1-2x}{x^2}\, y = 1, \quad y(1) = 1$.

2.28. $y' - \frac{1}{x}\, y = 2\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$.

2.29. $y' + \frac{2}{x}\, y = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}$.

2.30. $y' - \frac{1}{x}\, y = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$.

Задача 3. Найти общий интеграл однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

3.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

3.2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3.3. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.4. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.

3.5. $2 \cdot y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

3.6. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.7. $y' = \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

3.8. $xyy' = 8x^2 + y^2$.

3.9. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$.

3.10. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

3.11. $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$.

3.12. $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$.

3.13. $(x-y)y' - y = 0$.

3.14. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

3.15. $xyy' = x^2 + y^2$.

3.16. $yy' + x + 2y = 0$.

3.17. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

3.18. $2xyy' = y^2 - x^2$.

3.19. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{4y}$.

3.20. $x^2 y' = y^2 + xy$.

3.21. $y^2 = 2xy - x^2 y'$.

3.22. $8xyy' - x^2 - 4y^2 = 0$.

3.23. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

3.24. $xy^2 y' = x^3 + y^3$.

3.25. $x^2 y' - xy = 2y^2$.

3.26. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

3.27. $xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$.

3.28. $xy' = y + 2\sqrt{xy}$.

3.29. $y' + 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$.

3.30. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

Задача 4.

4.1. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;\ 4)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. Построить кривую.

4.2. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;\ 3)$, если отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. Построить кривую.

4.3. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;\ 1)$, если отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания. Построить кривую.

4.4. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;\ 2)$, если отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy. Построить кривую.

4.5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(-1;\ 1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

4.6. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;\ -4)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в два раза меньше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. Построить кривую.

4.7. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;\ -4)$, если начальная ордината касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания.

4.8. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0; 3)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой ее точке, меньше ординаты точки касания на 2.

4.9. Найти кривую, проходящую через точку $A(2; 2)$, если длина отрезка касательной между точкой касания и осью Ox равна длине отрезка между точкой касания и началом координат.

4.10. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; 1)$, если точка пересечения любой касательной с осью ординат одинаково удалена от точки касания и начала координат.

4.11. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; 0)$, у которой квадрат ординаты точки пересечения любой касательной с осью ординат равен произведению координат точки касания.

4.12. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; 3)$, если произведение ординаты точки пересечения любой касательной с осью ординат точки касания равно 2.

4.13. Найти кривую, проходящую через точку $A(2; -6)$, если ордината точки пересечения любой касательной с осью ординат равна разности абсциссы и ординаты точки касания.

4.14. Найти кривую, проходящую через точку $A(4; 1)$, если произведение абсциссы точки пересечения любой касательной с осью абсцисс Ox и ординаты точки касания равно 6.

4.15. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; -1)$, если ордината точки пересечения любой касательной с осью ординат на две единицы меньше абсциссы точки касания.

4.16. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которое пропорционально скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 с станет 8 м/с. Найти зависимость скорости от времени. Через какое время скорость уменьшится до 1 м/с?

4.17. Материальная точка массой 10^{-3} кг движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила $4 \cdot 10^{-3}$ Н. Найти зависимость скорости от времени. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

4.18. Определить путь S, пройденный телом за время t, если скорость тела пропорциональна проходимому пути и оно проходит 100 м в 10 с и 200 м в 15 с.

4.19. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 25/9 м/с. На полном ходу ее мотор был выключен и через $t = 20$ с скорость уменьшилась до 5/3 м/с. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти зависимость скорости от времени. Какова будет скорость лодки через 2 мин после остановки мотора?

4.20. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;\ 1)$ и обладающую следующим свойством: угловой коэффициент касательной в какой-либо точке в 3 раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

4.21. Найти кривую, обладающую следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

4.22. Найти и построить кривую, проходящую через точку $M(-1;\ 2)$, если любая ее касательная пересекается с отрезком, соединяющим начало координат и точку касания под прямым углом.

Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти зависимость температуры T тела от времени t, если за a минут температура тела снизилась от T_1 до T_2, а температура воздуха была постоянной и равнялась C.

4.23. $a = 10$, $T_1 = 100°$, $T_2 = 60°$, $C = 20°$.

4.24. $a = 20$, $T_1 = 120°$, $T_2 = 40°$, $C = 18°$.

4.25. $a = 15$, $T_1 = 80°$, $T_2 = 30°$, $C = 12°$.

4.26. $a = 10$, $T_1 = 90°$, $T_2 = 70°$, $C = 16°$.

4.27. $a = 30$, $T_1 = 100°$, $T_2 = 50°$, $C = 10°$.

4.28. $a = 12$, $T_1 = 70°$, $T_2 = 40°$, $C = 15°$.

4.29. При температуре окружающей среды $C = 20°$ тело за $t = 10$ мин остыло от $T_1 = 100°$ до $T_2 = 60°$. Определить зависимость температуры тела от времени. Через сколько времени температура тела опустится до $T_3 = 25°$?

4.30. При температуре окружающей среды $C = 20°$, тело за $t = 20$ мин остыло от $T_1 = 100°$, $T_2 = 60°$.Определить зависимость температуры тела от времени. Через сколько времени температура тела опустится до $T_3 = 30°$?

Задача 5. Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений вида $F(x; y'; y'') = 0$, допускающих понижение порядка.

5.1. $xy'' + 7y' + x = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

5.2. $xy'' - y' - x^2 = 0$, $y(1) = \dfrac{4}{3}$, $y'(1) = 3$.

5.3. $y'' - \dfrac{1}{x-1}y' = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

5.4. $y'' - y'\mathrm{ctg}x = \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

5.5. $xy'' - 2y' = 2x^4$, $y(1) = \dfrac{1}{5}$, $y'(1) = 4$.

5.6. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.7. $xy'' + y' = 4x^3$, $y(1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(1) = 2$.

5.8. $xy'' + y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

5.9. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.10. $xy'' + 2y' = x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

5.11. $xy'' = y'\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $4x - y - 3z + 8 = 0$.

5.12. $xy'' = 2y' + x^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

5.13. $xy'' + x^2y' = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

5.14. $x^2y'' - (y')^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

5.15. $xy'' - 4x\sqrt{x} + y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -\dfrac{8}{5}$.

5.16. $xy'' - y' - x^2 = 0$, $y(1) = -\dfrac{1}{6}$, $y'(1) = 0$.

5.17. $xy'' = y'$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

5.18. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

5.19. $x\ln xy'' = y'$, $y(e) = 0$, $y'(e) = 1$.

5.20. $xy'' - y' + \dfrac{1}{x} = 0$, $y(1) = -9$, $y'(1) = 3$.

5.21. $x^4y''+x^3y'=1$, $y(1)=-\dfrac{1}{2}$, $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5.22. $y''\operatorname{ctg}x+y'=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

5.23. $y''\operatorname{tg}x=2y'$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

5.24. $xy''+y'=1$, $y(1)=2$, $y'(1)=0$.

5.25. $xy''+y'=x+1$, $y(1)=\dfrac{5}{4}$, $y'(1)=\dfrac{3}{2}$.

5.26. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

5.27. $x^2y''+xy'+=1$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y'(1)=-1$.

5.28. $x^3y''+x^2y'=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$.

5.29. $xy''+y'=-x$, $y(1)=-\dfrac{1}{4}$, $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5.30. $(1+\sin x)y''=y'\cos x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

Задача 6. Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений вида $F(y,y',y'')=0$, допускающих понижение порядка.

6.1. $y''-e^y y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

6.2. $y'y''=2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

6.3. $yy''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

6.4. $y^3y''=3$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

6.5. $y''-12y^2=0$, $y(0)=\dfrac{1}{2}$, $y'(0)=1$.

6.6. $2y''=e^{4y}$, $y(0)=0$, $2x+y+3z-7=0$.

6.7. $(y-2)y''=2(y')^2$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

6.8. $2yy''=3+(y')^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

6.9. $(y+1)^2y''=(y')^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

6.10. $y''+2\cos^3 y\sin y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

6.11. $y''=32\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(1)=4$.

6.12. $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

6.13. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.

6.14. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

6.15. $2(y')^2 = y''(y-1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

6.16. $(y+1)y'' = 9(y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.17. $y'' = 50y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.

6.18. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.

6.19. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

6.20. $y'' = 8\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(1) = -2$.

6.21. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.

6.22. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.

6.23. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

6.24. $y'' = 5\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(1) = 5$.

6.25. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

6.26. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

6.27. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

6.28. $y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

6.29. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

6.30. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.

Задача 7. Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

7.1. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$.

7.2. $y'' + 4y = 3\cos x$.

7.3. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

7.4. $y'' - 2y' = 2x + 1$.

7.5. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}$.

7.6. $y'' - 4y = 4\sin 2x$.

7.7. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x$.

7.8. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3$.

7.9. $y'' - 3y' = 3e^{3x}$.

7.10. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$.

7.11. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

7.12. $y'' - 4y = (3x-1)e^{-x}$.

7.13. $y'' + y = 6\sin 2x$.

7.14. $y'' - 5y' = 10x + 3$.

7.15. $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$.

7.16. $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2$.

7.17. $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$.

7.18. $y'' + 16y = 7\cos 3x$.

7.19. $y'' + 2y' + 9y = 2e^{3x}$.

7.20. $y'' + 2y' + y = 2\sin x$.

7.21. $y'' + 4y = 8x$.

7.22. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

7.23. $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x + 1$.

7.24. $y'' + 6y' + 13y = 30\sin x$.

7.25. $y'' + 9y = 2x^2 + 5$.

7.26. $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$.

7.27. $x^2 + 4y^2 = 4$.

7.28. $y'' - 3y' = 2 - 6x$.

7.29. $y'' + 9y = \cos x$.

7.30. $y'' + 4y' = xe^x$.

Задача 8. Методом Лагранжа найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

8.1. $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$.

8.2. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$.

8.3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

8.4. $y'' - 2y = \dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$.

8.5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

8.6. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.

8.7. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

8.8. $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$.

8.9. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$.

8.10. $y'' + y' = \mathrm{tg} x$.

8.11. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

8.12. $y'' + y = \mathrm{ctg}\, x$.

8.13. $y'' - 5y' + 6y = x^{-2}e^{2x}$.

8.14. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

8.15. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3+e^{-x}}$.

8.16. $y'' + 4y' + 4y = x^{-3}e^{-2x}$.

8.17. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

8.18. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8.19. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$. 8.20. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

8.21. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. 8.22. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$.

8.23. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. 8.24. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$.

8.25. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$. 8.26. $y'' - y = 3 \cdot e^x$.

8.27. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-3x}$. 8.28. $y'' - y' = x^2 - 6$.

8.29. $y'' + 9y = x^2 - 6x + 4$. 8.30. $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 1$.

10. РЯДЫ

Включенные в этот раздел задачи определяют оптимальный уровень прикладного использования рядов. Следует изучить основные определения, методы исследования и возможности применения числовых и функциональных рядов.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Числовые ряды: определение, сходимость, необходимые и достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов.
2. Знакочередующиеся числовые ряды, признак Лейбница.
3. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда, радиус сходимости, свойства степенных рядов.
4. Разложение функций в степенные ряды, примеры разложения в ряд основных элементарных функций.
5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях, оценка погрешностей.

10.1. Числовые ряды

Основные понятия. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Числовым рядом называется сумма этих чисел

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (10.1)$$

Числа a_1, a_2, …, a_n называются членами ряда, a_n – общим или n-м членом ряда. Конечная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется n-й частичной суммой ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ряд называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Если ряд сходится, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда, а разность $r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называется остатком ряда.

Пример 1. По заданному общему члену $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ записать ряд и найти его сумму.

Решение. Пусть n принимает значения 1, 2, 3, …, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда найдем предел при $n \to \infty$ n-й частичной суммы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\cdots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Тогда $S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$, т. е.

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1}.\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Необходимое условие сходимости числового ряда: если числовой ряд сходится, то его общий член ряда a_n при неограниченном увеличении его номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Это необходимый, но не достаточный признак сходимости числового ряда.)

Пример 2. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для следующих рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\cdots$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}=1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\cdots$.

Решение. Найдем предел общего члена каждого ряда при $n\to\infty$:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}=0.$$

Необходимый признак сходимости для первого ряда не выполняется. Поэтому этот ряд расходится. Для второго ряда необходимый признак выполняется. Вопрос о его сходимости может быть решен после дополнительных исследований.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, тогда, если

1) $a_n\le b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходится;

2) $a_n\ge b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ также расходится.

Другими словами: ***из сходимости ряда с большими членами ряда следует сходимость ряда с меньшими членами ряда, а из расходимости ряда с меньшими членами ряда следует расходимость ряда с большими членами ряда.***

При использовании данного признака исследуемый ряд иногда сравнивают с бесконечной геометрической прогрессией

$$1+q+q^2+q^3+\cdots q^n+\cdots=\sum_{n}q^n,\ q>0, \tag{10.2}$$

которая при $q<1$ сходится, а при $q\ge 1$ расходится, или с расходящимся гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}. \tag{10.3}$$

Предельный признак сравнения.

Теорема. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$ сходится, а следовательно, сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{3^n}\right)^{n^2}$.

Интегральный признак Коши.

Теорема. Пусть дан ряд $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, члены которого являются значениями некоторой функции $f(n)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1;\infty)$. Тогда, если $\int_{1}^{\infty}f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, если же этот интеграл расходится, то исследуемый ряд также расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Решение. Вычислим несобственный интеграл $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=t,\ \frac{1}{x}dx=dt\\ \text{если } x=2,\ t=\ln 2\\ \text{если } x=b,\ t=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^3}dt=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\bigg|_{\ln 2}^{\ln b}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to\infty}\frac{1}{t^2}\bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(\ln b)^2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}\right)=\frac{1}{2(\ln 2)^2}-$$

конечное число.

$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$ – сходящийся, а следовательно, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ – сходящийся.

Контрольные задания

Задача 1. Записать n-й член ряда.

1.1. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 10}+\dots$

1.2. $\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$

1.3. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 5}+\frac{1}{11\cdot 7}+\dots$

1.4. $\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 10}+\dots$

1.5. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots$

1.6. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 5}+\frac{1}{8\cdot 7}+\dots$

1.7. $\frac{1}{3\cdot 1}+\frac{1}{5\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 7}+\dots$

1.8. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{11\cdot 11}+\dots$

1.9. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 13}+\dots$

1.10. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 11}+\dots$

1.11. $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 7}+\frac{1}{14\cdot 9}+\dots$

1.12. $\frac{1}{7\cdot 7}+\frac{1}{11\cdot 9}+\frac{1}{15\cdot 11}+\dots$

1.13. $\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{8\cdot 13}+\dots$

1.14. $\frac{1}{7\cdot 4}+\frac{1}{10\cdot 9}+\frac{1}{13\cdot 14}+\dots$

1.15. $\frac{1}{7\cdot 5}+\frac{1}{11\cdot 8}+\frac{1}{15\cdot 11}+\dots$

1.16. $\frac{1}{7\cdot 6}+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{11\cdot 14}+\dots$

1.17. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 11}+\dots$

1.18. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 9}+\dots$

1.19. $\frac{1}{7\cdot 2}+\frac{1}{12\cdot 5}+\frac{1}{17\cdot 8}+\dots$

1.20. $\frac{1}{5\cdot 5}+\frac{1}{8\cdot 7}+\frac{1}{11\cdot 9}+\dots$

1.21. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{6\cdot 3}+\frac{1}{11\cdot 4}+\dots$

1.22. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{8\cdot 5}+\frac{1}{14\cdot 7}+\dots$

1.23. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{5\cdot 14}+\dots$

1.24. $\frac{1}{1\cdot 17}+\frac{1}{2\cdot 20}+\frac{1}{3\cdot 23}+\dots$

1.25. $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 5}+\frac{1}{8\cdot 6}+\dots$

1.26. $\frac{8}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{13}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{18}{3\cdot 4\cdot 6}+\dots$

1.27. $\frac{7}{4\cdot 3\cdot 1}+\frac{3}{5\cdot 4\cdot 2}+\frac{9}{6\cdot 5\cdot 3}+\dots$

1.28. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 12}+\frac{1}{5\cdot 21}+\dots$

1.29. $\frac{4}{3\cdot 8}+\frac{7}{4\cdot 15}+\frac{10}{5\cdot 24}+\dots$

1.30. $\frac{8}{5\cdot 8}+\frac{9}{6\cdot 15}+\frac{10}{7\cdot 24}+\dots$

Задача 2. С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость следующие ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3n+1}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[4]{n+1}}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{(n^2+2)\cdot 2^n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^3}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^{2n}}$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

2.17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n(4^n+1)}$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n^2+2)}}$.

2.22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n-1}$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^4+4}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+5}$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Задача 3. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость следующие ряды:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\sqrt{n}}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{2n+5}$.

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$.

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n^2+1}$.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{3^n}$.

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{2^n}$.

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$.

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 5^n}}$.

3.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{2n+5}$.

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^n(2n+1)}$.

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n(n+1)!}$.

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)\cdot 3^n}}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}$.

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^n}{n!}$.

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{2^n\cdot n^n}$.

Задача 4. С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{n^n}$.

4.3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+4}\right)^n$.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{5^n}$.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+1}{4n^3+2}\right)^n$.

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}$.

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{5n+2}\right)^{n^2}$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{n-1}\right)^{n^2}$.

4.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4n-1}{2n^2+3}\right)^{n}$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n(n+5)}$.

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-7}{6n+5}\right)^{n^3}$.

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}\cdot(n+1)^3$.

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$.

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{5n}$.

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость следующие ряды с помощью интегрального признака Коши.

5.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

5.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

5.10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

5.11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

5.12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

5.14. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-2n}$.

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

5.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

5.19. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n-5}{n^2-5n+7}$.

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3+2n}}$.

5.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n^2}$.

5.22. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$.

5.23. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-3n}$.

5.24. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n^4}$.

5.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2+1}$.

5.26. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^4}$.

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+3}$.

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n+5}$.

5.29. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n(1+\ln^3 n)}$.

5.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$.

10.1.1. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимися рядами называют ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки. Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \qquad (10.6)$$

где $a_n > 0$.

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов).

Теорема. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда монотонно убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

10.1.2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим ряд $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где числа a_1, a_2, …, a_n могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольно. Такой ряд называют ***знакопеременным*** рядом.

Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то сходится и знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$ сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$.

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членов этого ряда, расходится (гармонический ряд).

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Пример 2. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ – абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots,$$

также сходится. (Оба ряда – геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.)

Пример 3. Ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ – условно сходящийся, так как сам ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$, расходится (легко проверить с помощью интегрального признака).

Для абсолютно сходящихся рядов сумма ряда равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда. Для условно сходящихся рядов это свойство не выполняется.

Контрольные задания

Задача 6. Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$.

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot 3^{n}}$.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$.

6.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n(2^n+1)}$.

6.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+2)^2}$.

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+5}}$.

6.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

6.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{5^n}$.

6.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n!}$.

6.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{(n+1)!}$.

6.13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}1}{n\ln n}$.

6.14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot e^{-5n}$.

6.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}$.

6.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^n\sqrt[4]{n}}$.

6.17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4}{2n^2+n+1}$.

6.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{5^n\sqrt{4n+1}}$.

6.19. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}$.

6.20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$.

6.21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{5^n}$.

6.22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{5^n\sqrt[5]{n}}$.

6.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n+5)}$.

6.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n^2+2)}{n^5+3}$.

6.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n-1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

6.26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

6.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-3n+5}$.

6.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

6.29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

6.30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

10.2. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad (10.7)$$

называется ***степенным рядом***. Числа a_0, a_1, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда.

Придавая x различные числовые значения, получают различные числовые ряды, которые могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Множество всех тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется ***областью сходимости*** степенного ряда. Очевидно, при $x = 0$ любой степенной ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (10.8)$$

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Так как $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, а радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, то данный ряд сходится на интервале (–1; 1). Вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т. е. в точках $x = \pm 1$, исследуется дополнительно.

При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, а при $x = -1$ – знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, сходящийся на основании признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится на полуинтервале [–1; 1).

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$, так как его радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right) = 0.$$

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится для любого $x \in (-\infty; \infty)$, так как его радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$.

Контрольные задания

Задача 7. Исследовать сходимость степенного ряда.

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}$.

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{4^n\cdot\sqrt[5]{n}}$.

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n\ln n}$.

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

7.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot x^n}{5^n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{4^n\cdot\sqrt{n}}$.

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{4^n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{(5n-2)3^n}}$.

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}$.

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

7.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt[4]{n}}$.

7.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{(2n+1)^2\cdot\sqrt{3^n}}$.

7.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$.

7.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+3)}$.

7.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{9^n\cdot\sqrt[4]{n}}$.

7.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$.

7.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{7^n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

7.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$.

7.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{8^n(5^n+1)}$.

7.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

7.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{4^n(3^n+1)}$.

7.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{5^n(1+4n)}}$.

7.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+3)}$.

7.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{5^n\cdot\sqrt{4n+1}}$.

7.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot\frac{x^{3n}}{3^n}$.

7.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

7.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

7.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

7.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$.

10.3. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x - a$ вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \quad (10.9)$$

При $a = 0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \qquad (10.10)$$

который называют ***рядом Маклорена***.

Разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad (|x|<\infty);$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\quad (|x|<\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad (|x|<\infty);$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ \left(|x|<1\right);$$

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ \ (-1<x\le 1);$$

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\ \ (-1\le x\le 1);$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

$\left(|x|\le 1\right)$.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу умножения многочленов. При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Эти правила применяют, в частности, для приближенных вычислений значений функций и интегралов.

Пример 1. Используя разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$ $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена и правила умножения и сложения степенных рядов, найти разложения в ряд по степеням x для следующих функций:

1) $\left(1+x\right)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\dfrac{x-3}{\left(x+1\right)^2}$; 4) $e^x\sin x$; 5) $\ln\left(1+3x+2x^2\right)$.

Решения: 1) умножим почленно $1 + x$ на ряд Маклорена для функции e^x, который сходится на всей числовой оси, получим ряд

$$\left(1+x\right)e^x=\left(1+x\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\cdots+\frac{n+1}{n!}x^n+\cdots,$$

сходящийся при всех значениях x;

2) разложение в ряд Маклорена $\sin^2 x$ можно получить следующим образом:

$$\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\right)=$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots.$$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех значениях x.

Такой же результат можно получить, используя формулу

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos\ 2x)$$

и заменяя x на $2x$ в разложении $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots;$$

3) так как $\dfrac{x-3}{(x+1)^2} = (x-3)\cdot(x+1)^{-2}$, а

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \cdots,$$

то, умножая почленно этот ряд на $x-3$, получим

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = -3 + 7x - 11x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1} + \cdots.$$

Этот ряд сходится на интервале (–1; 1), так как на этом интервале сходится $(1+x)^{-2}$;

4) разложение в ряд функции $e^{-x}\cdot\sin x$ найдем почленным умножением ряда для e^{-x}, получаемого из ряда Маклорена для e^x заменой x на $-x$, на ряд Маклорена для $\sin x$:

$$e^{-x}\cdot\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \cdots.$$

Полученный ряд сходится к функции $e^{-x}\sin x$ на всей числовой оси;

5) функцию $\ln(1 + 3x + 2x^2)$ можно представить в виде

$$\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln((1 + x)(1 + 2x)) = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x).$$

Так как $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},\ (-1 < x \le 1)$, заменяя в этом разложении x на $2x$, получим

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\ \left(-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right).$$

Тогда $\ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) = \ln(1 + 3x+2x^2) =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n}, \ \left(-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right).$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,0001: 1) ln 1,1; 2) $\sqrt[4]{17}$.

Решения: 1) так как

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ..., \quad (-1 < x \le 1),$$

то, полагая $x = 0{,}1$, получим ряд для вычисления ln 1,1 с любой точностью:

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + ...$$

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления приближенного значения ln 1,1 с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}0953;$$

2) так как $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$, то для вычисления $\sqrt[4]{17}$ воспользуемся разложением:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$$

$$... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ..., \left(|x| < 1\right),$$

полагая в разложении функции $(1+x)^m$ $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$. Тогда

$$2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^2} - \cdots\right).$$

Для достижения требуемой точности $\sqrt[4]{17}$ достаточно ограничиться суммой трех первых членов ряда.

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0{,}01562 - 0{,}00037) \approx 2{,}0305.$$

Пример 3. Вычислить интегралы, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена: 1) $\int \sin x^2 dx$; 2) $\int \sqrt{x}e^x dx$; 3) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$.

Решения: 1) пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ и заменяя в нем x на x^2, получим

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Тогда

$$\int \sin x^2 dx = \sin x^2 = \int\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\,7} + \frac{x^{11}}{5!\,11} - \frac{x^{15}}{7!\,15} + \ldots + C \ , \ \left(|x| < \infty\right);$$

2) заменим функцию e^x ее рядом Маклорена. Тогда получим

$$\int \sqrt{x} e^x dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots)dx =$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} + \ldots + \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + \ldots)dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1!\cdot 5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{2!\cdot 7}x^{\frac{7}{2}} + \ldots + \frac{2}{n!\cdot(2n+3)}x^{\frac{2n+3}{2}} + \ldots + C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x \geq 0$;

3) так как $\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}}$, то

$$\sqrt{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - \ldots .$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^3}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - \ldots\right)dx =$

$= x - \frac{x^4}{1!\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^7}{2!\cdot 2^2\cdot 7} - \frac{1\cdot 3x^{10}}{3!\cdot 2^3\cdot 10} - \ldots + C,$ который сходится при $|x| < 1.$

Пример 4. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 значения следующих интегралов:

1) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 2) $I_2 = \int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$; 3) $I_3 = \int\limits_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx$.

Решения: 1) так как $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^8-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^{12}+\ldots\ \left(|x|<1\right).$$

Тогда $I_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}}=t-\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^9}{9}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^{13}}{13}+\ldots\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot5\cdot2^5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot9\cdot2^9}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot13\cdot2^{13}}+\ldots.$$

Для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда $I_1\approx 0{,}4969$;

2) пользуясь разложением $\cos x$ в ряд Маклорена, получим

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}+\ldots(x\ge 0).$$

Тогда

$$I_2=\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}dx=x-\frac{x^2}{2!\cdot2}+\frac{x^3}{4!\cdot3}-\frac{x^4}{6!\cdot4}+\frac{x^5}{8!\cdot5}-\ldots\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2!\cdot2}+\frac{1}{4!\cdot3}-\frac{1}{6!\cdot4}+\frac{1}{8!\cdot5}-\ldots.$$

Для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно взять сумму четырех первых членов ряда: $I_2\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}\approx 0{,}7635$;

Решение. 3) пользуясь разложением $\operatorname{arctg}x$ в ряд Маклорена, получим $\operatorname{arctg}\frac{x}{4}=\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4^3\cdot3}+\frac{x^5}{4^5\cdot5}+\frac{x^7}{4^7\cdot7}+\cdots\left(|x|\le 4\right)$.

Тогда $\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4^3\cdot3}+\frac{x^4}{4^5\cdot5}+\frac{x^6}{4^7\cdot7}+\cdots\left(|x|\le 4\right)$.

$$I_3=\int\limits_1^{1,5}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx=\int\limits_1^{1,5}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4^3\cdot3}+\frac{x^4}{4^5\cdot5}+\frac{x^6}{4^7\cdot7}+\cdots\right)dx=\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4^3\cdot3}+\frac{x^5}{4^5\cdot5}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^7}{4^7\cdot7}+\cdots\right)\Big|_1^{1,5}=\frac{1{,}5-1}{4}-\frac{1{,}5^3-1}{4^3\cdot3}+\frac{1{,}5^5-1}{4^5\cdot5}-\frac{1{,}5^7-1}{4^7\cdot7}+\cdots.$$

Получили знакочередующийся сходящийся ряд. Для достижения требуемой точности достаточно взять сумму трех первых членов полученного ряда. $I_3\approx 0{,}1211$.

Контрольные задания

Задача 8. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

8.1. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

8.2. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$.

8.3. $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.

8.4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

8.5. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \cos 2x dx$.

8.6. $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-x^3} dx$.

8.7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.8. $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$.

8.9. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$.

8.10. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$.

8.11. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$.

8.12. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$.

8.13. $\int_0^1 \cos \sqrt{x}\, dx$.

8.14. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$.

8.15. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

8.16. $\int_0^1 x^2 \cos \sqrt{x}\, dx$.

8.17. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

8.18. $\int_0^1 \cos \sqrt{x^2}\, dx$.

8.19. $\int_0^1 x^2 \sin \sqrt[3]{x}\, dx$.

8.20. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

8.21. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\cdot\ln(1+\sqrt{x})dx$.

8.22. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

8.23. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-e^{-x^2}}{x}dx$.

8.24. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

8.25. $\int\limits_0^{4} \frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x}dx$.

8.26. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x}}$.

8.27. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

8.28. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

8.29. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

8.30. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

Задача 9. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения.

9.1. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

9.2. $y' = \arcsin y + x,\ y(0) = 0,5$.

9.3. $y' = x + y^{-1},\ y(0) = 1$.

9.4. $y'' = xe^x + 2yy',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

9.5. $y'' = xy' + y\sin x,\ y\left(0\right) = 0,\ y'\left(0\right) = 1$.

9.6. $y'' = \cos x - y^2 + y' + 3x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

9.7. $y'' = xy - y' + \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

9.8. $y' = 2xy + y^3 - e^x,\ y(0) = 1$.

9.9. $y'' = x\cos x - y^2 + e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.10. $y' = y^2 - x^2,\ y\left(0\right) = 0$.

9.11. $y' = y^2 + x^2,\ y(0) = 0,5$.

9.12. $y' = y^2 + x^3,\ y(0) = 0,5$.

9.13. $y'\cdot\cos x + y\cos x - \sin x = 1,\ y(0) = 1$.

9.14. $2xyy'' - 3y' + y^3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

9.15. $y' = x^2 + \sin^2 x + 2y,\ y(0) = 1$.

9.16. $y'' = xy' + y,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

9.17. $y' = y + xe^{y},\ \ y(0) = 0$.

9.18. $y' = xy + e^{y},\ \ y(0) = 0$.

9.19. $y'' - xy' - y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

9.20. $y'' = xy' - y + 1,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

9.21. $y'' = x^{2} + yy' - e^{x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.22. $y'' = x^{2} - y^{2} + 2y',\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

9.23. $y'' = x^{2}y' + 2y - 2e^{-x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.24. $y'' = y' + x^{2} - y^{2},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.25. $y' = xe^{-2x} - y^{2} + x,\ \ y(0) = 1$.

9.26. $y' = 2x + y + x\cos x,\ \ y(0) = 1$.

9.27. $y'' = x\sin y',\ \ y(1) = 0,\ y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

9.28. $y'' = yy' - x^{2},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.29. $(1 + x^{2})y'' + xy' - y = 0,\ \ y\left(0\right) = 1,\ y'(0) = 1$.

9.30. $y' = x^{2} + xy + e^{-x},\ \ y(0) = 0$.

Задача 10. Вычислить приближенно с указанной степенью точности.

10.1. $e,\ \ \alpha = 0,0001$.

10.2. $e^{2},\ \ \alpha = 0,001$.

10.3. $\sqrt{e},\ \ \alpha = 0,0001$.

10.4. $\dfrac{1}{e},\ \ \alpha = 0,0001$.

10.5. $\sin 1^{\circ},\ \ \alpha = 0,00001$.

10.6. $\cos 10^{\circ},\ \ \alpha = 0,0001$.

10.7. $\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ \ \alpha = 0,001$.

10.8. $\sin\dfrac{\pi}{100},\ \ \alpha = 0,0001$.

10.9. $\sqrt[3]{80},\ \ \alpha = 0,001$.

10.10. $\sqrt{1,3},\ \ \alpha = 0,001$.

10.11. $\sqrt[3]{8,36},\ \ \alpha = 0,001$.

10.12. $\sqrt[5]{250},\ \ \alpha = 0,001$.

10.13. $\cos 2^{\circ},\ \ \alpha = 0,001$.

10.14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}},\ \ \alpha = 0,001$.

10.15. $\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ \ \alpha = 0,0001$.

10.16. $\dfrac{1}{\sqrt[7]{136}},\ \ \alpha = 0,001$.

10.17. $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0{,}001$. 10.18. $\sqrt{24}$, $\alpha = 0{,}001$.

10.19. $\sqrt[3]{7}$, $\alpha = 0{,}001$. 10.20. $\sqrt[3]{65}$, $\alpha = 0{,}001$.

10.21. $\sqrt[4]{17}$, $\alpha = 0{,}001$. 10.22. $\sin 80°$, $\alpha = 0{,}0001$.

10.23. $\sqrt[3]{e}$, $\alpha = 0{,}0001$. 10.24. $\sin 10°$, $\alpha = 0{,}0001$.

10.25. $\sqrt{82}$, $\alpha = 0{,}001$. 10.26. $\ln 1{,}9$, $\alpha = 0{,}0001$.

10.27. $\operatorname{arctg} 0{,}9$, $\alpha = 0{,}0001$. 10.28. $\ln 3{,}1$, $\alpha = 0{,}0001$.

10.29. $\ln 2$, $\alpha = 0{,}00001$. 10.30. $\ln 3$, $\alpha = 0{,}00001$.

11. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении данной темы следует изучить свойства двойных и криволинейных интегралов и правила их вычисления, возможности применения при решении геометрических и физических задач, задач механики.

Вопросы для изучения и самопроверки

1. Двойной интеграл и его свойства.
2. Вычисления двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.
3. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии и механики.
4. Криволинейный интеграл первого рода.
5. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
6. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода).
7. Вычисление криволинейного интеграла по координатам.
8. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

11.1. Двойной интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n частей s_1, s_2, …, s_n с площадями Δs_1, Δs_2, …, Δs_n. Внутри каждой элементарной области s_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и найдем значение функции $f(x_i; y_i)$ в этой точке. Составим сумму:

$$I_n = f(M_1)\cdot\Delta s_1 + f(M_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\cdot\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta s_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\cdot\Delta s_i.$$

Эта сумма называется ***n-й интегральной суммой*** для функции $f(x; y)$ по области D.

Диаметром области s_i назовем наибольшее из расстояний между точками границы этой области и обозначим d_i.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм I_n при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей s_i, не зависящий ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек M_i, то он называется ***двойным интегралом*** от функции $f(x; y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;y)ds$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x;y)ds = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\cdot\Delta s_i. \qquad (11.1)$$

Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойного интеграла.

1. $\iint\limits_D cf(x;y)ds = c\iint\limits_D f(x;y)ds,\ c = \text{const}.$

2. $\iint\limits_D (f_1(x;y) + f_2(x;y))ds = \iint\limits_D f_1(x;y)ds + \iint\limits_D f_2(x;y)ds.$

3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x;y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x;y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x;y)ds.$$

11.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $dx\cdot dy$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)ds = \iint\limits_D f(x;y)dxdy.$$

Область D называется ***правильной (простой) в направлении оси*** Ox (или Oy), если любая прямая, проходящая параллельно этой оси, пересекает границу области D не более чем в двух точках.

Например, область D на рис. 11.1 является неправильной в направлении оси Oy и правильной в направлении оси Ox (прямая MN пересекает границу области D в четырех точках).

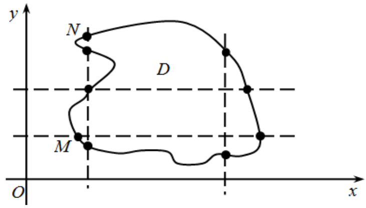


Рис. 11.1

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла следующим образом.

1. Пусть область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $y = b$, причем $a < b$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (рис. 11.2).

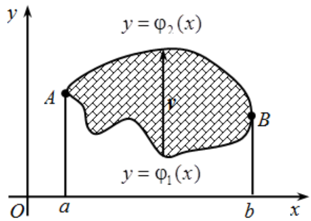


Рис. 11.2

При выборе внешнего интегрирования по переменной x (из рис. 11.2 видно, что $a \le x \le b$) для определения внутренних пределов интегрирования по переменной y по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Oy снизу вверх. Прямая сначала пересекает кривую $y = \varphi_1(x)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $y = \varphi_2(x)$, которую назовем *линией выхода*. Значение переменной y в области D меняется в пределах $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Тогда $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$. Правая часть формулы называется ***повторным интегралом***.

Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению повторного (двух определенных интегралов) интеграла вида

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)dy \right] dx . \qquad (11.2)$$

При вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в квадратных скобках) x считается постоянной.

2. Аналогичная формула вычисления двойного интеграла справедлива в случае, когда область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем $c < d$, $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ (рис. 11.3). Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\ y)dx\,. \tag{11.3}$$

При вычислении «внутреннего интеграла» y считается постоянной.

Формулы перехода от двойного интеграла к повторному показывают, что в двойном интеграле можно изменять порядок интегрирования:

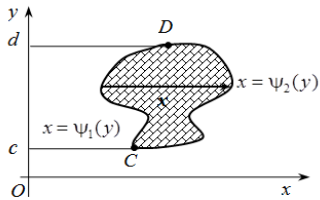


Рис. 11.3

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x;y\right)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx\,.$$

Если область интегрирования является неправильной, то ее можно представить как объединение правильных областей. Тогда двойной интеграл равен сумме двойных интегралов по этим областям.

Пример 1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$.

Решение. Построим область D (рис. 11.4).

Найдем точки пересечения линий $y = x^2$, $x + y = 2$, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad x + x^2 = 2\,,\ x^2 + x - 2 = 0\,,\ D = 1 + 8 = 9\,,\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2.$$

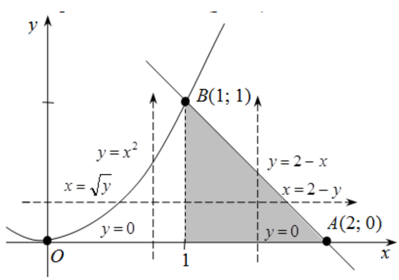


Рис. 11.4

Например, из первого уравнения системы находим: $y_1 = (x_1)^2 = 1$, $y_2 = (x_2)^2 = 4$. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (1; 1) и (–2; 4), одна из которых – $B(1; 1)$ – принадлежит границе области D.

Внешнее интегрирование по переменной *y*. Область интегрирования D расположена между прямыми $y = 0$, $y = 1$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x = \sqrt{y}$ до точек прямой $x = 2 - y$ (см. рис. 11.4). Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x;y)\,dx.$$

Внешнее интегрирование по переменной *x*. Так как верхний участок границы OBA области D задан двумя линиями OB и BA, то прямая $x = 1$ разбивает область D на области D_1: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ и D_2: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. В результате получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x;y)\,dy.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $y = -x$, $y = 2 - x^2$.

Решение. Построим область D (рис. 11.5). Найдем точки пересечения линий из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \quad -x = 2 - x^2, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1.$$

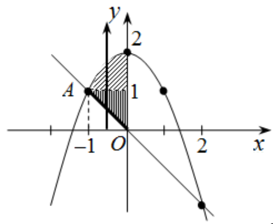


Рис. 11.5

Таким образом, $A(-1; 1)$ – точка пересечения линий в рассматриваемой области.

Область интегрирования D расположена между прямыми $x = -1$, $x = 0$, снизу ограничена прямой $y = -x$, сверху – параболой $y = 2 - x^2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D x\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{2-x^2} x\,dy = \int\limits_{-1}^{0} xy\Big|_{-x}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 - (-x)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 + x\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(2x - x^3 + x^2\right)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\left(1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{7}{12}\right) = -\frac{5}{12}.$$

Если проводить внешнее интегрирование по переменной y, то область D необходимо разбивать на две области прямой $y = 1$ и считать не один, а сумму двух повторных интегралов.

11.3. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии и механики

1. *Площадь плоской фигуры,* занимающей область D, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy. \qquad (11.4)$$

2. *Объем V тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;\ y)$, снизу – плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, можно найти по формуле

$$V = \iint\limits_D f\left(x; y\right)dxdy. \qquad (11.5)$$

3. *Площадь поверхности* $z = f(x;\ y)$, которая проектируется на область D плоскости Oxy, вычисляется по формуле

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (11.6)$$

4. *Масса пластинки* с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x;\ y)$, занимающей область D плоскости Oxy, вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x;\ y)dxdy. \qquad (11.7)$$

5. *Статические моменты относительно осей Ox и Oy* плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x;\ y)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho\left(x;\ y\right)dxdy, \qquad M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho\left(x;\ y\right)dxdy. \qquad (11.8)$$

6. *Координаты центра масс плоской* пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x; y)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \rho(x;\, y)\,dxdy}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \rho(x; y)\,dxdy}{m}, \qquad (11.9)$$

где M_x, M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно;

m – масса пластинки.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$.

Решение. Найдем точки пересечения линий из системы уравнений $\begin{cases} y = 2x+1, \\ y = x^2+1, \end{cases}$

$x(2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

Построим область интегрирования D (рис. 11.6).

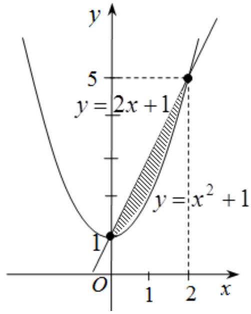


Рис. 11.6

Тогда

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2+1}^{2x+1} dy = \int\limits_0^2 dx \cdot y\Big|_{x^2+1}^{2x+1} = \int\limits_0^2 \left(2x+1-x^2-1\right)dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = 2y$, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.

Решение. Построим область интегрирования (рис. 11.7). Массу пластинки найдем по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x; y)dxdy = \iint\limits_D 2y\,dxdy\,.$$

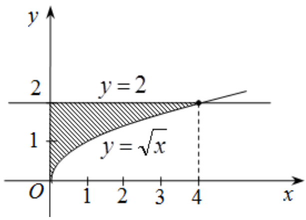


Рис. 11.7

Область D задается неравенствами: $0 \le x \le 4, \quad \sqrt{x} \le y \le 2$.
Следовательно,

$$m = \iint_D 2y\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 2y\,dy = \int_0^4 dx\; y^2\Big|_{\sqrt{x}}^2 = \int_0^4 dx\left(4-\left(\sqrt{x}\right)^2\right) =$$

$$= \int_0^4 (4-x)\,dx = \int_0^4 4dx - \int_0^4 x\,dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 16-8=8.$$

Пример 3. Вычислить объем V тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Данное тело ограничено параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси Oy, и плоскостями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 11.8).

Проекцией тела на плоскости Oxy является треугольник (рис. 11.9). Область интегрирования D задается неравенствами: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. Тогда

$$V = \iint_D z\,dxdy = \iint_D \left(4-x^2\right)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot \left(4-x^2\right) = \int_0^2 \left(4-x^2\right)dx \cdot y\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left(4-x^2\right)(2-x)\,dx = \int_0^2 \left(8-2x^2-4x+x^3\right)dx =$$

$$= \left(8x - 2\cdot\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 16 - 2\cdot\frac{8}{3} - 4\cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$$

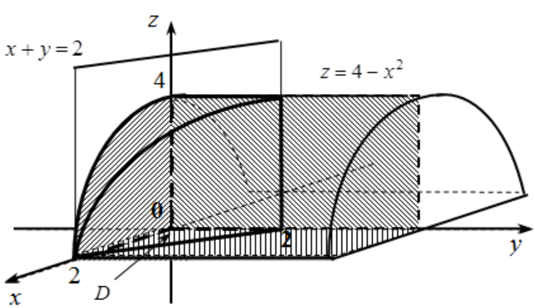


Рис. 11.8

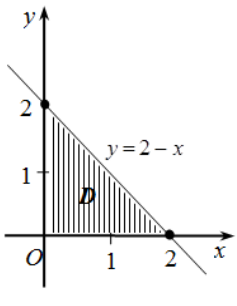


Рис. 11.9

Криволинейные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой. Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы первого и второго рода.

Напомним: кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (т. е. кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется ***кусочно-гладкой***.

11.4. Определение криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую гладкую или кусочно-гладкую кривую AB. Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена и ограничена на кривой AB.

Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $A = M_0$, M_1, M_2, …, M_i, …, M_{n-1}, $M_n = B$.

Выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* (рис. 11.10) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(M_i^*\right)\Delta l_i\,, \tag{11.10}$$

где Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$.

Сумма (11.10) называется *интегральной суммой* для функции $z = f\left(x; y\right) = f(M)$ по кривой AB.

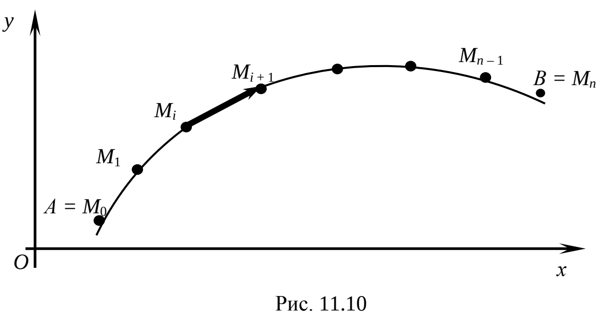


Рис. 11.10

Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$.

Определение. Если интегральная сумма (11.10) при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный I, то этот предел называется ***криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x;\ y)$ по кривой AB и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \int_{AB} f(M)\,dl = \int_{AB} f(x;y)\,dl\,. \qquad (11.11)$$

Функция $f(x;\ y)$ называется ***интегрируемой*** вдоль кривой AB, кривая AB – ***контуром интегрирования***, A – начальной, а B – конечной ***точками интегрирования***.

Криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл, за исключением того, что определенный интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ при перестановке пределов интегрирования меняет знак, а криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую – конечной, т. е.

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl\,.$$

11.5. Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода

Криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(M)dl$ при $f(M) \geq 0$ численно равен площади куска цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости Oxy, восставленных в точках $M(x;\ y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$ (рис. 11.11).

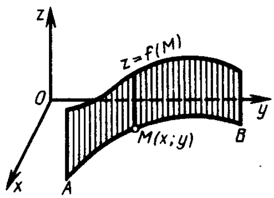


Рис. 11.11

В частности, если AB – не кривая, а отрезок прямой $[a;\ b]$, расположенный на оси Ox, то $f(x;\ y) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$ и криволинейный интеграл будет обычным определенным интегралом.

Если положить $f(M) \equiv 1$, то получим криволинейный интеграл $\int_{AB} dl$, который определяет длину дуги кривой AB.

11.6. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывные функции и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, а $f(x; y)$ – функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке A соответствует значение $t = \alpha$ а точке B – значение $t = \beta$. Тогда для любой точки $M(\varphi(t); \psi(t))$ кривой AB длину l дуги AM можно вычислять по формуле

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt. \tag{11.12}$$

Тогда $dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt$, а $\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{0}^{L} f\left(x(l), y(l)\right) dl =$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, т. е. имеющая непрерывную производную, то, принимая x за параметр ($t = x$), получим:

$$\int\limits_{AB} f(x; y)dl = \int_{a}^{b} f\left(x; y(x)\right)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{11.13}$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где AB – часть окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Так как

$$y^2 = a^2\sin^2 t,\ dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt = a dt, \text{ то } \int\limits_{AB} y^2 dl =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a dt = \frac{a^3}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2t\right) dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y dl$, где AB – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

Решение.

Так как $y=\sqrt{2x}$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}}dx$,

то $\int\limits_{AB} ydl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}}dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}dx=\dfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

Исходя из геометрического смысла криволинейных интегралов первого рода с их помощью можно вычислять площадь цилиндрических поверхностей и длины дуг, находить массу материальной кривой по ее плотности, моменты инерции относительно координатных осей, координаты центра масс кривых.

11.7. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода)

Рассмотрим на плоскости Oxy ориентированную гладкую дугу L (т. е. на дуге L указано направление и в каждой точке существует касательная). Пусть на L определена и непрерывна вектор-функция

$$\overline{a}=P(x;y)\vec{i}+Q(x;y)\vec{j}\ .$$

Разобьем дугу L на n элементарных дуг l_1, l_2, …, l_n и построим векторы $\Delta\vec{l}_k=\Delta x_k\vec{i}+\Delta y_k\vec{j}$, направленные из начала в конец дуги l_k. На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольную точку $M_k(x_k;\ y_k)$ (рис. 11.12) и составим сумму скалярных произведений $\vec{a}(x_k;y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k$, которая называется ***n-й интегральной суммой***.

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\vec{a}(x_k;y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k=\sum_{k=1}^{n}(P(x_k;y_k)\Delta x_k+Q(x_k;y_k)\Delta y_k).$$

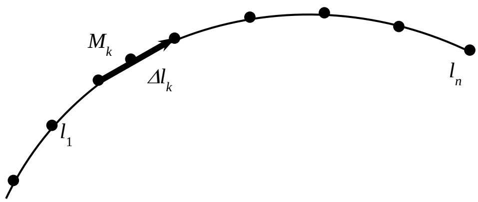


Рис. 11.12

Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max|\Delta l_k|\ \to 0$, называется ***криволинейным интегралом по координатам*** (***второго рода***) и обозначается

$$\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,. \qquad (11.14)$$

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла от вектор-функции $\vec{a}(x;y;z) = P(x;\ y;\ z)\vec{i} + Q(x;\ y;\ z)\vec{j} + R(x;\ y;\ z)\vec{k}$ по пространственной дуге L:

$$\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P\left(x;\ y;\ z\right)dx + Q\left(x;\ y;\ z\right)dy + R\left(x;\ y;\ z\right)dz =$$

$$= \lim_{\max|\Delta\vec{l}_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}\left(x_k;y_k;\ z_k\right)\cdot \Delta\vec{l}_k\,.$$

Свойства криволинейного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, из определения следует, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \vec{a}\cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} \vec{a}\cdot d\vec{l}\ ,$$

т. е. при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл меняет знак.

Механический смысл криволинейного интеграла. Пусть тело под действием переменной силы

$$\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$$

движется по дуге кривой. Тогда работа A этой силы может быть вычислена по формуле

$$A = \int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P\left(x;\ y;\ z\right)dx + Q\left(x;\ y;\ z\right)dy + R\left(x;\ y;\ z\right)dz\,. \qquad (11.15)$$

11.8. Вычисление криволинейного интеграла по координатам

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла следующим образом.

1. Если пространственная дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, то

$$\int\limits_L P\left(x;\ y;\ z\right)dx + Q\left(x;\ y;\ z\right)dy + R\left(x;\ y;\ z\right)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)\right]dt.$$

2. В частности, если плоская дуга L задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;\ b]$, то

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right]dx\,.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L xydx+(x^2+y)dy$, если L:

1) дуга параболы $y=\dfrac{x^2}{2}+1$, расположенная между точками $A(0;\ 1)$ и $B(2;\ 3)$;

2) отрезок прямой AB.

Решения:

1) сведем вычисление криволинейного интеграла к определенному, полагая $y=\dfrac{x^2}{2}+1$, $dy=\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)'dx=xdx$, $0\le x\le 2$.

Тогда $\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_0^2\left[x\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)dx+\left(x^2+\dfrac{x^2}{2}+1\right)x\,dx\right]=$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{x^3}{2}+x+\frac{3}{2}x^3+x\right)dx=\int\limits_0^2\left(2x^3+2x\right)dx=\left(2\frac{x^4}{4}+x^2\right)\Bigg|_0^2=8+4=12;$$

2) запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{3-1};\ \ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2};\ \ y=x+1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L xydx+(x^2+y)dy=\left|y=x+1, dy=dx, 0\le x\le 2\right|=\int\limits_0^2[x(x+1)dx+$$

$$+\left(x^2+x+1\right)dx]=\int\limits_0^2\left(2x^2+2x+1\right)dx=\left(2\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}+4+2=\frac{34}{3}.$$

Пример 2. Вычислить работу силового поля $\overline{F}=y^2\vec{i}+2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура окружности $x^2+y^2=4$, пробегаемой против часовой стрелки.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности: $x=2\cos(t),\ y=2\sin(t), 0\le t\le 2\pi$ (так как обход окружности ведется против часовой стрелки). Работу A силы $\vec{F}=\left(F_x;\ F_y\right)$ найдем по формуле

$$A=\int\limits_L\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int\limits_L F_xdx+F_ydy=\int\limits_L y^2dx+2xdy=$$

$$=\left|\begin{array}{lll} x=2\cos(t), & dx=-2\sin(t)dt, & 0\le t\le 2\pi\\ y=2\sin(t), & dy=2\cos(t)dt & \end{array}\right|=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2\sin(t))^2 (-2\sin(t))dt + 2\cdot 2\cos(t)\cdot 2\cos(t)dt \ \right] =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \sin^2(t) d\cos(t) + 8\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} (1-\cos^2(t))\, d\cos(t) + 4\int_0^{2\pi} \left(1+\cos(2t)\right) dt =$$

$$= \left(8\cos(t) - \frac{8}{3}\cos^3(t) + 4t + 4\cdot\frac{1}{2}\sin(2t) \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 8(1-1) - \frac{8}{3}(1-1) + 4\cdot 2\pi + 0 = 8\pi.$$

11.9. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Если функции $P(x;\ y)$, $Q(x;\ y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой области D с границей L, то справедлива следующая ***формула Грина***:

$$\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x;y)}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (11.16)$$

где замкнутый контур L обходится против часовой стрелки.

Пусть функции $P(x;\ y)$, $Q(x;\ y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл $\oint_L P(x;\ y)dx + Q(x;\ y)dy$ не зависел от пути интегрирования, целиком лежащем в области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось равенство $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$. Если выполняется это условие, то выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ представляет собой *полный дифференциал* некоторой функции u, т. е.

$$du(x;\ y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy\ .$$

Функцию $u(x;\ y)$ можно найти по следующей формуле

$$u(x;y)=\begin{cases}\int\limits_{x_0}^{x}P(x;y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x;y)dy+C,\\ \int\limits_{x_0}^{x}P(x;y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0;y)dy+C,\end{cases}$$

где C – произвольная постоянная.

Начальную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ были определены в этой точке.

Пример 1. Вычислить $\oint\limits_L (2xy-y)\,dx+x^2dy,$

где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1;0)$, $B(0;2)$, $C(1;0)$ (рис. 11.13).

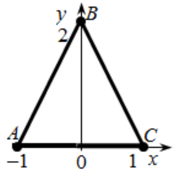


Рис. 11.13

Решение. Поскольку контур является замкнутым, применим формулу Грина с учетом того, что $P(x;y)=2xy-y,\quad Q(x;y)=x^2,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-1,$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x.$

Следовательно, $\oint\limits_L (2xy-y)dx+x^2dy=\iint\limits_{\Delta}(2x-2x+1)dxdy=$

$=\iint\limits_{\Delta}dxdy=S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}AC\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\,.$

Пример 2. Найти функцию $u(x;y)$ по ее полному дифференциалу:

$$du(x;y)=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx+\frac{x}{y}dy.$$

Решение. Выберем за начальную точку $M_0(1;1)$. Получим

$$u(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{x}{y}dy+C=\left|x_0=1,\ y_0=1\right|=$$

$$=\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln(1)\right)dx+\int\limits_{1}^{y}\frac{x}{y}dy+C=(\operatorname{arctg}(x)-\ln(x))\Big|_1^x+x\ln(y)\Big|_1^y+C=$$

$$=\operatorname{arctg}(x)-\ln(x)-\operatorname{arctg}(1)+x\ln(y)+C.$$

Поскольку $C-\operatorname{arctg}(1)$ также является постоянной, то окончательный ответ можно записать в виде $u(x;y)=\operatorname{arctg}(x)-\ln(x)+x\ln(y)+C.$

Контрольные задания

Задача 1. Изменить порядок интегрирования, здесь $f = f(x; y)$.

1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f dx$.

1.2. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_x^0 f dy$.

1.3. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$.

1.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f dy$.

1.5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

1.6. $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f dx$.

1.7. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f dy$.

1.8. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f dx$.

1.9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} f dy$.

1.10. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

1.11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

1.12. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_1^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx$.

1.13. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{e} f dy + \int_1^2 dx \int_{\ln x}^{1} f dy$.

1.14. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} f dx$.

1.15. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$.

1.16. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

1.17. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

1.18. $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f dx$.

1.19. $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy$.

1.20. $\int_0^1 dy \int_0^{y} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} f dx$.

1.21. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx$.

1.22. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy$.

1.23. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

1.24. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy$.

1.25. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$.

1.26. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f dx$.

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{x^2}} f dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f dy$.

1.28. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f dy$.

1.29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f dx$.

1.30. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy$.

Задача 2. Вычислить двойной интеграл.

2.1. $\iint\limits_D 4xy dxdy, \quad D: x=1, \ y=x^2, \ y=-\sqrt{x}$.

2.2. $\iint\limits_D 9x^2y^2 dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$.

2.3. $\iint\limits_D y\cos 2xy dxdy, \quad D: y=\frac{\pi}{2}, \ y=\pi, \ x=1, \ x=2$.

2.4. $\iint\limits_D xe^y dxdy, \quad D: x=0, \ y=2, \ y=x$.

2.5. $\iint\limits_D x\sin(x+y) dxdy, \quad D: 0\le x\le \pi, \ 0\le y\le \frac{\pi}{2}$.

2.6. $\iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy, \ D: x=2, \ x=4, y=x, y=2x$.

2.7. $\iint\limits_D e^x dxdy, \ D: y=1, \ y=2, \ x=0, \ x=\ln y$.

2.8. $\iint\limits_D x^3y^2 dxdy, \quad D: x^2+y^2\le 1$.

2.9. $\iint\limits_D (2x+y)dxdy,\quad D: y=x,\ y=x^3$.

2.10. $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy,\quad D: y=x^2,\ y=\sqrt{x}$.

2.11. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy,\quad D: x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ \ y\ge 0$.

2.12. $\iint\limits_D ydxdy,\quad D: x=1,\ x=2,\ \ y=2-x,\ \ y=\sqrt{2x-x^2}$.

2.13. $\iint\limits_D xdxdy,\quad D: x=-6,\ x=2,\ y=\dfrac{x^2}{4}-1,\ y=2-x$.

2.14. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ \ D: y^2=4x,\ x=1$.

2.15. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\ \ D: y=x,\ y=x+1,\ \ y=1,\ \ y=3$.

2.16. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D: x=0,\ x=2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}$.

2.17. $\iint\limits_D xdxdy,\quad D: x=0,\ x=2\pi,\ \ y=0,\ y=\sin x$.

2.18. $\iint\limits_D ydxdy,\quad D: x=0,\ x=2,\ y=\sqrt{2x-x^2}\ ,\ \ y=\sqrt{2x}$.

2.19. $\iint\limits_D dxdy,\quad D: x=1,\ x=e,\ y=0,\ \ y=\ln x$.

2.20. $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}dxdy,\quad D: x=\dfrac{1}{2},\ x=1,\ y=x^2,\ \ y=x^3$.

2.21. $\iint\limits_D ydxdy,\quad D: x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ y=1-x^2$.

2.22. $\iint\limits_D xdxdy,\quad D: x^2+y^2\le y$.

2.23. $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy,\quad D:\ 1\le x^2+y^2\le 4$.

2.24. $\iint\limits_D xydxdy$, D: треугольник $O(0;\,0)$, $A(1;\,0)$, $B(1;\,1)$.

2.25. $\iint\limits_D x^2dxdy,\quad D: x+y\le 1,\ x-y\le 1,\ x\ge 0$.

2.26. $\iint\limits_D |xy|\,dxdy,\quad D: x^2+y^2\le 4$.

2.27. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D:\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$.

2.28. $\iint\limits_D ydxdy,\quad D: x^2+y^2 \le x$.

2.29. $\iint\limits_D dxdy,\quad D: y^2 \le 8x,\ y \le 2x,\ y+4x-24 \le 0$.

2.30. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D: |y| \le |x|,\ |x| \le 1.$

Задача 3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (заданной неравенствами).

3.1. $y^2 = \dfrac{25}{3}x,\ x^2 = \dfrac{9}{5}y$.

3.2. $x+2y-4=0,\ y^2 = 4-x$.

3.3. $y^2-2y-x=0,\ x+y=0$.

3.4. $y=4x-x^2,\ y=2x^2-5$.

3.5. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$.

3.6. $y-x^2 \ge 0,\ y-\sqrt{x} \le 0$.

3.7. $y^2=-8(x-2),\ y^2=24(x+2)$.

3.8. $y=x^2,\ y=\dfrac{x^3}{3}$.

3.9. $y=x^3,\ y=6-4x,\ y=0$.

3.10. $x^2+y^2-8 \le 0,\ 2y-x^2 \ge 0$.

3.11. $x+y-2=0,\ y^2-4x-4=0$.

3.12. $y^2-6x \le 0,\ x^2+y^2-16 \le 0$.

3.13. $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2,\ x^2+y^2=4$.

3.14. $y^2-4y-x=0,\ x+y-6=0$.

3.15. $x-y+2=0,\ y^2=x,\ y=\pm 2$.

3.16. $x^2+y^2=1,\ x+\ y-1 \ge 0$.

3.17. $x^2-2x+y=0,\ x+y=0$.

3.18. $y^2-x-4=0,\ x+2y-4=0$.

3.19. $y=\sqrt{x},\ y=3\sqrt{x},\ x=1$.

3.20. $x-\sqrt{y}=0,\ x+y-2=0$.

3.21. $y^2=4x,\ y=2x$.

3.22. $xy=1, 2x+2y-5=0$.

3.23. $y=x^2-2x+1,\ x=0,\ y=0$.

3.24. $y=x^3+1,\ x=1,\ y=0$.

3.25. $y=\sin 2x,\ y=0,\ x=-\dfrac{\pi}{4}$.

3.26. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ y=\dfrac{x^2}{2}$.

3.27. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

3.28. $y=x(x-1)^2,\ y=0$.

3.29. $y^2=x(x-1)^2$.

3.30. $y^2=x^2-x^4$.

Задача 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

4.1. $z=1+x+y,\ z=0,\ x-y=1,\ x=0,\ y=0$.

4.2. $x+y+z=2,\ \ x^2+y^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4.3. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$.

4.4. $z=x^2+y^2+1,\ z=0,\ x=4,\ x=0,\ y=4,\ y=0$.

4.5. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4.6. $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2},\ \ z=0,\ x=2,\ y=4,\ y=0$.

4.7. $x+y+z=6,\ z=0,\ 3x+y-6=0,\ 3x+2y-12=0,\ y=0,\ z=0$.

4.8. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x+y-1=0,\ x=0,\ y=0$.

4.9. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ x+z-6=0$.

4.10. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=2x,\ x+y-6=0,\ y=1$.

4.11. $y=16\sqrt{2x},\ y=\sqrt{2x},\ z=0,\ x+z=2$.

4.12. $z=4y,\ z=0,\ x+y-6=0,\ \ y=\sqrt{3x}$.

4.13. $z=\dfrac{4}{5}x,\ z=0,\ x+y-6=0,\ x=\sqrt{3y}$.

4.14. $z=x^2+y^2,\ x+y-4=0,\ \ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4.15. $z = x + y + 1,\ y^2 = x,\ \ x = 1,\ \ z = 0,\ \ y = 0,\ \left(y \geq 0\right).$

4.16. $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + z^2 = 1.$

4.17. $z = x^2 - y^2,\ \ z = 0,\ x = 1.$

4.18. $x + y + z = 3,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

4.19. $z = \dfrac{y^2}{2},\ 2x + 3y = 12,\ \ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

4.20. $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y - 12 = 0,\ \ \ x = 0,\ y = 0\left(y > 0\right),\ z = 0.$

4.21. $2y^2 = x,\ x + 2y + z - 4 = 0,\ \ z = 0.$

4.22. $x^2 + z^2 = 1,\ x + y - 1 = 0,\ \ \ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

4.23. $z = 4 - x^2,\ 2x + y - 4 = 0,\ \ \ x \leq 0\left(x > 0\right),\ y = 0,\ z = 0.$

4.24. $z = x^2 + 2y^2,\ \ z = 0,\ x = 4,\ \ y = 1.$

4.25. $x^2 + 4y^2 = 4,\ z + 3x + 4y - 12 = 0,\ \ z = 1.$

4.26. $x^2 + y^2 = 4,\ z = x^3,\ \ z = 0\,(x \geq 0).$

4.27. $x^2 + 4z^2 = 4,\ y = x,\ \ y = 0,\ z = 0\left(x \geq 0\right).$

4.28. $z = 2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 0.$

4.29. $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 7 - x^2 - y^2.$

4.30. $z^2 + x^2 + y^2 = 4,\ y = x,\ \ x - \sqrt{3} \cdot y = 0,\ \left(z \geq 0\right).$

Задача 5. Найти координаты центра масс фигуры *D*, ограниченной заданными линиями (неравенствами) и плотности $\mu(x;\, y)$.

5.1. $y^2 = 2x,\ x = 2,\ y \geq 0,\ \ \mu(x;\, y) = x\, y.$

5.2. $y = x^2,\ x = 4,\ y = 0,\ \ \mu(x;\, y) = y.$

5.3. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2},\ \ \mu(x;\, y) = 1.$

5.4. $y = x^2,\ y = x,\ (x; y) = \sqrt{x}.$

5.5. $x^2 + y^2 = 1,\ y = 0,\ \mu(x;\, y) = 1.$

5.6. $y^2 = 4x,\ x = 1,\ y \geq 0,\ \mu(x; y) = y^2.$

5.7. $y = x^2,\ \ \ y = 1,\ \mu(x; y) = x + y.$

5.8. $y = 2 - x^2,\ 2x - y - 1 = 0,\ \ \mu(x; y) = -x.$

5.9. $x^2 + y^2 \leq 4,\ \ \ \mu(x; y) = y^2.$

5.10. $y = x^2,\ y = 1,\ \ \mu(x; y) = x^2 y.$

5.11. $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0,\ y \leq x, \mu(x;\, y) = 1.$

5.12. $y = x^2,\ y = x,\ x = 2,\ \ \mu(x; y) = x - 2y$.

5.13. $x + y - 2 = 0,\ y = x,\ y = 0\ \ \mu(x;\ y) = y(x+1)$.

5.14. $y = x^2,\ y = \sqrt{x},\ \mu(x;\ y) = 2x + y$.

5.15. $y = \sin x,\ y = 0,\ y = \dfrac{1}{2},\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}, \mu(x; y) = 1$.

5.16. $y = x^2,\ \ y = x^3,\ \mu(x;\ y) = \sqrt{x} \cdot y$.

5.17. $x^2 + y^2 - 10y = 0,\ x = 0,\ \mu(x; y) = 1$.

5.18. $x^2 - 2x + y = 0,\ x + y = 0,\ \ \mu(x;\ y) = \dfrac{1}{x}$.

5.19. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0,\ \ \mu(x;\ y) = x^3$.

5.20. $y = x^2 + 1,\ x + y - 3 = 0,\ \mu(x; y) = 1$.

5.21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ \mu(x; y) = 1$.

5.22. $2x - y = 0,\ 2x + y - 4 = 0,\ \ y = 0,\ \ \mu(x;\ y) = \sqrt{x}$.

5.23. $3x + 2y - 6 = 0,\ y = 1{,}5,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \mu(x;\ y) = xy$.

5.24. $x^2 - 6x + y^2 = 0,\ x = 0,\ \ y = 0,\ \mu(x; y) = 1$.

5.25. $x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ \mu(x;\ y) = xy$.

5.26. $x^2 + y^2 = 2x,\ y = \dfrac{x}{-\sqrt{3}},\ \ x \ge 0,\ \mu(x;\ y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

15.27. $x^2 + y^2 \le 1,\ \ \ \mu(x;\ y) = e^{-x^2 - y^2}$.

5.28. $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x^2 + y^2 - 4y = 0,\ \ \mu(x;\ y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

5.29. $x^2 - 2x + y = 0,\ x + y = 0,\ \ \mu(x;\ y) = \dfrac{1}{x}$.

5.30. $x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - 4y = 0, y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}, y \le \sqrt{3}x,\ \mu(x; y) = 1$.

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл по координатам.

6.1. $\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + y^2 dy,\ L: y = x^2,$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$.

6.2. $\int\limits_L \left(x - y\right)^2 dx,\ L$: ломаная OAB: $O(0;0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 1)$.

6.3. $\int\limits_L 2xydx,\ \ L: x = t,\ \ y = t^2,\ 0 \le t \le 1$.

6.4. $\int\limits_L (x+y)^2\, dx$, L: ломаная OAB: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2)$, $B(0;1)$.

6.5. $\int\limits_L y^2 dx + xydy$, L: $y^2 = x$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ -1)$.

6.6. $\int\limits_L (x-y)\,ydy$, L: $y^2 = x$ от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(1;\ -1)$.

6.7. $\int\limits_L x(y-2)\,dx + ydy$, L: ломаная OAB: $O(0;\ 0)$, $A(2;-2)$, $B(0;\ 1)$.

6.8. $\int\limits_L ydx + xdy$, $L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

6.9. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx$, $L: y = x - x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 0)$.

6.10. $\int\limits_L (2x-y)\,dy$, L: $y = 2x - x^2$ от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(2;\ 0)$.

6.11. $\int\limits_L \left(3 - x^3 y\right)dx$, L: $y = x - 1$ от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(0;\ -1)$.

6.12. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dy + xdx$, L: $x + y = 1$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 1)$.

6.13. $\int\limits_L xy^2 dx$, L: $y^2 = x - 1$ от точки $A(0;-1)$ до точки $B(-1;\ 0)$.

6.14. $\int\limits_L \left(3 - x^2 y\right)dy$, L: $y = -\sqrt{x}$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ -1)$.

6.15. $\int\limits_L \left(x - y^2\right)dy$, L: $y = x^3 + 1$ от точки $A(0;\ 1)$ до точки $B(1;\ 2)$.

6.16. $\int\limits_L (x-y)\,dx + ydy$, L: отрезок прямой, соединяющий точку $A(1;\ 1)$ и точку $B(3;\ 2)$.

6.17. $\int\limits_L \left(2 + xy^2\right)dx$, L: верхняя часть эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

6.18. $\int\limits_L \dfrac{dy}{x} - \dfrac{dx}{y}$, L: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

6.19. $\int\limits_L (x-y)\,dx + xdy$, L: $y = 2x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(-1;\ 2)$.

6.20. $\int\limits_L x^2dx + ydy,\ L\colon\ x = \sin t,\ y = \sin^2 t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

6.21. $\int\limits_L \dfrac{xdy}{x^2 + y^2}$, $L\colon\ y = 2x$ от точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(2;4)$.

6.22. $\int\limits_L y^2dx + 2xydy,\ L$: окружность $x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t$.

6.23. $\int\limits_L (x + y)dx - 2ydy,\ \ L\colon\ \ y = x^2 + 1$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(2;\ 5)$.

6.24. $\int\limits_L \left(x + y^2\right)dx - xdy,\ \ L$: отрезок прямой, соединяющий точки $A(4;2)$ и $B(2;0)$.

6.25. $\int\limits_L (y + x^2)dy,\ L\colon\ y = x^2 - 2x$ от точки $A(1; -1)$ до точки $B(2;\ 0)$.

6.26. $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx,\ L\colon\ x = \sqrt{\cos t},\ y = \sqrt{\sin t},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

6.27. $\int\limits_L (2 - y)dx + xdy,\ L\colon\ x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

6.28. $\int\limits_L \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, $L\colon\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$, от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 1)$.

6.29. $\int\limits_L x\cos ydx + y\sin xdy,\ \ L$: отрезок прямой от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(\pi;\ 2\pi)$.

6.30. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy,\ L\colon\ y = 1 - |1 - x|\ \ (0 \le x \le 2)$.

Задача 7. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги.

7.1. $\oint\limits_L (x + y)\,ds,\ \ L$: контур треугольника с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.

7.2. $\int\limits_L xyds,\ \ L$: контур треугольника, образованного линиями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$.

7.3. $\int\limits_L y ds,\ L\text{:}\ y^2 = 2x$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(2;\ 2)$.

7.4. $\int\limits_L (x-y)\,ds,\ L$: отрезок прямой от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 2)$.

7.5. $\int\limits_L \frac{yds}{\sqrt{x}},\ L:\ y^2 = x^3$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$.

7.6. $\int\limits_L x\,ds,\ \ L:\ x = t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 1$.

7.7. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds,\ L\text{:}\ x^2+y^2 = x$.

7.8. $\int\limits_L (3x - 2\sqrt[3]{y})\,ds,\ L\text{:}\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7.9. $\int\limits_L \frac{ds}{x+y},\ L: y = x+1$ от точки $A(–1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 1)$.

7.10. $\int\limits_L \frac{x}{y}ds,\ \ L: y^2 = 2x$ от точки $A(1;\sqrt{2})$ до точки $B(2;\ 2)$.

7.11. $\int\limits_L xyds,\ \ L$: прямоугольник, ограниченный линиями $x = 0$, $x = 2,\ \ y = 1,\ y = 2$.

7.12. $\int\limits_L \sqrt{2y}ds,\ \ L: x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

7.13. $\int\limits_L xds,\ L$: отрезок прямой соединяющий точки $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 3)$.

7.14. $\int\limits_L yds,\ \ L: y = \frac{x^2}{2}$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(2;\ 2)$.

7.15. $\int\limits_L x^2yds,\ L$: окружность $x^2+y^2 = 1$, лежащая в первой четверти.

7.16. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y},\ L: x - 2y - 4 = 0$ от точки $A(0;\ –2)$, до точки $B(4;\ 0)$.

7.17. $\int\limits_L xyds,\ \ L: x = 2\cos t,\ \ y = \sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7.18. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $L: x-2y-4=0$ от точки $A(0;\ -2)$, до точки $B(4;\ 0)$.

7.19. $\int\limits_L xyds$, L: контур треугольника, ограниченного линиями $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

7.20. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds$, $L: x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

7.21. $\int\limits_L xdx$, $L: x=t,\ y=t^2,\ 0\le t\le 1$.

Найти массу кривой L с заданной плотностью $\rho=\rho(x, y)$.

7.22. $L: y=e^x\ (0\le x\le 2),\ \rho(x;y)=y^2$.

7.23. $L: y=\ln x\ (1\le x\le 2),\ \rho(x;y)=x^2$.

7.24. $L: y^2=2x\ (0\le x\le 1),\ \rho(x;y)=|y|$.

7.25. $L: y=\frac{x^2}{2}\ (1\le x\le 2),\ \rho(x;y)=\frac{y}{x}$.

7.26. $L: x=3\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le\frac{\pi}{2}),\ \rho(x;y)=y$.

7.27. $L: x=\ln(1+t^2), y=2\operatorname{arctg} t-t\ \ (0\le t\le 1),\ \rho(x;y)=e^{-x}y$.

Найти длину дуги кривой.

7.28. $L: y=1-\ln\cos x\ (0\le x\le\frac{\pi}{4})$.

7.29. $L: x=\cos^3,\ y=\sin^3 t\ \ (0\le t\le\frac{\pi}{2})$.

7.30. $L: 2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t\ (0\le t\le 2\pi)$.

Задача 8. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу.

8.1. $du=(x^4+4xy^3)+(6x^2-5y^2)y^2dy$.

8.2. $du=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

8.3. $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.4. $du=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx+\frac{x}{y}dy$.

8.5. $du=(3x^2+y)dx+(2x-3)dy$.

8.6. $du=(3x^2y-4xy^2)dx+(x3-4x^2y+12y^3)dy$.

8.7. $du=(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy$.

8.8. $du=(1-e^{x-y}+\cos x)dx+(e^{x-y}+\cos y)dy$.

8.9. $du=\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

8.10. $du=\left(\dfrac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right)dx+\left(\dfrac{y}{(y-x)^2}-y^2\right)dy$.

8.11. $du=(3x^2+e^{2y})dx+(\sin y+2xe^{2y})dy$.

8.12. $du=(3x+3y)dx+(3x-4y)dy$.

8.13. $du=(\ln y-2x\operatorname{arctg} y)dx+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{x^2}{1+y^2}\right)dy$.

8.14. $du=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

8.15. $du=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^2}$.

Вычислить криволинейный интеграл по различным путям и объяснить совпадение результатов.

8.16. $\int\limits_L (x^3-2xy)dx-x^2dy$:

1) по отрезку прямой OC, где $O(0;\,0)$, $A(4;\,0)$, C(2; 8);
2) по ломаной OAC;
3) по дуге OC параболы $y=x^3$.

8.17. $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$.

L: 1) $y=x$;

2) $y^2=x$;

3) $x^2=y$.

от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$.

8.18. $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$.

L: 1) $y=x$;

2) $y=x+\sin x$;

от точки $O(0;\,0)$до точки $A(\pi;\,\pi)$.

8.19. $\int\limits_L (4xy+3)dx + \left(2x^2 - \frac{3}{2}y^2\right)dy$,

где L: 1) ломаная OAC;

2) ломаная OBC;

3) по дуге OC $y = \frac{x^2}{2}$,

где $O(0;\ 0)$, $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 8)$, $C(4;\ 8)$.

8.20. $\int\limits_L (4 - xy^2)dx + (x^2 - 3y)ydy$:

1) по отрезку OB прямой $y = 2x$;

2) по дуге OB параболы $y = x^2$;

3) по ломаной OAB,

где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$.

Вычислить криволинейный интеграл от полных дифференциалов.

8.21. $\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ 2)} 2xydx + x^2dy$.

8.22. $\int\limits_{(-1;\ -1)}^{(1;\ 0)} (x^3 + 4y^3)xdx + (6x^2 - 5y^2)y^2dy$.

8.23. $\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ \frac{\pi}{2})} e^x \cos ydy - e^x \sin ydy$.

8.24. $\int\limits_{(1;\ \frac{\pi}{6})}^{(2;\ \frac{\pi}{4})} \operatorname{tg} y\, dx + \frac{x}{\cos^2 y} dy$.

8.25. $\int\limits_{(0;\ -1)}^{(1;\ 0)} \frac{xdx - ydy}{(x-y)^2}$.

8.26. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

8.27. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(2;\ 2)} \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy$.

8.28. $\int\limits_{(0;\ 0)}^{(\pi;\ \pi)} \cos 2ydx - 2x \sin 2ydy$.

8.29. $\int\limits_{(1;\,0)}^{(6;\,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

8.30. $\int\limits_{(1;\,\pi)}^{(2;\,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

Задача 9. Применяя формулу Грина, преобразовать криволинейный интеграл к двойному интегралу:

9.1. $\oint\limits_L e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2\sin y)dy$.

9.2. $\oint\limits_L (x-2)y^2dx + x^2(1+y)dy$.

9.3. $\oint\limits_L (1-x)ydx + (1+y)dy$.

9.4. $\oint\limits_L xe^{xy}dx + ye^{-xy}dy$.

9.5. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dx + \ln(x^2 + y^2)dy$.

9.6. $\oint\limits_L \left(y - \frac{1}{1+x^2}\right)dx + (x + 2e^{2y})dy$.

9.7. $\oint\limits_L \left(\frac{2x}{y} + 3\cos 3x\right)dx + \left(2 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy$.

9.8. $\oint\limits_L \left(e^{xy} + 2x\cos y\right)dx + x^2ydy$.

9.9. $\oint\limits_L 4x^2 - y^2dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy\right)dy$.

9.10. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)(xdx + ydy)$.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру:

9.11. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy,\ L: x^2 + y^2 = 1$.

9.12. $\oint\limits_L y(\cos x - 4x^2y^2)dx - (y^2 - 2x^2)dy,\ L: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

9.13. $\oint\limits_L (x+y)^2 dx-(x^2+y^2)dy,\ L: x=0, y=0,\ x+y=1$.

9.14. $\oint\limits_L \frac{y}{x}dx+2\ln x\,dy,\ L: y=0,\ 2x+y-4=0,\ x=1$.

9.15. $\oint\limits_L y^2dx-2xydy,\ L: x=2\cos t, y=2\sin t$.

9.16. $\oint\limits_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x},\ L:$ контур ΔABC, $A(1;\,1)$, $B(2;\,1)$, $C(2;\,2)$.

9.17. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y\left(xy+\ln(x-\sqrt{x^2+y^2})\right)dy,$

$L: \begin{cases} 1\le x\le 4, \\ 0\le y\le 2. \end{cases}$

9.18. $\oint\limits_L x^2ydx+x^3dy,$

$L: \begin{cases} y^2=x, \\ x^2=y. \end{cases}$

9.19. $\oint\limits_L ydx-(x^2+y)dy,\ L: y=x-x^2, y=0$.

9.20. $\oint\limits_L y\,dx+(x+y^2)\,dy,\ L: y=x^2+1, y=2$.

9.21. $\oint\limits_L xy^2dy-x^2ydx,\ L: x^2+y^2=4$.

9.22. $\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy,\ L: x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

9.23. $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy,\ L: x^2+y^2-2x=0$.

9.24. $\oint\limits_L (e^y-x^2y)dx+(xe^y+xy^2-2y)dy,\ L: x^2+y^2=1$.

9.25. $\oint\limits_L \mathrm{arctg}x dy-dx,\ L: y=x^2,\ y=x$.

9.26. $\oint\limits_L (x+y)^2 dx-(x^2+y^2)dy, L\!: y=x, y=x^2.$

9.27. $\oint\limits_L e^x((1-\cos y)dx+(\sin y-y)dy,$

$L:\begin{cases}0\le x\le \pi,\\ 0\le y\le \sin x.\end{cases}$

9.28. $\oint\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx+\sin 2xydy,\ L:x^2+y^2=4$.

9.29. $\oint\limits_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2},\ L:y=x, y=2x, x=1, x=2$.

9.30. $\oint\limits_L (e^{x^2}-5y^2-7\sin x^2)dx+(\sin y^2+2x^2-\sqrt[3]{1+2y^2})dy$,

L: $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Список рекомендуемой литературы 3
6. Функции двух переменных 4
7. Неопределенный интеграл 22
8. Определенный интеграл 43
9. Дифференциальные уравнения 63
10. Ряды 93
11. Кратные и криволинейные интегралы 118

Учебное издание

Крючков Евгений Николаевич
Курзенков Сергей Владимирович
Воронкова Татьяна Борисовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В двух частях

Часть 2

Редактор *О. Г. Толмачёва*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 02.03.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 7,18.
Тираж 50 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.