МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

И. В. Шафранская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

В двух частях

Часть 1

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
в сфере высшего образования Республики Беларусь
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений образования, обеспечивающих
получение общего высшего образования по специальности
6-05-0811-04 Агробизнес*

Горки
Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия
2025

УДК 330.45(075.8)
ББК 22.18 я73
Ш30

*Одобрено методической комиссией
экономического факультета 27.05.2025 (протокол № 9)
и Научно-методическим советом
Белорусской государственной сельскохозяйственной академии
28.05.2025 (протокол № 10)*

Автор:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*

Рецензенты:
доктор экономических наук, доцент *С. В. Макрак*;
кандидат педагогических наук, доцент *О. Л. Сапун*

Шафранская, И. В.

Ш30 Исследование операций в экономике. Курс лекций : в 2 ч. Ч. 1 : учебно-методическое пособие / И. В. Шафранская. – Горки : Белорус. гос. с.-х. акад., 2025. – 246 с.
ISBN 978-985-882-695-6.

Приведена информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе методов исследования операций осуществляется решение задач по оптимизации управления предприятиями АПК. Издание предназначено для подготовки студентов к проведению научных исследований с применением методов исследования операций и персональных компьютеров.

Для студентов учреждений образования, обеспечивающих получение общего высшего образования по специальности 6-05-0811-04 Агробизнес.

УДК 330.45(075.8)
ББК 22.18 я73

ISBN 978-985-882-695-6 (ч. 1)
ISBN 978-985-882-694-9

© Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия, 2025

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и возрастающий объем стоящих перед экономистами задач требует использования количественных методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные решения по вопросам управления предприятиями АПК.

В этих условиях важное значение имеет обучение студентов основам исследования операций в экономике и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, связанных с планированием использования земельных, материальных, трудовых и денежных ресурсов, определения нормативных экономических показателей, параметров работы предприятий АПК, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятиях.

В данном курсе лекций излагаются основные понятия и принципы исследования операций, элементы теории графов и сетевого планирования, теории игр, оптимального упорядочения, управления запасами и массового обслуживания. Рассматриваются вопросы линейного программирования, двойственных объективно обусловленных оценок, устойчивости оптимального решения, оптимизации принимаемых целочисленных решений.

Примеры, иллюстрирующие теорию, ориентированы на учет реальных производственных ситуаций, предполагают широкое использование персональных компьютеров и учитывают современные достижения в развитии количественных методов и моделей.

Порядок размещения материала предполагает переход от простых к более сложным темам.

Также освещены преимущественно те модели и методы, которые реально используются в процессе решения и анализа экономических задач, наиболее часто применяются при написании курсовых, научных и дипломных работ.

В настоящее время исследование операций – это одна из быстроразвивающихся отраслей наук. Задачи исследования операций широко применяются во всех областях, для нахождения оптимального их решения используются исходные алгоритмы.

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА

1.1. Понятие об исследовании операций

Исследование операций представляет собой комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами.

Как самостоятельное научное направление исследование операций сформировалось в начале 40-х гг. XX в. Среди первых исследований в этом направлении можно назвать работу Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», которая вышла в 1939 г., и работу Д. Б. Данцига, посвященную решению линейных экстремальных задач, которая вышла в 1947 г.

В 1939–1940 гг. методы исследования операций применялись для решения в основном военных задач, в частности для анализа и исследования боевых операций. Отсюда и возникло название дисциплины. За разработку метода линейного программирования в 1965 г. Л. В. Канторовичу, В. С. Немчинову была присуждена Ленинская премия. В 1975 г. Л. В. Канторович и Т. Купманс получили Нобелевскую премию за вклад в теорию оптимизации распределения ресурсов. С увеличением масштабов производства, с развитием форм и методов организации управления экономическими системами совершенствовались и методы исследования операций в экономике, расширялся круг решаемых этой наукой задач.

Сегодня методы исследования операций нашли широкое применение в различных областях. С помощью методов математического программирования решаются задачи функционирования системы транспорта, управления гидросистемами, муниципального хозяйства, электросистем, почтовой службы, нефтяных компаний, банков и т. д. Успешно решаются вопросы профессиональной подготовки кадров для социально-экономических систем, увеличения размера продаж предприятий, оптимизации инвестиций в производство, раскроя материалов при промышленном производстве и т. д.

Большой вклад в формирование и развитие этой науки внесли зарубежные ученые Р. Акофф, Р. Беллман, Дж. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Ч. Черчмен, А. Кофман и др. Среди русских ученых можно назвать таких, как Л. В. Канторович, В. В. Новожилов, Д. Б. Юдин, Н. П. Федоренко и др. (прил. А).

В настоящее время получают развитие модели управления организацией, позволяющие учесть возрастающую роль неопределенности и рисков при анализе конкретной экономической ситуации. Например, модель оптимизации портфеля оптовых закупок торгово-коммерческой организации, позволяющая учесть как разницу в оптовой и розничной цене, так и интенсивность продаж по каждому виду товара; модель управления кредитными ресурсами, привлекаемыми как для пополнения оборотных средств, так и для технической модернизации оборудования с учетом различных вариантов производственной деятельности предприятия; модель перепрофилирования производства на выпуск новых видов продукции с целью повышения конкурентоспособности продукции предприятия; модель оптимизации диверсифицированного портфеля ценных бумаг, позволяющая обеспечить стабильность получения положительного результата и т. п.

В последнее время при решении практических труднорешаемых задач исследования операций используются алгоритмы. Первые примеры труднорешаемых задач были описаны в начале 60-х гг. в работах Юриса Хартнаниса и Ричарда Стернса, позднее – в работах Рональда Фишера, и Михаэля Рабина. К данному классу можно отнести задачи по теории автоматов, математической логике, формальной теории языков. В большинстве случаев для решения труднорешаемых задач используются приближенные методы их решения, в частности метод «ветвей и границ», метод динамического программирования, методы отсечений, метод Лагранжа (см. прил. А ресы подсистем (или подразделений) не всегда согласуются между собой и могут быть противоположны.

Целью исследования операций в экономике является количественное обоснование принимаемых решений по организации управления системами.

Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всего объекта (системы), называется *оптимальным*, а решение, наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям (подсистем) этого объекта, называется *субоптимальным*.

Например, рассмотрим задачу управления запасами молокоперерабатывающего предприятия.

Производственный отдел предприятия стремится выпускать как можно больше продукции, т. е. молока и молочных продуктов промышленной выработки при наименьших затратах. Поэтому этот отдел заинтересован в выпуске продукции большими партиями, так как такое производство снижает затраты в расчете на единицу молочной продукции. Но выпуск продукции большими партиями требует создания и больших объемов запасов сырья. К тому же данная продукция должна быть реализуемой.

Отдел сбыта тоже заинтересован в больших запасах готовой молочной продукции, чтобы удовлетворять запросы потребителей в любой момент времени и в любом количестве.

Но отдел сбыта, стремясь продать как можно больше готовой молочной продукции, должен одновременно предлагать покупателю и ее широкий ассортимент, т. е. не только масло, сметану, творог и т. д., а творог, сметану разной жирности и в различной упаковке, разные виды масла: сливочное, крестьянское, шоколадное и т. д.

Поэтому между производственным отделом и отделом сбыта часто возникает конфликт по поводу ассортимента готовой молочной продукции. При этом отдел сбыта настаивает на производстве продукции, выпускаемой в небольших количествах даже тогда, когда эта продукция убыточна, а производственный отдел требует исключения ее из ассортимента.

Финансовый отдел стремится к минимизации финансовых средств, необходимых для работы предприятия, поэтому он заинтересован в уменьшении объемов запасов, как сырья, так и готовой молочной продукции на складах. Таким образом, требования к размерам запасов у различных подразделений молокоперерабатывающего предприятия разные. И в этой ситуации возникает вопрос, какая же стратегия в отношении запасов более выгодна для предприятия в целом. Это одна из задач исследования операций в экономике.

Так, для изучения предмета исследования операций в экономике необходимы знания таких дисциплин, как: высшая математика, математическая статистика, теория вероятности, вычислительная техника и т. д., а также знания всех дисциплин, которые изучают протекающие в объектах АПК процессы, т. е. таких курсов, как растениеводство, животноводство, экономика, организация, управление производством, хранение и переработка продукции и т. д.

1.2. Системный подход – это научная основа принятия решений (понятие системы, строение системы, система и среда, классификация систем)

Системный подход предполагает рассмотрение любого объекта или процесса, протекающего в АПК, в качестве целостной сложной динамической системы.

Системный подход представляет собой совокупность методологических принципов и теоретических положений, позволяющих рассматривать каждый элемент системы в его связи и взаимодействии с другими. Его сущность состоит в определенной направленности и последовательности анализа систем путем изучения их структуры, состава систем, характера взаимосвязей между элементами, между подсистемами, их устойчивости и чувствительности. Важно также рассмотрение системы во всех стадиях ее жизненного цикла, что позволяет выяснить ее взаимодействие с другими системами и окружающей средой. Наиболее важным в системном подходе является определение цели системы, так как цель определяет характер функционирования системы, ее развитие.

Понятия системы связано с наличием некоторого множества совокупности элементов. Но не всякое множество элементов образует систему. Система – это не механический набор, а совокупность взаимодействующих между собой элементов.

Так, взаимосвязи и взаимодействия полей севооборота как системы проявляются в определенном их чередовании с учетом последствия предшественников. В то же время для определения системы недостаточно лишь наличия взаимосвязей и взаимодействия между элементами данного множества. Система обязательно предполагает целенаправленное взаимодействие, т. е. имеет определенную цель как результат взаимодействия между элементами исследуемого множества.

Так, результатом чередования культур в севообороте является снижение засоренности полей, заболеваемости сельскохозяйственных культур с целью повышения их урожайности.

При этом важно уметь отделить систему от среды, с которой взаимодействует система, т. е. любая *система* – это конечное множество функциональных элементов и отношений между ними, выделенное из среды в соответствии с определенной целью.

В последнее время при изучении экономических систем наряду с их свойствами и взаимосвязями между элементами все большее внимание уделяют и наблюдателю, т. е. человеку, выявляющему особенности изучаемого объекта или процесса. Таким образом, *система* есть отражение в сознании исследователя, наблюдателя свойств системы, ее элементов при решении задач исследования операций. Так, изучение товара или прогнозирование рынка не дает должного эффекта, а только комплексный подход позволяет эффективно прорваться на рынок с товарами и услугами, особенно с новыми товарами и оригинальными услугами. Следовательно, к решению любой проблемы необходимо подходить с позиций системного анализа.

Любую систему можно подразделить на подсистемы. *Подсистема* представляет собой выделенное по определенному правилу из системы целенаправленное подмножество взаимосвязанных элементов, которые взаимодействуют между собой, реализуют определенную функцию, необходимую для достижения цели, поставленной перед системой в целом. Например, биржи, представляя собой совокупность элементов, определенным образом связанных и определяющих главную функцию системы, одновременно являются подсистемами более крупной системы – рыночной. Таким образом, подсистема обладает свойствами системы (в частности, свойством целостности). Этим подсистема отличается от группы элементов, для которых не определена подцель и не выполняется свойство целостности.

Расчленяя систему на подсистемы, следует иметь в виду, что выделение подсистем зависит от цели и может меняться по мере ее уточнения и развития представлений исследователя об анализируемом объекте или процессе.

Каждая подсистема состоит из упорядоченной совокупности элементов, имеющих свою постоянную структуру. Подсистему можно расчленять на элементы различными способами в зависимости от формулировки задачи, цели ее уточнения в процессе системного анализа. При необходимости можно изменять принцип расчленения, выделяя другие элементы подсистемы, и получать с помощью этого нового расчленения более адекватное представление об анализируемом объекте или процессе. Следовательно, *элемент* – это предел расчленения подсистем с точки зрения аспекта рассмотрения системы, решения конкретной задачи, поставленной цели.

Все элементы подсистемы подразделяются на:

– первичные,

– вторичные.

Вторичные элементы можно не рассматривать при исследовании системы. Не включение хотя бы одного первичного элемента в подсистему и систему нарушает установившиеся связи и превращает ее в качественно новый объект. Например, если при создании рыночной системы исключить такой ее элемент, как финансовые рынки, то рассматриваемая система уже не будет рыночной.

Каждый элемент выполняет свое собственное назначение в подсистеме. Наряду с этим все элементы находятся между собой в теснейшем взаимодействии и неразрывном единстве. Но отдельные элементы еще не создают целостности структуры подсистемы и системы. Органическое целое образуется тогда лишь, когда между отдельными элементами устанавливаются устойчивые внутренние связи, благодаря которым подсистема и система приобретают целостный характер и новые качества.

Связь одновременно характеризует и строение (статику), и функционирование (динамику) системы. *Связь* – это ограничение степени свободы элементов, т. е. элементы, вступая во взаимосвязи друг с другом, утрачивают часть своих свойств, которыми они обладали в свободном состоянии.

Связи в конкретных системах могут быть одновременно охарактеризованы несколькими признаками.

Характеристика связей:

1) по направлению связи делят на направленные и ненаправленные;

2) по силе связи делят на сильные и слабые;

3) по характеру связи подразделяют на связи подчинения (часть-целое), связи порождения (т. е. причинно-следственные связи), равноправные связи, связи управления;

4) по месту приложения связи подразделяют на внутренние и внешние;

5) по направленности процессов в системе в целом или в отдельных ее подсистемах связи делят на прямые и обратные.

Очень важную роль в моделировании систем играет понятие обратной связи. *Обратная связь* может быть положительной, т. е. сохраняющей тенденции происходящих в системе изменений того или иного выходного параметра, и отрицательной, т. е. направленной против сохранения требуемого значения этого параметра. Обратная связь является основой саморегулирования, развития систем, приспособления их к меняющимся условиям существования.

Теоретически, для того чтобы система не распалась на части, суммарная сила внутренних связей (т. е. связей между элементами системы) должна быть больше, чем суммарная сила внешних связей (т. е. связей между элементами системы и элементами среды).

Среда – это совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства меняются в результате поведения системы.

При исследовании объекта требуется выяснить, что собой представляет объект, что в нем обеспечивает выполнение поставленной цели. При этом *цель* рассматривают как заранее мыслимый результат сознательной деятельности человека. В этих случаях систему отображают путем расчленения на подсистемы, элементы со взаимосвязями.

При этом любую экономическую систему рассматривают как открытую, постоянно взаимодействующую со средой, учитывая этот факт при ее исследовании. Но при этом невозможно учесть все объекты, не включенные в систему и отнесенные к среде. Например, среда – это то окружение, в котором действует предприятие (т. е. система). Среда состоит главным образом из участников рыночных отношений. От их поведения, целевых установок и интересов в большей или меньшей степени зависят результаты хозяйственной и коммерческой деятельности предприятия.

Все *факторы среды* подразделяют на управляемые и неуправляемые. Примером управляемого фактора среды является поведение покупателей продукции. С помощью системы формирования спроса и стимулирования сбыта, маркетинговых коммуникаций предприятие в состоянии изменить поведение потребителей в своих интересах, сделать их, например, постоянными клиентами-покупателями своих товаров.

Примером неуправляемых факторов среды являются природно-климатические факторы, влияющие на результаты работы аграрных формирований. Другим примером неуправляемых факторов среды является государственное законодательство, регулирующее предпринимательскую и другие формы хозяйственной деятельности предприятия (в частности, налоговое законодательство). И предприятие вынуждено приспосабливаться к неуправляемым факторам среды, которые должны быть отражены при исследовании системы, что поможет выработать мероприятия, позволяющие снизить неблагоприятное воздействие неуправляемых факторов на систему.

При этом при исследовании систем отражают лишь наиболее существенные элементы, подсистемы и связи, которые мало меняются при текущем функционировании системы и обеспечивают существование системы и ее основных свойств, т. е. организованность системы, устойчивую упорядоченность ее элементов и связей. Определенные взаимосвязи, взаиморасположение составных частей системы, ее устройство отражает структура системы (в переводе с латинского означает строение, расположение, порядок). Одна и та же система может быть представлена по-разному в зависимости от стадии познания объекта, от его цели.

Моделируя функционирование системы, необходимо разделить ее на определенные части, т. е. подсистемы, которые являются системами более низкого уровня и характеризуются наличием ограниченного и конечного числа элементов, находящихся во взаимосвязях между собой.

Любая система представляет собой нечто целое, в то же время она состоит из подсистем, каждую из которых можно рассмотреть как самостоятельную систему, и наоборот, любая система, представляя собой нечто целое, в то же время является подсистемой некоторой более крупной системы.

С одной стороны, *элементом* считается структурная единица, способная к относительно самостоятельному осуществлению определенной операции, не подлежащая дальнейшему расчленению на части на данном уровне анализа подсистемы или системы.

С другой стороны, *элемент* подсистемы или системы представляет собой динамическую ячейку, изменяющую с течением времени свое состояние под воздействием внешних и внутренних факторов, воспринимающую входные и выдающую выходные сигналы в процессе взаимодействия с другими элементами подсистемы или системы.

Элементы характеризуются следующими *особенностями*:

1) в каждый данный момент времени состояние элемента может быть количественно описано с помощью некоторой величины, называемой его мгновенной характеристикой. Например, курс акций организации на фондовой бирже составил 100 долларов на 01.07.2025 г.;

2) мгновенная характеристика элемента изменяется с течением времени по определенным законам функционирования. Например, колебание курса акций организации на фондовой бирже за 3 месяца составило 25 %;

3) характер изменения мгновенной характеристики элемента может описываться вероятностным процессом. Например, неблагоприятные погодные условия в Латинской Америке могут повлиять на мировые цены на кофе.

Известно много различных вариантов *классификации систем*.

Каждый тип систем должен качественно отличаться от других, а так как качественное отличие обеспечивается количеством, составом входящих в систему элементов и характером отношений между ними, то требуется выделить количественные, структурные и составные характеристики.

Количественно все подсистемы некоторой системы подразделяются на моноподсистемы (которые характеризуются одним свойством, одним элементом, одной связью) и полиподсистемы (характеризующиеся многими свойствами, связями). Примером моноподсистемы является амеба, полиподсистемы – биржа как подсистема рынка.

По составу системы подразделяются на статические и динамические. Для статической системы характерно то, что она находится в состоянии покоя, ее состояние с течением времени остается постоянным, например, построенный дом. Динамическая система изменяет свое состояние во времени. Динамические системы подразделяются на функционирующие и развивающиеся. *Функционирующие* – это те, у которых процесс перехода из состояния в состояние не сопровождается сменой качества, цели, например, автомобиль, персональный компьютер. *Развивающиеся* – это те, у которых изменение состояния приводит к смене качества. Например, человеческий организм, рыночная система.

Структурно, т. е. по характеру взаимоотношений между элементами системы, а также между системой и средой системы могут подразделяться на:

1) открытые и закрытые;
2) детерминированные и вероятностные;
3) простые и сложные.

Системы делятся на открытые и закрытые по характеру их взаимоотношений со средой. Большинство систем открытые, так как они постоянно обмениваются энергией, информацией со средой. Например, открытая рыночная система. Система называется закрытой, если в нее не поступает и из нее не выделяется энергия или информация. Например, экономика бывшего СССР.

Система называется детерминированной, если ее поведение полностью объяснимо и предсказуемо на основе информации об элементах системы и отношениях между ними. Например, изменение величины спроса и предложения. Для вероятностной системы (т.е. случайной, стохастической) знание элементов и отношений между ними в данный момент времени позволяет только предсказать вероятность нахождения системы в том или ином состоянии в последующие моменты времени. Например, становление рыночных отношений в Республике Беларусь.

Характерных черт «сложности» много и до сих пор еще нет общепринятого определения понятия «сложная система». Примером простой системы являются спрос, предложение, а сложной – социальная система.

Несмотря на различия выделенных систем, все они обладают общими свойствами или *характеристиками*. Системы характеризуются следующими *свойствами*:

1) свойство *целостности* проявляется через взаимодействие элементов системы в соответствии с целью ее функционирования. Свойство целостности характеризуется появлением качественно новых характеристик у системы, не присущих ее элементам. Так, сельскохозяйственное предприятие как система характеризуется показателями. Но характеристика отрасли в целом не может быть получена путем суммирования показателей сельскохозяйственного предприятий. Отрасль как система более высокого порядка обладает новыми не присущими предприятиям свойствами, которые должны получить отражение в новой системе показателей;

2) свойство *связанности* системы проявляется в форме упорядоченности отношений между элементами определенной внутренней структуры. Используя это свойство, и выделяют рассматриваемую систему из окружающей среды;

3) свойство *разнообразия* системы зависит от числа элементов системы, возможных состояний каждого элемента и вероятности этих состояний. Каждый элемент обладает разными свойствами и проявляет их по-разному. Целенаправленное функционирование системы возможно только благодаря ограничению разнообразия элементов в силу их взаимодействия между собой. Такое ограничение лежит в основе управления системой;

4) свойство *сложности* системы зависит от ее величины (числа элементов, образующих систему, степени разветвленности внутренней

4) *способность и стремление к целеобразованию*. В отличие от технических систем, которым цели задаются извне, в экономических системах цели формируются внутри системы.

Таким образом, все выявленные особенности экономических систем необходимо учитывать при моделировании, которое является основным способом исследования систем.

1.3. Модели исследования операций (понятие модели, классификация моделей, принципы построения экономико-математических моделей, типовые модели исследования операций)

Для изучения процессов управления производством, нахождения наилучшего решения хозяйственной ситуации в конкретных экономических условиях создаются модели.

Модель позволяет имитировать поведение системы в различных условиях, включая и такие, которые в действительности редко встречаются или связаны с большими затратами ресурсов или риском. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. В общем смысле слова *модель* – это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, получая знания из исследования данного аналога. При этом следует иметь в виду, что сходство между моделью и оригиналом наблюдается в наиболее существенных чертах с точки зрения цели исследования.

По своей природе модели могут быть физическими и математическими. Физические модели похожи на оригинал по физической природе, но отличаются от оригинала размерами, скоростями и т. д. Математические – это те модели, которые не похожи на оригинал, но с помощью математических уравнений или неравенств описывают протекающие в оригинале экономические процессы. *Математическая модель* – это способ описания операции, позволяющий исследовать ее математическими методами. При этом под *операцией* понимают управляемое мероприятие, направленное исследователем на выбор стратегии (параметров, характеризующих изучаемую систему), позволяющей достичь поставленную цель.

В операционных исследованиях применяются только математические модели.

Математическая модель – это концентрированное выражение наиболее существенных взаимосвязей и закономерностей поведения исследуемой системы, записанное в математической форме. Но так как все особенности и условия функционирования системы учесть в модели невозможно, то необходимо и достаточно учесть в модели все основные условия развития системы (первичные элементы и их связи).

Исследование систем на их моделях и перенесение полученных знаний на оригинал при управлении его поведением называется *моделированием*.

Классификация моделей. По временным характеристикам (т. е. по периоду планирования) все модели делятся на:

1) долгосрочные (срок планирования – 5–10 лет);

2) среднесрочные (период планирования – 3–5 лет);

3) краткосрочные (1–3 года);

4) модели оперативного планирования (до 1 года).

В современных условиях наибольшее распространение получили модели краткосрочного и оперативного планирования.

По характеру взаимосвязей компонентов модели делятся на:

1) детерминированные – это модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Такая модель может быть описанием как вероятностной системы (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированной;

2) стохастические – это модели, которые описывают случайные процессы, подчиненные законам теории вероятности. При этом стохастические модели реальнее отражают экономические процессы, которые, как правило, имеют вероятностный характер, так как результаты хозяйственной деятельности зависят не только от управляемых человеком факторов, но и находятся в зависимости от действия случайных факторов (в частности, погодно-климатических). Результаты решения стохастической модели позволяют обосновать мероприятия, способствующие снизить влияние случайных факторов на конечные результаты производства:

1) создание страховых фондов кормов;

2) изменение направлений использования сельскохозяйственной продукции в зависимости от случайных исходов производства;

3) формирование рационов кормления животных и т. д.

В зависимости от учета фактора времени модели делятся на:

1) статические;

2) динамические.

Модель носит динамический характер, если в процессе решения задачи ряд технико-экономических коэффициентов изменяет свое значение. Если же при решении задачи технико-экономические коэффициенты остаются неизменными, то имеем статическую модель.

В зависимости от уровня управления системами в АПК модели делятся на:

1) межотраслевые, т. е. модели, описывающие взаимоотношения между отдельными отраслями;

2) отраслевые, т. е. модели, описывающие взаимоотношения внутри отрасли;

3) региональные;

4) внутрихозяйственные.

Отличие моделей более низкого уровня управления от более высокого состоит в том, что:

1) они больше зависят от внешней среды;

2) показатели их более дезагрегированы, т. е. такие модели более детально описывают все процессы, протекающие в системе, и изучаемый объект описывается как бы изнутри, изучаются внутренние связи между его элементами, внутренняя структура модели.

Исходя из применяемого математического аппарата модели делятся на:

1) эконометрические, которые описывают зависимость результата производства от влияния на него одного или нескольких факторов (например, производственные функции). Такие модели предназначены в основном для выявления тенденций и закономерностей, которые были в прошлом, чтобы с их помощью оценивать будущее;

2) балансовые, т. е. модели, представляющие собой систему балансов производства и распределения продукции, которая записывается в виде шахматных матриц;

3) оптимизационные модели базируются на методах математического программирования. Данные модели представляют собой систему уравнений и неравенств, подчиненную целевой функции, т. е. цели решения задачи. Система уравнений и неравенств описывает определенное количество вариантов производства, распределения или потребления, т. е. допустимых решений задачи, из которых выбирается наилучшее решение с точки зрения целевой функции. Задачи математического программирования подразделяются на: задачи линейного, нелинейного, динамического, дискретного (целочисленного), дробно-линейного, параметрического, сепарабельного, стохастического, геометрического программирования.

Если все переменные задачи стоят в первой степени, то имеем задачу линейного программирования, получившую широкое применение при планировании ассортимента выпускаемой продукции, определении загрузки оборудования, планировании транспортных перевозок сырья и готовой продукции, составлении смесей продуктов и т. д.

Задачу называют нелинейной, если целевая функция и ограничения задачи нелинейны. Задачи нелинейного программирования подразделяются на задачи выпуклого, квадратичного программирования, многоэкстремальные задачи. Задача считается задачей дискретного программирования, если на систему ограничений задачи накладывается требование целочисленности переменных. Если задача включает фактор времени, то имеем задачу динамического программирования. Если исходные данные задачи зависят от некоторого параметра, то задача относится к задачам параметрического программирования. Задача является задачей дробно-линейного программирования, если ее целевая функция представлена дробью. Если целевая функция и ограничения задачи являются сепарабельными, т. е. представлены в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, то данная задача относится к задачам сепарабельного программирования. К задачам стохастического программирования относятся задачи, при постановке которых нет исчерпывающих данных об их условиях, т. е. имеющие вероятностный характер;

4) игровые модели – это модели в виде игры, описывающие конфликтную ситуацию, анализ которой осуществляется по определенным правилам, в результате чего определяется наилучшая стратегия игрока, т. е. такие его действия, которые при многократном повторении игры обеспечивают данному игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, причем каждому участнику игры ясно, что результат игры зависит не только от него, но и от действий партнера, т. е. он принимает решения в условиях неопределенности;

5) имитационные модели получают широкое распространение, так как их решение выполняется на персональном компьютере в диалоговом режиме, с их помощью проводят имитацию, например, параметров маркетинговой деятельности предприятия при различных производственных условиях. Модель представляет собой программу для персонального компьютера, а эксперимент над ней состоит в наблюдении за результатами расчетов по этой программе при различных значениях вводимых переменных;

6) модели сетевого планирования и управления служат для управления производственной деятельностью коллективов людей, выполняющих комплекс взаимосвязанных работ. Данные модели применя-

ются для планирования, контроля и оперативного руководства такими видами работ, как реконструкция и ремонт цехов производства, монтаж нового промышленного оборудования, проектирование новых видов промышленного оборудования и т. д.;

7) модели массового обслуживания применяются для улучшения качества обслуживания, т. е. сокращения времени ожидания обслуживания, сокращения очередей, уменьшения стоимости обслуживания. Сокращение очередей автомашин, ожидающих разгрузки сырья, получения готовой продукции, позволяют эффективнее использовать автотранспорт и снижать расходы по доставке сырья предприятиям, по развозу готовой продукции;

8) модели управления запасами служат для определения оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа.

По степени детализации модели делятся на:

1) структурные;

2) развернутые.

Развернутая модель – это сама задача, которая описывает функционирование конкретной системы, она составлена на основе конкретного цифрового материала.

Структурная же модель описывает систему в виде символов и математических выражений, каждое выражение структурной модели объединяет группу однородных ограничений развернутой модели.

Принципы построения моделей. Так как реальные процессы или объекты АПК представляют собой сложные динамические системы, то для описания их функционирования в современных условиях чаще всего используют интегрированную систему моделей, представляющую собой совокупность логически, информационно и алгоритмически связанных моделей, которые отражают экономические, организованные и технологические процессы воспроизводства в моделируемой системе.

В систему включаются различные модели, отражающие разные особенности функционирования моделируемого объекта.

При отображении сложных систем основная проблема состоит в том, чтобы найти компромисс между простотой описания, позволяющей составить целостное представление об исследуемом объекте или процессе, и детализацией описания, позволяющей отразить многочисленные особенности конкретного объекта или процесса.

Одним из путей решения этой проблемы является использование системы моделей, каждая из которых описывает поведение подсистемы. Например, функционирование птицефабрики можно представить следующей системой взаимосвязанных моделей: на первом уровне решить модель оптимизации рецептов комбикормов для различных видов и половозрастных групп птицы; на втором уровне обосновать оптимальный оборот стада; на третьем уровне решить модель оптимизации производства мяса птицы и яиц; на четвертом – модель оптимизации работы убойного цеха птицефабрики и заготовки мяса в убойном весе и субпродуктов I и II категории; на пятом уровне с помощью модели оптимизировать работу колбасного цеха и цеха копчения; на шестом оптимизировать параметры работы торговли, включая фирменные магазины и марки птицефабрики. Таким образом, функционирование птицефабрики можно представить системой шести моделей, взаимосвязь которых обеспечивается взаимосвязью показателей, т. е. выходные параметры модели предыдущего уровня являются входными параметрами модели последующего уровня.

При построении системы моделей необходимо соблюдать следующие *принципы*:

1) принцип *развития* требует постоянного совершенствования системы моделей, включения в ее состав новых моделей, использование которых становится необходимым по мере совершенствования планирования и управления;

2) принцип *единства* означает представление системы моделей в единой структуре блоков, которые взаимосвязаны между собой логически, информационно и алгоритмически;

3) принцип *относительной автономии* позволяет выделить из общей системы моделей относительно самостоятельные модели, результаты решения по которым можно внедрять в производство, не ожидая расчетов по всей системе моделей;

4) принцип *соответствия и адаптации* означает соответствие системы моделей реальной действительности;

5) принцип *ориентации на выходные плановые показатели* означает, что система моделей и ее решение должны обеспечивать выход на утвержденные плановые показатели;

6) принцип *разнообразия* состоит в том, что для адекватного отражения действительности в состав системы моделей должны быть включены разнообразные модели (эконометрические, оптимизационные, сетевые и т. д.);

7) принцип *взаимного дополнения* требует, чтобы модели, различающиеся по своему функциональному назначению, дополняли друг друга и были увязаны в единую систему логически, алгоритмически и информационно.

Наибольшее распространение получили следующие *типы моделей исследования операций в экономике*:

1) *задачи теории управления запасами* составляют самый распространенный тип задач исследования операций. Они обладают следующей особенностью. С увеличением запасов увеличиваются расходы на их хранение, но уменьшаются потери из-за возможной нехватки их. Необходимо определить такой уровень запасов, при котором сумма ожидаемых затрат по их хранению и сумма потерь из-за их дефицита была бы минимальной.

В зависимости от условий задачи управления запасами делятся на 3 группы:

– моменты поставок или оформление заказов на пополнение запасов фиксированы. Необходимо определить объемы производимой или закупаемой партии запасов;

– объемы производимой или закупаемой партии заказов фиксированы. Следует определить моменты оформления заказов;

– моменты оформления заказов и объемы производимых или закупаемых партий не фиксированы. Необходимо их определить;

2) *задачи распределения* также решаются методами исследования операций. Они делятся на 3 основные группы:

– к первому типу относятся задачи такого распределения ресурсов по работам, при котором достигается наибольший эффект (максимум прибыли или минимум издержек) (транспортная задача). Эти задачи усложняются, если для выполнения некоторых работ требуется более одного вида ресурсов или если один и тот же ресурс может пойти для выполнения нескольких работ;

– второй тип задач связан с распределением ограниченных ресурсов, которых не хватает для выполнения всех наличных работ. При этом могут быть использованы следующие подходы:

а) заявки на ограниченные ресурсы урезаются пропорционально величине заявленной потребности;

б) ограниченные ресурсы распределяются путем последовательного удовлетворения различных направлений в порядке убывания их значимости, определенной экспертами;

в) продукция распределяется с учетом потерь от дефицитности. При этом строится функция дефицитности, выражающая потери, которые несет система при недопоставке продукции;

– в третьем типе задач имеется возможность в некоторой степени регулировать состав ресурсов;

3) *задачи теории массового обслуживания* рассматривают вопросы образования и функционирования очередей. Например, очереди в системе торговли, в системе материально-технического снабжения и т. д. Очереди возникают из-за того, что поток требований или клиентов на обслуживание неуправляем и случаен. Если количество приборов обслуживания (касс в магазине) достаточно велико, то очередь образуется редко, но в этом случае имеются простои оборудования. С другой стороны, при малом количестве приборов обслуживания создается очередь и, следовательно, будут потери из-за ожидания в очереди (т. е. издержки, связанные с потерей покупателя). Поэтому необходимо определить, какое количество приборов обслуживания нужно иметь, чтобы суммарные ожидаемые потери от несвоевременного обслуживания и простоев оборудования были бы минимальными;

4) *задачи теории расписаний* изучают порядок следования операций. Например, имеется множество полуфабрикатов, которые должны пройти определенные технологические маршруты, также имеется несколько единиц оборудования (например, пароварочное и обжарочное оборудование). Так как одновременно обрабатывать более одного полуфабриката на одном оборудовании невозможно, у некоторого оборудования может образовываться очередь полуфабрикатов, ожидающих обработки. Время обработки каждого вида полуфабриката известно. При этом надо обосновать такую очередность обработки полуфабрикатов на каждом из оборудования, при которой, например, суммарные простои оборудования наименьшие;

5) в *задачах сетевого планирования* рассматриваются моменты начала и окончания работ всего комплекса или программы. Порядок следования работ определяется технологией производства. Он зафиксирован в виде сетевого графика, но время начала, окончания и сроки выполнения работ нефиксированные. Таким образом, требуется так выбрать сроки начала работ и сроки их выполнения, чтобы общие затраты по реализации работ всей программы были бы самые наименьшие. С помощью задач этого типа также можно определить потребность в ресурсах при заданных сроках выполнения работ;

6) при решении ряда задач приходится анализировать ситуации, в которых две или более конфликтующие стороны преследуют противоположные цели. Причем результат одной из сторон зависит от того, какие действия выберет противник. Такие задачи решаются с помощью *теории игр*. Цель игры – выработать рекомендации по рациональным действиям каждого из противников в ходе конфликтной ситуации;

7) *задачи смешанного типа* представляют собой системы взаимосвязанных моделей различного типа.

Но данная классификация задач исследования операций в экономике не является окончательной. Детализация некоторых типов задач приводит к появлению новых задач. Некоторые же типы задач объединяются и решаются совместно.

1.4. Этапы исследования операций

Для исследования системы необходимо выполнить следующие *этапы:*

1) *постановка (формулировка) задачи*. От решения вопросов первого этапа во многом зависит качество получаемых результатов. Постановка задачи включает решение следующих вопросов:

а) выбор и формулировка цели задачи, решение которой наиболее важно в данный момент времени;

б) выбор периода планирования (т. е. краткосрочный, среднесрочный, долгосрочный или текущего планирования);

в) определение объемов основных ресурсов моделируемой системы и тех параметров, которые оказывают влияние на функционирование системы;

г) выявление возможных альтернатив решения применительно к исследуемой конкретной ситуации;

2) *построение математической модели функционирования системы*. На этом этапе изучаются уже имеющиеся математические модели, которые позволяют описать данную проблему. Для построения модели надо определить множество известных и неизвестных параметров, которые необходимы для записи зависимостей исследуемой операции. Цель решения задачи выражается с помощью критерия эффективности. При построении модели следует учитывать только основные факторы и отбрасывать второстепенные. При этом математическое описание системы должно отражать все ее основные закономерности и множество возможных стратегий функционирования;

3) *определение алгоритма решения модели*. Алгоритмом называется система правил, указывающих, как и в какой последовательности эти правила применять к исходным данным модели, чтобы получать ее решение. Здесь может быть три варианта:

а) модель известна и известен ее алгоритм решения;

б) модель новая, но ее можно решить, сведя к какой-либо известной модели;

в) модель новая и алгоритм решения ее неизвестен и ее, например, можно решить методами имитационного моделирования. На этом этапе, кроме нахождения оптимального решения, целесообразно провести анализ модели на чувствительность, который показывает, как изменяется решение задачи мр измЦ е а ше то м игоз симального производства продукции, снижения издержек производства, создания условий для нормального функционирования общества.

Локальный – это частный критерий эффективности, он связан с детализацией глобального. Этот критерий используют для решения задач более низкого уровня. Требуется, чтобы *локальный критерий эффективности учитывал основные положения глобального критерия эффективности и не противоречил ему*.

Критерий эффективности может быть выражен как количественно, так и качественно. Математически критерий эффективности, соответствующий качественной цели, записывается следующим образом:

$$\Phi = \begin{cases} 1, & \text{если цель достигается;} \\ 0, & \text{если цель не достигается.} \end{cases}$$

В литературе такие критерии называются порядковыми или ранговыми критериями эффективности. Они определяют, какая стратегия лучше или хуже других, но не поясняют насколько.

В основном критерий эффективности носит количественный характер, состоящий в стремлении к увеличению (максимизации) или уменьшению (минимизации) показателя, характеризующего уровень достижения поставленной цели и зависящего от рассматриваемых стратегий и входных параметров модели.

Количественным выражением критерия эффективности в экономико-математических моделях является *целевая функция*. *Особенность ее в том, что она однозначна*. Это означает, что если при одних и тех же условиях задачи изменить целевую функцию, то получим новое ее решение. В силу специфики своего развития агропромышленное производство многокритериально, т. е. общество заинтересовано в получении максимальной прибыли, в росте производительности труда, снижении издержек и т. д.

Возникает необходимость поиска многих решений, отвечающих разным критериям эффективности. В этом случае критерий оказывается векторным, т. е. включающим несколько показателей. *Многоцелевой характер критерия эффективности* чаще всего выражается в модели следующим образом:

1) применяют *прием ведущего критерия*, т. е. один из наиболее предпочтительных критериев используется в качестве целевой функции задачи, а требования всех оптимальных учитываются при составлении ограничений задачи;

2) *прием последовательных уступок*. Сущность данного приема состоит в замене многокритериальной задачи оптимизации последовательностью однокритериальных задач. Вначале исследуемые критерии ранжируются в порядке убывания их значимости. Задача решается с первым по значимости критерием f_1 и определяется его экстремальное значение f_1^*. Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от его оптимального значения, т. е. уступка Δf_1, и решается задача еще раз, но уже со вторым по значимости критерием f_2, при условии, что отклонение первого критерия от его оптимального значения не превзойдет величины уступки. Далее назначается уступка для второго критерия, и задача решается с третьим критерием и т. д. Таким образом, решение каждой исследуемой задачи основано на решении предыдущей, так как оно содержит дополнительные ограничения, характеризующие величину уступки по критериям;

3) используют *прием скаляризации векторного критерия* (приведения его к скаляру), которая может быть осуществлена следующими способами:

– аддитивная свертка критериев –

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i f_i \ ;$$

– мультипликативная свертка –

$$\Phi = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\upsilon_i} \ ;$$

– логарифмически-аддитивная свертка –

$$\ell n \Phi = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \ell n f_i \ ,$$

где f_i – локальный критерий вида i, $i = \overline{i, n}$;

υ_i – вес критерия вида i, $i = \overline{i, n}$.

При этом

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 1 \text{ и } \upsilon_i \geq 0, \ i = \overline{i, n} \, .$$

Вектор весов критериев –

$$\upsilon_i = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$$

обычно определяется на основе экспертных оценок.

Сущность экспертных методов заключается в выработке коллективного мнения группы специалистов (экспертов). Формируется экспертная группа из специалистов в конкретной области. Путем анонимного анкетирования может быть сделан отбор специалистов, которые, по мнению большинства, не могут выступать экспертами в данной области. Опрос экспертов является существенным элементом получения качественной информации. В зависимости от целей и методов обработки результатов опроса применяются различные способы организации работы экспертов, касающиеся их взаимных контактов, анонимности опроса, дозирования информации и т. п. Коллективно выбираются критерии эффективности, характеризующие цель исследуемой системы. В практике наиболее часто применяются следующие *методы установления весов критериев:*

1) *метод непосредственной оценки* состоит в том, что эксперт каждому критерию присваивает определенную оценку (балл), например от 1 до 10. Балльные оценки нормируются, для этого определяется сумма оценок, выставленных каждым экспертом, по всем критериям, а затем каждая из оценок делится на полученную сумму. Далее нормированные оценки всех экспертов по каждому критерию суммируются, а полученная сумма делится на число экспертов. Например, $\upsilon_{11} = \frac{8}{34} = 0{,}235$, а $\upsilon_{21} = \frac{8}{33} = 0{,}242$, тогда $\upsilon_1 = \frac{0{,}235 + 0{,}242}{2} = 0{,}239$ (табл. 1.1).

Таким образом, вес i-го критерия определяется по формуле:

$$\upsilon_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{Б_{ij}}{Б_j}}{m},$$

где υ_i – вес критерия вида i;

i – номер критерия, $i = \overline{i, n}$;

j – номер эксперта, $j = \overline{i, m}$;

$Б_{ij}$ – балл, присвоенный i-му критерию j-м экспертом;

$Б_j$ – сумма баллов, присвоенных всем критериям j-м экспертом;

Т а б л и ц а 1.1. **Оценка (вес) критериев**

Эксперты	Критерии					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	Сумма
Оценки, выставленные экспертами: 1 2	 8 8	 7 6	 10 9	 4 3	 5 7	 34 33
Нормированные оценки: 1 2	 0,235 0,242	 0,206 0,182	 0,294 0,273	 0,118 0,091	 0,147 0,212	 1,0 1,0
Усредненная оценка (вес) критерия	0,239	0,194	0,283	0,105	0,179	1,0

2) *метод последовательных сравнений* позволяет не только оценить вес каждого критерия, но и выявить зависимости между их количественными оценками. Процедура последовательных сравнений, разработанная Уэстом Черчменом и Расселлом Акоффом, состоит в следующем. Эксперт должен оценить исследуемые критерии по их относительной важности. При этом наиболее важному критерию дается оценка $\upsilon_i = 1$, а остальным критериям присваиваются оценки υ_i в пределах от 0 до 1 в зависимости от относительной важности критериев.

Затем эксперт сравнивает значимость более важного критерия (критерия, получившего оценку 1) с комбинацией остальных критериев. Если этот критерий более значим, то его оценка увеличивается так, чтобы она была больше, чем суммарная оценка остальных критериев:

$$\upsilon_1 > \sum_{i=2}^{n} \upsilon_i \ .$$

Далее аналогичную процедуру проделывают со вторым и последующими критериями, получившими более низкие оценки. Последовательное сравнение продолжается до (n–1)-го критерия.

Например, рассматриваем критерии f_1, f_2, f_3 и f_4. Эксперт присвоил им следующие оценки: $\upsilon_1 = 1{,}0$; $\upsilon_2 = 0{,}7$; $\upsilon_3 = 0{,}5$; $\upsilon_4 = 0{,}2$.

Проведем последовательное сравнение этих оценок. Допустим, эксперт считает, что υ_1 предпочтительнее $\upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4$, тогда значение υ_1 должно быть больше, чем 0,7 + 0,5 + 0,2 = 1,4. Эксперт корректирует оценку υ_1, например, до 1,5. Далее сравниваются оценки υ_2 и $\upsilon_3 + \upsilon_4$. Допустим, значимость $\upsilon_3 + \upsilon_4$ предпочтительнее, чем υ_2, тогда эксперт корректирует оценку υ_2 до 0,6. Сравнивают υ_3 и υ_4. Эксперт считает, что $\upsilon_3 > \upsilon_4$, следовательно, первоначальные оценки не изменяют.

После процедуры последовательного сравнения получены следующие оценки: $\upsilon_1 = 1{,}5$; $\upsilon_2 = 0{,}6$; $\upsilon_3 = 0{,}5$; $\upsilon_4 = 0{,}2$. Если эти оценки не противоречат мнениям экспертов, их нормируют, разделив каждую из них на сумму всех оценок, которая равна 2,8.

Получим следующие нормированные оценки критериев:

$$\upsilon_1^{/} = 1{,}5:2{,}8 = 0{,}536;\ \upsilon_2^{/} = 0{,}214;\ \upsilon_3^{/} = 0{,}179;\ \upsilon_4^{/} = 0{,}071.$$

Сумма нормированных оценок равна 1:

$$\sum_{i'=1}^{n} \upsilon_i^{/} = 1.$$

Информация, полученная от экспертов, может считаться достаточно надежной только при условии хорошей согласованности оценок экспертов.

Степень согласованности оценок двух экспертов или двух групп экспертов характеризуется *коэффициентом ранговой корреляции Спирмена* (см. прил. А), ρ:

$$\rho = 1 - \left(\frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \right),$$

где $\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{y}}_i$ – разность между рангами (оценками);

n – число критериев.

Метод ранговой корреляции Спирмена позволяет определить силу и направление корреляционной связи между двумя признаками или двумя профилями признаков. Коэффициент корреляции рангов Спирмена (ρ) равен +1, если все ранги совпадают, и равен –1, если ранговые ряды имеют обратное направление. Чем ближе ρ к единице, тем более согласованы мнения экспертов. Обычно согласованность мнений экспертов считается удовлетворительной, если $0{,}5 \le \rho < 0{,}7$ и хорошей при $0{,}7 \le \rho < 1$, при $n \le 30$.

Коэффициент ранговой корреляции имеет следующие ограничения:

1) по каждой переменной должно быть представлено не менее 5 наблюдений;

2) коэффициент ранговой корреляции Спирмена при большом количестве одинаковых рангов по одной или обеим сопоставляемым переменным дает огрубленные значения. В идеале оба коррелируемых ряда должны представлять собой две последовательности несовпадающих значений.

Значимость коэффициента ранговой корреляции можно проверить, используя специальные таблицы, в которых находят критические значения коэффициента корреляции Спирмена для уровней значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$, т. е. $\rho_{kp0,05}$ или $\rho_{kp0,01}$ (прил. В).

Расчетное значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена ρ, необходимо сравнить с критическим значением с учетом принятого уровня значимости ($\rho_{kp0,05}$ или $\rho_{kp0,01}$). Коэффициент ранговой корреляции Спирмена признается статистически значимыми и надежными, если его расчетное значение больше критического:

$$\rho_{\text{расч}} \geq \rho_{kp0,05} \text{ или } \rho_{\text{расч}} \geq \rho_{kp0,01}.$$

Например, оценим с помощью коэффициента Спирмена (ρ) согласованность оценок критериев (см. табл. 1.1), предварительно проранжировав оценки экспертов (табл. 1.2).

Т а б л и ц а 1.2. **Расчет коэффициента Спирмена (ρ)**

Показатели	Критерии				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Оценки, выставляемые экспертами:					
1	8	7	10	4	5
2	8	6	9	3	7
Ранг оценок эксперта:					
1 (x_i)	4	3	5	1	2
2 (y_i)	4	2	5	1	3
Разность между рангами ($x_i - y_i$)	0	1	0	0	–1
Квадрат разности между рангами $(x_i - y_i)^2$	0	1	0	0	1

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 2\,.$$

Рассчитаем значение коэффициента ранговой корреляции:

$$\rho = 1 - \left(\frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \right) = 1 - \left(\frac{6 \cdot 2}{5(5^2 - 1)} \right) = 1 - \frac{12}{120} = 0{,}9\,.$$

Величина коэффициента ранговой корреляции $\rho = 0{,}9$ свидетельствует о хорошей согласованности оценок экспертов.

Проверим значимость коэффициента ранговой корреляции, используя таблицу (см. прил. В).

Расчетное значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена ρ = 0,9 сравниваем с критическим, которое определили по таблице (см. прил. В) с учетом принятого уровня значимости α = 0,05 и n = 5. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена является статистически значимым и надежным, так как

$$\rho = 0{,}9 \geq \rho_{kp0{,}05} = 0{,}878.$$

Следовательно, это свидетельствует согласованности мнений экспертов.

Для оценки согласованности мнений группы из m экспертов применяется *коэффициент конкордации Кендалла* (см. прил. А), W.

В случае отсутствия равных рангов (оценок) в оценках любого из экспертов коэффициент конкордации определяется по формуле:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{m^2(n^3-n)},$$

где m – число экспертов;

n – число критериев;

$\overline{\overline{x}}_{ij}$ – оценка i-м экспертом j-го критерия.

В случае, если какой-либо эксперт не может установить ранговое различие между несколькими критериями и присваивает им одинаковые ранги (баллы), коэффициент конкордации вычисляется по формуле:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{\left(m^2(n^3-n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i\right)},$$

где $T_i = 1/12\sum_{i=1}^{h}(t_1^3 - t_i)$,

t_i – число равных рангов в оценках i-го эксперта;

h – число групп равных рангов в оценках i-го эксперта.

Коэффициент конкордации принимает значения в интервале от 0 до 1. При отсутствии согласованности мнений экспертов W = 0, при полной согласованности $W = 1$. Практически, согласованность считается удовлетворительной, если $0{,}5 \le W < 0{,}7$, и хорошей, если $0{,}7 \le W < 1$.

Проверку значимости коэффициента конкордации можно провести, используя статистику χ^2 с числом степеней свободы $v = n - 1$:

$$\chi^2_{\text{расч}} = W \cdot m(n-1),$$

где W – коэффициент конкордации Кендалла;

m – число экспертов;

n – число критериев.

Расчетное значение $\chi^2_{\text{расч}}$ сравнивают с его табличным значением $\chi^2_{\text{табл}}$ при уровне значимости α (прил. С). Коэффициент конкордации значим, если:

$$\chi^2_{\text{расч}} > \chi^2_{\text{табл}}.$$

Например, пять экспертов (m = 5) оценивают четыре критерия (n = 4) по 10-балльной шкале (табл. 1.3).

Рассчитаем для m = 5 и n = 4 значение выражения:

$$\frac{1}{2} m(n+1) = 12{,}5.$$

Найдем значение коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12\left[(5-12{,}5)^2 + (18-12{,}5)^2 + (17-12{,}5)^2 + (10-12{,}5)^2\right]}{5^2(4^3-4)} = 0{,}904.$$

Т а б л и ц а 1.3. **Расчет коэффициента конкордации**

Показатели	Критерии			
	f_1	f_2	f_3	f_4
Оценки экспертов: 1	3	10	7	6
2	4	7	8	5
3	2	9	8	4
4	2	5	6	3
5	2	7	6	3
Ранги оценок экспертов: 1	1	4	3	2
2	1	3	4	2
3	1	4	3	2
4	1	3	4	2
5	1	4	3	2
Сумма рангов	5	18	17	10

Коэффициент конкордации $W = 0{,}904$ показывает, что оценки экспертов не случайны и согласованность их хорошая. Для проверки значимости коэффициента конкордации вычислим статистику χ^2 с числом степеней свободы $\nu = n - 1$:

$$\chi^2_{\text{расч}} = W \cdot m(n-1) = 0{,}904 \cdot 5(4-1) = 13{,}56.$$

Сравнение расчетного значения $\chi^2 = 13{,}56$ с его табличным значением $\chi^2_{\text{табл}} = 12{,}838$ (см. прил. С) при уровне значимости $\alpha = 0{,}005$ позволяет признать, что коэффициент конкордации значим, так как

$$\chi^2_{\text{расч}} = 13{,}56 > \chi^2_{\text{табл}} = 12{,}838,$$

следовательно, мнения экспертов согласованы.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение исследованию операций.
2. Какие ученые внесли свой вклад в развитие исследования операций?
3. Что является предметом исследования операций в экономике?
4. Какова цель исследования операций в экономике?
5. Что представляет собой системный подход?
6. Дайте определение понятиям «система», «подсистема», «элемент».
7. Какими связями характеризуется система?
8. Что такое среда?
9. Дайте классификацию систем.
10. Приведите характеристики систем.
11. Перечислите особенности экономических систем.
12. Дайте определение модели.
13. Что понимают под математической моделью?
14. Приведите классификацию моделей.
15. Чем отличаются детерминированные модели от стохастических?
16. В чем состоит отличие статических моделей от динамических?
17. Приведите особенности эконометрических, балансовых, оптимизационных, игровых, сетевых, имитационных моделей, моделей упорядочения, массового обслуживания и управления запасами.
18. Приведите классификацию оптимизационных экономико-математических моделей.

19. Охарактеризуйте принципы построения моделей.

20. Перечислите основные типы моделей исследования операций в экономике.

21. Охарактеризуйте этапы исследования операций.

22. Дайте определение критерию эффективности.

23. Приведите классификацию критериев эффективности.

24. Какие приемы позволяют учесть многоцелевой характер критерия эффективности?

25. В чем состоит сущность экспертных методов?

26. С помощью какого коэффициента и как проверяют степень согласованности оценок двух экспертов или двух групп экспертов?

27. Каким образом и какой коэффициент используется для оценки согласованности мнений группы экспертов?

28. Как определить значимость коэффициента ранговой корреляции и коэффициента конкордации.

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.1. Предмет и задачи теории игр. Классификация игр

На практике часто появляется необходимость согласования интересов двух или более разумных противников, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. Теория, занимающаяся принятием решения в условиях конфликта, получила название теории игр. Элементы теории игр были применены в исследованиях А. О. Курно (1838), Ж. Бертрана (1883) и Ф. И. Эджуорта (1897), в статьях которых рассматривались проблемы производства и ценообразования в олигополии. Первым математическим результатом в выработке решений салонных игр явилась работа Э. Цермело (1912) «О применении теории множеств к шахматной игре». Возникновение теории игр как науки относится к 1944 г., когда вышла монография Д. Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». В ней была обоснована возможность анализа различных экономических вопросов с помощью игровых моделей. В 1950 г. Д. Нэш (см. прил. А) ввел понятие ситуации равновесия как метода решения бескоалиционных игр. Равновесие по Нэшу гласит, что ситуация, образованная в результате выбора всеми игроками некоторых своих стратегий, является равновесной, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий. В настоящее время главное внимание в теории игр уделяется ее экономическим приложениям.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т. е. таких действий, которые обеспечивали бы игроку наилучший результат при многократном повторении игры. При этом *игра* рассматривается как упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам, которые устанавливают:

– выбор действий игроков на каждом этапе игры;

– информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении своих выборов;

– выигрыши или проигрыши каждого игрока после завершения игры.

Суть игры состоит в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший ход игры, т. е. величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

При этом *оптимальной считается та стратегия*, которая обеспечивает игроку при многократном повторении игры максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш.

Принятие решений может происходить в условиях определенности, неопределенности и риска.

Если имеется полная информация о стратегиях выбора, то такую задачу относят к задаче принятия решений в условиях определенности. Задачи, решение которых определяется при ограниченности данных о самой системе или о ее внешней среде, получили название задач принятия решений в условиях неопределенности.

При этом под неопределенностью понимают отсутствие, неполноту, недостаточность информации об изучаемой системе, ограниченность в сборе информации, ее постоянную изменчивость или неуверенность в достоверности информации.

По степени полноты информации риск определяет промежуточную ситуацию между определенностью и неопределенностью и характеризует возможность количественного определения степени вероятности проявления анализируемых стратегий.

Практически риск выступает в виде совокупности вероятностных, экономических, политических и других последствий, которые наступают для системы при реализации выбранных решений.

Конфликтные ситуации, встречающиеся на практике, порождают различные виды игр.

Классификация игр. В зависимости от количества игроков игры подразделяются на:

– парные (с двумя игроками);

– множественные (имеющие не менее трех игроков).

По количеству стратегий игры делятся на:

– конечные (где каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий);

– бесконечные (в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий).

По взаимоотношениям между конфликтующими сторонами игры подразделяются на:

– кооперативные;

– коалиционные;

– бескоалиционные.

Бескоалиционными считают такие игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения. Если же участники конфликта вступают в соглашения и создают коалицию, то данную ситуацию описывают коалиционной игрой. Кооперативная игра описывает конфликт, в котором заранее определены группы участников, т. е. коалиции.

По характеру выигрышей игры делятся на:

– игры с нулевой суммой;

– ненулевой суммой.

В игре с нулевой суммой сумма выигрышей равна сумме проигрышей всех игроков, т. е. общая сумма перераспределяется между игроками, но величина ее не изменяется. Такие игры относятся к классу антагонистических игр. Игра, в которой вносится взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на:

– матричные;

– биматричные;

– непрерывные;

– выпуклые;

– сепарабельные и т. д.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши или проигрыши (выигрыш первого игрока эквивалентен проигрышу второго игрока) игроков заданы элементами матрицы $\left\| a_{\mathrm{ij}} \right\|$. Если игроки имеют противоположные интересы, то игра с нулевой суммой относится к антагонистическим играм.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы элементами соответствующих двух матриц.

Если функция выигрышей каждого игрока непрерывна или выпуклая, то игра называется непрерывной или выпуклой. Если функция выигрышей разделяется на сумму произведений функций одного аргумента, то игра носит название сепарабельной.

По количеству ходов игры можно подразделить на:

– одношаговые (которые заканчиваются после одного хода каждого игрока);

– многошаговые (в которых игрок делает более одного хода).

По информированности сторон различают:

– игры с полной (т. е. каждый игрок на каждом ходу знает ранее примененные другими игроками стратегии);

– неполной информацией (т. е. игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны).

По степени неполноты информации игры подразделяются на:

– статистические (в условиях частичной неопределенности);

– стратегические (в условиях полной неопределенности).

2.2. Статистические игры

В отдельную группу игр выделяют статистические игры. Их особенностью является то, что сознательный игрок *A* (его еще называют статистиком) заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры и играет он против игрока *B*, который совершенно безразличен к результату игры (его еще называют природой и обозначают *П*). Стратегии игрока *П* обозначают совокупность внешних условий, в которых игрок *A* выбирает свою стратегию. Поэтому при решении статистической игры находят только наилучшие рекомендации для игрока *A*.

При поиске оптимальных стратегий для игрока *A* в условиях неопределенности и риска обращаются к различным критериям. Так как критерии формируются на основе здравого смысла, интуиции и практической целесообразности, то они помогают оценить принимаемое решение с различных позиций.

Примерами статистических игр являются, например:

а) выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры с целью получения в будущем году наилучших урожаев с учетом различных погодных исходов (в качестве второго игрока выступает природа);

б) определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса (в качестве второго игрока принят спрос на продукцию);

в) формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды (в качестве второго игрока взяты размеры ожидаемой прибыли).

Пример. Требуется обосновать вариант производства модификации товара, величина предложения которого обеспечит предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация. Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3). Прибыль, получаемая предприятием с единицы товара, представлена в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1. **Прибыль в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2	2,3	2,2
T_2	2,1	2,4	2,3
T_3	2,0	2,2	2,5

Рассмотрим несколько *критериев определения оптимальной стратегии* игрока.

1. *По критерию Лапласа* (см. прил. А) оптимальной является та стратегия, которая обеспечивает максимальную среднюю прибыль или минимальный средний риск.

В нашем примере прибыль будет равна:

$$1.\ (2{,}2 + 2{,}3 + 2{,}2) : 3 = 2{,}23.$$

$$2.\ (2{,}1 + 2{,}4 + 2{,}3) : 3 = 2{,}27.$$

$$3.\ (2{,}0 + 2{,}2 + 2{,}5) : 3 = 2{,}23.$$

$$\max(2{,}23;\ 2{,}27;\ 2{,}23) = 2{,}27.$$

Для выбора оптимальной стратегии по второму случаю предварительно рассчитаем матрицу риска. Риск – это разность между результатом, который можно получить, если знать состояние «природы», и результатом, который будет получен при j-й стратегии игрока. Для формирования элементов выбираем наибольший элемент в столбце и от него отнимаем все другие элементы столбца (табл. 2.2).

Т а б л и ц а 2.2. **Матрица риска**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2 – 2,2 = 0	0,1	0,3
T_2	2,2 – 2,1 = 0,1	0	0,2
T_3	2,2 – 2,0 = 0,2	0,2	0

В нашем примере значение средних рисков для каждой стратегии игрока будет следующим:

Математическое ожидание риска будет следующее:

$$1.\ 0\cdot0{,}2 + 0{,}1\cdot0{,}4 + 0{,}3\cdot0{,}4 = 0{,}16.$$

$$2.\ 0{,}1\cdot0{,}2 + 0\cdot0{,}4 + 0{,}2\cdot0{,}4 = 0{,}10.$$

$$3.\ 0{,}2\cdot0{,}2 + 0{,}2\cdot0{,}4 + 0\cdot0{,}4 = 0{,}12.$$

$$\min(0{,}16;\ 0{,}10;\ 0{,}12) = 0{,}10.$$

Согласно критерию Байеса предприятие получит максимальную прибыль, если будет производить новый товар во второй модификации.

3. *По критерию Вальда* (см. прил. А) оптимальной будет стратегия, которая в наихудших условиях обеспечивает наибольшую прибыль. Этот критерий опирается на принцип «наибольшей осторожности». Если элементы платежной матрицы игры характеризуют выигрыш (в нашем случае – прибыль) игрока, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий:

$$1.\ \min(2{,}2;\ 2{,}3;\ 2{,}2) = 2{,}2.$$

$$2.\ \min(2{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}3) = 2{,}1.$$

$$3.\ \min(2{,}0;\ 2{,}2;\ 2{,}5) = 2{,}0.$$

$$\max(2{,}2;\ 2{,}1;\ 2{,}0) = 2{,}2.$$

По критерию Вальда оптимальной является первая стратегия игрока, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, т. е. независимо от колебания спроса наибольшую гарантированную прибыль можно получить, производя новый товар в первой модификации.

Если элементы платежной матрицы игры определяют потери лица, принимающего решение (например, затраты на производство различных видов модификаций товаров при разном уровне спроса), то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий.

4. При использовании *критерия Сэвиджа* (см. прил. А) строят матрицу рисков (для нашего примера – табл. 2.2). Если в платежной матрице игры элементы характеризуют потери игрока, то для определения коэффициентов матрицы риска от элементов каждого столбца отнимают наименьший элемент этого столбца.

Оптимальной является стратегия с наименьшим максимальным риском.

Определяем максимальное значение риска по каждой строке. Для нашего примера:

1. max (0; 0,1; 0,3) = 0,3.

2. max (0,1; 0; 0,2) = 0,2.

3. max (0,2; 0,2; 0) = 0,2.

min(0,3; 0,2; 0,2) = 0,2.

По критерию Сэвиджа предприятие должно заняться производством нового товара во второй или в третьей модификации.

5. Для проверки вышеизложенных выводов используют *критерий Гурвица* (см. прил. А), по которому, если в качестве результата игры выступают прибыль, полезность, доход и т. д., выбирают оптимальную стратегию по формуле:

$$\max_j[\lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda)\max_i a_{ij}],$$

где λ – коэффициент, характеризующий степень доверия, $0 \le \lambda \le 1$.

Значение λ определяется в зависимости от склонности игрока к пессимизму или к оптимизму.

Если элементы платежной матрицы игры представляют затраты или потери игрока, то по критерию Гурвица оптимальную стратегию игрока выбирают следующим образом:

$$\min_j[\lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda)\max_i a_{ij}].$$

При отсутствии ярко выраженной склонности игрока целесообразно при расчетах применять $\lambda = 0{,}5$.

С помощью критерия Гурвица устанавливают баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма, используя определенную величину коэффициента λ.

При $\lambda = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма. Определим оптимальную стратегию игрока для нашего примера:

1. $\max[0 \cdot 2{,}2 + (1-0)\cdot 2{,}3] = 2{,}3$.

2. $\max[0 \cdot 2{,}1 + (1-0)\cdot 2{,}4] = 2{,}4$.

3. $\max[0 \cdot 2{,}0 + (1-0)\cdot 2{,}5] = 2{,}5$.

max(2,3; 2,4; 2,5) = 2,5.

Таким образом, оптимальным является производство товара в третьей модификации и прибыль при этом может составить 2,5 у. д. е. на единицу нового товара.

Если $\lambda = 1$, то имеем критерий крайнего пессимизма:

1. $\max[1 \cdot 2{,}2 + (1-1) \cdot 2{,}3] = 2{,}2$.

2. $\max[1 \cdot 2{,}1 + (1-1) \cdot 2{,}4] = 2{,}1$.

3. $\max[1 \cdot 2{,}0 + (1-1) \cdot 2{,}5] = 2{,}0$.

$$\max(2{,}2;\ 2{,}1;\ 2{,}0) = 2{,}2.$$

Так, в наихудших условиях наибольший гарантированный доход можно получить, организовав производство нового товара в первой модификации.

Если $\lambda = 0{,}4$, то:

1. $\max[0{,}4 \cdot 2{,}2 + (1-0{,}4) \cdot 2{,}3] = 2{,}26$.

2. $\max[0{,}4 \cdot 2{,}1 + (1-0{,}4) \cdot 2{,}4] = 2{,}28$.

3. $\max[0{,}4 \cdot 2{,}0 + (1-0{,}4) \cdot 2{,}5] = 2{,}30$.

$$\max\ (2{,}26;\ 2{,}28;\ 2{,}30) = 2{,}30,$$

т. е. предприятию целесообразно заниматься производством нового товара в третьей модификации.

В результате решения игры по различным критериям в качестве оптимальной большее число раз выпали вторая и третья стратегии, т. е. предприятию в зависимости от спроса и предложения товара на рынках для получения максимальной прибыли можно заниматься выпуском нового товара во второй или третьей модификации.

Анализ игр по нескольким критериям позволяет более достоверно принять ту или иную стратегию игрока с наилучшей функцией выигрыша.

2.3. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Рассмотрим игры, в которых у каждого из двух игроков A и B конечное число возможных действий, т. е. чистых стратегий. Пусть игрок A располагает m-чистыми стратегиями – A_1, A_2, …, A_m, а игрок B – n-чистыми стратегиями – B_1, B_2, …, B_n. Рассмотрим антагонистическую игру с нулевой суммой, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, тогда число a_{ij} примем за выигрыш игрока A за счет игрока B или проигрыш игрока B.

Если известны значения a_{ij} для каждой пары (A_i, B_j) чистых стратегий, то можно составить матрицу игры, которая получила название платежной матрицы:

A_i	B_j			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Если выигрыши выражаются отрицательными числами, то это означает, что фактически выигрывает игрок B, а игрок A проигрывает.

Игра протекает следующим образом: игрок A выбирает одну из строк платежной матрицы (т.

В качестве игрока A будут выступать работники сельскохозяйственного предприятия, в качестве игрока B примем исход погоды. Составим платежную матрицу.

Рассмотрим три исхода погоды (B_1 – мягкая зима, B_2 – обычная, B_3 – холодная). Заготавливая уголь летом, сельскохозяйственное предприятие ориентируется на мягкую зиму (чистая стратегия A_1), обычную (чистая стратегия A_2), холодную (чистая стратегия A_3).

Вычисляем элементы платежной матрицы a_{ij} (табл. 2.3).

Т а б л и ц а 2.3. **Платежная матрица игры**

Стратегии	B_1	B_2	B_3
A_1	$40 \cdot 30 = –1200$	$40 \cdot 30 + 10 \cdot 45 = –1650$	$40 \cdot 30 + 20 \cdot 50 = –2200$
A_2	$50 \cdot 30 = –1500$	$50 \cdot 30 = –1500$	$50 \cdot 30 + 10 \cdot 50 = –2000$
A_3	$60 \cdot 30 = –1800$	$60 \cdot 30 = –1800$	$60 \cdot 30 = –1800$

1. Работники сельскохозяйственного предприятия в расчете на мягкую зиму купило летом 40 т угля (чистая стратегия A_1):

а) зима оказалась мягкой (чистая стратегия B_1), дополнительных затрат не потребовалось;

б) зима оказалась обычной (чистая стратегия B_2), пришлось зимой докупить 10 т угля;

в) зима оказалась холодной (чистая стратегия B_3), пришлось зимой докупить 20 т угля.

2. Работники сельскохозяйственного предприятия в расчете на обычную зиму заготовило 50 т угля (чистая стратегия A_2):

а) зима мягкая (чистая стратегия B_1), 10 т угля лишних, но продавать их нет возможности;

б) зима обычная (чистая стратегия B_2), угля хватило;

в) зима холодная (чистая стратегия B_3), следовательно, надо докупить 10 т угля.

3. Работники сельскохозяйственного предприятия в расчете на холодную зиму заготовило 60 т угля. При любых исходах природы (B_1, B_2, B_3) угля хватит, но затраты будут везде одинаковы – 1800 у. д. е.

Целью игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку A максимальный выигрыш, а игроку B – минимальный проигрыш. Оптимальной для игрока A будет такая стратегия, при которой выигрыш игрока A не будет уменьшаться, какими бы стратегиями не пользовался игрок B. Оптимальной для игрока B будет та стратегия, при которой его проигрыш не будет увеличиваться, какими бы стратегиями не пользовался игрок A.

При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на *основной принцип теории игр* – принцип осторожности, в соответствии с которым каждый игрок считает, что играет с очень умным противником, который может воспользоваться любой его ошибкой в своих интересах. Поэтому игрок *A* находит для каждой стратегии минимальный выигрыш –

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} (i = \overline{1, m}),$$

а затем из всех α_i выбирает наибольшее значение –

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

которое определяет чистую стратегию игрока *A*, ее называют *максиминной стратегией*, так как она определяется по формуле:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

При этом число α называют *нижней чистой ценой игры* (максимином). Оно показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок *A*, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока *B*.

Игрок *B*, стремясь минимизировать проигрыш, тоже при выборе стратегии использует принцип осторожности. Он сначала выбирает по столбцу максимально возможный проигрыш –

$$\beta_j = \max_i a_{ij} (j = \overline{1, n}),$$

а затем среди β_j минимальное значение –

$$\beta = \min_j \beta_j,$$

которое определит его чистую стратегию, т. е. минимаксную стратегию, так как она выбирается по формуле:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число β называется *верхней чистой ценой игры*, или минимаксом. Оно показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока *B* при правильном выборе стратегии независимо от действий игрока *A* (табл. 2.4).

Т а б л и ц а 2.4. **Решение матричной игры в чистых стратегиях**

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	–1200	–1650	–2200	–2200
A_2	–1500	–1500	–2000	–2000
A_3	–1800	–1800	–1800	–1800
β_j	–1200	–1500	–1800	–1800

α_i = min элементы матрицы по строкам (–2200, –2000, –1800).

α = max (–2200, –2000, –1800)= –1800.

A_3 – оптимальная чистая стратегия игрока A.

β_j = max элементы матрицы по столбцам (–1200, –1500, –1800).

β = min (–1200, –1500, –1800)= –1800.

B_3 – оптимальная чистая стратегия игрока B.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е. $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет *седловую точку* и чистую цену игры, равную значению или седловому элементу платежной матрицы:

$$\upsilon = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Для нашего примера чистая цена игры равна υ = –1800. При этом седловой элемент является наименьшим в строке i и наибольшим в столбце j. Таким образом, хозяйству целесообразно закупать 60 т угля летом, что позволит минимизировать затраты по его закупке.

2.4. Решение матричных игр геометрическим способом

Матричная игра описывает конфликт, отвечающий следующим условиям:

1) конфликт определяется антагонистическим взаимодействием двух сторон (игроков), каждая из которых располагает лишь конечным числом возможных действий (стратегий);

2) свои действия (стратегии) игроки предпринимают независимо друг от друга, т.е. каждый из игроков не имеет информации о действии, совершаемом другой стороной. Результат этих действий оценивается числом, равным элементу платежной матрицы, который определяет полезность (выгодность) сложившейся ситуации для одного из игроков (игрока A);

3) каждый из игроков оценивает, как для себя, так и для противника выгодность применения любой возможной ситуации, которая сложится в результате применения той или иной стратегии;

4) действия конфликтующих сторон отличаются друг от друга лишь по степени полезности сложившейся ситуации, которая характеризуется величиной элементов платежной матрицы.

Пример. Сельскохозяйственное предприятие должно выращивать картофель на определенном участке земли. Урожайность картофеля зависит от количества внесенных удобрений и от состояния погоды. Имеется два состояния погоды: лето сухое и лето влажное. Возможны следующие варианты внесения удобрений:

1) количество удобрений на 1 га посева картофеля равно фактическому за прошлый год;

2) количество удобрений на 1 га соответствует рекомендуемой норме внесения удобрений и больше на 20 % фактического уровня за прошлый год.

Пусть первым игроком (игроком A) будет сельскохозяйственное предприятие, а природу примем за игрока B. У первого игрока имеется две стратегии, соответствующие вариантам внесения удобрений. Второй игрок имеет две стратегии, которые соответствуют состоянию погоды. Цена реализации 1 ц картофеля в планируемом году будет величиной постоянной. Следовательно, прибыль сельскохозяйственного предприятия будет зависеть от урожайности выращенного картофеля и затрат на его производство и реализацию. Сельскохозяйственному предприятию необходимо определить оптимальное количество внесения удобрений на 1 га картофеля с целью получения максимальной прибыли при любых погодных условиях. Сельскохозяйственное предприятие, в зависимости от различных норм внесения удобрений и вида лета, планирует получить с 1 га картофеля прибыль, представленную коэффициентами платежной матрицы:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	60	30
A_2	40	50

Найдем седловую точку игры, определив нижнюю и верхнюю цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 40;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 50.$$

Так как $\alpha \neq \beta$, т. е. $40 \neq 50$, то игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях. *Смешанная стратегия* игрока представляет собой полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Решим данную игру в смешанных стратегиях геометрическим способом.

Алгоритм геометрического решения игры:

1) матрицу игры, если это необходимо и есть такая возможность, приводим к размерности $2\times n$ или $m\times 2$. Это достигается путем сравнения между собой почленно элементов столбцов или строк платежной матрицы. При этом вычеркивается, если имеются, дублирующие и заведомо невыгодные стратегии;

2) проверяем платежную матрицу на наличие седловой точки. Если она есть – решение игры найдено, если ее нет – то находим оптимальные смешанные стратегии игроков;

3) строим прямые линии, соответствующие стратегиям первого (второго) игрока;

4) определяем нижнюю (верхнюю) границу выигрыша;

5) находим две стратегии первого (второго) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной (минимальной) ординатой;

6) определяем цену игры и оптимальные смешанные стратегии игроков.

Для этого в системе координат на оси абсцисс отложим отрезок единичной длины $[A_1, A_2]$ и через его концы A_1 и A_2 проведем перпендикулярные прямые к оси абсцисс, на которых будем откладывать выигрыш игрока A (рис. 2.1).

Если игрок A применяет свою первую стратегию при первой стратегии игрока B, то выигрыш игрока A будет 60 у. д. е. (отложим его на оси ординат A_1, получим точку B_1).

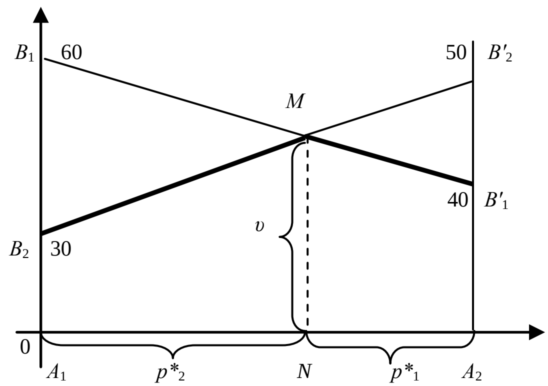


Рис. 2.1. Геометрическое решение матричной игры для игрока *A*

При второй стратегии игрока *B* выигрыш игрока *A* будет 30 у. д. е. (отложим его на оси ординат A_1, получим точку B_2). Игрок *A* применяет свою вторую стратегию при первой стратегии игрока *B*. Его выигрыш будет 40 у. д. е. (точка B'_1) и при второй стратегии игрока *B* – 50 у. д. е. (точка B'_2). Любая точка отрезка $[B_1, B'_1]$ характеризует величину выигрыша игрока *A* при применении им первой и второй стратегий при условии, что игрок *B* применяет свою первую стратегию. Любая точка отрезка $[B_2, B'_2]$ характеризует величину выигрыша игрока *A* при применении им первой и второй стратегий, когда игрок *B* применяет свою вторую стратегию. Точки ломаной линии $B_2MB'_1$ соответствуют нижней границе выигрыша игрока *A*. Максимальный же выигрыш игрок *A* достигает в точке *M*. Длина отрезка *MN* является ценой игры v. Расстояния от точки *N* до концов единичного отрезка оси абсцисс равны вероятностям p_1^* и p_2^* чистых стратегий A_1 и A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока *A*.

Рассчитаем вероятности, с которыми игрок *A* должен смешивать свои чистые стратегии для получения максимального выигрыша. Составим систему уравнений исходя из следующих соображений.

Если игрок *B* будет применять свою первую стратегию, то выигрыш игрока *A* можно описать так:

$$60p_1 + 40p_2 = v,$$

а если игрок *B* применит вторую стратегию, то выигрыш игрока *A* характеризуется уравнением:

$$30p_1 + 50p_2 = \upsilon.$$

Игрок A применит свою первую стратегию с вероятностью p_1, а вторую – с вероятностью p_2, сумма которых равна единице:

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 60p_1 + 40p_2 = \upsilon \\ 30p_1 + 50p_2 = \upsilon \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решим ее, выразив p_1:

$$p_1 = 1 - p_2$$

и подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} 60 - 60p_2 + 40p_2 = \upsilon \\ 30 - 30p_2 + 50p_2 = \upsilon \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 60 - 20p_2 = \upsilon \\ 30 + 20p_2 = \upsilon \end{cases}$$

Почленно просуммировав первое и второе уравнения, получим:

$$90 = 2\upsilon.$$

Отсюда, цена игры равна:

$$\upsilon = 45.$$

Найдем вероятности, с которыми игрок A смешивает свои чистые стратегии:

$$60 - 20p_2 = 45;$$
$$20p_2 = 15;$$
$$p_2 = 0{,}75;$$
$$p_1 = 1 - p_2 = 0{,}25.$$

Для получения максимального выигрыша игрок A должен применять свои чистые стратегии с вероятностями $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}75$, т. е. оптимальная смешанная стратегия:

$$\overline{p}* = (0{,}25;\ 0{,}75).$$

Отклонение игрока A от этой оптимальной смешанной стратегии приведет к уменьшению выигрыша.

Пример. Решим геометрическим способом матричную игру, заданную следующей платежной матрицей:

Стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	15	9
A_2	12	7	6	11
A_3	6	7	10	8

Приведем платежную матрицу игры к виду $2 \times n$ или $m \times 2$. Сравнивая элементы третьей и первой строк, видим, что все элементы третьей строки соответственно меньше элементов первой строки, следовательно, выбор третьей стратегии игроку A не выгоден, ее можно удалить и не рассматривать, тогда платежная матрица будет иметь следующий вид:

Стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	15	9
A_2	12	7	6	11

Таким образом, первоначальную матрицу заменим на платежную матрицу меньшей размерности, используя правило доминирования, согласно которому можно отбросить те стратегии, которые заведомо не выгодны игрокам.

Так, игрок A имеет две стратегии, а игрок B – четыре. Геометрическое решение игры изобразим на рис. 2.2.

Из рис. 2.2 видно, что пересекаются отрезки $[B_1, B'_1]$ и $[B_2, B'_2]$, характеризующие первую и вторую стратегии игрока B. Составим для игрока A систему уравнений, характеризующую решение игры:

$$\begin{cases} 8p_1 + 12p_2 = \upsilon \\ 10p_1 + 7p_2 = \upsilon \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Выразим p_1 через p_2:

$$p_1 = 1 - p_2$$

и подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} 8+4p_2=\upsilon \\ 10-3p_2=\upsilon \end{cases}$$

отсюда:

$$\upsilon = 9{,}14;$$

$$p_2 = 0{,}286;$$

$$p_1 = 0{,}714.$$

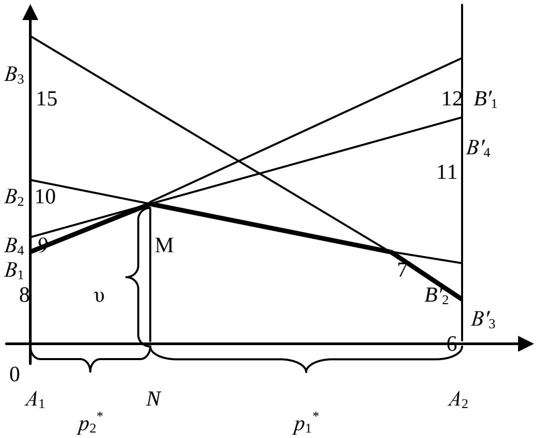


Рис. 2.2. Геометрическое решение игры для игрока *A*

Игрок *A* имеет следующую оптимальную смешанную стратегию:

$$\overline{p}^* = (0{,}714;\ 0{,}286).$$

При этом выигрыш игрока *A* составит 9,14.

Пример. Найдем решение игры геометрическим способом.

Игра задана следующей платежной матрицей:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	7	1
A_2	4	6
A_3	2	8
A_4	3	8

В этой игре игрок A имеет 4 стратегии, а игрок B – две. Строим прямые линии, соответствующие стратегиям игрока B (рис. 2.3).

Ломаная линия $A_1MA'_4$ соответствует верхней границе проигрыша игрока B. Минимальный же проигрыш игрок B получит в точке M.

Из рис. 2.3 видно, что пересекаются отрезки $[A_1, A'_1]$ и $[A_4, A'_4]$. Исходя из этого, для игрока B составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 7q_1 + 1q_2 = \upsilon, \\ 3q_1 + 8q_2 = \upsilon, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Выразим q_1 через q_2:

$$q_1 = 1 - q_2$$

и подставим в систему уравнений.

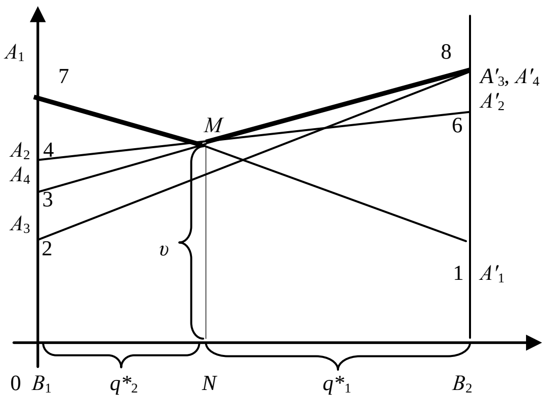


Рис. 2.3. Решение матричной игры для игрока B

Получим:

$$\begin{cases} 7 - 7q_2 + 1q_2 = \upsilon, \\ 3 - 3q_2 + 8q_2 = \upsilon, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6q_2 = \upsilon, \\ 3 + 5q_2 = \upsilon. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\upsilon = 4{,}818;$$

$$q_2 = 0{,}364;$$

$$q_1 = 0{,}636.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока *B* равна:

$$\overline{q}* = (0{,}636;\ 0{,}364),$$

при которой проигрыш игрока *B* будет наименьшим и составит 4,818.

2.5. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Рассмотрим на примерах решение матричных игр в смешанных стратегиях.

Пример. Допустим, на базе торгового предприятия имеется *n* видов товаров какой-либо товарной группы. В магазин надо завести определенный объем товаров данной группы, равный 1000 ед. Известно, что если конкретный товар пользуется спросом, то от его реализации магазин получит прибыль, а если нет – то убыток, связанный с хранением и порчей товара (табл. 2.5).

Т а б л и ц а 2.5. **Финансовые показатели работы магазина**

Показатели	Вид товара						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Доход от реализации товара, у. д. е.	42	42	42	42	42	42	42
Издержки, у. д. е.	2	6	7	8	5	1	3

Требуется определить объемы товаров каждого вида, которые целесообразно завести в магазин для гарантированного получения им дохода.

В качестве игрока *A* примем магазин, в качестве игрока *B* будет выступать спрос населения. Каждый из игроков имеет по 7 стратегий, т. е. A_i – стратегии игрока *A* по завозу конкретного товара и B_j – стратегии игрока *B*, т. е. спрос на конкретный товар. Составим платежную матрицу игры:

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	42	–2	–2	–2	–2	–2	–2
A_2	–6	42	–6	–6	–6	–6	–6
A_3	–7	–7	42	–7	–7	–7	–7
A_4	–8	–8	–8	42	–8	–8	–8
A_5	–5	–5	–5	–5	42	–5	–5
A_6	–1	–1	–1	–1	–1	42	–1
A_7	–3	–3	–3	–3	–3	–3	42

Определим верхнюю и нижнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = -1;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 42.$$

Так как $\alpha \neq \beta$, т. е. $-1 \neq 42$, то игра не имеет седловой точки, следовательно, должна быть решена в смешанных стратегиях. Согласно *основной теореме игр* – теореме Джона фон Неймана – *каждая матричная игра двух лиц с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях*. Это значит, что игроки будут применять не одну чистую стратегию, а несколько, и будут смешивать их случайным образом. Пусть $p_i(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$. При этом –

$$p_i \geq 0(i = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

и $q_j(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ – вероятности, с которыми игрок B использует в ходе игры свои чистые стратегии $B_1, B_2, \ldots, B_n$. При этом –

$$q_j \geq 0(i = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B), которая является функцией от смешанных стратегий $\overline{p}$ и $\overline{q}$ (обозначим их через $\overline{p}, \overline{q}$) и рассчитывается по формуле:

$$f(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

По аналогии с решением матричных игр в чистых стратегиях нижней ценой игры будет число α, которое определяется по формуле:

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

Верхней ценой игры будет число β, которое вычисляется по формуле:

$$\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

Цена игры при этом будет равна:

$$\upsilon = f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = \alpha = \beta ,$$

или

$$\upsilon = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

При этом

$$\overline{p}^*, \overline{q}^*$$

называются *оптимальными смешанными стратегиями игроков* A и B. Цена игры υ характеризует средний выигрыш первого игрока или средний проигрыш второго игрока при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Практически матричные игры в смешанных стратегиях сводят к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования.

Так как оптимальная смешанная стратегия игрока A определяется по формуле:

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) ,$$

то пусть –

$$\upsilon = \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

Так как при оптимальной стратегии средний выигрыш не меньше υ (цены игры) при любой стратегии противника, то математическое ожидание цены игры по каждой стратегии для игрока *A* будет равно:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq \upsilon,\ j = \overline{1, n}$$

при условии –

$$2)\ p_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

При этом требуется максимизировать выигрыш игрока *A*:

$$F_{\max} = \upsilon.$$

Разделив левые и правые части ограничений на υ, получим:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i}{\upsilon} \geq 1,\ j = \overline{1, n};$$

$$2)\ \frac{p_i}{\upsilon} \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

Обозначим:

$$\frac{p_i}{\upsilon} = x_i.$$

Получим:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1, n};$$

$$2)\ x_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

Известно, что:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Разделив данное выражение на υ, получим:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{\upsilon}=\frac{1}{\upsilon}.$$

Обозначив:

$$x_i=\frac{p_i}{\upsilon},$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=\frac{1}{\upsilon}.$$

Так как

$$F_{\max}=\upsilon,$$

то $F_{\max}=\upsilon$ равнозначно

$$F_{\min}=\frac{1}{\upsilon},\text{ т. е. } F_{\min}=\sum_{i=1}^{m}x_i.$$

Таким образом, *задачу линейного программирования для игрока А* запишем следующим образом:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\ge 1,\ j=\overline{1,n};$$

$$2)\ x_i\ge 0, i=\overline{1,m}.$$

$$F_{\min}=\sum_{i=1}^{m}x_i.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока *B* определяется по формуле:

$$\beta=\min_{\overline{q}}\max_{\overline{p}} f(\overline{p};\overline{q}).$$

Допустим:

$$\upsilon=\max_{\overline{p}} f(\overline{p};\overline{q}),$$

следовательно, при оптимальной стратегии средний проигрыш игрока *B* будет не больше υ при любой стратегии игрока *A*, поэтому математическое ожидание цены игры по каждой стратегии для игрока *B* будет равно:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon, i = \overline{1, m}$$

при условии –

$$q_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\ .$$

При этом требуется минимизировать проигрыш игрока *B*:

$$F_{\min} = \upsilon\ .$$

Разделив левые и правые части ограничений на υ, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{\upsilon} \le \frac{\upsilon}{\upsilon}, i = \overline{1, m}\ ;$$

$$\frac{q_j}{\upsilon} \ge 0,\ j = \overline{1, n}\ .$$

Обозначим:

$$y_j = \frac{q_j}{\upsilon}\ .$$

Получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, i = \overline{1, m}\ ,$$

$$y_j \ge 0, j = \overline{1, n}\, .$$

Так как известно, что –

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1\ ,$$

то, разделив это выражение на υ, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}, \text{ т. е. } \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\upsilon}.$$

Так как

$$F_{\min} = \upsilon,$$

то это равнозначно:

$$F_{\max} = \frac{1}{\upsilon}, \text{ или } F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Таким образом, *задачу линейного программирования для игрока B* запишем следующим образом:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, i = \overline{1,m};$$

$$2)\ y_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Составим задачу линейного программирования для игрока *A*. Так как среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные, то преобразуем их в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы величины *C*, значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. Преобразуем платежную матрицу, прибавив к ее элементам *C* = 8:

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	50	6	6	6	6	6	6
A_2	2	50	2	2	2	2	2
A_3	1	1	50	1	1	1	1
A_4	0	0	0	50	0	0	0
A_5	3	3	3	3	50	3	3
A_6	7	7	7	7	7	50	7
A_7	5	5	5	5	5	5	50

Для игрока A задача будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} 50x_1+2x_2+1x_3+3x_5+7x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+50x_2+1x_3+3x_5+7x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+50x_3+3x_5+7x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+1x_3+50x_4+3x_5+7x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+1x_3+50x_5+7x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+1x_3+3x_5+50x_6+5x_7\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+1x_3+3x_5+7x_6+50x_7\ge 1. \end{cases}$$

$$F_{\min}=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7.$$

В результате решения задачи линейного программирования получены следующие значения неизвестных величин:

$$x_1 = 0{,}0148,$$

$$x_2 = 0{,}0136,$$

$$x_3 = 0{,}0133,$$

$$x_4 = 0{,}0130,$$

$$x_5 = 0{,}0139,$$

$$x_6 = 0{,}0151,$$

$$x_7 = 0{,}0145,$$

$$F_{\min} = 0{,}0981.$$

Задачи линейного программирования решаются с использованием пакетов прикладных программ: Excel, LPX.88.

От результатов решения задачи линейного программирования необходимо перейти к результатам решения матричной игры.

Так как для игрока B –

$$\frac{q_j}{\upsilon}=y_j \text{, а } F_{\max}=\frac{1}{\upsilon},$$

то

$$\frac{q_j}{\dfrac{1}{F_{\max}}}=y_j,$$

следовательно,

$$q_j \cdot F_{\max} = y_j ,$$

отсюда

$$q_j = \frac{y_j}{F_{\max}} .$$

Так как для игрока *A*:

$$\frac{p_i}{\upsilon} \geq x_i , \text{ а } F_{\min} = \frac{1}{\upsilon} ,$$

то

$$\upsilon = \frac{1}{F_{\min}} \text{ и } \frac{p_i}{\frac{1}{F_{\min}}} = x_i ,$$

следовательно,

$$p_i \cdot F_{\min} = x_i ,$$

отсюда

$$p_i = \frac{x_i}{F_{\min}} .$$

Используя вышеизложенные преобразования, определяют вероятности, с которыми игроки должны смешивать свои чистые стратегии:

p_1 = 0,0148 : 0,0981 = 0,150,

p_2 = 0,0136 : 0,0981 = 0,138,

p_3 = 0,0133 : 0,0981 = 0,135,

p_4 = 0,0130 : 0,0981 = 0,132,

p_5 = 0,0139 : 0,0981 = 0,141,

p_6 = 0,0151 : 0,0981 = 0,153,

p_7 = 0,0145 : 0,0981 = 0,147,

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} - C = \frac{1}{0{,}0981} - 8 = 2{,}15 \text{ у. д. е.}$$

Вероятности p_i трактуются как доли каждого вида товара, завозимого в магазин. Если магазин завозит весь ассортимент товара в объеме 1000 единиц, то согласно оптимальной стратегии –

$$\overline{p}^* = (0{,}150;\ 0{,}138;\ 0{,}135;\ 0{,}132;\ 0{,}141;\ 0{,}153;\ 0{,}147)$$

необходимо завести 150 единиц товара первого вида, 138 – второго; 135 – третьего; 132 – четвертого; 141 – пятого; 153 – шестого; 147 – седьмого вида.

В этом случае доход магазина будет равен значению игры, т. е.:

$$\upsilon = F_{\max} = 2{,}15 \text{ у. д. е.}$$

Пример. В городе имеются два предприятия, которые помимо основных своих товаров могут выпускать побочную продукцию одного назначения для населения (жидкие чистящие средства для мытья посуды, раковин и т. д.). Продукцию реализуют в городе. Виды чистящих средств разные. Первое предприятие (игрок A) выпускает 6 видов товаров (A_1, A_2, …, A_6). Второе предприятие (игрок B) – тоже 6 видов товаров (B_1, B_2, …, B_6). Себестоимость и цена сбыта всех видов изделий одинаковые. Маркетологи установили, что емкость рынка этой продукции в городе равна 1000 единиц. Примем за p_{ij} вероятность сбыта товара вида i игроком A при реализации товара вида j игроком B, тогда $p_{ij} \cdot 1000$ – это количество товаров, реализованных игроком A, а выражение $(1 - p_{ij}) \cdot 1000$ – количество товаров, реализованных игроком B. Допустим, доход от продажи единицы товара равен 1 у. д. е. В любой ситуации сумма доходов игрока A и B равны 1000:

$$p_{ij} \cdot 1000 + (1 - p_{ij}) \cdot 1000 = 1000,$$

т. е. увеличение выигрыша игрока A эквивалентно проигрышу игрока B.

Прогнозируемая доля сбыта товаров игроком A представлена в табл. 2.6.

Т а б л и ц а 2.6. **Доля сбыта товаров игроком *A***

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,6
A_2	0,1	0,4	0,7	0,1	0,6	0,5
A_3	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,5
A_4	0,3	0,6	0,1	0,3	0,2	0,4
A_5	0,4	0,4	0,3	0	0,1	0,6
A_6	0,7	0,2	0,2	0,4	0,5	0,1

Если объем сбыта товара равен 1000 единиц, то платежная матрица игры будет иметь следующий вид:

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	500	500	400	300	200	600
A_2	100	400	700	100	600	500
A_3	200	300	400	200	700	500
A_4	300	600	100	300	200	400
A_5	400	400	300	0	100	600
A_6	700	500	200	400	500	100

Для удобства расчетов можно элементы платежной матрицы преобразовать, т. е. разделить на 100, следовательно, она будет иметь такой вид:

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	5	4	3	2	6
A_2	1	4	7	1	6	5
A_3	2	3	4	2	7	5
A_4	3	6	1	3	2	4
A_5	4	4	3	0	1	6
A_6	7	5	2	4	5	1

Несложно установить, что элементы пятой строки матрицы (A_5) не больше соответствующих элементов первой строки (A_1), следовательно, вычеркиваем пятую стратегию, она для игрока A не выгодна.

Кроме того, элементы второго столбца (B_2) не меньше соответствующих элементов четвертого столбца (B_4), следовательно, вычеркиваем вторую стратегию для игрока B, она ему не выгодна. Платежная матрица игры будет иметь следующий вид:

A_i	B_j				
	B_1	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	4	3	2	6
A_2	1	7	1	6	5
A_3	2	4	2	7	5
A_4	3	1	3	2	4
A_6	7	2	4	5	1

Элементы первого столбца (B_1) не меньше соответствующих элементов четвертого столбца (B_4), следовательно, вычеркиваем первый столбец.

Элементы четвертой строки (A_4) не больше соответствующих элементов первой строки (A_4), следовательно, вычеркиваем четвертую строку, матрица имеет такой вид:

A_i	B_j			
	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	4	3	2	6
A_2	7	1	6	5
A_3	4	2	7	5
A_6	2	4	5	1

Игра не имеет седловой точки, так как α = 2, а β = 4, и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_6 \geq 1 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 4x_6 \geq 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_6 \geq 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 1x_6 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_6 .$$

Составим задачу линейного программирования для игрока B:

$$\begin{cases} 4y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 6y_6 \leq 1 \\ 7y_3 + 1y_4 + 6y_5 + 5y_6 \leq 1 \\ 4y_3 + 2y_4 + 7y_5 + 5y_6 \leq 1 \\ 2y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 1y_6 \leq 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_3 + y_4 + y_5 + y_6 .$$

Результаты решения задачи линейного программирования для игрока A:

$$x_1 = 0{,}172,$$

$$x_2 = 0{,}011,$$

$$x_3 = 0,$$

$$x_4 = 0,$$

$$x_5 = 0,$$

$$x_6 = 0{,}1183,$$

$$F_{\min} = 0{,}301.$$

Значения неизвестных величин задачи линейного программирования для игрока *B* равны:

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 = 0,$$

$$y_3 = 0{,}1075,$$

$$y_4 = 0{,}1828,$$

$$y_5 = 0{,}01075,$$

$$y_6 = 0,$$

$$F_{\max} = 0{,}301.$$

Перейдем от решения задач линейного программирования к решению матричной игры. Результаты решения игры для игрока *A*:

$$p_i = \frac{x_i}{F_{\min}},$$

$$p_1 = 0{,}571,$$

$$p_2 = 0{,}036,$$

$$p_3 = 0,$$

$$p_4 = 0,$$

$$p_5 = 0,$$

$$p_6 = 0{,}393.$$

Выигрыш игрока *A* составит:

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} \cdot 100 = 3{,}322 \cdot 100 = 332{,}2\,.$$

Результаты решения для игрока *B*:

$$q_j = \frac{y_j}{F_{\max}},$$

$$q_1 = 0,$$

$$q_2 = 1,$$

$$q_3 = 0{,}357,$$

$$q_4 = 0{,}607,$$

$$q_5 = 0{,}036,$$

$$q_6 = 0.$$

Проигрыш игрока *B* равен:

$$F_{\min} = \frac{1}{F_{\max}} \cdot 100 = 332{,}2\ ,$$

а выигрыш – 1000 – 332,2 = 667,8.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока *A* равна:

$$\overline{p}* = (0{,}571;\ 0{,}036;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}393),$$

а оптимальная стратегия игрока *B* –

$$\overline{q}* = (0;\ 0;\ 0{,}357;\ 0{,}607;\ 0{,}036;\ 0).$$

Следовательно, первое предприятие (игрок *A*) должно выбрать выпуск первого, второго и шестого товаров с вероятностями соответственно 0,571; 0,036; 0,393, а игрок *B*, т. е. второе предприятие, должно выбрать выпуск третьего, четвертого и пятого товаров с вероятностями, равными соответственно 0,357; 0,607; 0,036.

В этом случае игрок *A* получит доход, равный 332,2 у. д. е. Решение данной игры позволило найти оптимальные стратегии игроков *A* и *B* и определить математическое ожидание выигрыша игрока *A*, равное υ. Следовательно, в этой игре проигрыш игрока *B* равен υ, а так как сумма общего дохода от продажи товаров равна 1000 шт. · 1 у. д. е. = 1000, то математическое ожидание дохода от реализации товаров второго предприятия будет равно 1000 – 332,2 = 667,8 у. д. е.

Пример. Предприятие Π_1 и Π_2 производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом в течение *n* единиц времени. Прибыль от продажи товара в единицу времени составляет p у. д. е. Предприятие $П_2$, будучи более состоятельным, хочет вытеснить предприятие $П_1$ с рынка сбыта. Оно, не снижая цены на товар, вкладывает дополнительные средства и повышает его качество. Для этого требуется дополнительное время на совершенствование технологии производства товара, на переналадку оборудования, следовательно, будем полагать, что чем выше качество товара, тем он позже поступает на рынок. А от качества товара зависит уровень спроса и реализуется тот товар, качество которого выше.

Необходимо дать рекомендации предприятиям $П_1$ и $П_2$ по оптимальным срокам поставки товара на рынок сбыта, обеспечивающие предприятию $П_1$ максимальную среднюю прибыль, а предприятию $П_2$ – наименьшие потери.

Составим платежную матрицу игры. Предприятия $П_1$ и $П_2$ примем соответственно за игроков A и B. Через $A_i (i = \overline{1, m})$ обозначим чистую стратегию игрока A, состоящую в том, что он поставляет свой товар на рынок в i-ю единицу времени, через $B_j (j = \overline{1, n})$ – чистую стратегию игрока B, в соответствии с которой он поставляет свой товар для сбыта в j-ю единицу времени. Игрок A, выбирая i-ю единицу времени поставки товара, стремится максимизировать свой доход, а игрок B, выбирая j-ю единицу времени поставки своего товара, старается минимизировать доход игрока A.

Элементы платежной матрицы рассчитаем исходя из следующих соображений:

1) если предприятие $П_1$ предложит свой товар в момент времени i, а предприятие $П_2$ позже, в момент времени j (где $i < j$), то предприятие $П_1$, не имея конкурента в течение $(j – i)$ единиц времени, получит прибыль за этот период, равную $p(j – i)$ у. д. е. В момент времени j на рынке появляется товар предприятия $П_2$ более высокого качества и предприятие $П_1$ теряет рынок и прибыли не получает;

2) если $i > j$, то предприятие $П_1$, предлагая свой товар более высокого качества, будет единолично получать доход на отрезке времени от i до n, состоящем из $(n – i + 1)$ единиц времени. Доход предприятия $П_1$ будет равен $p(n – i + 1)$ у. д. е.;

3) если $i = j$, т. е. на рынок одновременно поступает товар обоих предприятий и реализуется с одинаковым спросом, следовательно, прибыль по предприятиям $П_1$ и $П_2$ будет равна $0{,}5 \cdot p(n – i + 1)$ у. д. е.

Так, выигрыши предприятия $П_1$ могут быть найдены по следующим формулам:

$$a_{ij} = \begin{cases} p(j-i), i < j \\ 0{,}5p(n-i+1), i = j \\ p(n-i+1), i > j \end{cases}.$$

Допустим $n = 6$, тогда платежная матрица будет иметь такой вид:

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0,5*p* (6– –1+1)	*p* (2–1)	*p* (3–1)	*p* (4–1)	*p* (5–1)	*p* (6–1)
A_2	*p* (6–2+1)	0,5 *p* (6– –2+1)	*p* (3–2)	*p* (4–2)	*p* (5–2)	*p* (6–2)
A_3	*p* (6–3+1)	*p* (6–3+1)	0,5 *p* (6– –3+1)	*p* (4–3)	*p* (5–3)	*p* (6–3)
A_4	*p* (6–4+1)	*p* (6–4+1)	*p* (6–4+1)	0,5 *p* (6– –4+1)	*p* (5–4)	*p* (6–4)
A_5	*p* (6–5+1)	*p* (6–5+1)	*p* (6–5+1)	*p* (6–5+1)	0,5 *p* (6– –5+1)	*p* (6–5)
A_6	*p* (6–6+1)	*p* (6–6+1)	*p* (6–6+1)	*p* (6–6+1)	*p* (6–6+1)	0,5 *p* (6– –6+1)

Элементы платежной матрицы игры будут следующими:

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α_i
A_1	3*p*	*p*	2*p*	3*p*	4*p*	5*p*	*p*
A_2	5*p*	2,5*p*	*p*	2*p*	3*p*	4*p*	*p*
A_3	4*p*	4*p*	2*p*	*p*	2*p*	3*p*	*p*
A_4	3*p*	3*p*	3*p*	1,5*p*	*p*	2*p*	*p*
A_5	2*p*	2*p*	2*p*	2*p*	*p*	*p*	*p*
A_6	*p*	*p*	*p*	*p*	*p*	0,5*p*	0,5*p*
β_j	5*p*	4*p*	3*p*	3*p*	4*p*	5*p*	

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = p;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 3p;$$

$$(\alpha = p) \neq (\beta = 3p);$$

$$\alpha \neq \beta.$$

Следовательно, игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Запишем вышеизложенную задачу в терминах линейного программирования, предварительно преобразовав элементы платежной матрицы. Так как все они содержат постоянную величину p, то все элементы платежной матрицы разделим на p, получим:

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	3	1	2	3	4	5
A_2	5	2,5	1	2	3	4
A_3	4	4	2	1	2	3
A_4	3	3	3	1,5	1	2
A_5	2	2	2	2	1	1
A_6	1	1	1	1	1	0,5

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 1{,}5x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 0{,}5x_6 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 .$$

Задача линейного программирования для игрока B будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 \leq 1 \\ 5y_1 + 2{,}5y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 4y_6 \leq 1 \\ 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 + 3y_6 \leq 1 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1{,}5y_4 + y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 0{,}5y_6 \leq 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 .$$

Решение исходной задачи для игрока A будет следующим:

$$F_{\min} = 2{,}182 \cdot p,$$

$$x_1 = 0{,}25,$$

$$x_3 = 0{,}125,$$

$$x_4 = 0{,}0833,$$

$$x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0.$$

Решение исходной задачи для игрока *В* будет следующим:

$$F_{\max} = 2{,}182 \cdot p,$$

$$y_2 = 0{,}1667,$$

$$y_3 = 0{,}0417,$$

$$y_4 = 0{,}25,$$

$$y_1 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = 0.$$

Перейдем от решения исходной задачи для игрока *А* к решению матричной игры для игрока *А*:

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} = \frac{1}{0{,}4583} \cdot p = 2{,}182 \cdot p,$$

$$p_1 = \frac{0{,}25}{0{,}4583} = \left(\frac{x_1}{F_{\min}}\right) = 0{,}545,$$

$$p_2 = p_5 = p_6 = 0,$$

$$p_3 = \frac{x_3}{F_{\min}} = \frac{0{,}125}{0{,}4583} = 0{,}273,$$

$$p_4 = \frac{x_4}{F_{\min}} = \frac{0{,}0833}{0{,}4583} = 0{,}182,$$

$$p_1 + p_3 + p_4 = 1{,}0 .$$

Перейдем от решения исходной задачи для игрока *В* к решению матричной игры для игрока *В*:

$$F_{\min} = \frac{1}{F_{\max}} = \frac{1}{0{,}4583} \cdot p = 2{,}182 \cdot p,$$

$$q_1 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0,$$

$$q_2 = \frac{y_2}{F_{\max}} = \frac{0{,}1667}{0{,}4583} = 0{,}364,$$

$$q_3 = \frac{y_3}{F_{\max}} = \frac{0{,}0417}{0{,}4583} = 0{,}091,$$

$$q_4 = \frac{y_4}{F_{\max}} = \frac{0{,}25}{0{,}4583} = 0{,}545,$$

$$q_2 + q_3 + q_4 = 1{,}0 .$$

Таким образом, вторая, пятая и шестая стратегии игрока A бесполезны, так как p_2, p_5, p_6 = 0. При случайном использовании первой, третьей и четвертой стратегий с относительными частотами:

$$p_1 = 0{,}545;\ p_3 = 0{,}273;\ p_4 = 0{,}182$$

игроку A обеспечен средний выигрыш в размере –

$$F_{\max} = 2{,}182 \cdot p \text{ у. д. е.}$$

При случайном чередовании второй, третьей и четвертой стратегий игроком B с относительными частотами:

$$q_2 = 0{,}364;\ q_3 = 0{,}091;\ q_4 = 0{,}545$$

игроку B обеспечен средний проигрыш в размере –

$$F_{\min} = 2{,}182 \cdot p \text{ у. д. е.}$$

Так, первое предприятие должно выбрасывать свой товар на рынок в первую, третью и четвертую единицы времени с вероятностями, равными соответственно 0,545; 0,273 и 0,182, а второе предприятие должно выбрасывать свой товар во вторую, третью и четвертую единицы времени с вероятностями, равными соответственно 0,364; 0,091; 0,545. В этом случае математическое ожидание дохода первого предприятия будет равно 2,182 · p у. д. е.

2.6. Позиционные игры

В реальной действительности игроки наблюдают за динамикой конфликта, имеют информацию о фактически складывающейся обстановке. Конфликты, в которых детализируется поведение участников конфликта во времени, можно моделировать позиционными играми.

Позиция – это элемент дерева игры. В каждой позиции делает ход один из игроков (1, 2 или 0), при этом цифрой «0» обозначен фиктивный игрок (природа), который делает ход согласно заданному распределению вероятностей.

Дерево игры изображается графически с помощью плоской фигуры, состоящей из конечного числа вершин (рис. 2.4).

Вершины, или позиции, соединяются ребрами. Ребра, соединяющие некоторую позицию с непосредственно следующей за ней, называются *альтернативами* этой позиции.

Альтернативы каждой позиции нумеруются натуральными числами по часовой стрелке (1 или 2).

Позиции, не имеющие последующих позиций, называются *окончательными*, а остальные позиции считаются *неокончательными*. Построение диаграммы игры начинается с начальной позиции, в которой указывается, какой из игроков делает ход.

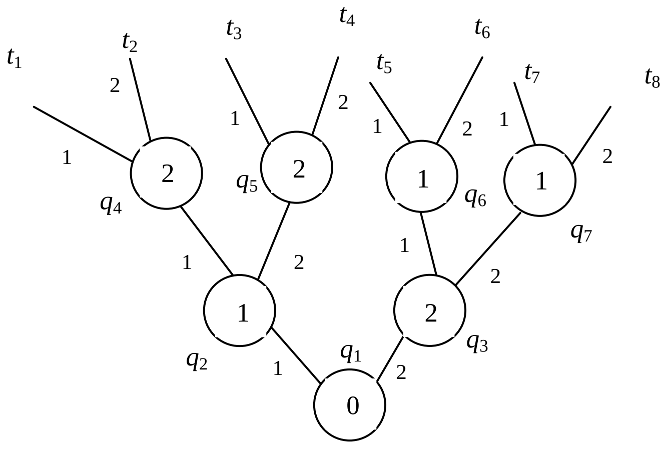


Рис. 2.4. Дерево игры

Из вершины (позиции) q_1 проводят ребра, соответствующие альтернативам игрока, который делает первый ход. Они соединяют вершину q_1 с вершинами (позициями) игроков, которые делают следующий ход, и так далее до тех пор, пока не будут обозначены окончательные вершины (позиции).

Каждая окончательная вершина (позиция) характеризуется элементом t_i, который указывает, сколько выиграет игрок 1, если игра закончится в данной вершине (позиции).

Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом (природой), то позиции (или узлу), соответствующему данному ходу, присваивается номер «0».

Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из отрезков дерева (т. е. ребер), идущая с нижней позиции последовательно через соответствующие позиции до вершины дерева. Каждая ветвь отображает партию игры. Для изображения необходимых сведений о сделанных выборах при определенных ходах игроков на дереве игры отмечают кружком, овалом и т. д. информационные множества позиций или узлов конкретного игрока. В каждое информационное множество входят те позиции (узлы), для которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Таким образом, позиционная игра состоит из:

– дерева игры;

– функций, определяющих в каждой вершине сумму, которая должна быть уплачена игроку 1, если партия заканчивается в точке t;

– набора чисел (количество которых равно числу игроков игры), указывающих в каждой позиции, какой из игроков делает очередной ход;

– сопоставления каждой позиции альтернатив, т.е. выборов конкретных игроков (обозначенных ребрами), и помеченных натуральными числами (1 и 2);

– разбивки позиций на информационные множества, которые должны удовлетворять следующим условиям:

а) все позиции, принадлежащие данному информационному множеству, относятся к одному игроку;

б) все позиции, принадлежащие одному информационному множеству, имеют одинаковое число альтернатив, которые нумеруют натуральными числами;

в) для игрока 0 (природы), если он участвует в игре, информационное множество всегда состоит из одной позиции (начальной);

г) для конкретной партии игры (т. е. ломаной линии, идущей от основания дерева к одной из его вершин) имеется одна позиция из конкретного информационного множества (для этой партии).

Пример. Имеются два предприятия, которые хотят установить между собой деловые связи. И они решают вопрос о строительстве перерабатывающего модуля, причем первое предприятие может построить перерабатывающий модуль для второй организации. Эту ситуацию упрощенно можно представить в виде позиционной игры и изобразить следующим деревом (рис. 2.5).

Игра состоит из трех ходов, которые делают два игрока. Первый ход делает первый игрок: он выбирает число *x* из множества двух чисел: 1 или 2.

Второй ход делает второй игрок: зная, какое число *x* выбрал первый игрок на первом ходу, он выбирает число *y* из множества двух чисел: 1 или 2.

Третий ход делает первый игрок: зная, какое число *y* выбрал второй игрок, и помня, какое число *x* он выбрал на первом ходу, первый игрок на третьем ходу выбирает число *z* из множества двух чисел: 1 или 2.

Таким образом, на первом ходу первый игрок (первое предприятие) делает выбор из двух альтернатив:

1-я – предложить второй организации построить перерабатывающий модуль по производству молочных продуктов,

2-я – предложить построить модуль для производства мясных продуктов.

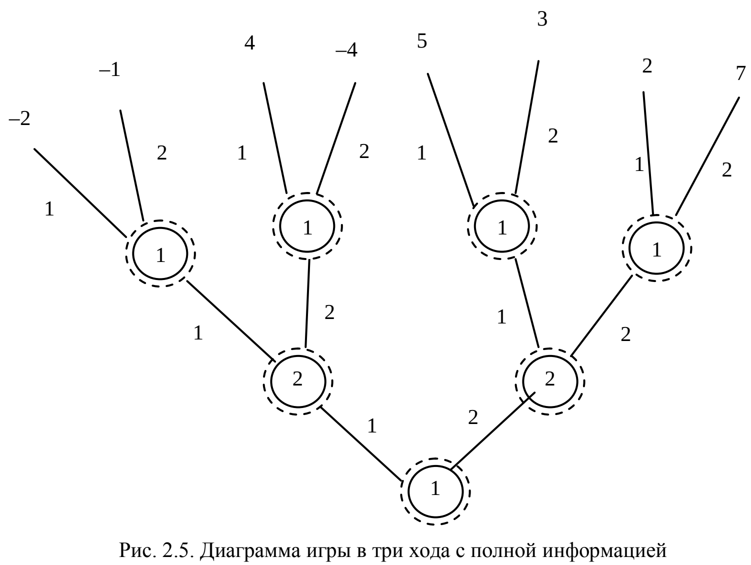


Рис. 2.5. Диаграмма игры в три хода с полной информацией

Второй игрок (второе предприятие) на втором ходу, зная, какую альтернативу выбрала первая организация на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив:

1-я – строить перерабатывающий модуль по производству молочных продуктов и согласиться с предложением первого предприятия и заключить договор с ним;

2-я – строить модуль по производству мясных продуктов и согласиться с предложением первого предприятия и заключить с ним договор.

Первая организация, зная выбор второго предприятия на втором ходу и помня свой выбор на первом ходу, делает на третьем ходу выбор из двух альтернатив:

– 1-я – согласиться с предложением второго предприятия и заключить договор,

– 2-я – не согласиться с предложением второго предприятия.

Таким образом, после того как сделаны 3 хода, первая организация получит сумму, определенную функцией:

$$f(x; y; z),$$

где x – выбор числа 1 или 2 на первом ходу;

y – выбор числа 1 или 2 на втором ходу;

z – выбор числа 1 или 2 на третьем ходу.

Так как второму игроку известен выбор первого на первом ходе, то он, делая свой выбор, знает, в каком месте дерева он находится, следовательно, в этой игре каждая позиция образует отдельное информационное множество.

Для нашего примера игра заканчивается и происходит распределение выигрышей, второй игрок платит первому игроку сумму, определенную функцией:

$$f(x; y; z),$$

$$f(1; 1; 1) = -2,$$

$$f(1; 1; 2) = -1,$$

$$f(1; 2; 1) = 4,$$

$$f(1; 2; 2) = -4,$$

$$f(2; 1; 1) = 5,$$

$$f(2; 1; 2) = 3,$$

$$f(2; 2; 1) = 2,$$

$$f(2; 2; 2) = 7.$$

Для того чтобы найти решение позиционной игры, необходимо ее свести к матричной игре. Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией позиционной игры*.

Для этого рассмотрим различные *стратегии игроков*. Так, у второго игрока имеется возможность выбора одного из двух чисел 1 или 2, т. е. есть две стратегии. Кроме этого, он имеет информацию о выбранном числе x на первом ходу игроком 1, следовательно, он, выбирая число y, может учитывать или не учитывать эту информацию, т.е. для каждого числа y есть еще два значения x, следовательно, второй игрок имеет всего четыре стратегии:

1-я – выбрать число $y = 1$, не взирая на число x;

2-я – выбрать число $y = 2$, не взирая на число x;

3-я – выбрать число y, равное числу x;

4-я – выбрать число $y = 1$, если число $x = 2$, и выбрать число $y = 2$, если число $x = 1$.

Рассмотрим стратегии первого игрока. При каждом выборе на первом ходу может быть два выбора на втором ходу, т. е. первый игрок имеет четыре стратегии, и для этих четырех вариантов может быть сделано еще два выбора, следовательно, первый игрок имеет восемь возможных стратегий.

Стратегию первого игрока обозначим через:

$$(i_0;\ i_1;\ i_2),$$

где i_0 означает выбор игроком 1 на первом ходу;

i_1 – выбор первым игроком на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал число 1;

i_2 – выбор первым игроком на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал число 2.

Выигрыши первого игрока определяем следующим образом:

$(i_0; i_1; i_2)$	$y = 1$, не взирая на x	$y = 2$, не взирая на x	$y = x$	$y = 1$, если $x = 2$; $y = 2$, если $x = 1$
1, 1, 1	1, 1, 1 = –2	1, 2, 1 = 4	1, 1, 1 = –2	1, 2, 1 = 4
1, 1, 2	1, 1, 1 = –2	1, 2, 2 = –4	1, 1, 1 = –2	1, 2, 2 = –4
1, 2, 1	1, 1, 2 = –1	1, 2, 1 = 4	1, 1, 2 = –1	1, 2, 1 = 4
1, 2, 2	1, 1, 2 = –1	1, 2, 2 = –4	1, 1, 2 = –1	1, 2, 2 = –4
2, 1, 1	2, 1, 1 = 5	2, 2, 1 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 1, 1 = 5
2, 1, 2	2, 1, 1 = 5	2, 2, 2 = 7	2, 2, 2 = 7	2, 1, 1 = 5
2, 2, 1	2, 1, 2 = 3	2, 2, 1 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 1, 2 = 3
2, 2, 2	2, 1, 2 = 3	2, 2, 2 = 7	2, 2, 2 = 7	2, 1, 2 = 3

Платежная матрица игры будет выглядеть таким образом:

A_i	B_j			
	1	*2*	*3*	*4*
1	–2	4	–2	4
2	–2	–4	–2	–4
3	–1	4	–1	4
4	–1	–4	–1	–4
5	5	2	2	5
6	5	7	7	5
7	3	2	2	3
8	3	7	7	3

Преобразуем элементы платежной матрицы игры в положительные путем прибавления $C = 4$:

A_i	B_j				α_i
	1	*2*	*3*	*4*	
1	2	8	2	8	2
2	2	0	2	0	0
3	3	8	3	8	3
4	3	0	3	0	0
5	9	6	6	9	6
6	9	11	11	9	9
7	7	6	6	7	6
8	7	11	11	7	7
β_j	9	11	11	9	9

Найдем нижнюю и верхнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 9\,;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9\,.$$

Так как

$$\alpha = \beta = \upsilon = 9 - C = 9 - 4 = 5,$$

то игра имеет седловую точку и решается в чистых стратегиях.

Оптимальной является шестая стратегия для первого игрока.

Первое предприятие должно предложить второй организации построить модуль для производства мясных продуктов (ход 1 первого игрока альтернатива 2), но второй игрок (второе предприятие) рассматривает возможность построить модуль по производству молочных продуктов (ход 2 второго игрока альтернатива 1), первое предприятие не соглашается с будущим партнером, и не заключает договор на строительство модуля по производству молочных продуктов (ход 3 первого игрока альтернатива 2).

Пример. Допустим, первый игрок на третьем ходу не знает выборов, сделанных вторым игроком на втором ходу, и забыл, какой выбор он сделал сам на первом ходу.

В этом случае первого игрока можно представить в виде двух лиц, которые не имеют возможности обмениваться информацией, т. е. первый ход делает первое лицо, а третий ход – второе лицо.

При графическом представлении игры эти обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходу не знает, в какой из позиций третьего уровня он находится, поэтому все четыре позиции третьего уровня образуют информационное множество (рис. 2.6).

Сведем позиционную игру к матричному виду. У второго игрока имеется четыре таких же стратегии, как в предыдущем примере. У первого игрока возможности уменьшаются за счет недостатка информации, так как он на третьем ходу не знает предыдущих выборов, то его стратегия состоит из пары чисел (x, z), т. е. на первом ходу он может выбрать $x = 1$ или $x = 2$, и на третьем ходу он может выбрать $z = 1$ или $z = 2$, следовательно, первый игрок имеет четыре стратегии:

$$(1,1); (1,2); (2,1); (2,2).$$

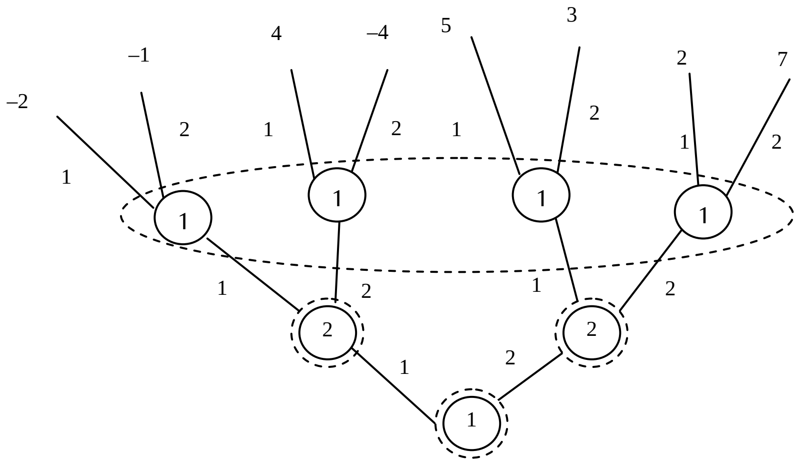


Рис. 2.6. Диаграмма игры с неполной информацией

Составим матрицу выигрышей первого игрока:

(x, z)	$y = 1$, не взирая на x	$y = 2$, не взирая на x	$y = x$	$y = 1$, если $x = 2$; $y = 2$, если $x = 1$
(1,1)	1, 1, 1 = –2	1, 2, 1 = 4	1, 1, 1 = –2	1, 2, 1 = 4
(1,2)	1, 1, 1 = –1	1, 2, 2 = –4	1, 1, 2 = –1	1, 2, 2 = –4
(2,1)	2, 1, 1 = 5	2, 2, 1 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 1, 1 = 5
(2,2)	2, 1, 2 = 3	2, 2, 2 = 7	2, 2, 2 = 7	2, 1, 2 = 3

Преобразуем элементы платежной матрицы игры в положительные, прибавив постоянное слагаемое $C = 4$, получим:

A_i	B_j				α_i
	1	*2*	*3*	*4*	
1	2	8	2	8	2
2	3	0	3	0	0
3	9	6	6	9	6
4	7	11	11	7	7
β_j	9	11	11	9	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 7;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9.$$

Так как $\alpha \neq \beta$ – игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 \geq 1 \\ 8x_1 + 6x_3 + 11x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 11x_4 \geq 1 \\ 8x_1 + 9x_3 + 7x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Задача линейного программирования для второго игрока:

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 8y_4 \leq 1 \\ 3y_1 + 3y_3 \leq 1 \\ 9y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 9y_4 \leq 1 \\ 7y_1 + 11y_2 + 11y_3 + 7y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

Приведем результаты решения симметричных двойственных задач линейного программирования:

для первого игрока –

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = 0{,}702,$$

$$x_4 = 0{,}0526,$$

$$F_{\min} = 0{,}1228,$$

для второго игрока –

$$y_1 = 0{,}0877,$$

$$y_2 = 0{,}0351,$$

$$y_3 = 0,$$

$$y_4 = 0,$$

$$F_{\max} = 0{,}1228.$$

Найдем оптимальные смешанные стратегии игроков:
для первого игрока –

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = 0,$$

$$p_3 = 0{,}57,$$

$$p_4 = 0{,}43,$$

для второго игрока –

$$q_1 = 0{,}71,$$

$$q_2 = 0{,}29,$$

$$q_3 = 0,$$

$$q_4 = 0.$$

Если первый игрок использует свою оптимальную смешанную стратегию:

$$\overline{p}* = (0;\ 0;\ 0{,}57;\ 0{,}43),$$

а второй игрок – смешанную стратегию

$$\overline{q}* = (0{,}71;\ 0{,}29;\ 0{,}0),$$

то выигрыш первого игрока составит:

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} - 4 = 4{,}14 \text{ млн. у. д. е.}$$

Как видим, потеря информации уменьшает цену игры.

Пример. Допустим, второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходу и, следовательно, выполняя свой ход, он не знает точно, в какой позиции он находится. Поэтому позиции второго уровня образуют информационное множество, такое образовано и для первого игрока на третьем ходу. Графическое изображение игры будет выглядеть следующим образом (рис. 2.7).

Первый игрок в этой игре имеет четыре стратегии (1,1); (1,2); (2,1); (2,2), обозначенные парой чисел (x, z).

А у второго игрока есть две стратегии:

1-я – выбрать число 1;

2-я – выбрать число 2.

Сформируем матрицу выигрышей для первого игрока:

(x, z)	y	
	1	*2*
(1,1)	1,1,1 = –2	1,2,1 = 4
(1,2)	1,1,2 = –1	1,2,2 = –4
(2,1)	2,1,1 = 5	2,2,1 = 2
(2,2)	2,1,2 = 3	2,2,2 = 7

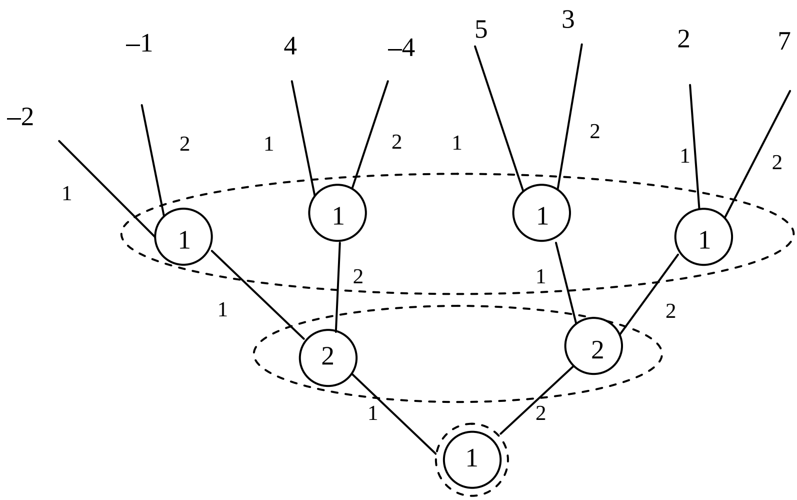


Рис. 2.7. Диаграмма игры с неполной информацией

Прибавив к элементам платежной матрицы $C = 4$, получим:

(x, z)	y		α_i
	1	*2*	
(1,1)	2	8	2
(1,2)	3	0	0
(2,1)	9	6	6
(2,2)	7	11	7
β_j	9	11	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 7\,;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9\,.$$

Так как игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$, то ее необходимо решить в смешанных стратегиях.

Решим игру геометрически (рис. 2.8).

Ломаная линия $A_3MA'_4$ соответствует верхней границе проигрыша игрока 2. А минимальный проигрыш игрок 2 получит в точке M. Из графика видно, что пересекается четвертая и третья прямые линии.

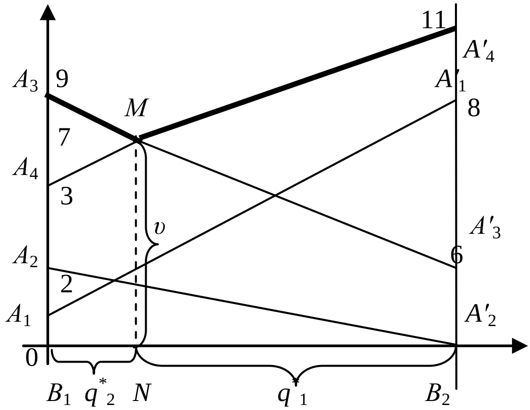


Рис. 2.8. Геометрическое решение игры

Исходя из этого соображения, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9q_1 + 6q_2 = \upsilon \\ 7q_1 + 11q_2 = \upsilon \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Выразим q_1 через q_2:

$$q_1 = 1 - q_2.$$

Подставив значение q_1 в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 9 - 3q_2 = \upsilon \\ 7 + 4q_2 = \upsilon \end{cases}$$

Уравняем коэффициенты при q_2, сложим два уравнения и решим. Получим, что $q_2 = 0{,}286$, тогда $q_1 = 0{,}714$, а $\upsilon = 8{,}143 - 4 = 4{,}143$ млн. у. д. е.

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия для игрока 2 равна:

$$\bar{q}^* = (0{,}714;\ 0{,}286),$$

она обеспечивает игроку 2 проигрыш в сумме 4,143 млн. у. д. е.

Пример. В игре участвуют два игрока. Первый игрок – один человек, второй – команда из двух человек A и B. Три человека изолированы друг от друга и не могут обмениваться информацией. Сначала первый игрок выбирает число x из множества двух чисел $\{1,2\}$. После этого, если первый игрок выбрал число 1, то предлагается на втором ходу сделать выбор игроку A, который выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, затем свой выбор делает игрок B на третьем ходу, где он выбирает число z из множества двух чисел $\{1,2\}$. Если же первый игрок выбрал число 2, то предлагается сделать выбор на втором ходу игроку B, который должен выбрать число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, а затем на третьем ходу – игроку A, который должен выбрать число z из множества двух чисел $\{1,2\}$. После выбора трех чисел x, y, z второй игрок платит первому сумму $f\,(x, y, z)$, определенную следующим образом:

$$f(1,1,1) = -2,$$

$$f(1,1,2) = -1,$$

$$f(1,2,1) = 4,$$

$$f(1,2,2) = -4,$$

$$f(2,1,1) = 5,$$

$$f(2,1,2) = 3,$$

$$f(2,2,1) = 2.$$

Графическое представление игры изображено следующим деревом (рис. 2.9).

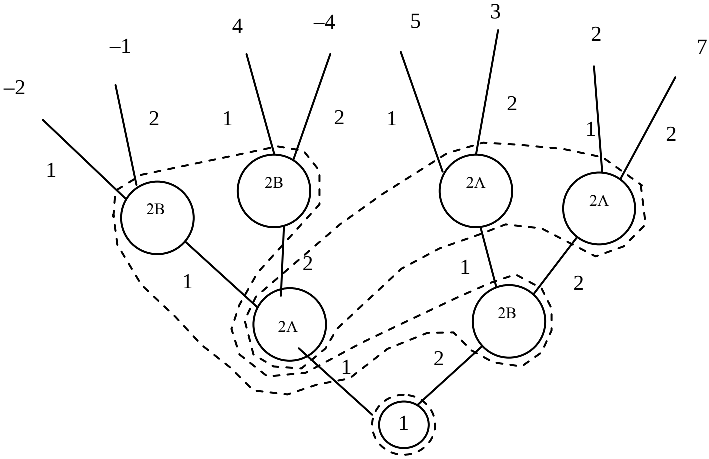


Рис. 2.9. Диаграмма игры с неполной информацией

Информационные множества игрока 2 охватывают второй и третий уровни, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход. Так как игроку 1 никто не мешает сделать свой выбор, то он имеет две стратегии:

1-я – выбрать число 1;

2-я – выбрать число 2.

Игрок 2 имеет четыре стратегии:

1-я – игроки A и B выбирают число 1;

2-я – игрок A выбирает число 1, а игрок B – число 2;

3-я – игрок B выбирает число 1, а игрок A – число 2;

4-я – игроки A и B выбирают число 2.

Сведем позиционную игру к матричной игре. Составим платежную матрицу игры:

Стратегии	$AB = 1$	$A = 1$; $B = 2$	$A = 2$; $B = 1$	$AB = 2$
1	111 = –2	112 = –1	121 = 4	122 = –4
2	211 = 5	221 = 2	212 = 3	222 = 7

Преобразуем элементы платежной матрицы, прибавив $C = 4$:

Стратегии	$AB = 1$	$A = 1;$ $B = 2$	$A = 2;$ $B = 1$	$AB = 2$	α_i
1	2	3	8	0	0
2	9	6	7	11	6
β_j	9	6	8	11	6

Эта игра имеет седловую точку, так как $\alpha = 6$ и $\beta = 6$. Таким образом, игра решается в чистых стратегиях. Оптимальной является стратегия (212), обеспечивающая выигрыш 6 – 4 = 2 млн. у. д. е.

Пример. Первый ход производится случайно, т. е. выбирается число x, равное 1 с вероятностью 0,5 и число 2 с такой же вероятностью. Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x выбрано, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$. Третий ход делает второй игрок, не зная числа x, но зная выбор числа y, он выбирает число z из множества двух чисел $\{1,2\}$. После чего второй игрок платит первому сумму, равную:

$$f(x, y, z).$$

Изобразим графическое представление игры (рис. 2.10). Нижняя позиция обозначена «0», так как первый ход случайный.

По аналогии этот узел также считается образующим информационное множество и, следовательно, он окружен пунктиром.

Игрок 1 имеет четыре стратегии:

1-я – выбрать число $y = 1$ независимо от выбора числа x;

2-я – выбрать число y, равное числу x;

3-я – выбрать число $y = 1$, если число $x = 2$ и число $y = 2$, если число $x = 1$;

4-я – выбрать число $y = 2$ независимо от выбора числа x.

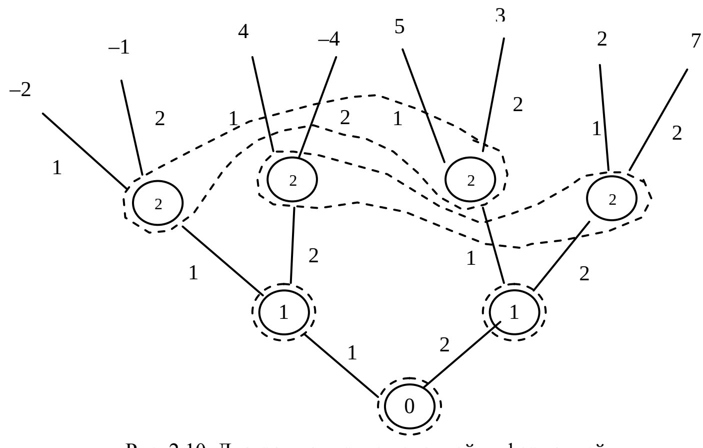


Рис. 2.10. Диаграмма игры с неполной информацией

Второй игрок имеет аналогичные стратегии:

1-я – выбрать число $z = 1$ независимо от числа y;

2-я – выбрать число z, равное числу y;

3-я – выбрать число $z = 1$, если число $y = 2$ и число $z = 2$, если число $y = 1$;

4-я – выбрать число $z = 2$ независимо от числа y.

Составим платежную матрицу игры (табл. 2.7).

Так как первый ход игроком 0 производится случайно с вероятностями, равными 0,5, то элементы платежной матрицы (т. е. выигрыши игрока 1) также проявляются с этими же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока 1 рассчитывается как его математическое ожидание.

Т а б л и ц а 2.7. **Формирование элементов платежной матрицы игры**

Стратегии	$z = 1$ независимо от y	$z = y$	$z = 1$, если $y = 2$; $z = 2$, если $y = 1$	$z = 2$ независимо от y
$y = 1$ независимо от x	111·0,5+211·0,5= =–2·0,5+5·0,5=1,5	111·0,5+211·0,5= =1,5	112·0,5+212·0,5= = –1·0,5+3·0,5=1	112·0,5+212·0,5=1
$y = x$	111·0,5+221·0,5= =–2·0,5+2·0,5=0	111·0,5+222·0,5= =–2·0,5+7·0,5= =2,5	112·0,5+221·0,5= = –1·0,5+2·0,5= =0,5	112·0,5+222·0,5= = –1·0,5+7·0,5=3
$y = 1$, если $x = 2$; $y = 2$, если $x = 1$	121·0,5+211·0,5= =4·0,5+5·0,5=4,5	122·0,5+211·0,5= = –4·0,5+5·0,5 =0,5	121·0,5+212·0,5= =4·0,5+3·0,5= =3,5	122·0,5+212·0,5= = –4·0,5+3·0,5= = –0,5
$y = 2$ независимо от x	121·0,5+221·0,5= =4·0,5+2·0,5=3	122·0,5+222·0,5= = –4·0,5+7·0,5= =1,5	121·0,5+221·0,5= =3	122·0,5+222·0,5= =1,5

Таким образом, платежная матрица игры выглядит следующим образом:

Стратегии	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1,5	1,5	1	1
2	0	2,5	0,5	3
3	4,5	0,5	3,5	–0,5
4	3	1,5	3	1,5

Преобразуем элементы платежной матрицы, прибавив к элементам матрицы $C = 0,5$, получим:

Стратегии	*1*	*2*	*3*	*4*	α_i
1	2	2	1,5	1,5	1,5
2	0,5	3	1	3,5	0,5
3	5	1	4	0	0
4	3,5	2	3,5	2	2
β_j	5	3	4	3,5	

Игра не имеет седловой точки, так как $\alpha = 2$, а $\beta = 3$, и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + 3{,}5x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ 1{,}5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3{,}5x_4 \geq 1 \\ 1{,}5x_1 + 3{,}5x_2 + 2x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Для второго игрока задача линейного программирования выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 1{,}5y_3 + 1{,}5y_4 \leq 1 \\ 0{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 + 3{,}5y_4 \leq 1 \\ 5y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ 3{,}5y_1 + 2y_2 + 3{,}5y_3 + 2y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

Приведем результаты решения задач линейного программирования: для первого игрока –

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0{,}1579,$$
$$x_3 = 0,$$
$$x_4 = 0{,}2632,$$
$$F_{\min} = 0{,}421,$$

для второго игрока –

$$y_1 = 0{,}1053,$$
$$y_2 = 0{,}3458,$$
$$y_3 = 0,$$
$$y_4 = 0,$$
$$F_{\max} = 0{,}421.$$

Результаты решения позиционной игры
для первого игрока –

$$p_1 = 0,$$
$$p_2 = 0{,}375,$$
$$p_3 = 0,$$
$$p_4 = 0{,}625,$$
$$F_{\max} = 2{,}375 - 0{,}5 = 1{,}875,$$

для второго игрока –

$$q_1 = 0{,}25,$$
$$q_2 = 0{,}75,$$
$$q_3 = 0,$$
$$q_4 = 0,$$
$$F_{\min} = 1{,}875.$$

Пример. Позиционная игра представлена следующим деревом игры (рис. 2.11).

Первый ход делает игрок 0 – природа, который с вероятностью 1/3 выбирает из множества двух чисел {1,2} первую альтернативу и с вероятностью 2/3 из множества двух чисел {1,2} вторую альтернативу (т. е. выбирает число x).

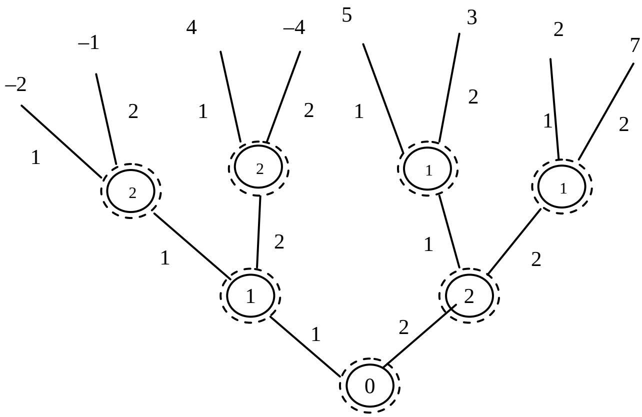


Рис. 2.11. Диаграмма игры

Если игрок 0 на первом ходу выбрал первую альтернативу, то второй ход делает игрок 1, который из множества двух чисел {1,2} выбирает число y, и третий ход делает игрок 2, который тоже из множества двух чисел {1,2} выбирает число z.

Если же игрок 0 на первом ходу выбрал вторую альтернативу, то второй ход делает игрок 2, который из множества двух чисел {1,2} выбирает число y, и третий ход делает игрок 1, который тоже из множества двух чисел {1,2} выбирает число z.

После этого выигрыш первого игрока составляет:

$$f(x, y, z).$$

Рассмотрим стратегии каждого игрока.

Игрок 1 имеет восемь стратегий, каждую из которых запишем как систему чисел

$$i = (i_0, i_1, i_2),$$

где i_0 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на втором ходу, если на первом ходе игрок 0 выбрал первую альтернативу;

i_1 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок 0 выбрал вторую альтернативу, а на втором ходу – первую альтернативу выбрал игрок 2;

i_2 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на третьем ходу, если на первом и втором ходах выбрана вторая альтернатива.

Для второго игрока также будет 8 стратегий. Запишем их как систему чисел

$$j = (j_0, j_1, j_2),$$

где j_0 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на втором ходу, если на первом ходу выбрана игроком 0 вторая альтернатива;

j_1 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок 0 выбрал первую альтернативу, а на втором – игрок 1 тоже выбрал первую альтернативу;

j_2 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок 0 выбрал первую альтернативу, а на втором – игрок 1 выбрал вторую альтернативу.

Сведем позиционную игру к матричному виду.

Сформулируем алгоритм расчета элементов платежной матрицы игры (табл. 2.8).

Т а б л и ц а 2.8. **Формирование элементов платежной матрицы игры**

Стратегии	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(1,2,2)	(2,1,1)	(2,1,2)	(2,2,1)	(2,2,2)
(1,1,1)	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,1
(1,1,2)	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,2
(1,2,1)	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,1
(1,2,2)	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ +2/3·2,2,2
(2,1,1)	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,1
(2,1,2)	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,2
(2,2,1)	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,1
(2,2,2)	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,1+ +2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ +2/3·2,2,2

Рассчитаем коэффициенты платежной матрицы игры (табл. 2.9).

Найдем нижнюю и верхнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2{,}67;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2{,}67.$$

Игра имеет седловую точку, так как α = β = 2,67.

Оптимальной является вторая стратегия игроков (1,1,2), обеспечивающая первому игроку выигрыш, равный 2,67 млн. у. д. е.

Т а б л и ц а 2.9. **Коэффициенты платежной матрицы игры**

Стратегии	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	α_i
1	2,67	2,67	3,00	3,00	0,67	0,67	0	0	0
2	2,67	2,67	3,00	3,00	4,00	4,00	4,33	4,33	2,67
3	1,33	1,33	1,67	1,67	0,67	0,67	0	0	0
4	1,33	1,33	1,67	1,67	4,00	4,00	4,33	4,33	1,33
5	4,67	2,00	4,67	2,00	2,67	2,67	1,67	1,67	1,67
6	4,67	2,00	4,67	2,00	3,33	3,33	6,00	6,00	2,00
7	3,33	0,67	3,33	0,67	2,67	2,67	1,67	1,67	0,67
8	3,33	0,67	3,33	0,67	3,33	3,33	6,00	6,00	0,67
β_j	4,67	2,67	4,67	3,00	4,00	4,00	6,00	6,00	2,67

С помощью позиционной игры можно обосновать оптимальное чередование посевов сельскохозяйственных культур разных сортов в зависимости от ожидаемого характера метеорологических условий каждого года планового периода. При этом за игрока 1 принимают сельскохозяйственное предприятие, за игрока 2 – природу. Для уменьшения расчетов выделим два варианта метеорологических условий (Π_1^1 и Π_2^1 – в первый год планового периода и Π_1^2, Π_2^2 – во второй год планового периода). У сельскохозяйственного предприятия тоже имеется две альтернативы: в первый год планового периода засеять определенную площадь однолетними травами (альтернатива 1, т. е. культура 1) или яровыми зерновыми (альтернатива 2, т. е. культура 4). Если засеять площадь однолетними травами и метеорологические условия первого года планового периода будут Π_1^1 или Π_2^1, то на следующий год первый игрок может посеять яровые (альтернатива 1, т. е. культура 2) или озимые зерновые культуры (альтернатива 2, т. е. культура 3). При этом сельскохозяйственные культуры 1 и 2 при условиях Π_1^2 погоды второго года планового периода дадут стоимость валовой продукции t_1, а для условий Π_2^2 погоды – равную t_2. Культуры 1 и 3 дадут результат, равный t_3 и t_4, соответственно для Π_1^2 и Π_2^2 условий погоды. Если же в первый год планового периода игрок 1 посеет яровые зерновые, а метеорологические условия окажутся Π_1^1 или Π_2^1, то на второй год вся площадь отводится соответственно под многолетние травы (альтернатива 1, т. е. культура 5) или корнеплоды (альтернатива 2, т. е. культура 6). При этом культуры 4 и 5 в условиях Π_1^2 и Π_2^2 второго года дадут стоимость валовой продукции соответственно t_9 и t_{10}, а культуры 4 и 6 – результат, равный t_{11} и t_{12}, соответственно для условий погоды Π_1^2 и Π_2^2 второго года планового периода.

Игру представим в виде дерева игры (рис. 2.12).

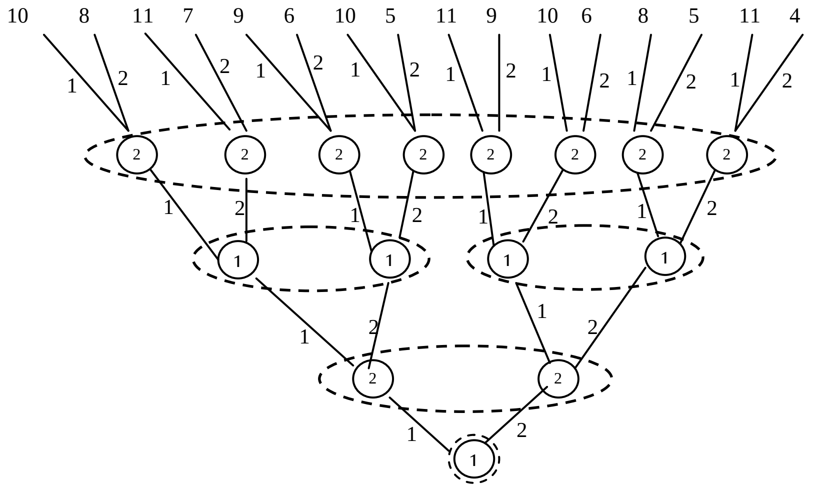


Рис. 2.12. Диаграмма игры в четыре хода

Первый ход делает игрок 1, находясь в информационном множестве первой позиции и, выбирая две альтернативы: посеять однолетние травы или яровые зерновые. Второй ход принадлежит игроку 2, который находится в информационном множестве позиций второго уровня и имеет 2 альтернативы:

Π_1^1 – погодные условия, благоприятные для возделывания культуры (альтернатива 1),

Π_2^1 – условия погоды, не благоприятные для выращивания культуры (альтернатива 2).

Третий ход делает игрок 1, выбирая одну из двух альтернатив:

– в позициях третьего информационного множества (посеять яровые зерновые или озимые зерновые);

– в позициях четвертого информационного множества (посеять многолетние травы или корнеплоды).

Четвертый ход делает игрок 2, находясь в информационном множестве четвертого уровня и выбирая одну из двух альтернатив:

– погодные условия второго года Π_1^2 (альтернатива 1);

– погодные условия второго года Π_2^2 (альтернатива 2).

Чистую стратегию игрока 2 запишем как систему чисел:

$$j = (j_1, j_2),$$

где j_1 – альтернатива, выбираемая на втором ходу (j_1 = 1,2);

j_2 – альтернатива, выбираемая на четвертом ходу (j_1 = 1,2).

Чистые стратегии игрока 1 запишем как систему чисел:

$$i = (i_0, i_1, i_2),$$

где i_0 – альтернатива, выбираемая на первом ходу (i_0 = 1,2);

i_1 – альтернатива, выбираемая на третьем ходу, если игрок 2 на втором ходу выбрал первую альтернативу (i_1 = 1,2);

i_2 – альтернатива, выбираемая на третьем ходу, если игрок 2 на втором ходу выбрал вторую альтернативу (i_2 = 1,2).

Сведем позиционную игру к матричному виду. Функцией выигрыша первого игрока будет платежная матрица (табл. 2.10).

Т а б л и ц а 2.10. **Платежная матрица игры**

i_0, i_1, i_2	j_1, j_2			
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1,1)	1,1,1,1	1,1,1,2	1,2,1,1	1,2,1,2
(1,1,2)	1,1,1,1	1,1,1,2	1,2,2,1	1,2,2,2
(1,2,1)	1,1,2,1	1,1,2,2	1,2,1,1	1,2,1,2
(1,2,2)	1,1,2,1	1,1,2,2	1,2,2,1	1,2,2,2
(2,1,1)	2,1,1,1	2,1,1,2	2,2,1,1	2,2,1,2
(2,1,2)	2,1,1,1	2,1,1,2	2,2,2,1	2,2,2,2
(2,2,1)	2,1,2,1	2,1,2,2	2,2,1,1	2,2,1,2
(2,2,2)	2,1,2,1	2,1,2,2	2,2,2,1	2,2,2,2

Рассчитаем элементы платежной матрицы игры (табл. 2.11).

Т а б л и ц а 2.11. **Элементы платежной матрицы игры**

Стратегии	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	α_i
(1,1,1)	10	8	9	6	6
(1,1,2)	10	8	10	5	5
(1,2,1)	11	7	9	6	6
(1,2,2)	11	7	10	5	5
(2,1,1)	11	9	8	5	5
(2,1,2)	11	9	11	4	4
(2,2,1)	10	6	8	5	5
(2,2,2)	10	6	11	4	4
β_j	11	9	11	6	6

Игра имеет седловую точку, так как $\alpha = \beta = 6$, т. е. в неблагоприятных погодных условиях, придерживаясь стратегии (1,2,1,2), сельскохозяйственное предприятие может получить с 1 га посева стоимость валовой продукции $t_6 = 6$.

2.7. Биматричные игры

С помощью биматричных игр разрабатывают рекомендации для игроков, интересы которых необязательно являются противоположными. Допустим, игрок *A* может в процессе игры выбрать любую из своих стратегий –

$$A_i = (A_1, A_2, ..., A_m),$$

где $i = \overline{1, m}$,

а игрок *B* – любую из стратегий –

$$B_j = (B_1, B_2, ..., B_n),$$

где $j = \overline{1, n}$.

Выигрыши игроков *A* и *B* характеризуются соответствующими платежными матрицами:

A_i	B_j				
	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
…	…	…		…	
A_r	a_{r1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

A_i	B_j				
	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	$в_{11}$	…	$в_{1k}$	…	$в_{1n}$
…	…	…		…	
A_r	$в_{r1}$	…	$в_{rk}$	…	$в_{rn}$
…	…	…	…	…	…
A_m	$в_{m1}$	…	$в_{mk}$	…	$в_{mn}$

Первая платежная матрица описывает выигрыш игрока A, а вторая – выигрыш игрока B. Когда интересы игроков не противоположны, а только различны, то при выборе игроком A r-й стратегии, а игроком B – k-й стратегии выигрыш игрока A будет характеризоваться элементом a_{rk}, а выигрыш игрока B – элементом $в_{rk}$. Так как интересы игроков не совпадают, то необходимо найти такое решение, которое в одинаковой мере удовлетворяло бы обоих игроков. Другими словами, требуется определить такую *равновесную ситуацию (точку равновесия)*, отклонение от которой уменьшает выигрыш игрока.

Рассмотрим решение простой биматричной игры. Выигрыши игроков представлены платежными матрицами размерностью 2×2:

платежная матрица игрока A

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

платежная матрица игрока B

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	$в_{11}$	$в_{12}$
A_2	$в_{21}$	$в_{22}$

Игроки могут смешивать свои чистые стратегии A_i, $i=\overline{1,2}$ и B_j, $j=\overline{1,2}$ с вероятностями соответственно p и q.

Для нашего примера, допустим,

$$p = p_1,$$

тогда

$$p_2 = 1 - p,$$

а

$$q = q_1,$$

тогда

$$q_2 = 1 - q.$$

Средние выигрыши игроков A и B определяются таким образом:

$$f_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$

$$f_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q),$$

где $0 \le p \le 1$ и $0 \le q \le 1$.

Согласно теореме Дж. Нэша, *всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях*.

Считается, что пара чисел –

$$(p^*,\ q^*),$$

где $0 \le p^* \le 1,\ 0 \le q^* \le 1,$
характеризуют равновесную ситуацию, если для любых –

$$p \text{ и } q,$$

где $0 \le p \le 1$ и $0 \le q \le 1,$
одновременно выполняются следующие неравенства:

$$f_A(p, q^*) \le f_A(p^*, q^*),$$

$$f_B(p^*, q) \le f_B(p^*, q^*).$$

Иными словами, отклонение от равновесной ситуации невыгодно самому игроку.

Практически, для того чтобы убедиться, что пара чисел $(p^*,\ q^*)$ определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенства –

$$f_A(p, q^*) \le f_A(p^*, q^*)$$

только для двух чистых стратегий игрока A – для $p = 0$ и $p = 1$, а неравенство –

$$f_B(p^*, q) \le f_B(p^*, q^*)$$

проверяют для двух чистых стратегий игрока B – для $q = 0$ и $q = 1$.

Рассчитаем среднее значение выигрыша игрока A:

$$\begin{aligned}
&f_A(p, q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + \\
&+ a_{22}(1-p)(1-q) = a_{11}pq + a_{12}p - a_{12}qp + a_{21}q - \\
&- a_{21}pq + a_{22} - a_{22}q - a_{22}p + a_{22}pq = (a_{11} - a_{12} - \\
&- a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом запишем среднее значение выигрыша игрока B:

$$\begin{aligned}
&f_B(p, q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + \\
&+ b_{22}(1-p)(1-q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + \\
&+ (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}.
\end{aligned}$$

Приведем расчеты для игрока *A*:
при $p = 1$ получим –

$$f_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q\,;$$

при $p = 0$ получим –

$$f_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}\,.$$

Рассмотрим разности:

$$\begin{aligned}&f_A(p,q) - f_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + \\ &+ (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} - (a_{11} - a_{12} - \\ &- a_{21} + a_{22})q - a_{12} - (a_{21} - a_{22})q = (a_{11} - a_{12} - \\ &- a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - (a_{11} - a_{12} - a_{21} + \\ &+ a_{22})q + a_{22} - a_{12};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f_A(p,q) - f_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + \\ &+ (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} - (a_{21} - a_{22})q - \\ &- a_{22} = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.\end{aligned}$$

Обозначим через

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}\,,$$

а через

$$\alpha = a_{22} - a_{12}\,.$$

Подставив значения C и α в вышеизложенные выражения, получим:

$$\begin{aligned}&f_A(p,q) - f_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \\ &- \alpha(p-1) = (p-1)(Cq - \alpha);\end{aligned}$$

$$f_A(p,q) - f_A(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha)\,.$$

Если пара чисел

$$(p^*, q^*)$$

определяет равновесную ситуацию, то

$$(p-1)(Cq - \alpha) \geq 0,$$

$$p(Cq - \alpha) \geq 0\,.$$

Для игрока B аналогично вычисляем средний выигрыш при $q = 1$ и $q = 0$:

$$f_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - a_{21} + a_{22})p + b_{12} + (b_{21} - b_{22})p;$$

$$f_B(p,0) = (b_{21} - b_{22})p + b_{22}.$$

Определим следующие разности, обозначив через –

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \text{ и } \beta = b_{22} - b_{21},$$

получим:

$$f_B(p,q) - f_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta);$$

$$f_B(p,q) - f_B(p,0) = q(Dp - \beta).$$

Если пара чисел

$$(p^*, q^*)$$

определяет точку равновесия, то

$$(q-1)(Dq - \beta) \geq 0,$$

$$q(Dp - \beta) \geq 0.$$

Таким образом, для того чтобы в биматричной игре 2×2 пара чисел (p, q) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$(p-1)(Cq - \alpha) \geq 0,$$

$$p(Cq - \alpha) \geq 0,$$

$$(q-1)(Dp - \beta) \geq 0,$$

$$q(Dp - \beta) \geq 0,$$

$$0 \leq p \leq 1,$$

$$0 \leq q \leq 1,$$

где $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$,

$\alpha = a_{22} - a_{12}$,

$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$

$\beta = b_{22} - b_{21}$.

Пример. Небольшое предприятие (игрок A) планирует, развернув рекламную кампанию, сбывать свои товары на одном из двух рынков, контролируемых более сильным предприятием-конкурентом (игроком B).

Если предприятие (игрок B) на одном из рынков проводит рекламную кампанию, то предприятие (игрок A) терпит поражение. В противном случае, не встречая противодействия на рынке со стороны конкурента (игрока B), предприятие (игрок A) захватывает большую долю рынка. У игрока A имеется две стратегии:

– A_1 – выбор первого рынка,

– A_2 – выбор второго рынка.

Игрок B тоже имеет две стратегии:

– B_1 – выбор первого рынка,

– B_2 – выбор второго рынка.

Приведем элементы платежных матриц для игроков A и B, характеризующих выигрыш (доход) или проигрыш (затраты, связанные с борьбой за рынок):

для игрока A:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	–200	30
A_2	10	–10

для игрока B:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	100	–30
A_2	–10	20

Анализируя величину элементов матриц, видно, что для игрока A выгоднее проникнуть на первый рынок, но и борьба за него требует больших вложений денежных средств. Если оба игрока выберут один и тот же рынок, то победа останется за более сильным предприятием (игроком B). Первый рынок более выгоден и для второго предприятия. Для игрока B в ситуации (A_1, B_1 – при выборе первого рынка) выигрыш составляет 100 млн. у. д. е., а в ситуации (A_2, B_2 – при выборе второго рынка) выигрыш игрока B в 5 раз меньше. Для игрока A выбор первого (A_1, B_1) или выбор второго (A_2, B_2) рынка при условии выбора этого же рынка игроком B приведет к банкротству (в первом случае затраты составят 200 млн. у. д. е., во втором – 10 млн. у. д. е.).

Если же предприятия отдадут предпочтение разным рынкам – ситуации (A_1, B_2) и (A_2, B_1), то второе предприятие (игрок B) понесет потери, равные 30 млн. у. д. е. при выборе первого рынка и 10 млн. у. д. е. при выборе второго рынка. Первое предприятие (игрок A) в этой ситуации получит соответственно 30 и 10 млн. у. д. е. дохода.

Необходимо найти решение игры, которое в определенной мере удовлетворяло бы обоих игроков.

Рассмотрим различные ситуации, предварительно определив значение C, α, D и β:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -200 - 30 - 10 - 10 = -250\,;$$

$$\alpha = \grave{a}_{22} - \grave{a}_{12} = -10 - 30 = -40\,;$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 100 - (-30) - (-10) + 20 = 160\,;$$

$$\beta = b_{22} - b_{21} = 20 - (-10) = 30\,.$$

Подставим значения величин C, α, D и β в условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации:

для игрока A –

$$(p-1)(Cq-\alpha) = (p-1)(-250q+40) \geq 0\,,$$

$$p(Cq-\alpha) = p(-250q+40) \geq 0\,;$$

для игрока B –

$$(q-1)(Dp-\beta) = (q-1)(160p-30) \geq 0\,,$$

$$q(Dp-\beta) = q(160p-30) \geq 0\,.$$

Необходимо рассмотреть три случая для игрока A:

1) $p = 1$,

2) $p = 0$,

3) $0 < p < 1$.

1. Пусть $p = 1$, тогда

$$0 \geq 0 \text{ и } -250q + 40 \geq 0.$$

Отсюда

$$250q - 40 \leq 0,$$

$$q \leq \frac{40}{250}\,,$$

$$q \leq 0{,}16\,.$$

2. Пусть $p = 0$, тогда

$$-(-250q + 40) \geq 0 \text{ и } 0 \geq 0,$$

откуда

$$250q - 40 \geq 0,$$

$$q \geq \frac{40}{250},$$

$$q \geq 0{,}16.$$

3. Приняв $0 < p < 1$, получим:

$$-250q + 40 \geq 0,$$

$$-250q + 40 \leq 0.$$

Два неравенства выполняются при условии $q = 0{,}16$.
Три случая решения игры для игрока B:

$$1)\ q = 1,$$

$$2)\ q = 0,$$

$$3)\ 0 < q < 1,$$

что приводит к следующим результатам –

$$1)\ p \geq 0{,}19,$$

$$2)\ p \leq 0{,}19,$$

$$3)\ p = 0{,}19.$$

Изобразим графически полученные результаты (рис. 2.13).

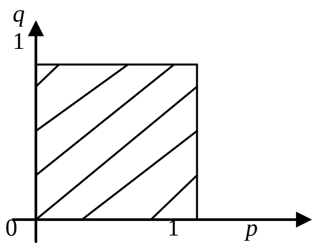


Рис. 2.13. Возможные результаты решения игры

В системе координат выделим единичный квадрат, соответствующий неравенствам:

$$0 \le p \le 1,$$

$$0 \le q \le 1.$$

На график нанесем оптимальные решения игры для игрока A (рис. 2.14).

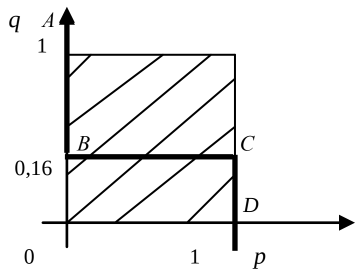


Рис. 2.14. Результаты решения игры для игрока A

Множество точек, удовлетворяющее требованиям вышеизложенных неравенств для игрока A, лежат на отрезках $[AB]$, $[BC]$ и $[CД]$.

Изобразим на отдельном графике множество точек, удовлетворяющих требованиям вышеизложенных неравенств для игрока B (рис. 2.15).

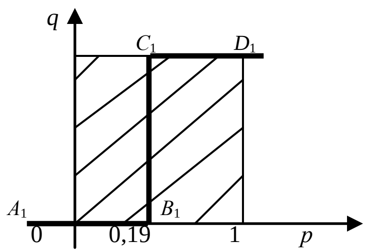


Рис. 2.15. Результаты решения игры для игрока B

Для игрока B оптимальными будут стратегии, характеризующиеся парой чисел, принадлежащих отрезкам $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ и $[C_1D_1]$.

Совместив рис. 2.14 и 2.15, получим рис. 2.16.

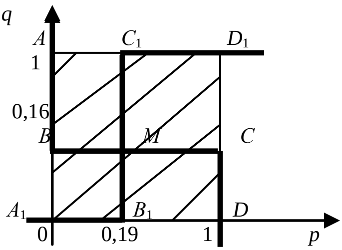


Рис. 2.16. Результаты решения биматричной игры

Точка пересечения двух фигур является точкой равновесия. Координаты точки M (0,19; 0,16) определяют равновесную ситуацию.

В этих условиях игроки имеют следующие оптимальные смешанные стратегии:

игрок A –

$$p^* = (0{,}19;\ 0{,}81),$$

игрок B –

$$q^* = (0{,}84;\ 0{,}16).$$

Средние выигрыши игроков составят:

$$f_A(0{,}19;0{,}16) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p +$$
$$+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (-200 - 30 - 10 - 10) \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}16 +$$
$$+ (30 + 10) \cdot 0{,}19 + (10 + 10) \cdot 0{,}16 - 10 = -6{,}8 \text{ млн. у.д.е.}$$

$$f_B(0{,}19;0{,}16) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p +$$
$$+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (100 + 30 + 10 + 20) \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}16 +$$
$$+ (-30 - 20) \cdot 0{,}19 + (-10 - 20) \cdot 0{,}16 + 20 = 10{,}6 \text{ млн. у.д.е.}$$

Таким образом, первому предприятию (игроку A) целесообразно реализовывать свои товары на первом и втором рынках с вероятностями 0,19 и 0,81, что соответствует долям товаров, поступающих на каждый рынок. В этом случае затраты первого предприятия, связанные с рекламными мероприятиями на этих рынках, будут наименьшими и составят 6,8 млн. у. д. е. Второе предприятие (игрок B) для получения наибольшего дохода, равного 10,6 млн. у. д. е., должно сбывать свои товары на первом и втором рынках соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16.

2.8. Кооперативные игры

Кооперативные игры – это игры с нулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом, вправе вступать в коалицию. Кооперативные игры отличаются от коалиционных игр тем, что могут и не содержать коалиций. По форме платежа кооперативные игры подразделяются на игры с побочными платежами и без побочных платежей. В первом случае допускается заключение взаимосвязывающих соглашений о стратегиях, а платежи могут перераспределяться между игроками. Во втором случае игроки согласуют свои стратегии, а платежи делят в соответствии *с оптимумом по Парето* (см. прил. А), т. е. не существует такого решения игры (такой набор платежей), которое было бы лучше, чем данное. На рис. 2.17 графически представлено решение кооперативной игры.

Исходы кооперативной игры представлены выпуклым, замкнутым и ограниченным сверху множеством *K*. Кривая A_1A_2 содержит Парето-оптимальные решения, при которых увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого игрока. Точки T_1 и T_2 соответствуют выигрышам игроков, которые они могут получить без кооперации с партнером. Точки кривой T_1' и T_2' обозначают переговорное множество *N*, т. е. игроки, ведя переговоры, могут улучшить положение одного из них без ущерба для партнера.

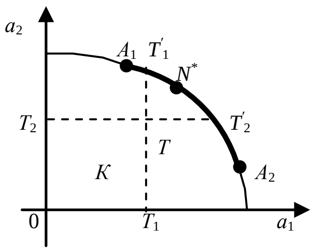


Рис. 2.17. Результаты решения кооперативной игры

На переговорном множестве выделяется точка N^*, соответствующая равновесию по Нэшу (точка Нэша), в которой достигается максимум произведения:

$$\max(a_1 - T_1)(a_2 - T_2)\,.$$

Сомножители произведения характеризуют превышение выигрышей игроков над платежами, которые они могли бы получить без кооперации. Точка Нэша является решением кооперативной игры.

Пример. Решим кооперативную игру, заданную матрицей:

$$\begin{Vmatrix} (10,4) & (0,0) \\ (5,5) & (3,7) \end{Vmatrix}$$

Изобразим в системе координат выпуклое, замкнутое множество K, определяющее игру (рис. 2.18).

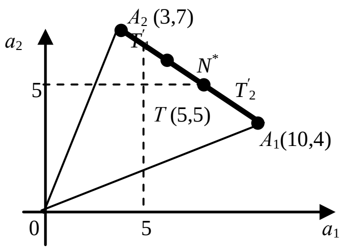


Рис. 2.18. Решение кооперативной игры

На треугольнике $0A_1A_2$ сторона A_1A_2 представляет собой парето-оптимальное множество, т. е. увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет другого игрока. Точка T (5,5) определяет выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером. На отрезке $[A_1, A_2]$ лежит переговорное множество N (отрезок $[T'_1, T'_2]$).

На середине отрезка $[T'_1, T'_2]$ находится точка Нэша $N^*(5,5; 5,5)$. В этой точке произведение $(a_1 - 5,5)$ $(a_2 - 5,5)$ для точек (a_1, a_2) принимает максимальное значение. Решение игры найдено, так как игрокам важно максимизировать суммарный выигрыш, который могут распределить между собой произвольным образом.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение теории игр.
2. Что вы понимаете под игрой?
3. Дайте определение понятию «оптимальная стратегия игрока».
4. Приведите классификацию игр.

5. Чем отличаются кооперативные, коалиционные и бескоалиционные игры?

6. Чем отличаются матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные игры?

7. Приведите особенности статистических и стратегических игр.

8. Охарактеризуйте критерии определения оптимальной стратегии игрока в статистической игре.

9. Дайте определение понятиям «седловая точка», «верхняя и нижняя чистая цена матричной игры».

10. Приведите алгоритм геометрического решения игры.

11. Как практически решаются матричные игры в смешанных стратегиях?

12. Приведите структурные модели линейного программирования, позволяющие обосновать оптимальные стратегии игроков при решении матричной игры в смешанных стратегиях.

13. Каким образом перейти от результатов решения задач линейного программирования к результатам решения матричной игры в смешанных стратегиях?

14. Дайте определение понятиям «позиция информационного множества», «игрок «0», «дерево игры».

15. Что такое процесс нормализации позиционной игры?

16. Как происходит обоснование оптимальной стратегии игрока в позиционной игре?

17. Какими способами можно решать позиционные игры?

18. Как происходит формирование элементов платежной матрицы позиционной игры?

19. Дайте определение понятию «точка равновесия биматричной игры».

20. Какие неравенства должны выполняться для пары чисел, характеризующих равновесную ситуацию биматричной игры?

21. Как геометрически происходит выбор оптимальных стратегий игроков в биматричной игре?

22. Дайте определение понятию «равновесие по Нэшу» (точка Нэша), чем оно характеризуется?

3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

3.1. Общая характеристика линейных моделей

Под *экономико-математической линейной моделью* понимают программу вычислений, обеспечивающую нахождение наилучшего, т. е. оптимального решения задачи, условия которой заданы в виде линейных уравнений или неравенств, сведены в единую систему, подчиненную цели решения задачи (т. е. целевой функции, записанной в виде линейного уравнения).

В зависимости от характера моделируемых объектов и процессов структура моделей может быть различной. Но имеются и общие элементы модели, включающие следующие группы:

1) неизвестные величины, значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают x_j, где $i = \overline{1, m}$ или y_i, где $j = \overline{1, n}$. Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;

2) технико-экономические коэффициенты, т.е. известные величины при переменных, они служат для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с результатами решения задачи. Технико-экономические коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индексы при a_{ij} показывают, что коэффициент a стоит в i-й строке (или в ограничении вида i) и в j-м столбце (или при переменной вида j), где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$;

3) известные величины, стоящие в правой части ограничений (т. е. уравнений или неравенств). Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например, A_i, где $i = \overline{1, m}$. Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче;

4) коэффициенты целевой функции, или коэффициенты F-строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например, $p_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где $j = \overline{1, n}$. Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче.

Элементы второй, третьей и четвертой групп составляют исходную информацию экономико-математической задачи. Чтобы получить достоверное решение, необходимо правильно количественно описать моделируемый объект, т. е. следует правильно обосновать исходную информацию задачи.

Используя приведенные четыре группы элементов, запишем общую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +,...,+ a_{1n}x_n \geq A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +,...,+ a_{2n}x_n \leq A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 +,...,+ a_{3n}x_n = A_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +,...,+ a_{mn}x_n \geq A_m \end{cases}$$

$$F_{\max} = p_1x_1 + p_2x_2 +,...,+ p_nx_n.$$

Решить данную задачу – значит найти такие значения переменных, которые удовлетворяют требованиям всех ограничений и придают целевой функции минимальное или максимальное (в нашем случае максимальное) значение.

Для того чтобы задача имела решение, а полученные значения переменных отвечали интересам экономики предприятий АПК, необходимо соблюдать при составлении задач следующие требования:

1) составленная модель должна адекватно отображать все взаимосвязи в моделируемом процессе или объекте;

2) математические требования к содержанию системы ограничений выражаются через теорию определителей, матриц, векторов, выпуклых множеств линейных неравенств, уравнений (прил. D–F);

3) при решении задачи на максимум в системе ограничений должно быть хотя бы одно ограничение типа $\leq$ или =, при решении задачи на минимум должно быть хотя бы одно ограничение типа $\geq$ или =.

В противном случае, если при решении задачи на максимум нет ни одного ограничения типа $\leq$ или =, то с экономической точки зрения достижение максимума не ограничивается никаким ресурсом или ресурсами, что противоречит требованиям реальной экономике, так как достижение максимальных результатов всегда связано с использованием ограниченных ресурсов. Если при решении задачи на минимум нет ни одного ограничения типа $\geq$ или =, то в этом случае минимум может быть достигнут в начальной точке системы координат, т. е. неизвестные величины задачи будут равны нулю. В действительности минимум функции достигается при соблюдении определенных требований, которые выражаются в наличии ограничений типа $\geq$ или =.

В общем виде задача линейного программирования может быть записана в следующей форме:

скалярной –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, i = 1,2,...,m$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,...,m$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j;$$

матричной –

$$A \cdot X \le A_0$$

$$X \ge 0$$

$$P \cdot X \to \max,$$

где A – матрица системы ограничений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{mn} & a_{mn} \ \dots \ a_{mn} \end{pmatrix},$$

X – матрица неизвестных величин:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

A_0 – матрица свободных членов:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix},$$

P – матрица коэффициентов целевой функции:

$$P = (p_1, p_2, ..., p_n);$$

векторной –

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{A}_j x_j = \vec{A}_0$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

где $\vec{A}_1, \vec{A}_2, ..., \vec{A}_n$ – векторы:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ ...,\ \vec{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Задачи линейного программирования имеют следующие свойства, сформулированные теоремами.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений и, наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Из теорем 2 и 3 следует, что, если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.

Отсюда следует, что оптимум линейной функции задачи линейного программирования нужно искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.

Методика поиска оптимального решения задачи линейного программирования симплексным методом изложена в прил. G и H.

3.2. Примеры моделей планирования производства и макроэкономики

Линейные модели нашли применение в планировании производства и макроэкономики.

В экономической литературе выделяются следующие базовые модели.

1. *Модели оптимизации производственной программы* (программы развития перерабатывающего, сельскохозяйственного предприятия). Общая постановка этой задачи состоит в обосновании оптимального плана производства нескольких видов продукции, обеспечивающего наиболее рациональное использование имеющихся ресурсов и максимизирующего конечные результаты хозяйственной деятельности.

Формально задача оптимизации производственной программы описывается следующей моделью:

1) по использованию ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_0;$$

2) неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0 \cdot$$

Целевая функция –

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j ,$$

Индексация:

i – номер ресурса;

j – номер продукции;

J_0 – множество видов продукции;

I_1 – множество видов ресурсов (трудовых, материально-денежных, производственных мощностей, сырья и т. д.);

Неизвестные величины:

x_j – количество выпускаемой продукции вида j;

Известные величины:

a_{ij} – расход ресурса (сырья и т. д.) вида i на единицу производства продукции вида j;

A_i – количество имеющегося ресурса вида i;

p_j – прибыль от реализации единицы продукции вида j.

Для сельскохозяйственных предприятий структурная экономико-математическая модель программы развития может иметь следующий вид.

а) Требуется найти максимум прибыли, стоимости валовой, товарной продукции сельскохозяйственного предприятия:

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j .$$

При условиях:

1. По использованию земельных угодий –

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1 .$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i, i \in I_2 .$$

3. По балансу питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_2} w_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_1} d_{ij} x_j + W_i, i \in I_3 .$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j, j \in J_0 .$$

5. По производству (реализации) продукции –

$$\sum_{j \in J_0} \bar{d}_{ij} x_j \ge D_i, i \in I_4 .$$

6. Неотрицательность переменных:

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей и сельскохозяйственных культур;

J_1 – множество отраслей растениеводства, $J_1 \subset J_0$;

J_2 – множество отраслей животноводства, $J_2 \subset J_0$;

i – номер ресурса (вида земельного угодья, труда, питательного вещества, продукции);

I_1 – множество видов земельных угодий;

I_2 – множество видов труда;

I_3 – множество видов питательных веществ;

I_4 – множество видов продукции.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы земельного угодья вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – расход питательного вещества вида i на единицу отрасли животноводства вида j;

d_{ij} – выход корма в пересчете на питательное вещество вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

w_i – выход корма с природных кормовых угодий в пересчете на питательное вещество вида i;

$\widetilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

$\overline{d}_{ij}$ – выход продукции вида i с единицы отрасли вида j;

D_i – минимальный объем производства (реализации) продукции вида j;

p_j – прибыль, товарная, валовая продукция в расчете на единицу отрасли вида j.

б) Требуется найти максимум производства кормов сельскохозяйственного предприятия:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{j \in J_0} W_{ij} x_j .$$

При условиях:

1. По использованию пахотных земель –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1 .$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j\in J_0} b_{ij}x_j \le B_i, i\in I_2 .$$

3. По использованию ресурсов воды –

$$\sum_{j\in J_0} v_{ij}\, x_j \le V_i\,, i = 2 .$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j\,, j\in J_0 .$$

5. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей растениеводства и сельскохозяйственных культур;

i – номер ресурса (вида пахотных земель, труда, питательного вещества, ресурса воды);

i = 1 – номер питательного вещества;

i = 2 – номер ресурса воды;

I_1 – множество видов пахотных земель (орошаемой, богарной (неполивной));

I_2 – множество видов труда.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы пахотных земель (орошаемой, богарной) вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – выход питательного вещества вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

v_{ij} – расход ресурса (воды) вида i на единицу отрасли вида j;

V_i – количество ресурса (воды) вида i.

в) Требуется найти максимум стоимости дополнительной продукции сельскохозяйственного предприятия:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{k \in K_1} \sum_{\tilde{k} \in K_2} p_{ik\tilde{k}} \, x_{k\tilde{k}}.$$

1. По использованию угодий, подлежащих трансформации –

$$\sum_{\tilde{k} \in K_2} x_{k\tilde{k}} \le A_k, k \in K_0.$$

2. По площади трансформации угодий –

$$x_{k\tilde{k}} \le A_{k\tilde{k}}, k \in K_0, \tilde{k} \in K_2.$$

3. По использованию ресурсов –

$$\sum_{k \in K_0} \sum_{\tilde{k} \in K_2} b_{ik\tilde{k}} \, x_{k\tilde{k}} \le B_i, i \in I_0.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{k\tilde{k}} \ge 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса (труда, материально-денежных средств, основных производственных фондов);

$i = 1$ – номер ресурса (денежных средств);

I_0 – множество видов ресурсов;

k – номер вида земельного угодья;

$\tilde{k}$ – номер вида трансформируемого земельного угодья, $\tilde{k} \subset k$;

K_0 – множество видов земельных угодий;

K_1 – множество видов сельскохозяйственных угодий, $K_1 \subset K_0$;

K_2 – множество видов трансформации земельных угодий.

Неизвестные величины:

$x_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом вида $\tilde{k}$.

Известные величины:

$p_{ik\tilde{k}}$ – стоимость дополнительной продукции (ресурса) вида i с единицы угодья вида k после трансформации его способом вида $\tilde{k}$;

$A_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

A_k – площадь угодья вида k, подлежащего трансформации;

$b_{ik\tilde{k}}$ – расход ресурса вида i на единицу угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

B_i – наличие ресурса вида i.

2. *Модели оптимального составления смеси* (пищевого рациона, рецепта комбикорма для скота, рецептуры производства продовольственных товаров и т. д.).

Требуется оптимизировать выбор наилучшего способа смешения исходных ингредиентов для получения смеси с заданными свойствами при минимизации стоимости ингредиентов.

Однопродуктовая модель оптимального составления смеси имеет следующий вид. Требуется найти минимум затрат на производство рецептурной смеси:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j .$$

При условиях:

1. По содержанию питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le (\ge, =) A_i , \; i \in I_0 .$$

2. По предельным нормам продуктов (сырья) –

$$\tilde{M}_j \le x_j \le M_j , \; j \in J_0 .$$

3. По весу рецептурной смеси –

$$\sum_{j \in J_0} x_j = 100 .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

i – номер вида питательного вещества;

I_0 – множество видов питательных веществ;

j – номер вида продукта (сырья);

J_0 – множество видов продуктов (сырья).

Неизвестные величины:

x_j – количество единиц продукта (сырья) вида j, входящего в рецептурную смесь.

Известные величины:

a_{ij} – содержание питательного вещества вида i в единице продукта (сырья) вида j;

A_i – количество питательного вещества вида i в рецептурной смеси;

$\tilde{M}_j, M_j$ – соответственно минимальное и максимальное количество продукта (сырья) вида j в рецептурной смеси;

c_j – цена единицы продукта (сырья) вида j.

3. *Модели оптимального раскроя материала*. Необходимо оптимизировать способы раскроя материала, получив запланированное количество заготовок, с целью минимизации расхода материала или минимизации его отходов.

Модель имеет следующий вид:

1. По количеству заготовок каждого вида –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \geq A_i,\ i \in I_0.$$

2. Неотрицательность и целочисленность переменных –

$$x_j \geq 0,\quad x_j \text{ – целочисленное.}$$

Целевая функция – минимум расхода материала по всем способам его раскроя –

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} x_j,$$

или минимум отходов материала по всем способам его раскроя:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j,$$

Индексация:

j – номер материала;

J_0 – множество видов материалов;

i – номер заготовки;

I_0 – множество видов заготовок.

Неизвестные величины:

x_j – количество материала, раскраиваемого способом вида j.

Известные величины:

a_{ij} – количество заготовок вида i, получаемых при раскрое единицы материала способом вида j;

A_i – количество заготовок вида i;

p_j – величина отходов при раскрое материала способом вида j.

4. *Модель максимальной загрузки промышленного оборудования*. Необходимо максимально загрузить промышленное оборудование с целью минимизации неиспользуемых остатков его полезного фонда рабочего времени:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} x_j .$$

При условиях:

1. По использованию фонда рабочего времени оборудования –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i - x_i , i \in I_0 .$$

2. Неотрицательность переменных –

$$x_j , x_i \geq 0,$$

Индексация:

j – номер производимой продукции;

J_0 – множество видов производимой продукции;

i – номер оборудования;

I_0 – множество видов оборудования.

Неизвестные величины:

x_i – величина остатков полезного фонда рабочего времени оборудования вида i;

x_j – количество выпускаемой продукции вида j.

Известные величины:

a_{ij} – расход полезного фонда рабочего времени оборудования вида i на производство единицы продукции вида j;

A_i – полезный фонд рабочего времени оборудования вида i.

5. *Транспортные (распределительные) модели*. Для удовлетворения спроса во всех пунктах потребления требуется оптимизировать план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных затрат:

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} \sum_{j \in J_0} c_{ij} x_j .$$

При условиях:

1. По использованию ресурсов поставщиков –

$$\sum_{j \in J_0} x_{ij} = A_i, i \in I_0.$$

2. По удовлетворению спроса потребителей –

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} = B_j, j \in J_0.$$

3. Объем ресурсов у поставщиков должен равняться потребностям потребителей –

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \geq 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса;

I_0 – множество ресурсов;

j – номер потребителя;

J_0 – множество потребителей.

Неизвестные величины:

x_{ij} – количество груза, запланированного к перевозке от поставщика вида i к потребителю вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы поставщика вида i;

B_j –заказ потребителя вида j;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от поставщика вида i к потребителю вида j.

6. *Модели планирования финансов*:

а) требуется обосновать портфель срочных вкладов для выплаты по займу с целью минимизации размера целевого фонда:

$$F_{\min} = y_{t}\underset{t=0}{} .$$

При условиях:

1. По распределению целевого фонда по вкладам в нулевой момент времени –

$$\sum_{j \in \boldsymbol{J}_0} x_{jt} = y_t, t = 0.$$

2. По балансу вложений и выплат –

$$\sum_{j \in \boldsymbol{J}_0} (1 + r_j) x_{jt} - \sum_{j \in \boldsymbol{J}_0} x_{jt} = b_t, t \in \boldsymbol{T}_1.$$

3. По выплатам по займу –

$$\sum_{j \in \boldsymbol{J}_0} (1 + r_j) x_{jt} = b_t, t \in \boldsymbol{T}_0.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{jt}, y_t \geq 0 .$$

б) при фиксированном размере целевого фонда необходимо обосновать портфель срочных вкладов с целью максимизации дохода от их использования:

$$F_{\max} = \overline{y_t}_{t=T} .$$

При условиях:

1. По распределению вклада в нулевой момент времени –

$$\sum_{j \in \boldsymbol{J}_0} x_{jt} = \overline{b}_t, t = 0.$$

2. По балансу выплат и вложений –

$$\sum_{j \in J_0} x_{jt} - \sum_{j \in J_0} (1 + r_j) x_{jt} = \overline{b}_t, t \in T_1 .$$

3. По формированию величины дохода –

$$\sum_{j \in J_0} (1 + r_j) x_{jt} = \overline{y}_t, t \in T_0 .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{jt}, \overline{y}_t \geq 0 .$$

Индексация:

t – номер текущего момента времени;

$t = 0$ – нулевой момент времени;

T_0 – множество моментов времени;

T_1 – множество моментов времени, кроме завершающего момента времени;

j – номер срочного вклада;

J_0 – множество видов срочных вкладов.

Неизвестные величины:

x_{jt} – объем вложений по срочному вкладу вида j в момент времени t;

y_t – размер целевого фонда, создаваемого в момент времени t, при этом $t = 0$;

$\overline{y}_t$ – размер дохода, который получит вкладчик в момент времени t, при этом $t = T$;

Известные величины:

r_j – доходность срочного вклада вида j (проценты по вкладу);

b_t – размер выплаты по займу, которую производят в момент времени t;

$\overline{b}_t$ – размер вклада в момент времени t.

7. *Модели анализа инвестиционных проектов.*

Требуется определить максимум доходности портфеля инвестиционных проектов:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i \ .$$

При условиях:

1. По использованию финансовых ресурсов –

$$\sum_{i=1}^{n} I_0^i x_i \le I_c.$$

2. По использованию земельных ресурсов –

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A_0.$$

3. По рыночным объемам продаж –

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le P_0.$$

4. Ограничения на значения переменных –

$$x_i = 0 \cup 1 (i = \overline{1, n}),$$

где x_i – инвестиционный проект вида i:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й инвестиционный проект отклоняется;} \\ 1, & \text{если } i\text{-й инвестиционный проект реализуется;} \end{cases}$$

I_0^i – начальные инвестиции в проект вида i;

$I_с$ – количество финансовых средств, выделяемых для реализации инвестиционных проектов;

a_i – земельные ресурсы, необходимые для реализации инвестиционного проекта вида i;

A_0 – земельные ресурсы, выделяемые для реализации инвестиционных проектов;

p_i – объем реализации продукции, выпускаемой после реализации инвестиционного проекта вида i;

P_0 – емкость рынка продукции;

NPV_i – чистый дисконтированный доход от реализации инвестиционного проекта вида i:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} - I_0,$$

где C_t – свободный денежный поток, порожденный инвестицией в период t;

$t = 0, 1, 2, \ldots n$, (n – срок жизни инвестиционного проекта);

r – ставка дисконтирования;

I_0 – начальные инвестиции в проект.

8. *Модели оптимального портфеля ценных бумаг.*

а) Модель Марковица (см. прил. А): требуется минимизировать риск портфеля ценных бумаг при заданной ожидаемой доходности:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min.$$

При условиях:

1. По обеспечению заданного уровня доходности –

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i = \overline{R}_p^* .$$

2. По формированию суммы долей капитала инвестора –

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n} ,$$

где x_i – вложения в ценную бумагу вида i;

$\overline{R}_p^*$ – заданное значение доходности портфеля ценных бумаг;

V_{ij} – ковариация между доходностями ценных бумаг вида i и j:

$$V_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - R_i) \cdot (R_{jt} - R_j)}{T},$$

где R_{it}, R_{jt} – соответственно доходность ценной бумаги вида i и вида j в период времени t, при t = 1, …, T;

R_i, R_j – соответственно доходность ценной бумаги вида i и вида j:

$$R_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T},$$

$$R_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{jt}}{T},$$

где T – число наблюдаемых периодов.

Примечание. Если выполняется третье ограничение задачи, т. е. $x_i > 0$, то это означает, что инвестор должен вложить x_i – долю своего капитала в ценные бумаги вида i. Но инвестор может и взять в долю ценные бумаги вида i на сумму, равную x_i долей своего капитала. Взятые в долг ценные бумаги инвестор может сразу реализовать и полученную сумму денег, равную $(1 + x_i^*)$ долей капитала, может инвестировать в ценные бумаги вида j в пропорциях $x_j\ (j = \overline{1, n},\ j \neq i)$, а через некоторое время инвестор может выкупить ценные бумаги вида i и возвратить первоначальному владельцу. В этом случае неизвестные величины x_i принимают отрицательные значения $x_i < 0$ и третье ограничение структурной модели в этом случае опускают.

б) Модель Марковица (обратная задача): требуется максимизировать ожидаемую доходность портфеля ценных бумаг при заданном уровне риска:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \to \max.$$

При условиях:

1. По формированию заданного уровня риска –

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j = \overline{V}_p^*.$$

2. По формированию суммы долей капитала инвестора –

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

где $\overline{V}_p^*$ – заданный уровень риска портфеля ценных бумаг;

$V_p = \delta_p^2$.

в) Модель Шарпа (см. прил. А): требуется максимизировать ожидаемую доходность портфеля, содержащего рисковые и безрисковые ценные бумаги при заданном уровне риска:

$$R_p = R_f + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\beta_i x_i) \to \max.$$

При условиях:

1. По формированию заданного уровня риска –

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i x_i)^2 \cdot \delta_m^2 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_{si}^2 x_i) = \overline{V}_p^* .$$

2. По формированию суммы долей капитала инвестора –

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n} .$$

г) Модель Шарпа (обратная задача): требуется минимизировать риск портфеля, содержащего рисковые и безрисковые ценные бумаги при заданной ожидаемой доходности:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}(\beta_i x_i)^2 \cdot \delta_m^2 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_{si}^2 x_i) \to \min .$$

При условиях:

1. По обеспечению заданного уровня доходности –

$$R_f + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{n}(\beta_i x_i) = \overline{R}_p^* .$$

2. По формированию суммы долей капитала инвестора –

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n} ,$$

где R_m – доходность рынка ценных бумаг:

$$R_m = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{mt}}{T} ,$$

где R_{mt} – доходность рынка ценных бумаг в период времени t;

β_i – β-коэффициенты, выступающие мерой чувствительности конкретной ценной бумаги к изменениям на рынке ценных бумаг:

$$\beta_i = \frac{V_{im}}{V_m},$$

где V_{im} – ковариация доходности ценной бумаги вида i и рынка ценных бумаг:

$$V_{im} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - R_i)\cdot(R_{mt} - R_m)}{T};$$

V_m – риск рыночного портфеля (вариация доходности рынка ценных бумаг):

$$V_m = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_m)^2}{T};$$

β_p – чувствительность портфеля ценных бумаг:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i;$$

Примечание. Значение β_i показывает, на сколько процентов изменится доходность ценной бумаги при изменении доходности рыночного портфеля на 1 %. При этом ценные бумаги, имеющие $\beta_i > 1$, более чувствительны к изменениям на рынке и их называют агрессивными. Ценные бумаги, имеющие $\beta_i < 1$, менее чувствительны к изменению на рынке и их называют оборонительными.

Улучшить характеристики портфеля позволяет комбинация безрисковых ценных бумаг с эффективным рисковым портфелем (прил. I).

β_i – риск ценной бумаги вида i, характеризующий степень зависимости отклонений доходности ценной бумаги от отклонений доходности рынка в целом:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T}\right)\cdot\left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T}\right)};$$

α_i – избыточная доходность ценной бумаги вида *i*:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - R_{ft})}{T} - \beta_i \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T},$$

где R_{ft} – доходность безрисковой ценной бумаги вида *f* в период времени *t*, $t = \overline{1,T}$;

R_{it} – доходность рисковой ценной бумаги вида *i* в период времени *t*, $t = \overline{1,T}$;

R_{mt} – доходность рынка ценных бумаг в период времени *t*, $t = \overline{1,T}$;

δ_m – риск рынка ценных бумаг:

$$\delta_m = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft}) - \sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})^2}{T}};$$

δ_{si} – остаточный риск ценной бумаги вида *i:*

$$\delta_{si} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - R_f - \alpha_i - \beta_i(R_{mt} - R_f))}{T};$$

R_f – доходность безрисковых ценных бумаг.

В литературе имеется и множество модификаций выше изложенных задач, позволяющих рассмотреть многообразие и особенности функционирования экономических систем в различных производственных условиях хозяйствования.

3.3. Двойственные оценки и их экономическая интерпретация

Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу такого же класса, называемую двойственной (обратной) по отношению к исходной (прямой) задаче. Принято считать, что прямой будет та задача, в результате решения которой получают размеры отраслей и другие параметры. Решение *двойственной задачи* дает систему двойственных оценок (объективно обусловленных оценок, теневых цен ресурсов) (прил. J). Прямая и двойственная задачи линейного программирования могут образовывать пару как симметричных, так и несимметричных задач. Несимметричная пара задач может быть в том случае, если одно или несколько ограничений прямой задачи представлено уравнениями, а в двойственной задаче система ограничений сформирована неравенствами одного вида. При этом двойственная оценка, относящаяся к данному уравнению, может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Пример. Требуется определить оптимальное сочетание следующих отраслей в фермерском хозяйстве: молочное животноводство, зерновые, картофель и многолетние травы с целью получения максимальной прибыли.

Фермер располагает 60 га пашни, запасом кормов на пастбищах и сенокосах – 808 ц к. ед., ресурсами годового труда – 1800 чел.-дн. Согласно бизнес-плану, в фермерском хозяйстве расход ресурсов и выход продукции даны в табл. 3.1.

Требования севооборота предполагают, что площадь зерновых культур должна быть не более 60 % от площади пашни.
Запишем условия задачи в виде линейной экономико-математической модели.

Таблица 3.1. **Экономические показатели развития производства**

Показатели	На 1 гол., на 1 га			
	Зерновые	Картофель	Многолетние травы	Коровы
Расход пашни, га	1	1	1	–
Расход годового труда, чел.-дн.	6	26	2	25
Расход кормов, ц к. ед.	–	–	–	50
Выход кормов, ц к. ед.	12	15	25	–
Прибыль, у. д. е.	50,0	20	–	70

Введем следующие переменные:
x_1 – посевная площадь зерновых культур, га;
x_2 – посевная площадь картофеля, га;
x_3 – посевная площадь многолетних трав, га;
x_4 – поголовье коров, гол.
Система ограничений задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800, \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808, \\ x_1 \le 36. \end{cases}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 и x_4 могут быть только неотрицательными величинами:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Среди всех допустимых решений системы неравенств требуется найти такое, при котором целевая функция принимает максимальное значение:

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Решение прямой задачи найдем симплексным методом (прил. K, L, M) (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Оптимальное решение прямой задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	y_1	x_3	y_3
x_2	24	–1	–1	1	0
y_2	160	21,5	–33,5	–19	–0,5
x_4	32	–0,06	0,3	–0,2	0,02
x_1	36	1	0	0	0
$F_{\max}$	4520	25,8	41	6	1,4

Ответ задачи находится в столбце значений базисных переменных пятой симплексной таблицы. Из нее видно, что x_2 = 24 га, y_2 = 160 чел.-дн., x_4 = 32 гол., x_1 = 36 га. Все остальные переменные, не вошедшие в базис, равны нулю. Максимальное значение целевой функции – F = 4520 у. д. е.

На базе прямой задачи составим двойственную задачу, используя методику, изложенную в прил. K.

Построим двойственную модель, предварительно приведя ограничения прямой задачи к одному виду (обычно к преобладающему):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \leq 1800, \\ -12x_1 - 15x_2 - 25x_3 + 50x_4 \leq 808, \\ x_1 \leq 36. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Введем двойственные оценки (их столько, сколько ограничений в прямой задаче). Переменные u_1, u_2, u_3 обозначают двойственную или объективно обусловленную оценку единицы каждого вида ресурса (пашни, труда, кормов):

u_1 – двойственная оценка 1 га пашни;

u_2 – оценка 1 чел.-дн. труда;

u_3 – оценка 1 ц к. ед. корма;

u_4, u_5 – соответственно оценка доходности возделывания зерновых культур при минимальной и максимальной их площадях.

Эти величины показывают, насколько увеличится значение целевой функции при увеличении имеющегося запаса ресурсов соответствующего вида на единицу.

Целевая функция двойственной задачи минимизирует общую стоимость используемого сырья:

$$F_{\min} = 60u_1 + 1800u_2 + 808u_3 + 36u_4 .$$

При этом должна соблюдаться такая система ограничений:

1. По средней величине покрытия от зерновых культур –

$$u_1 + 6u_2 - 12u_3 + u_4 \geq 50 .$$

2. По средней величине покрытия от картофеля –

$$u_1 + 26u_2 - 15u_3 \geq 20 .$$

3. По средней величине покрытия от многолетних трав –

$$u_1 + 2u_2 - 25u_3 \geq 0 .$$

4. По средней величине покрытия от молочного скотоводства –

$$25u_2 + 50u_3 \geq 70 .$$

5. Неотрицательность переменных –

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 .$$

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена симплексным методом (см. прил. L и M). Представим решение двойственной задачи в табл. 3.3.

Т а б л и ц а 3.3. **Оптимальное решение двойственной задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_1	u_2	y_4	y_2
u_1	41,0	0	33,5	–0,3	1
u_4	25,8	1	–21,5	0,06	1
y_3	6,0	0	19	0,2	–1
u_3	1,4	0	0,5	–0,02	0
$F_{\min}$	4520	–36	–160	–32	–24

Таким образом, суммарная количественная оценка ограничивающих производство ресурсов равна 4520 у. д. е. Из табл. 3.3 видно, что:

u_1 – оценка 1 га пашни равна 41 у.д.е., т.е., если фермерское хозяйство будет иметь не 60, а 61 га пашни, то это приведет к росту прибыли на 41 у. д. е.;

u_2 – оценка трудовых ресурсов равна нулю, так, этот ресурс в данных экономических условиях является избыточным;

u_3 – оценка кормов показывает, что 1 ц к. ед. обеспечивает приращение прибыли в размере 1,4 у. д. е.;

u_4 – оценка доходности возделывания зерновых культур при максимальной их площади посева показывает, что при увеличении площади зерновых культур на 1 га за счет перераспределения посевов культур прибыль фермерского хозяйства может возрасти на 25,8 у. д. е.

В теории линейного программирования доказывается несколько теорем о взаимосвязи решений прямой и двойственной задач. Знание этих взаимосвязей важно не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения. Важнейшие из них такие:

а) взаимодвойственность: прямая задача и двойственная к ней являются взаимодвойственными;

б) теорема двойственности: если взаимодвойственные задачи имеют хотя бы одно допустимое решение, то они имеют одинаковые значения целевых функций в оптимуме;

в) полнота симплекс-таблицы: последняя симплексная таблица, соответствующая прямой задаче, содержит всю информацию о решении двойственной задачи и наоборот.

Свойство взаимодвойственности заключается в следующем. Если двойственную задачу рассматривать в качестве прямой и применить к ней правила построения двойственной, то получим исходную прямую задачу.

Теорема двойственности для рассматриваемой задачи иллюстрируется следующим образом. Так, для прямой задачи $F_{\max} = 4520$, для двойственной задачи – $F_{\min} = 4520$, т. е.:

$$F_{\max} = F_{\min} = 4520.$$

Свойство полноты симплекс-таблицы продемонстрируем на основе изучения последней симплексной таблицы рассматриваемой двойственной задачи:

1) дополнительные небазисные переменные двойственной задачи равны соответствующим основным переменным прямой задачи и их значение, взятое со знаком плюс, находится в строке целевой функции:

$$y_i^{\text{д}} = x_j^n = (+)c_j,$$

$$y_1^{\text{д}} = x_1^n = 36;$$

$$y_4^{\text{д}} = x_4^n = 32;$$

$$y_2^{\text{д}} = x_2^n = 24;$$

2) двойственные переменные, стоящие в небазисных переменных, равны соответствующим дополнительным переменным прямой задачи и их значение, взятое со знаком плюс, находится в строке целевой функции:

$$u_i^{\text{д}} = y_i^n = (+)c_j,$$

$$u_2^{\text{д}} = y_2^n = 160.$$

Свойства объективно обусловленных оценок.

Использование двойственных оценок в анализе связано со следующим их значением.

1. *Двойственные оценки индивидуальны.* В современных рыночных условиях важно оценить роль отдельных ресурсов в формировании результата конкретного товаропроизводителя, так как одинаковые ресурсы в каждой организации АПК играют различную роль и их двойственные оценки будут различны. Это обусловлено такими факторами, как климатические условия, формы собственности, организации и оплаты труда, применяемые производственные технологии и т. д. Поэтому двойственные оценки рассчитывают индивидуально для каждой аграрной организации при решении задачи линейного программирования.

2. *Двойственные оценки устойчивы.* Они имеют единицы измерения целевой функции. Двойственные оценки получают только лимитированные, т. е. недостающие ресурсы. Избыточные ресурсы, т. е. те,

которые в данных производственных условиях используются неполностью в рассматриваемой организации, имеют нулевые двойственные оценки. Но этот факт не означает отсутствие хозяйственной ценности таких ресурсов, а лишь указывает на их нерациональное использование. При изменении производственных условий избыточный ресурс может стать недостающим и иметь двойственную оценку.

3. *Двойственные оценки позволяют соизмерить затраты и результаты производства*, определить конечный эффект от принятия того или иного управленческого решения, так как двойственная оценка показывает, на сколько изменится величина целевой функции, если ресурс изменится на единицу сверх имеющегося объема. Нулевые двойственные оценки по ресурсам свидетельствуют о том, что изменение их объема на единицу не повлияет на значение целевой функции. Ненулевые двойственные оценки подсказывают, объем какого ресурса необходимо увеличить для повышения конечных результатов предприятия. При этом ресурсы, получившие ненулевую оценку, должны быть ранжированы по своей эффективности, которую определяют с учетом затрат, необходимых для привлечения единицы дополнительного ресурса.

4. *Двойственные оценки позволяют определить нормы взаимозаменяемости между ресурсами*. В данном случае речь идет только об относительной заменяемости с учетом влияния ресурсов на конечные результаты.

5. *Двойственные оценки позволяют расположить отрасли сельскохозяйственного предприятия и производимую продукцию по степени ее эффективности* и тем самым достоверно обосновать направления его дальнейшего развития. Аналогично, если анализируется роль расчетного или планового задания, то двойственная оценка может рассматриваться как цена увеличения задания в плане потерь при достижении требуемого эффекта.

Свойства двойственных оценок базируются на содержании первой и второй теорем двойственности. Сформулируем *первую теорему двойственности*:

– если одна из задач, или прямая, или двойственная, имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, т. е., если целевая функция прямой задачи записана в виде –

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j \ ,$$

а двойственной задачи – в виде:

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i \ ,$$

то согласно первой теореме двойственности:

$$\max \sum_{j \in J_0} c_j x_j = \min \sum_{i = I_0} A_i u_i .$$

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в том, что программа производства (значения переменных прямой задачи) и система двойственных оценок являются оптимальными только тогда, когда стоимость (прибыль) сельскохозяйственной продукции и суммарная оценка ограничивающих производство ресурсов совпадают. То есть фермерское хозяйство может получить максимально возможную прибыль, равную 4520 у. д. е., если количественная оценка лимитированных ресурсов хозяйства равна 4520 у. д. е. В этом случае двойственные оценки выступают как *инструмент балансирования затрат и результатов производства*.

Суть *второй теоремы двойственности* состоит в следующем:

1) если двойственные оценки положительны, то производственные ресурсы, для которых они рассчитаны, используются полностью, т. е.

$$\text{если } u_i > 0, \text{ то } \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i , i \in I_0 \ ;$$

2) двойственные оценки равны нулю, если производственные ресурсы, к которым они относятся, недоиспользуются, т. е.

$$u_i = 0 \text{ при условии } \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i , i \in I_0 .$$

Выпишем двойственные оценки ресурсов фермерского хозяйства:

$$u_1 = 41;$$
$$u_2 = 0;$$
$$u_3 = 1{,}4;$$
$$u_4 = 25{,}8.$$

Как уже отмечалось, если площадь пашни фермерского хозяйства возрастет на 1 га сверх имеющейся, то прибыль фермера увеличится на 41 у. д. е. ($u_1 = 41$).

Дополнительное использование 1 ц к. ед. кормов позволит увеличить прибыль на 1,4 у. д. е. ($u_3 = 1{,}4$).

Если ограничение на посев зерновых культур будет увеличено на 1 га, то за счет перераспределения ресурсов в пользу более выгодной отрасли фермер дополнительно получит 25,8 у. д. е. ($u_4 = 25{,}8$).

В этом случае двойственные оценки выступают как *мера влияния ресурсов на функционал*.

Второй ресурс (труд) в условиях фермерского хозяйства избыточный, он имеет нулевую двойственную оценку ($u_2 = 0$). Согласно содержанию второй теоремы двойственности ресурсы, двойственные оценки которых равны нулю, недоиспользуются. Из решения прямой задачи (см. табл. 3.2) видно, что избыток трудовых ресурсов при условии оптимального решения составляет 160 чел.-дн. ($y_2 = 160$). Нулевая двойственная оценка показывает, что этот ресурс можно перераспределить: использовать избыток труда для улучшения социальной сферы фермерского хозяйства, на нужды другой сельскохозяйственной организации, испытывающей дефицит трудовых ресурсов, и т. д.

Ресурсы, получившие ненулевые двойственные оценки, сдерживают производство, так как используются полностью (согласно второй теореме двойственности). Из оптимального решения прямой задачи видно, что их дополнительные переменные (обозначающие недоиспользование ресурсов) попали в небазисные переменные и равны нулю:

$$y_1 = 0,$$
$$y_3 = 0,$$
$$y_4 = 0.$$

Следовательно, двойственные оценки выступают *мерой дефицитности ресурсов.*

В свою очередь ресурсы, получившие ненулевые двойственные оценки, должны быть ранжированы по своей эффективности. При этом эффективность определяют с учетом затрат, необходимых для привлечения единицы ресурса. С первого взгляда, кажется, что наибольшую отдачу дает увеличение площади пашни, имеющей самую высокую двойственную оценку.

Вместе с тем известно, что материально-денежные затраты на увеличение 1 га пашни составят 500 у. д. е., а на прирост 1 ц к. ед. –

1,8 у. д. е. Что касается четвертого ресурса, то затраты на его осуществление связаны с технологией производства, с требованиями севооборотов, поэтому эффективность этого мероприятия здесь не оценивается.

Рассчитаем окупаемость денежных вложений:

по пашне – $\frac{500}{41} = 12{,}2$ лет;

по кормам – $\frac{1{,}8}{1{,}4} = 1{,}3$ года.

Отсюда следует, что в данных экономических условиях быстрее окупятся инвестиции, вложенные в оборотные средства (корма). Таким образом, двойственные оценки позволяют обосновать *очередность вложения денежных средств в производство*.

В практическом отношении для задач линейного программирования важно выявление альтернативных оптимальных решений. Оно основывается на том теоретическом положении, что если –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i > c_j \ ,$$

то отрасль не выгодно вводить в базис, а если –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i < c_j \ ,$$

то отрасль для сельскохозяйственной организации будет прибыльна.

Допустим, в связи с избытком трудовых ресурсов, и исходя из спроса и предложения на рынке, фермер принимает решение заняться в будущем году овощеводством или свиноводством. Запишем предполагаемые затраты ресурсов и выход прибыли для этих отраслей (табл. 3.4). Оценим эффективность отдельных отраслей, рассчитав суммарную оценку ресурсов, и сравним ее с результатом производства:

овощеводство – $1 \cdot 41 + 30 \cdot 0 < 50$,

свиноводство – $10 \cdot 0 + 8 \cdot 1{,}4 > 10$.

Т а б л и ц а 3.4. **Характеристика отраслей**

Ресурсы	Двойственные оценки u_i	В расчете на единицу отрасли	
		овощеводство	свиноводство
Пашня, га	41	1	–
Труд, чел.-дн.	0	30	10
Корма, ц к. ед.	1,4	–	8
Технологическое ограничение по площади посева зерновых культур, га	25,8	–	–
Прибыль, у. д. е.		50	10

В этом случае фермер должен отдать предпочтение развитию в хозяйстве овощеводства, так как полученная прибыль будет покрывать издержки на производство овощей.

Таким образом, двойственные оценки становятся важным инструментом анализа оптимальных решений и в этом качестве могут служить для обоснования действий, направленных на повышение эффективности производства.

3.4. Устойчивость оптимального плана

Анализ устойчивости (чувствительности) оптимального плана основывается на изменении параметров задачи:

$$a_{ij},\ A_i \text{ и } p_j,$$

где $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Влияние изменения параметров задачи на оптимальный план можно посмотреть, если найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых они измеряют влияние ограничений на целевую функцию задачи.

Допустимый интервал устойчивости оценок имеет следующий вид:

$$\left[A_i-\Delta A_i^{\min};A_i+\Delta A_i^{\max}\right],\ i=\overline{1,m},$$

где $\Delta A_i^{\min}$ – нижний предел уменьшения ресурса вида i, который находится по формуле –

$$\Delta A_i^{\min}=\min_{\substack{j\\ d_{ij}>0}}\left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\},$$

$\Delta A_i^{\max}$ – верхний предел увеличения ресурса вида i, который находится по формуле –

$$\Delta A_i^{\max} = \left| \max_{\substack{j \\ d_{ij}<0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right|,$$

где d_{ij} – элементы матрицы $A^{-1} = \left\| d_{ij} \right\|$, обратной к матрице $A = \left\| a_{ij} \right\|$ в оптимальном решении прямой задачи;

x_j^* – оптимальное решение.

Пример. Согласно оптимальному решению прямой задачи (см. табл. 3.2 и прил. L) в базис вошли переменные x_1, x_2, x_4 и y_2.

Выпишем прямую матрицу, состоящую из коэффициентов ограничений прямой задачи базисных переменных (см. табл. L1):

$$A = \left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 26 & 25 & 1 \\ -12 & -15 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя алгоритм вычисления обратных матриц (см. прил. D), найдем ее элементы. Элементы обратной матрицы можно найти и используя Excel.

Введем элементы прямой матрицы в диапазон ячеек B3:E6. Выделим область (диапазон из 16 ячеек) F3:16 для размещения обратной матрицы. Найдем обратную матрицу с помощью функции МОБР, для чего выполним один щелчок левой кнопки мыши по кнопке f_x (вставка функции) стандартной панели инструментов (на экране появится диалоговое окно «Мастер функций»).

В левом окне подведем курсор на категорию «Математические» и выделим ее щелчком кнопки мыши. В поле «Функция» этого окна с помощью кнопок прокрутки найдем функцию МОБР и выделим ее щелчком мыши, нажмем кнопку ОК (рис. 3.1).

В поле «Массив» с мигающим курсором введем диапазон размещения элементов прямой матрицы A4:D7 и нажмем клавиши <Ctrl> + + <Shift> + <Enter> (тем самым укажем программе, что она должна выполнить операцию над массивами) (рис. 3.2).

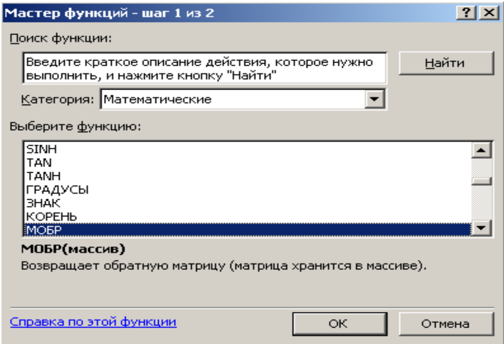


Рис. 3.1. Диалоговое окно активизации команды обращения матрицы

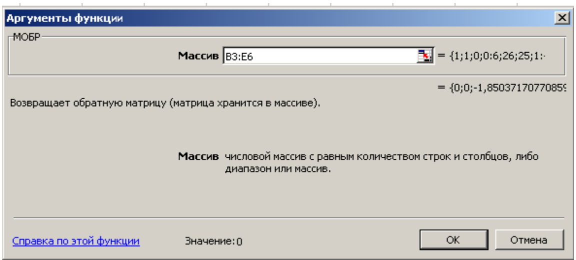


Рис. 3.2. Диалоговое окно ввода данных инструмента МОБР

На экране в выделенном диапазоне получим обратную матрицу (рис. 3.3).

1	1	0	0	0	0	0	1
6	26	25	1	1	0	0	–1
–12	–15	50	0	0,3	0	0,02	–0,06
1	0	0	0	–33,5	1	–0,5	21,5

Рис. 3.3. Результат применения инструмента МОБР

Выпишем элементы матрицы, обратной данной прямой матрице A:

$$A^{-1} = \left\| d_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}02 & -0{,}06 \\ -33{,}5 & 1 & -0{,}5 & 21{,}5 \end{pmatrix}.$$

Приведем другой способ определения элементов обратной матрицы.

Например, используя модификацию симплексного метода (позволяющего найти элементы обратной матрицы), найдем оптимальное решение прямой задачи (см. подраздел 3.3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800, \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808, \\ x_1 \le 36. \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Приведем прямую задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 3x_3 + 25x_4 + y_2 = 1800 \\ -12x_1 - 15x_2 - 25x_3 + 50x_4 + y_3 = 808 \\ x_1 + y_4 = 36 \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Все дополнительные переменные y_i имеют тот же знак, что и свободные члены, в противном случае для решения задачи используется М-метод (метод искусственного базиса).

Информацию задачи занесем в первую симплексную таблицу (табл. 3.5).

Т а б л и ц а 3.5. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	60	1	1	1	0	1	0	0	0
y_2	1800	6	26	2	25	0	1	0	0
y_3	808	–12	–15	–25	$\boxed{50}$	0	0	1	0
y_4	36	1	0	0	0	0	0	0	1
$F_{\max}$	0	–50	–20	0	–70	0	0	0	0

Коэффициенты строки целевой функции записываются в таблицу с противоположным знаком.

Оптимального решения нет, так как в строке целевой функции имеются отрицательные коэффициенты. Наибольший по модулю отрицательный коэффициент F-строки определит разрешающий столбец (см. поиск оптимального решения в прил. K).

Минимальное положительное симплексное отношение укажет на разрешающую строку. На пересечении разрешающего столбца и строки находим разрешающий коэффициент (k = 50).

В столбец переменных вместо y_3 подставляем основную переменную x_4 и рассчитываем коэффициенты новой симплексной таблицы (табл. 3.6).

Т а б л и ц а 3.6. **Вторая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	60	1	1	1	0	1	0	0	0
y_2	1396	12	33,5	14,5	0	0	1	–0,5	0
x_4	16,16	–0,24	–0,3	–0,5	1	0	0	0,02	0
y_4	36	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	1131,2	–66,8	–41	–35	0	0	0	1,4	0

Используем следующие правила расчета коэффициентов новой симплексной таблицы.

1. В новом столбце, вместо разрешающего коэффициента, проставляют везде нули, кроме переменной, которая вошла в базис. Против нее ставим единицу.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки находят в результате деления старых коэффициентов на разрешающий коэффициент (см. прил. K).

3. Все остальные коэффициенты вычисляют по правилу прямоугольника (см. прил. K).

Во второй симплексной таблице нет оптимального решения, следовательно, продолжают его поиск, используя вышеизложенный алгоритм (табл. 3.7, 3.8).

В строке целевой функции все коэффициенты положительные, оптимальное решение найдено, оно совпадает с ранее полученным (см. прил. K, L).

Т а б л и ц а 3.7. **Третья симплексная таблица**

Базисные перемен-ные	Свобод-ные чле-ны	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	24	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	–1
y_2	964	0	33,5	14,5	0	0	1	–0,5	–12
x_4	24,8	0	–0,3	–0,5	1	0	0	0,02	0,24
x_1	36	1	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	3536	0	–41	–35	0	0	0	1,4	66,8

Т а б л и ц а 3.8. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные перемен-ные	Свобод-ные чле-ны	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_2	24	0	1	1	0	1	0	0	–1
y_2	160	0	0	–19	0	–33,5	1	–0,5	21,5
x_4	32	0	0	–0,2	1	0,3	0	0,02	–0,06
x_1	36	1	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	4520	0	0	6	0	41	0	1,4	25,8

В табл. 3.8 имеем коэффициенты обратной матрицы и оптимальное решение задачи.

Используя табл. 3.8 и вышеизложенные формулы, определим допустимый интервал устойчивости оценок по отношению к ограничениям по ресурсам:

$$\Delta A_1^{\min} = \min\left\{\frac{24}{1}; \frac{32}{0{,}3}\right\} = 24,$$

$$\Delta A_1^{\max} = \left|\max\left\{\frac{160}{-33{,}5}\right\}\right| = 4{,}776.$$

Таким образом, интервал устойчивости двойственных оценок по отношению к ресурсам пашни равен:

$$\left[A_1 - \Delta A_1^{\min}; A_1 + \Delta A_1^{\max}\right] = [60 - 24; 60 + 4{,}776] = [36; 64{,}776].$$

Трудовые ресурсы в данных производственных условиях используются неполностью (y_2 = 160), следовательно, их увеличение не окажет влияние на величину целевой функции задачи. Поэтому определим нижний предел уменьшения трудовых ресурсов:

$$\Delta A_2^{\min} = \min\left\{\frac{160}{1}\right\} = 160,$$

$$\left[A_2 - \Delta A_2^{\min};\ \text{нет}\right] = \left[1800 - 160;\ \text{нет}\right] = \left[1640;\ \text{нет}\right].$$

Определим интервал устойчивости по отношению к ресурсам кормов и технологическому требованию по максимальной площади посева зерновых культур:

$$\Delta A_3^{\min} = \min\left\{\frac{32}{0{,}02}\right\} = 1600,$$

$$\Delta A_3^{\max} = \left|\max\left\{\frac{160}{-0{,}5}\right\}\right| = 320,$$

$$\left[A_3 - \Delta A_3^{\min};\ A_3 + \Delta A_3^{\max}\right] = \left[808 - 1600;\ 808 + 320\right] = \left[-792;\ 1128\right];$$

$$\Delta A_4^{\min} = \min\left\{\frac{160}{21{,}5};\ \frac{36}{1}\right\} = 7{,}442,$$

$$\Delta A_4^{\max} = \left|\max\left\{\frac{24}{-1};\ \frac{32}{-0{,}06}\right\}\right| = 24,$$

$$\left[A_4 - \Delta A_4^{\min};\ A_4 + \Delta A_4^{\max}\right] = \left[36 - 7{,}442;\ 36 + 24\right] = \left[28{,}558;\ 60\right].$$

Изменение объемов ресурсов в данных границах позволит сохранить допустимое решение задачи.

Так как изменение ресурсов находится в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на изменение целевой функции $(\Delta F_{\max})_i$ определим произведением соответствующей двойственной оценки u_i^* на величину изменения ресурса ΔA_i.

Из табл. 3.3 выпишем оптимальное значение двойственных оценок и целевой функции:

$$u_1^* = 41{,}0;$$
$$u_2^* = 0;$$
$$u_3^* = 1{,}4;$$
$$u_4^* = 25{,}8;$$
$$F_{\min} = 4520.$$

Определим изменение значения целевой функции при уменьшении ресурсов по сравнению с имеющимся уровнем:

$$(\Delta F_{\max})_1 = 41 \cdot (36 - 60) = -984,$$

$$(\Delta F_{\max})_2 = 0 \cdot (1640 - 1800) = 0,$$

$$(\Delta F_{\max})_3 = 1{,}4 \cdot (-792 - 808) = -2240,$$

$$(\Delta F_{\max})_4 = 25{,}8 \cdot (28{,}558 - 36) = -192{,}0.$$

Суммарное влияние уменьшения ресурсов на значение целевой функции составит:

$$\Delta F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} (\Delta F_{\max})_i = -984 + 0 - 2240 - 192{,}0 = -3416.$$

Рассчитаем изменение значения целевой функции при увеличении ресурсов по сравнению с имеющимся уровнем:

$$(\Delta F_{\max})_1 = 41 \cdot (64{,}776 - 60) = 195{,}8,$$

$$(\Delta F_{\max})_3 = 1{,}4 \cdot (1128 - 808) = 448{,}0,$$

$$(\Delta F_{\max})_4 = 25{,}8 \cdot (60 - 36) = 619{,}2,$$

$$\Delta F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} (\Delta F_{\max})_i = 195{,}8 + 448{,}0 + 619{,}2 = 1263{,}0.$$

Анализ устойчивости по ресурсам позволяет оценить степень влияния изменения объемов ресурсов A_i на значение целевой функции и дает возможность определения наиболее целесообразного варианта возможных изменений свободных членов задачи.

В послеоптимизационном анализе результатов решения задач линейного программирования чаще всего используют информационные технологии LPX.88 (см. прил. L) и Excel (см. прил. M).

Программа LPX.88 позволяет найти оптимальное значение неизвестных величин задачи (функциональная клавиша F_1 (PRIMAL VALUES OUTPUT MENU)); значение двойственных оценок ресурсов (функциональная клавиша F_2 (DUAL VALUES OUTPUT MENU));

устойчивость по критерию (функциональная клавиша F_3 (COST RANCES OUTPUT MENU)); устойчивость по ресурсам (функциональная клавиша F_4 (RHS RANCES OUTPUT MENU)); обратную матрицу (функциональная клавиша F_5 (INVERSE MATRIX)).

В отчете по устойчивости по критерию указаны значения неизвестных величин задачи, коэффициенты критерия задачи при неизвестных и в последних столбцах даны пределы устойчивости критериальных коэффициентов.

В модель заложена априорная информация о прибыли с единицы отрасли. С течением времени она может изменяться под влиянием изменения себестоимости продукции, цен на сырье и продукцию и полученное оптимальное решение в результате воздействия различных факторов на процесс производства может оказаться неоптимальным.

Поэтому, зная нижнюю и верхнюю границы устойчивости коэффициентов критерия, оценивают устойчивость решения задачи. Если коэффициенты критерия при соответствующих неизвестных величинах задачи не выходят за границы устойчивости (от нижней границы до верхней), то оптимальное решение останется неизменным. Например, коэффициент критерия при неизвестной переменной x_2 равен 20 и может изменяться в пределах [14; 45,8] и соответственно прибыль от 24 га картофеля может изменяться в пределах [336; 1099,2], в этом случае неизвестная переменная x_2 будет базисной и равной 24 га.

В отчете по устойчивости по ресурсам указаны двойственные оценки ресурсов, их запасы, нижняя и верхняя границы изменения устойчивости их двойственных оценок. Если наличие ресурса находится в границах устойчивости двойственной оценки, то можно определить величину изменения значения критерия. Например, объем первого ресурса может изменяться в пределах [36; 64,776], что повлечет за собой колебание значения критерия (прибыли) на 1179,82 у. д. е.:

$$(\Delta F_{\max})_1 = u_1^* \cdot \Delta A_i = 41 \cdot (64{,}776 - 36) = 1179{,}82 \text{ у. д. е.}$$

Если же значение объема ресурса будет увеличено сверх верхней границы, то ресурс из дефицитного (ограниченного) перейдет в недефицитный и дополнительная его переменная y_i будет больше нуля, а двойственная его оценка $u_i = 0$.

3.5. Иерархические системы и методы декомпозиции

При моделировании параметров развития сложных систем исследователь сталкивается с трудностью поиска оптимального решения задач линейного программирования большой размерности. С целью упрощения процедуры расчета применяют методы декомпозиции, которые основаны на рациональном расчленении сложной экономико-математической задачи и решении отдельных подзадач с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения. При этом каждую сложную систему, к которой относится и экономическая система (для микроэкономики – это предприятие, для макроэкономики – отрасли, регионы), состоящую из большого числа взаимосвязанных объектов, представляют в виде совокупности подсистемы изучаемой системы. Таким образом, любая сложная система имеет иерархическую структуру, в которой существует множество составляющих ее подсистем и элементов разного уровня, обладающих определенными взаимосвязями и взаимоотношениями. Например, реальная экономическая система представляет собой сочетание разных иерархических систем (отраслевой, территориальной, функциональной). В ней наряду с вертикальными связями действуют горизонтальные, роль которых с развитием в стране рынка возрастает. Для повышения управляемости иерархической системой часть прав и обязанностей по принятию решений доверяется нижестоящим звеньям (акционерным обществам, предприятиям и т. д.). Но, превратившись в относительно самостоятельную подсистему или элемент системы, такое звено обретает и собственные интересы, которые могут не совпадать с интересами руководства системой. Для устранения таких расхождений в экономике применяются меры экономического стимулирования, которые направлены на объединение личных, коллективных и общегосударственных интересов. Обосновать мероприятия по экономическому стимулированию интересов системы и подсистем можно с помощью методов декомпозиции.

Методы декомпозиции, или разложения, эффективны для задач линейного программирования большой размерности, у которых матрица задачи может быть приведена к блочной структуре (рис. 3.4).

Допустим, имеется n секторов экономики (отраслей, подсистем), деятельность которых характеризуется различными технологическими способами производства ($x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)$).

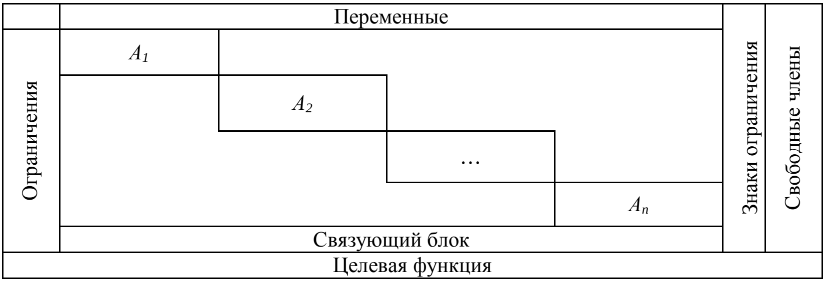


Рис. 3.4. Схема матрицы блочной экономико-математической задачи линейного программирования

Каждый сектор экономики вида j имеет определенные запасы ресурсов A_i ($A_i = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$), расход которых в технологических способах задается соответствующими коэффициентами a_{ij} (a_{ij} – расход ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j). В качестве ресурсов данной задачи могут выступать производственные мощности, сырье, трудовые ресурсы, запасы кормов, денежных средств и т. д., т. е. функционирование конкретного сектора экономики описывается ограничениями одного из основных блоков модели. При этом в модели количество основных блоков соответствует числу секторов экономики.

Основные блоки модели связаны между собой ограничениями связующего блока и целевой функцией задачи. Ограничения связующего блока включают балансовые соотношения, наложенные на деятельность всех n секторов экономики. Например, задаваемые извне минимальные уровни потребления товаров или максимальный расход ограниченных ресурсов (топлива). И каждый технологический способ производства вида j наряду с коэффициентами a_{ij} характеризуется и коэффициентами b_{ij} (b_{ij} – потребление глобального ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j).

Таким образом, блочную экономико-математическую модель можно записать следующим образом. Требуется найти максимальное значение целевой функции (задача 1):

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j \ .$$

При условиях:

по использованию ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0;$$

по использованию глобальных ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j = B_i, i \in I_1;$$

по неотрицательности неизвестных величин –

$$x_j \geq 0,\ j \in J_0.$$

Индексация:

i – номер ресурса;

I_0 – множество видов ресурсов;

I_1 – множество видов глобальных ресурсов;

j – номер технологического способа производства;

J_0 – множество видов технологических способов производства.

Неизвестные величины:

x_j – размер технологического способа производства вида j.

Известные величины:

a_{ij} – расход ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j;

A_i – объем ресурса вида i;

b_{ij} – расход глобального ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j;

B_i – объем глобального ресурса вида i;

c_j – эффект (прибыль, выручка от реализации продукции и т. д.) с единицы технологического способа производства вида j.

Существует два основных подхода к декомпозиции системы (задача 1):

Прямая декомпозиция путем перераспределения между секторами глобальных ресурсов. Этот метод получил название метода Корнаи-Липтака (см. прил. А).

Схема Корнаи – Липтака построена по принципу сравнения централизованного масштабирования возможностей с децентрализованным выявлением эффекта от их использования.

При прямой декомпозиции строится итеративный процесс определения лимитов глобальных ресурсов вида i, т. е. y_i, удовлетворяющих условию (задача 2):

$$\sum_{i \in I_1} y_i \le B_i, i \in I_1$$

и таких, что оптимальные решения подзадач (блоков матрицы):

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0$$

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j = y_i, i \in I_1$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j$$

являются одновременно решением задачи 1.

Двойственная декомпозиция, или декомпозиция через двойственные оценки, – метод Данцига – Вульфа (см. прил. А). Схема Данцига–Вульфа построена по принципу сравнения централизованно определенных цен с децентрализованным определением наилучших возможностей.

Секторам экономики задаются зависящие от цен (двойственных оценок) целевые функции, которые заставляют сектора выбирать решения, способствующие достижению общей цели прямой задачи (задачи 1). То есть строится итеративный процесс определения двойственных оценок u_i, таких, что оптимальные решения подзадач (задач блоков) (задача 3):

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0$$

$$F_{\max} = (c_j + u_i B_i) \cdot x_j$$

являются в то же время решением исходной прямой задачи (задачи 1).

В общих подходах алгоритм решения общей задачи (задачи 1) состоит из двух этапов:

– на первом этапе находится допустимое решение для системы в целом (как совокупность допустимых решений подзадач),

– на втором этапе полученное решение шаг за шагом улучшается, приближаясь к оптимальному решению.

Первоначальные значения лимитов глобальных ресурсов y_i или цен u_i выбираются априорно, и на каждом шаге корректируются и скорректированные подзадачи (задача 2) или (задача 3) решаются заново. Критерием корректировок является минимизация отклонений двойственных оценок глобальных ограничений в локальных подзадачах.

Практически, через 4–5 шагов полученное приближенное решение становится экономически приемлемым. При этом оценки одноименных ограничений в локальных задачах приблизительно равны и совокупность решений локальных подзадач образует решение исходной задачи (задачи 1).

Следует отметить, что рассмотрение методов декомпозиции представляет интерес в теоретическом плане, в практических целях они теряют свою значимость в связи с развитием вычислительной техники и пакетов прикладных программ, позволяющих в короткие сроки решать экономико-математические задачи большой размерности.

3.6. Целочисленные линейные модели

Среди практических задач линейного программирования важное место занимают задачи с требованием целочисленности переменных (все или части неизвестных величин). Экстремальные задачи, в которых на переменные накладываются условия целочисленности, а область допустимых решений конечна, являются предметом изучения целочисленного, или дискретного, программирования. Они возникают в случае, когда искомые переменные определяют неделимые объекты: тракторы, животные и т. д.

В общем виде задача целочисленного программирования имеет следующий вид.

Требуется найти экстремальное (максимальное или минимальное) значение целевой функции (задача 4):

$$F_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

При условиях:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} A_i,\ i = \overline{1, m}$$

$$2)\ x_j \ge 0 \text{ и } x_j \text{ – целые для всех } j = \overline{1, n} .$$

Можно выделить следующие основные классы задач дискретного программирования.

1. *Транспортная задача и ее варианты*: требуется обосновать план перевозки грузов от поставщиков до потребителей с целью минимизации транспортных затрат. При этом оптимальный объем груза x_{ij}, перевозимого от поставщиков вида i к потребителю вида j, есть число целое ($x_{ij} \geq 0$, x_{ij} – целые числа).

К этому классу задач можно отнести и задачу о назначениях. Требуется так распределить работников по работам, чтобы общая их выработка была наибольшей.

Введем переменные задачи:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если работник вида } i \text{ выполняет работу вида } j; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные, принимающие только два значения – 0 или 1, называются булевыми переменными.

Математическая запись задачи:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

При ограничениях:

1. По закреплению работ за работниками –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}.$$

2. По выполнению работ работниками –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1, n},$$

где c_{ij} – доход при выполнении работником вида i работы вида j.

2. *Задачи с неделимостями*. Классическим примером задач данного класса является задача о ранце, суть которой состоит в следующем: школьник, собираясь в школу, складывает ранец, вес которого не должен превышать A_i килограммов. В ранец можно положить n предметов, каждый из которых весит a_{ij} килограммов и характеризуется полезностью p_j. Требуется выбрать так предметы, чтобы их общий вес не превышал максимально допустимый (A_i) и суммарная полезность содержимого ранца была максимальной.

Обозначим через x_j неизвестные параметры задачи, при этом

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й предмет помещают в ранец } (j = \overline{1,n}) \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j .$$

При условиях:

1. По предельному весу ранца –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, i = \overline{1,m}.$$

2. По неотрицательности и целочисленности переменных –

$$x_j \ge 0; x_j \in \{0;1\}, j = \overline{1,n} .$$

3. *Комбинаторные задачи*. Классическим представителем комбинаторных задач является задача о коммивояжере. Торговый агент должен выехать из определенного города и вернуться в него, побывав в каждом городе один раз и при этом проехав минимальное расстояние.

Введем переменные задачи:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j; \\ 0, \text{ в противном случае } (i, j = \overline{1,n}; i \ne j). \end{cases}$$

Математическая запись задачи:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

При условиях:

1. По въезду в город –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}.$$

2. По выезду из города –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}.$$

К приведенным ограничениям добавляют условия на недопустимость подциклов (повторного посещения городов, за исключением исходного):

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1, i=\overline{2,n};\ j=\overline{1,n}\ (i \ne j),$$

где x_{ij} – решение коммивояжера о переезде из города i в город j;

c_{ij} – расстояние между городами i и j.

4. *Задачи с разрывными целевыми функциями*. Экономические системы характеризуются наличием постоянных затрат, величина которых не зависит от объема производства продукции. Учет такого факта в модели приводит к появлению целевых функций, не обладающих свойством непрерывности. В качестве примера рассмотрим транспортную задачу с фиксированными доплатами. Она отличается от транспортной задачи, рассмотренной в разделе 2, тем, что в ней затраты по перевозке груза от поставщика вида i к потребителю вида j определяются следующим образом:

$$\bar{c}_{ij}x_{ij} = \begin{cases} c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, \text{если } x_{ij} > 0; \\ 0, \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases}$$

где c_{ij} – издержки на перевозку груза от поставщика вида i к потребителю вида j;

d_{ij} – фиксированная доплата за аренду транспорта при перевозке груза от поставщика вида i к потребителю вида j.

Целевая функция суммарных транспортных затрат имеет такой вид:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}x_{ij}$$

и изменяется скачкообразно, что затрудняет нахождение ее минимума.

Для решения такой задачи вводят вспомогательные переменные y_{ij}, которые принимают два значения – 0 и 1:

$$y_{ij} = 0 \vee y_{ij} = 1,$$

тогда

$$x_{ij} \le (\min\{a_i, b_j\})y_{ij}$$

и целевая функция имеет следующий вид:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) .$$

Данная задача является задачей частично целочисленного программирования.

Для решения задач линейного целочисленного программирования может использоваться симплексный метод, с помощью которого получают оптимальное решение задачи. Если значения переменных задачи получены нецелочисленными, их округляют до ближайших целых чисел. Этот метод применяется только тогда, когда отдельная единица совокупности составляет относительно малую часть объема совокупности. В противном случае округление может привести к неоптимальному решению задачи (рис. 3.5).

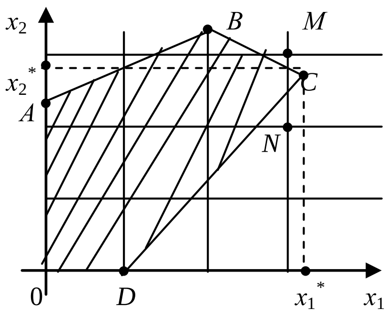


Рис. 3.5. Графическое решение задачи дискретного программирования

Допустим, точка *C* является точкой оптимума обычной задачи линейного программирования. При округлении ее координат до целых значений получаются точки *M* или *N*, не принадлежащие области допустимых решений задачи.

Поэтому для решения линейных задач целочисленного программирования используются следующие методы:

1) методы отсечения;
2) комбинаторные;
3) приближенные.

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается симплексным методом без условия целочисленности. Если полученные значения переменных не являются целочисленными, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

1) оно должно быть линейным;

2) отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи;

3) не затрагивать ни одного целочисленного решения.

Геометрическая иллюстрация этого метода показана на рис. 3.6, на котором нанесена целочисленная решетка.

На рис. 3.6 видно, что максимальное значение функции в многоугольнике *ABCDE* достигается в нецелочисленной точке *D*.

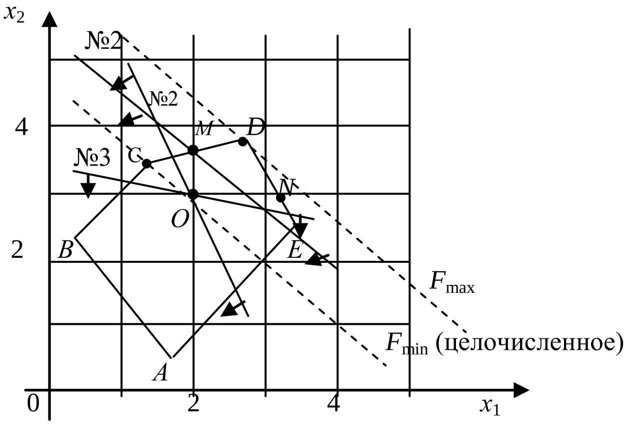


Рис. 3.6. Графическое решение задачи дискретного программирования методом отсечения

После построения первого дополнительного ограничения целевая функция достигает максимального значения в нецелочисленной точке *N*. Включение в задачу второго дополнительного ограничения позволит получить нецелочисленную точку оптимума – точку *M*. После включения в задачу третьего дополнительного ограничения найдено максимальное значение функции в целочисленной точке *O* с координатами (2, 2).

Алгоритм Гомори (см. прил. А) позволяет за конечное число шагов (итераций) прийти к оптимальному целочисленному решению, если оно существует. Главное – сформировать дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением.

Допустим, симплексным методом без условия целочисленности решим задачу (задачу 4).

Система ее ограничений после получения оптимального решения будет иметь следующий вид:

$$x_i = A_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = \overline{1, m}, \tag{3.1}$$

где x_i – базисная переменная, стоящая в i-й строке последней симплексной таблицы;

x_j – небазисная переменная, стоящая в j-м столбце последней симплексной таблицы;

a_{ij} – коэффициент пропорциональности, стоящий в i-й строке j-го столбца последней симплексной таблицы;

A_i – свободные члены, стоящие в i-й строке последней симплексной таблицы.

Предположим, что некоторые A_i и a_{ij} – нецелые числа. Обозначим наибольшую часть чисел A_i и a_{ij} их не превосходящую через $[A_i]$ и $[a_{ij}]$, а дробную положительную часть – через $\{A_i\}$ и $\{a_{ij}\}$. При этом:

$$A_i = [A_i] + \{A_i\}$$

$$a_{ij} = [a_{ij}] + \{a_{ij}\} \tag{3.2}$$

и

$$0 < \{A_i\} < 1; \qquad \{A_i\} \geq 0;$$

$$0 < \{a_{ij}\} < 1; \qquad \{a_{ij}\} \geq 0.$$

Подставив уравнение (3.2) в уравнение (3.1), получим:

$$x_i = ([A_i] - \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] \cdot x_j) + (\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j). \tag{3.3}$$

Так как выражение –

$$[A_i] - \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] \cdot x_j$$

есть целое число, то для того, чтобы x_i было целым числом, необходимо, чтобы величина

$$\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j$$

тоже была целым числом. Предположим, что

$$\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j < 0, \tag{3.4}$$

зная, что

$$0 \le \{A_i\} \le 1;\ 0 \le \{a_{ij}\}$$

и

$$\{a_{ij}\} \ge 0,\ x_j \ge 0,$$

должно выполняться неравенство

$$\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j < 1. \tag{3.5}$$

Но неравенства (3.4) и (3.5) противоречат требованиям целочисленности дробной части неравенства (3.3). Следовательно, для целочисленных решений должно выполняться условие, противоположное неравенству (3.4):

$$\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j \le 0 \text{ или } \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j \ge \{A_i\}. \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) определяет правильное отсечение методом Гомори.

Таким образом, для решения задач целочисленного линейного программирования *методом Гомори* используется следующий *алгоритм*:

1. Решают искомую задачу (3.1) симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все переменные задачи целочисленные, то получено искомое решение. Если задача без условия целочисленности не имеет решения, то и целочисленная задача решения не имеет.

2. Если среди оптимальных значений переменных есть нецелые, то выбирают компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы формируют правильное отсечение.

3. В неравенство, формирующее правильное отсечение, вводят дополнительную переменную и, превращая его в равенство, включают его в систему ограничений задачи.

4. Полученную расширенную задачу решают симплексным методом до тех пор, начиная с пункта 2, пока значения базисных переменных не будут целочисленными.

Пример. Фермер имеет 680 тыс. у. д. е. для приобретения оборудования по очистке и сортировке зерна, которое предполагает разместить на площади не более 60 м^2. Фермер может заказать оборудование двух типов (табл. 3.9).

При этом фермер может приобрести не более 8 единиц оборудования типа *B*.

Требуется обосновать стратегию покупки оборудования по очистке и сортировке зерна с целью максимизации его производительности.

Т а б л и ц а 3.9. **Характеристика оборудования по очистке и сортировке зерна**

Характеристика	Оборудование	
	типа *A*	типа *B*
Производительность за смену, т	4	3
Производственная площадь, м^2	5	3
Стоимость оборудования, тыс. у. д. е.	80	60

Введем неизвестные величины задачи:
x_1 и x_2 – соответственно количество единиц оборудования типа *A* и *B*.
Математическая модель имеет следующий вид:

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2 .$$

При условиях:
по использованию производственной площади –

$$5x_1 + 3x_2 \le 60 ;$$

по стоимости оборудования –

$$80x_1 + 60x_2 \le 680 ;$$

по количеству второго оборудования –

$$x_2 \le 8 ;$$

по неотрицательности переменных –

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 ;$$

по целочисленности переменных –

x_1, x_2 – целые числа.

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные. Получим:

$$5x_1 + 3x_2 + y_1 = 60$$
$$80x_1 + 60x_2 y_2 = 680$$
$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2 .$$

Запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. 3.10).

Т а б л и ц а 3.10. **Первая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
y_1	60	5	3
y_2	680	$\boxed{80}$	60
y_3	8	0	1
$F_{\max}$	0	–4	–3

Воспользуемся алгоритмом симплексного метода, изложенным в вопросе 3 (прил. Н), получим табл. 3.11.

Т а б л и ц а 3.11. **Вторая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,0125	0,75
y_3	8	0	1
$F_{\max}$	34	0,05	0

Во второй симплексной таблице получено оптимальное решение задачи, но значение переменной x_1 не является целым (x_1 = 8,5).

Найдем дробную часть числа 8,5 (8,5 – 8 = 0,5). Учитывая дробные части чисел 0,0125 и 0,75 (второй строки табл. 3.11) (0,0125 – 0 =

= 0,0125; 0,75 – 0 = 0,75), составляем дополнительное ограничение целочисленности для второй строки табл. 3.11:

$$0{,}0125\,y_2 + 0{,}75\,x_2 \geq 0{,}5.$$

Ограничение отсечения преобразуем в равенство:

$$-0{,}0125\,y_2 - 0{,}75\,x_2 + y_4 = -0{,}5.$$

И добавим его во вторую симплексную таблицу, получим табл. 3.12.

Т а б л и ц а 3.12. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,125	0,75
y_3	8	0	1
y_4	–0,5	$\boxed{–0,0125}$	–0,75
F_{max}	34	0,05	0

Так как с дополнительным ограничением полученное решение не допустимо, то ищем опорное решение задачи. Взяв за разрешающий коэффициент (–0,0125), находим новые коэффициенты симплексной таблицы (табл. 3.13).

Т а б л и ц а 3.13. **Вторая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	x_2
y_1	17,25	–5	3
x_1	8	1	0
y_3	8	0	1
y_2	40	–80	$\boxed{60}$
F_{max}	32	4	–3

В табл. 3.13 нет оптимального решения, ищем его, взяв за разрешающий коэффициент 60 (табл. 3.14).

Т а б л и ц а 3.14. **Третья симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
F_{max}	34	0	0,05

В табл. 3.14 получено оптимальное решение, но базисная переменная $x_2 = 0,667$ не является целой.

В табл. 3.14 вводим ограничение отсечения, сформированное по коэффициентам четвертой строки.

Найдем дробные части чисел: 0,667; –1,333; 0,0167, получим:

$$0,667 - 0 = 0,667;$$

$$-1,333 + 2 = 0,667;$$

$$0,0167 - 0 = 0,0167.$$

Сформируем дополнительное ограничение целочисленности для четвертой строки табл. 3.14:

$$0,667y_4 + 0,0167y_2 \geq 0,667,$$

представим его в канонической форме:

$$-0,667y_4 - 0,0167y_2 + y_5 = -0,667$$

внесем его в табл. 3.14 и получим табл. 3.15.

В табл. 3.15 нет опорного решения, найдем его (табл. 3.16).

Т а б л и ц а 3.15. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
y_5	–0,667	$\boxed{-0,667}$	–0,0167
F_{max}	34	0	0,05

Т а б л и ц а 3.16. **Вторая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_5	y_2
y_1	16,25	–1,499	0,025
x_1	7	1,499	–0,025
y_3	6	1,999	–0,050
x_2	2	–1,999	0,050
y_4	1	–1,499	0,025
F_{max}	34	0	0,05

В табл. 3.16 получено целочисленное значение переменных:

$$x_1 = 7;$$

$$x_2 = 2;$$

$$F_{max} = 34 \text{ т.}$$

Одним из комбинированных методов является метод ветвей и границ. Впервые этот метод для решения целочисленных задач линейного программирования предложили в 1960 г. Серж Ленг и Эндрю Дойг, далее в 1963 г. он был применен в работах Дж. Литтла, К. Мурти, Д. Суини и К. Кэрел (см. прил. А) для решения задачи о коммивояжере.

Суть метода состоит в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении только перспективных, отбрасывая бесперспективные варианты.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Решаем искомую задачу (3.4) симплексным методом без учета условия целочисленности.

2. Если в полученном симплексном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из них и по ней строим два ограничения.

3. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значение дробной переменной в оптимальном решении, в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной (например: $x_1 = 3{,}5$, первое ограничение будет $x_1 \leq 3$, а второе $x_1 \geq 4$, что исключает промежуток с дробным значением x_1).

4. В каждую из искомых задач добавляем по вышеизложенному ограничению, в результате получаем две задачи (подзадачи) линейного программирования и решаем их.

5. Если снова получены оптимальные решения с дробным значением переменной, то, сравнив значения целевых функций задач, выбираем задачу с большим значением целевой функции и с пункта 2 продолжаем до тех пор, пока не получим целочисленные значения переменных.

В результате получим ветви (рис. 3.7).

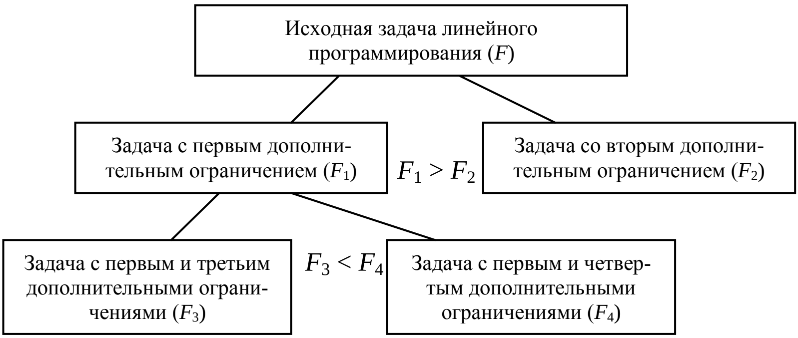


Рис. 3.7. Алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ

Иллюстрация метода ветвей и границ выполнена на условном примере (прил. N).

Решение линейной задачи целочисленного программирования можно найти средствами Excel.

Пример. Необходимо обосновать размеры отраслей фермерского хозяйства, т.е. определить оптимальную площадь посева зерновых культур, картофеля, многолетних трав на сено и поголовье коров, обеспечивающих получение максимального маржинального дохода.

Ресурсы фермерского хозяйства составляют: площадь пашни – 40 га, запасы годового труда – 1400 чел.-дн., запасы кормов – 1000 ц к. ед.

Расход ресурсов на единицу отрасли приведен в табл. 3.17.

Фермерское хозяйство заключило договоры на поставку продукции в следующих объемах, ц: зерно – 500; картофель – 4000; молоко – 800.

Цены реализации, у. д. е./ц: зерно – 30; картофель – 20; молоко – 60.

Имеется помещение для содержания 30 коров.

Т а б л и ц а 3.17. **Расход ресурсов и выход продукции на единицу отрасли**

Показатели	Отрасли			
	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы
Годовой труд, чел.-дн.	8	25	5	20
Потребность в кормах, ц к. ед.	–	–	–	50
Выход кормов с 1 га, ц к. ед.	10	8	15	–
Переменные издержки, млн. руб.	600	3500	200	1300
Выход товарной продукции, ц	30	250	–	40

Для составления экономико-математической модели вводим переменные:

x_1 – площадь посева зерновых культур, га;

x_2 – площадь посева картофеля, га;

x_3 – площадь посева многолетних трав на сено, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

Цель решения задачи:

$$F_{\max} = 30 \cdot 30x_1 + 250 \cdot 20x_2 + 40 \cdot 60x_3 - 600x_1 - 3500x_2 - 200x_3 - 1300x_4.$$

При условиях:

1. По использованию пашни, га –

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 40;$$

2. По использованию трудовых ресурсов, чел.-дн. –

$$8x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 20x_4 \le 1400;$$

3. По балансу кормов, ц к. ед. –

$$50x_4 \le 10x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 1000;$$

4. По реализации зерна, ц –

$$30x_1 \ge 500;$$

5. По реализации картофеля, ц –

$$250x_2 \ge 4000;$$

6) по реализации молока, ц –

$$40x_4 \ge 800;$$

7) по поголовью коров, чел. –

$$x_4 \leq 30.$$

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	40
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=8*B3	=25*C3	=5*D3	=20*E4	=СУММ(B5:E5)	1400
6	Выход кормов, ц к.ед.	=10*B3	=8*C3	=20*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+1000
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Реализация зерна, ц	=30*B3				=B8	
9	Реализация картофеля, ц		=250*C3			=C9	
10	Реализация молока, ц				=40*E4	=E10	
11	Переменные издержки, у.д.е.	=600*B3	=3500*C3	=200*D3	=1300*E4	=СУММ(B11:E11)	
12	Выручка от реализации, у.д.е.	=30*B8	=20*C9		=60*E10	=B12+C12+E12	
13	Маржинальный доход, у.д.е.					=F12-F11	

Изначально ячейки, значение которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого следует установить табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка F13 (маржинальный доход). Необходимо выполнить команду «Сервис → Поиск решения…» Появится диалоговое окно «Поиск решения» (см. прил. М).

В поле, изменяя ячейки, указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения», щелкнув по кнопке «Добавить». Командой «Добавить» вводим условия целочисленности переменных величин. Для этого в диалоговом окне «Добавление ограничения» вводим в окно «Ссылка на ячейку» адреса ячеек B3:D3; E4, далее курсор переводим в среднее окно, в котором находятся виды ограничений и требования (целое и двоичное), и устанавливаем курсор на требование «Целое».

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения:

Ограничение	Описание
B3:D3 ≥ 0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3 ≤ G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5 ≤ G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
F8 ≥ 500 F9 ≥ 4000 F10 ≥ 800	Фермерское хозяйство должно произвести продукцию каждого вида не менее объемов, на которые были заключены договоры
E4 ≥ 0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7 ≤ G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выход этих кормов с отрасли растениеводства
E4 ≤ 30	Поголовье коров не может превышать имеющиеся ското-места
B3:D3; E4	Площадь посева сельскохозяйственных культур и поголовье коров характеризуются целыми числами

После ввода последнего ограничения, щелкнув по кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. 3.8).

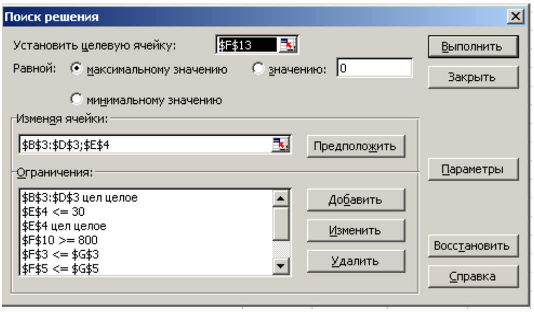


Рис. 3.8. Диалоговое окно «Поиск решения»

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования (табл. 3.18).

В табл. 3.18 видны значения неизвестных величин задачи:

$$x_1 = 17;$$

$$x_2 = 23;$$

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = 27;$$

$$F_{\max} = 69300 \text{ у. д. е.}$$

Т а б л и ц а 3.18. **Результаты решения целочисленной задачи линейного программирования**

Показатели	Зерно-вые	Кар-тофель	Многолет-ние травы на сено	Коровы	Итого	Име-ется
Площадь, га	17	23	0		40	40
Поголовье, гол.				27		
Затраты труда, чел.-дн.	136	575	0	540	1251	1400
Выход кормов, ц к. ед.	170	184	0		354	1354
Потребность в кормах, ц к. ед.				1350	1350	
Реализация зерна, ц	510				510	
Реализация картофеля, ц		5750			5750	
Реализация молока, ц				1080	1080	
Переменные издержки, у. д. е.	10200	80500	0	35100	125800	
Выручка от реализации, у. д. е.	15300	115000		64800	195100	
Маржинальный доход, у. д. е.					69300	

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение экономико-математической линейной модели.
2. Охарактеризуйте группы исходной информации экономико-математической модели.
3. Приведите разные формы записи задачи линейного программирования в общем виде.
4. Сформулируйте теоремы, характеризующие основные свойства задач линейного программирования.
5. Дайте определение понятиям «матрица» и «определитель экономико-математической модели».
6. Приведите классификацию матриц экономико-математических моделей.
7. Какая матрица используется при определении неизвестных величин экономико-математической задачи?
8. Перечислите свойства определителей.

9. Дайте определение понятиям «линейно-зависимые» и «линейно-независимые векторы».

10. Приведите алгоритм геометрического решения экономико-математической линейной модели в двухмерном пространстве.

11. Перечислите разные случаи решения задач линейного программирования в двухмерном пространстве.

12. Приведите алгоритм решения задач линейного программирования симплексным методом.

13. Перечислите правила расчета коэффициентов новой симплексной таблицы.

14. Дайте определение опорного (допустимого) и оптимального решений задачи линейного программирования симплексным методом.

15. Приведите примеры базовых моделей линейного программирования, применяемых при планировании производства и макроэкономики.

16. Дайте определение понятию «двойственные экономико-математические оценки».

17. Приведите методику составления двойственной экономико-математической задачи.

18. Перечислите характеристики и свойства двойственных экономико-математических оценок.

19. Охарактеризуйте сущность первой и второй теорем двойственности.

20. Приведите структурные модели двойственных задач линейного программирования.

21. Дайте определение понятию «устойчивость оптимального плана экономико-математической задачи».

22. Приведите допустимый интервал устойчивости оценок, нижний и верхний пределы уменьшения или увеличения ресурса.

23. Дайте определение понятию «иерархическая система».

24. Перечислите подходы к декомпозиции системы.

25. Охарактеризуйте алгоритм прямой и двойственной декомпозиции.

26. Перечислите особенности задач дискретного программирования.

27. Дайте классификацию целочисленных линейных моделей.

28. Перечислите методы решения задач дискретного программирования.

29. Охарактеризуйте алгоритм решения целочисленных линейных моделей методом отсечения.

30. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом ветвей и границ.

4. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

4.1. Экстремальные задачи на графах

На практике существует ряд проектов, выполнение работ которых характеризуется не упорядоченными между ними связями. На микроэкономическом уровне можно выделить такие проекты, как:

– внедрение нового вида товара на рынок сбыта,

– организация пробных продаж,

– подготовка и проведение сбытовых мероприятий и рекламных компаний,

– реализация инвестиционных проектов,

– реализация мероприятий по реконструкции и модернизации производства,

– посевная кампания,

– уход за сельскохозяйственными посевами,

– заготовка кормов,

– комплекс строительных работ и т. д.

Для схематического представления зависимостей между различными работами проекта используется теория графов.

Основы теории графов были заложены Леонардом Эйлером в 1736 г. (прил. О). Теория графов как математическая дисциплина сформировалась к середине 30-х гг. прошлого века благодаря работам венгерского математика Денеша Кёнига (см. прил. А).

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества соединенных пар вершин, которые называются ребрами.

Вершины обозначаются буквами русского или латинского алфавита (A, B…) или (a, $в$…), нумеруются арабскими числами (1, 2…) или буквами E с индексами (E_1, E_2, …, E_m).

Пары точек, для которых установлено соответствие, соединяются непрерывной линией, называемой *ребром*, если направление линии не указано, или *дугой* – если ее направление указано стрелкой:

Оба конца ребра или дуги принадлежат множеству вершин графа.

Ребра или дуги обозначаются парами вершин (A, B); (1, 3); (a, $в$);

$(E_i, E_j) = \vec{e}$. Если множество вершин обозначить через X или E, множество дуг (ребер) графа через U или $\vec{e}$, то граф обозначается символом $G = (X, U)$ или $G = (E, \vec{e})$.

Если пары вершин графа соединены направленными линиями (т. е. дугами), то такой граф называется *ориентированным*, или *орграфом*. Любые две вершины графа, соединенные ребром или дугой, называются *смежными*. В этом случае говорят, что вершины инцидентны ребру (дуге), а ребро (дуга) инцидентно вершинам. Если начало и конец ребра совпадают, то получается *петля* (рис. 4.1).

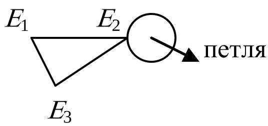


Рис. 4.1. Граф с петлей

Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины его соединены только одним ребром (рис. 4.2).

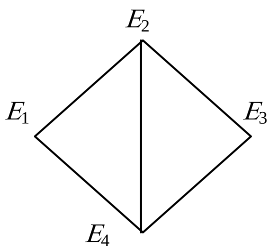


Рис. 4.2. Полный граф

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется *нуль-графом*. Граф, у которого любые две вершины соединены в одном направлении, называется *полным ориентированным графом*.

Число ребер графа, которым принадлежит (инцидентна) вершина, называется *степенью вершины*. Обычно степень вершины обозначают функцией $d(v)$. Степень вершины X_i (или E_i) может быть четной или нечетной, она обозначается $d(X_i)$ (или $d(E_i)$) или $deg(X_i)$ (или $deg(E_i)$). В орграфе *степень вершины* X_i (или E_i) определяется количеством дуг, выходящих из вершины X_i (или E_i), и количеством дуг, входящих в X_i (или в E_i).

Пут ем в орграфе называется последовательность сцепленных дуг, позволяющих переместиться из одной вершины в другую. Путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной вершиной, называется *конт уром,* или *циклом* в неориентированном графе (рис. 4.3).

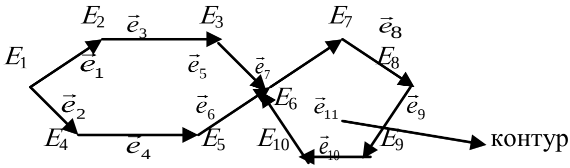


Рис. 4.3. Граф с контуром

Аналогом пути в неориентированном графе служит *цепь*. *Граф* называется *связным*, если для каждой пары вершин существует соединяющая их цепь или путь.

Длина пут и определяется числом его ребер или дуг. *Пет ля* – это путь имеющий длину, равную единице.

Если граф не имеет циклов, то он называется *деревом* (рис. 4.4).

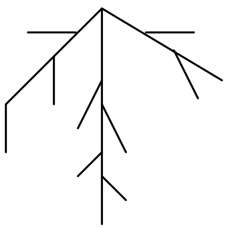


Рис. 4.4. Дерево

Для каждой пары вершин дерева существует только один соединяющий их путь. *Вершина* дерева, степень которой равна единице, называется *висячей*, а *вет вями дерева* называются ребра графа, входящие в дерево.

Изображают графы на плоскости произвольно и один и тот же граф может выглядеть на плоскости по-разному (рис. 4.5).

Эти графы изоморфны, так как между множествами их вершин наблюдается взаимно однозначное соответствие, т. е. вершины одного графа соединены ребрами так же, как и соответствующие им вершины другого графа.

Аналитически граф можно задать двумя способами:

– списковым,

– матричным.

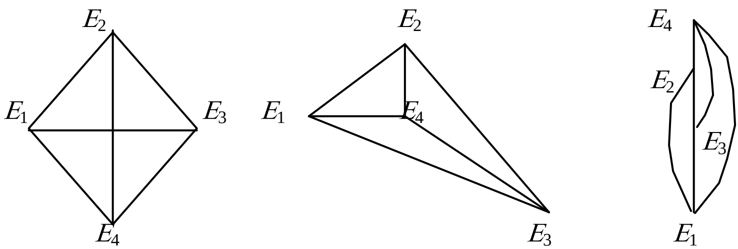


Рис. 4.5. Изоморфные графы

Списковый способ используют в виде:

1) перечня списка вершин и множества ребер или дуг (например, табл. 4.1);

2) перечня списка ребер или дуг и информации об их следовании (табл. 4.2; 4.3).

Т а б л и ц а 4.1. **Перечень дуг**

Дуга (работа (i, j))	Продолжительность, дн.
1, 2	3
1, 3	5
2, 3	4
2, 4	2
2, 5	6
3, 4	3
4, 5	2
4, 6	1
5, 6	7

Т а б л и ц а 4.2. **Перечень дуг и информация о их следовании**

Дуга орграфа	Опирается на дуги
1	2
$\vec{e}_1$	–
$\vec{e}_2$	–
$\vec{e}_3$	–
$\vec{e}_4$	$\vec{e}_1$

Окончание табл. 4.2

1	2
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_6$	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$
$\vec{e}_7$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_8$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$
$\vec{e}_9$	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_8$
$\vec{e}_{10}$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$

Т а б л и ц а 4.3. **Список работ проекта**

Дуга	(i, j)	Наименование работ	Опирается на дуги	Продолжительность, ч
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Отбор образцов товара для выставки	–	2
$\vec{e}_2$	(2, 6)	Изготовление буклетов и других рекламных материалов	$\vec{e}_1$	28
$\vec{e}_3$	(2, 5)	Изготовление стендов для установки образцов товаров в демонстрационном зале	$\vec{e}_1$	34
$\vec{e}_4$	(2, 3)	Доставка в зал выставки образцов товаров	$\vec{e}_1$	4
$\vec{e}_5$	(3, 4)	Доставка в зал выставки стендов	$\vec{e}_4$	6
$\vec{e}_6$	(4, 5)	Монтаж стендов	$\vec{e}_5$	5
$\vec{e}_7$	(5, 6)	Установка образцов товаров на стендах	$\vec{e}_3$, $\vec{e}_6$	3
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Оформление зала и стендов рекламными материалами	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Репетиция открытия выставки	$\vec{e}_8$	1

Граф можно задать в виде:

1) матрицы смежности вершин;

2) матрицы смежности дуг (ребер) (прил. P);

3) матрицы инциденций (прил. Q).

Для практического использования теории графов важную роль играет задача – разбить множество всех вершин связного графа без контуров на слои (ранги) так, что:

1) элементы первого слоя не должны иметь предшествующих вершин, а элементы последнего слоя не должны иметь последующих вершин;

2) все вершины рассматриваемого слоя не должны иметь предыдущих вершин в последующем слое;

3) порядок вершин внутри одного и того же слоя безразличен, т.е. вершины не соединяются между собой дугами.

Существует несколько способов упорядочения вершин (и дуг) графа.

Суть графического способа упорядочения вершин графа состоит в последовательном нахождении вершин, степень входящих дуг которых равна нулю: $d^{+}(E) = 0$. Вершины, для которых $d^{+}(E) = 0$, отбрасываются и вычеркивают выходящие из них дуги. Находят вершины, в которые входят вычеркнутые дуги, они составляют второй ранг. Вычеркивают выходящие из них дуги и т. д. Процесс продолжают до тех пор, пока не доберутся до конечной вершины. Таким образом, мы двигаемся слева направо. Можно двигаться и справа налево. Тогда находят вершины, для которых степень выходящих дуг равна нулю: $d^{-}(E) = 0$, с последующим вычеркиванием входящих в них дуг и т. д. Результат будет тот же. Например, для графа, изображенного на рис. 4.6, проведем упорядочение его по слоям (рангам).

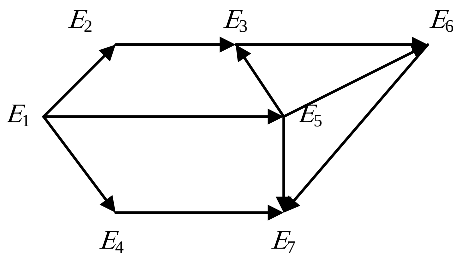


Рис. 4.6. Связанный граф

Найдем вершины, степень входящих дуг которых равна нулю, т.е. $d^{+}(E) = 0$. Это вершина E_1. Отбросим ее и вычеркнем выходящие из нее дуги, а вершину E_1 отнесем к первому рангу. Без входящих дуг остались вершины E_2, E_5, E_4. Отнесем их ко второму рангу и вычеркнем выходящие из них дуги. Без входящих дуг остались вершины E_3, E_6, E_7, которые отнесем к третьему рангу. Изобразим упорядоченный по рангам граф (рис. 4.7).

Более достоверно можно упорядочить вершины графа с помощью матрицы смежности (вершин). Данный прием получил название метода Демукрона (прил. R).

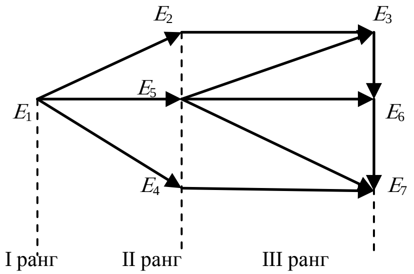


Рис. 4.7. Упорядоченный по рангам граф

Для упорядочения дуг графика можно воспользоваться матрицей смежности дуг.

4.2. Задача о минимальных покрывающих деревьях

Покрывающее дерево – это дерево, содержащее все вершины (узлы) сети (рис. 4.8).

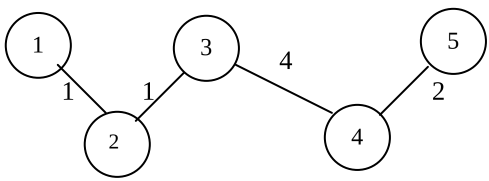


Рис. 4.8. Покрывающее дерево для сети, изображенной на рис. 4.9

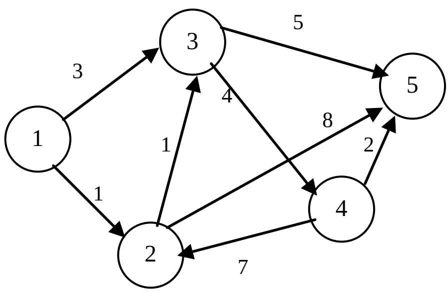


Рис. 4.9. Пример сети

Алгоритм построения минимального покрывающего дерева предполагает соединение всех вершин сети с помощью путей наименьшей длины. На практике данный алгоритм наиболее часто применяется для проектирования сети дорог с твердым покрытием, соединяющих населенные пункты в сельской местности с целью минимизации общей длины дорог с твердым покрытием.

Пусть сеть имеет множество вершин, равное N. Через E_k обозначим множество вершин сети, соединенных алгоритмом после выполнения k-й итерации алгоритма, а через $\overline{E}_k$ – множество вершин сети, не соединенных с узлами множества E_k после выполнения k-й итерации алгоритма.

Алгоритм построения покрывающего дерева:

1. Из множества всех вершин сети выбираем любую вершину i и считаем:

$$E_1 = \{i\}, \text{ тогда } \overline{E}_1 = N - \{i\}.$$

2. В множестве вершин E_1 выбираем вершину j, которая соединена самой короткой дугой (ребром) с какой-либо вершиной из множества $\overline{E}_1$. Вершину j присоединяем к множеству E_1 и удаляем из множества $\overline{E}_1$, получаем новые множества вершин:

$$E_2 = E_1 + \{j\}; \ \overline{E}_2 = \overline{E}_1 - \{j\}.$$

3. Алгоритм продолжаем выполнять с пункта 2 до тех пор, пока множество $\overline{E}_k$ не станет пустым.

Пример. Сельскохозяйственное предприятие планирует газифицировать шесть своих населенных пунктов. Структура планируемой газовой сети и расстояние между центральной усадьбой сельскохозяйственного предприятия и населенными пунктами приведены на рис. 4.10.

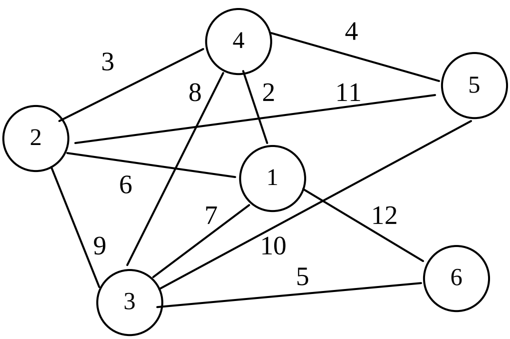


Рис. 4.10. Газовая сеть сельскохозяйственного предприятия

Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть.

Выбираем любую вершину. Допустим, выбрали вершину 1 (центральную усадьбу сельскохозяйственного предприятия). Тогда

$$E_1 = \{1\}, \text{ а } \overline{E_1} = \{2,3,4,5,6\}.$$

Вершина 1 соединена ребрами с вершинами 2, 3, 4 и 6, принадлежащими множеству $\overline{E_1}$, среди которых ищем ребро с минимальной длиной. На первой итерации ребро (1,4) имеет наименьшую длину (т. е. наименьшее расстояние между центром предприятия и населенным пунктом). Данное ребро выделяем жирной сплошной линией (рис. 4.11). Вершину 4 добавляем к множеству E_1 и отнимаем из множества $\overline{E_1}$, получаем новые множества вершин:

$$E_2 = \{1,4\} \text{ и } \overline{E_2} = \{2,3,5,6\}.$$

На второй итерации ищем наименьшее расстояние между вершинами множеств E_2 и $\overline{E_2}$. Ребро (4,2) имеет минимальную длину, равную 3. Вершину 2 добавляем к множеству E_2 и отнимаем из множества вершин $\overline{E_2}$, получаем:

$$E_3 = \{1,4,2\} \text{ и } \overline{E_3} = \{3,5,6\}.$$

На третьей итерации ищем наименьшее расстояние между вершинами $\{1,4,2\}$ и $\{3,5,6\}$. Это ребро (4,5), оно имеет наименьшую длину, равную 4. Получаем новые множества вершин:

$$E_4 = \{1,4,2,5\} \text{ и } \overline{E_4} = \{3,6\}.$$

На четвертой итерации ищем наименьшую длину ребра между множеством вершин E_4 и $\overline{E_4}$. Данному требованию отвечает ребро (1,3) с длиной, равной 7. Вершину 3 прибавляем к множеству вершин E_4 и отнимаем из множества $\overline{E_4}$. Получаем:

$$E_5 = \{1,4,2,5,3\} \text{ и } \overline{E_5} = \{6\}.$$

На пятой итерации находим ребро (3,6) с длиной, равной 5 (рис. 4.11).

Решение в виде минимального покрывающего дерева получено на пятой итерации (рис. 4.12). Минимальная длина газовой сети предприятия равна 2 + 3 + 4 + 7 + 5 = 21 км.

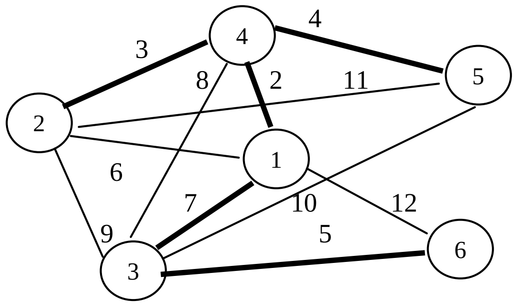


Рис. 4.11. Построение минимального покрывающего дерева

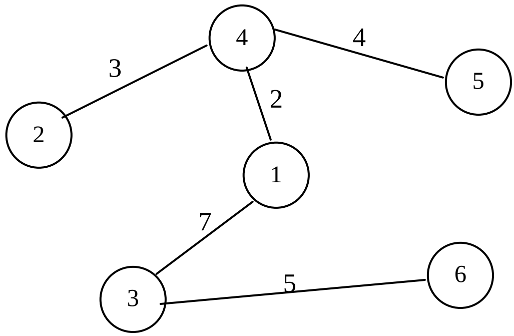


Рис. 4.12. Минимальное покрывающее дерево для сети (рис. 4.11)

4.3. Задача о кратчайших цепях

Задача состоит в определении кратчайшего маршрута, который необходимо проложить от исходного пункта до пункта назначения, используя существующую сеть дорог. Допустим, что движение из исходного пункта к пункту назначения возможно по различным маршрутам. Совокупность всех допустимых маршрутов представим в виде графа (рис. 4.13).

Над дугами приведены расстояния между населенными пунктами.

Кратчайший путь можно найти, используя:

1) алгоритм Дейкстры;

2) алгоритм Флойда.

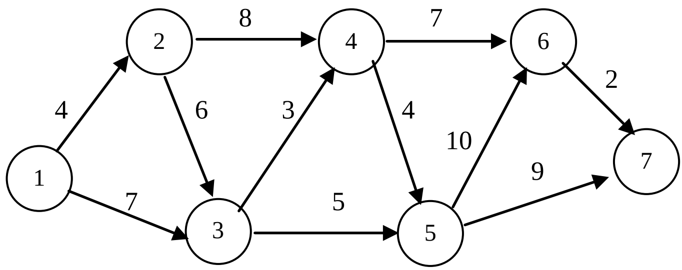


Рис. 4.13. Сеть дорог

Алгоритм Дейкстры применим для поиска кратчайшего пути между заданной исходной вершиной и любой другой вершиной сети. В процессе определения кратчайшего пути по алгоритму Дейкстры помечают вершины сети. Метка для вершины j определяется следующим образом:

$$\lfloor u_j, i \rfloor = \lfloor u_i + t_{ij}, i \rfloor \text{ при } t_{ij} \geq 0,$$

где i – номер начальной вершины дуги (ребра) (i, j);

j – номер конечной вершины дуги (ребра) (i, j);

u_j – расстояние к вершине j;

u_i – кратчайшее расстояние к вершине i;

t_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j).

Метки вершин подразделяются на временные и постоянные. Временную метку можно заменить на другую временную метку, если к данной вершине найден более короткий путь. Если такого пути не найдено, то временная метка заменяется на постоянную.

Алгоритм Дейкстры состоит из следующих этапов:

1. Исходной вершине присваиваем постоянную метку [0, –].

2. Считаем, что $i = 1$. Определяем временные метки для всех вершин j, которых можно достичь непосредственно из вершины i и которые не имеют постоянных меток:

$$\lfloor u_i + t_{ij}; i \rfloor.$$

3. Если вершина j имеет метку $\lfloor u_j, r \rfloor$, полученную из вершины r, то эту метку заменяют на метку:

$$\lfloor u_i + t_{ij}; i \rfloor,$$

если

$$u_i + t_{ij} < u_j \ .$$

4. Процесс пометок вершин продолжают до тех пор, пока все вершины не будут иметь постоянных меток.

5. Если какая-то вершина s имеет временные метки $[u_r, s]$, то среди них выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния u_r, и процедуру повторяем с пункта 1.

6. Определяем кратчайшую цепь, проходя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки.

Пример. Допустим, вершине 1 присвоим постоянную метку [0, –] (1), пометив в круглых скобках номер шага (рис. 4.14).

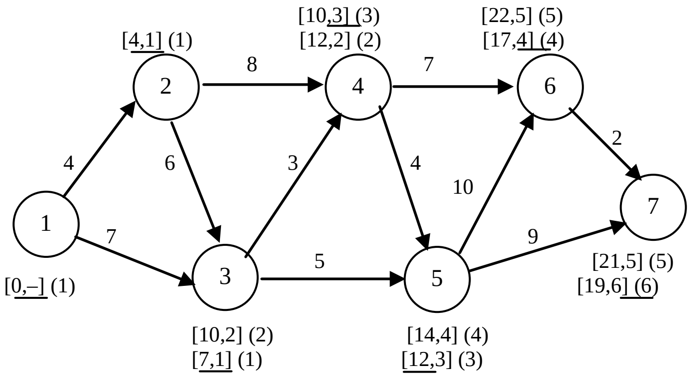


Рис. 4.14. Применение алгоритма Дейкстры

Из вершины 1 можно попасть в вершины 2 и 3. Этим вершинам присвоим временные метки. Сравниваем расстояние между вершинами 1 и 2 и вершинами 1 и 3. Видим, что 4 < 7, следовательно, временную метку вершины 2 меняем на постоянную метку [4,1](1). Из последней вершины с постоянной меткой (вершины 2) можно попасть в вершины 3 и 4.

Определим метки этих вершин. Они соответственно равны: [10,2](2) и [12,2](2). Так как вершина 3 уже имеет временную метку [7,1](1) и эта вершина получает еще одну временную метку [10,2](2), то из этих меток выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния, так как $7 < 10$, то вершина 3 получает постоянную метку [7,1](1).

Из вершины 3 можно попасть в вершины 4 и 5. Их метки равны [10,3](3) и [12,3](3) соответственно. Так как вершина 4 уже имеет временную метку [12,2](2) и эта вершина получает еще одну временную метку [10,3](3), то из этих меток выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния, так как $10 < 12$, то вершина 4 получает постоянную метку [10,3](3).

Из вершины 4 можно передвинуться в вершины 5 и 6. Их временные метки соответственно равны [14,4](4) и [17,4](4). Так как вершина 5 уже имеет временную метку [12,3](3) и эта вершина получает еще одну временную метку [14,4](4), то из этих меток выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния, так как $12 < 14$, то временную метку вершины 5 меняем на постоянную метку [12,3](3).

Из вершины 5 передвигаемся в вершины 6 и 7, которые получают метки [22,5](5) и [21,5](5) соответственно. Так как вершина 6 уже имеет временную метку [17,4](4) и эта вершина получает еще одну временную метку [22,5](5), то из этих меток выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния, так как $17 < 22$, то временную метку вершины 6 меняем на постоянную метку [17,4](4).

Из вершины 6 передвигаемся в вершину 7, которая получает временную метку [19,6](6). Так как вершина 7 уже имеет временную метку [21,5](5) и эта вершина получает еще одну временную метку [19,6](6), то из этих меток выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния, так как $19 < 21$, то временную метку вершины 7 меняем на постоянную метку [19,6](6).

Из вершины 7 нельзя передвинуться в другую вершину, поэтому процесс вычислений заканчиваем.

Определим кратчайший маршрут между вершинами 1 и 7, пройдя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки.

$$(7) \to [19,6](6) \to (6) \to [17,4](4) \to (4) \to [10,3](3) \to$$
$$\to (3) \to [7,1](1) \to (1).$$

Таким образом, получили наикратчайший маршрут:

$$1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 7,$$

равный 19 км.

Алгоритм Флойда более общий, так как он позволяет одновременно найти минимальные пути между любыми двумя вершинами сети.

Пример. Необходимо найти кратчайшие пути между любыми двумя вершинами сети, заданной следующим сетевым графиком (рис. 4.15).

На сетевом графике под дугами или ребрами представлены расстояния между вершинами i и j (u_{ij}). Следует отметить, что дуга (3,5) предполагает движение только от вершины 3 к вершине 5, остальные ребра допускают движение в обе стороны.

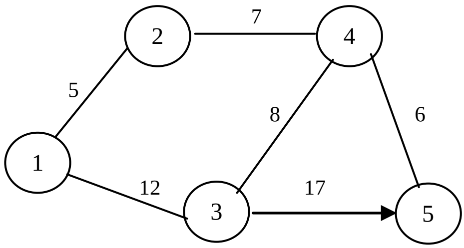


Рис. 4.15. Сетевой график

Алгоритм Флойда представляет сетевой график в виде двух матриц: матрицы расстояний U_0 и матрицы последовательности вершин E_0, диагональные элементы в вычислениях не участвуют и отсутствуют. Над элементами матрицы расстояний выполняется процедура замены (рис. 4.16):

$$U_{ik} + U_{kj} \text{ на } U_{ij}, \text{ если } U_{ij} > U_{ik} + U_{kj}.$$

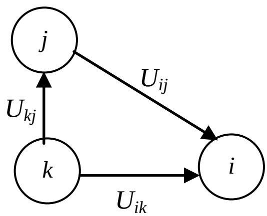


Рис. 4.16. Треугольный оператор Флойда

Такая замена получила название *треугольного оператора*.

Для нашего примера построим матрицу расстояний U_0 и матрицу последовательности вершин E_0 (табл. 4.4, 4.5).

При определении элементов матрицы расстояний U_0 учитываем следующее: если вершина i связана с вершиной j путем $i \to j$, то это расстояние U_{ij} заносим в таблицу, в противном случае такое расстояние принимаем равным бесконечности. Элементы матрицы U_0 симметричны относительно главной диагонали, за исключением пары элементов $U_{35} = 17$ и $U_{53} = \infty$, так как события 3 и 5 соединены дугой, а не ребром.

Т а б л и ц а 4.4. **Матрица расстояний U_0**

U_0

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	5	12	∞	∞
2	5	–	$\boxed{\infty}$	7	∞
3	12	$\boxed{\infty}$	–	8	17
4	∞	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

Матрица последовательности вершин E_0 так же, как и матрица расстояний не имеет элементов на главной диагонали.

Т а б л и ц а 4.5. **Матрица последовательности вершин E_0**

E_0

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	2	3	4	5
2	1	–	$\boxed{3}$	4	5
3	1	$\boxed{2}$	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Алгоритм Флойда:

1. Принимаем $k = 1$. В матрице расстояний U_0 задаем ведущую строку R и ведущий столбец k. При этом рассматриваем возможность применения треугольного оператора ко всем элементам U_{ij} матрицы расстояний U_0.

Принимаем за ведущие первую строку и первый столбец, рассчитываем, какие элементы матрицы U_0 можно улучшить, применив треугольный оператор. Видим, что $U_{12} + U_{31} < U_{32}$, следовательно, улучшить можно элемент U_{32}. Также $U_{13} + U_{23} < U_{23}$, т. е. улучшить можно элемент U_{23}. Перебрав все другие варианты, видим, что при $k = 1$ можно улучшить только элементы U_{32} и U_{23} матрицы расстояний U_0.

2. Рассчитываем новые элементы U_{32} и U_{23} матрицы расстояний U_1. Выбранные элементы и соответствующие им элементы матрицы последовательности вершин E_0 заменим в матрице расстояний элемент U_{ij} на сумму элементов $U_{ik} + U_{kj}$.

В нашем случае элемент матрицы $U_{23} = \infty$ заменяется на $U_{21} + U_{13} = 5 + 12$, а элемент матрицы $U_{32} = \infty$ заменяется на $U_{31} + U_{12} = 12 + 5$. Получаем матрицу расстояний U_1 (табл. 4.6).

Т а б л и ц а 4.6. **Матрица расстояний U_1**

U_1

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	5	12	$\boxed{\infty}$	∞
2	5	–	17	7	∞
3	12	17	–	8	17
4	$\boxed{\infty}$	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

3. Определяем новые элементы матрицы последовательности вершин E_1, меняя в матрице последовательности вершин E_0 элемент e_{ij} на k. В нашем случае $k = 1$ и элементы $e_{32} = 2$ и $e_{23} = 3$ меняем в матрице E_1 на единицы (табл. 4.7).

Т а б л и ц а 4.7. **Матрица последовательности вершин E_1**

E_1

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	2	3	$\boxed{4}$	5
2	1	–	1	4	5
3	1	1	–	4	5
4	$\boxed{1}$	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

4. Принимаем $k = k + 1$ и повторяем расчеты с пункта 1 до тех пор, пока ни один элемент матрицы расстояний нельзя будет улучшить.

В нашем примере рассматриваем матрицу расстояний U_1. В качестве ведущих возьмем вторую строку и второй столбец. Получаем $u_{31}+u_{42}<u_{41}$ и $u_{13}+u_{24}<u_{14}$. Выделим элементы соответствующих матриц.

Полагая, что k = 2, производим замену элементов матрицы расстояний U_1 и матрицы последовательности вершин E_1, получаем матрицы U_2 и E_2 (табл. 4.8, 4.9).

Т а б л и ц а 4.8. **Матрица расстояний U_2**

U_2

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	5	12	12	$\boxed{\infty}$
2	5	–	17	7	$\boxed{\infty}$
3	12	17	–	8	17
4	12	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

Т а б л и ц а 4.9. **Матрица последовательности вершин E_2**

E_2

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	2	3	2	$\boxed{5}$
2	1	–	1	4	$\boxed{5}$
3	1	1	–	4	5
4	2	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Полагая, что k = 3, выбираем третью ведущую строку и третий ведущий столбец. Улучшаем элементы U_{15} и U_{25} матрицы расстояний U_2, получаем матрицы U_3 и E_3 (табл. 4.10, 4.11).

При k = 4 ведущими принимаем четвертую строку и четвертый столбец. Делаем расчеты и получаем матрицы U_4 и E_4 (табл. 4.12, 4.13).

Принимаем k = 5, но в матрице нет элементов, которые можно улучшить, вычисления закончены. Матрицы U_4 и E_4 содержат информацию для определения кратчайших путей между любыми двумя вершинами сетевого графика.

5. Используя конечные матрицы расстояний и последовательности вершин, можно найти кратчайшее расстояние как между двумя сосед-

ними вершинами, так и между исходной и завершающей вершинами сети. При этом сегмент маршрута (i, j) матрицы последовательности вершин состоит из ребра (i, j) только тогда, когда элемент матрицы e_{ij} равен j. В противном случае вершины i и j связаны между собой через одну или более промежуточные вершины.

Т а б л и ц а 4.10. **Матрица расстояний U_3**

U_3

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	5	12	12	$\boxed{29}$
2	5	–	$\boxed{17}$	7	$\boxed{34}$
3	12	$\boxed{17}$	–	8	$\boxed{17}$
4	12	7	8	–	6
5	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	6	–

Т а б л и ц а 4.11. **Матрица последовательности вершин E_3**

E_2

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	2	3	2	$\boxed{3}$
2	1	–	$\boxed{1}$	4	$\boxed{3}$
3	1	$\boxed{1}$	–	4	$\boxed{5}$
4	2	2	3	–	5
5	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	–

Т а б л и ц а 4.12. **Матрица расстояний U_4**

U_4

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	5	12	12	18
2	5	–	15	7	13
3	12	15	–	8	14
4	12	7	8	–	6
5	18	13	14	6	–

В нашем случае найдем кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5. Так как элемент e_{15} матрицы E_4 равен 4, то вершины 1 и 5 связаны между собой через вершину 4.

Т а б л и ц а 4.13. **Матрица последовательности вершин E_4**

E_4

E_i	E_j				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	–	2	3	2	4
2	1	–	4	4	4
3	1	4	–	4	4
4	2	2	3	–	5
5	4	4	4	4	–

Определим промежуточную вершину между вершинами 1 и 4. Элемент e_{14} матрицы E_4 равен 2. Определим промежуточную вершину между вершинами 1 и 2. Элемент e_{12} равен 2, следовательно, вершина 1 связана непосредственно с вершиной 2 без промежуточных вершин. Определяем кратчайший путь:

$$1 \to 2 \to 4 \to 5.$$

Длина этого пути равна 18 км (элемент U_{15} = 18 матрицы расстояний U_4).

Найти кратчайший путь между исходной и завершающей вершинами сети можно, используя задачи линейного программирования.

При составлении прямой задачи предполагают, что в исходную вершину сети входит одна единица внешнего потока, которая выходит из завершающей вершины сети. В качестве неизвестных величин выступает x_{ij} – величина потока, проходящего по дуге (i, j), длина которой равна c_{ij}.

Переменные x_{ij} – двоичные, они могут принимать значения 0 или 1: $x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1, n})$. Прямая задача линейного программирования состоит в том, чтобы минимизировать длину сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} c_{ij} x_{ij} .$$

В качестве ограничений задачи записывают баланс потока, проходящего через каждую вершину сети, т. е. общий входной поток минус общий выходной поток, равный нулю:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Например, составим прямую задачу определения кратчайшего пути сети. Требуется определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7. Единица потока входит в вершину 1 и выходит из вершины 7 (рис. 4.17).

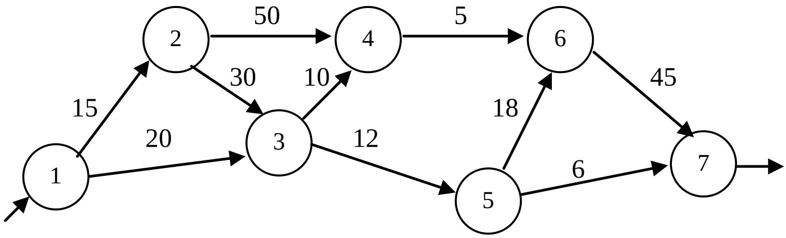


Рис. 4.17. Входные и выходные потоки сети

Составим балансы потоков, проходящих через каждую вершину сети:

1) для вершины 1: $1 - x_{12} - x_{13} = 0$;
2) для вершины 2: $x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$;
3) для вершины 3: $x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$;
4) для вершины 4: $x_{24} + x_{34} - x_{46} = 0$;
5) для вершины 5: $x_{35} - x_{56} - x_{57} = 0$;
6) для вершины 6: $x_{46} + x_{56} - x_{67} = 0$;
7) для вершины 7: $x_{67} + x_{57} - 1 = 0$;
8) ограничения на переменные: $x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1,7})$.

$$F_{\min} = 15x_{12} + 20x_{13} + 30x_{23} + 50x_{24} + 10x_{34} + 12x_{35} + 5x_{46} +$$
$$+ 18x_{56} + 6x_{57} + 45x_{67}.$$

Оптимальное решение, полученное с помощью программы Excel, является следующим:

$x_{12} = 0$ $\qquad$ $x_{24} = 0$

$x_{13} = 1$ $\qquad$ $x_{35} = 1$

$x_{23} = 0$ $\qquad$ $x_{34} = 0$

$x_{56} = 0$ $\qquad$ $x_{57} = 1$

$x_{67} = 0$ $\qquad$ $x_{46} = 0$

$$F_{\min} = 38.$$

Кратчайший путь:

$$1 \to 3 \to 5 \to 7$$

из вершины 1 в вершину 7 имеет длину 38 км.

Кратчайший путь между исходной и завершающей вершинами сети можно найти, используя двойственную задачу. В качестве неизвестных величин двойственной задачи выступают u_i – расстояние от исходной вершины до вершины i. Требуется максимизировать величину:

$$F_{\max} = u_n - u_1,$$

при условии –

$$u_j - u_i \le c_{ij}.$$

Таким образом, ограничение показывает, что расстояние от вершины i до вершины j не может превышать длину дуги (i, j). Оно может быть меньше длины этого маршрута, если вершину j можно достичь из вершины i через другие промежуточные вершины.

Составим двойственную задачу для определения кратчайшего пути сети (рис. 4.18).

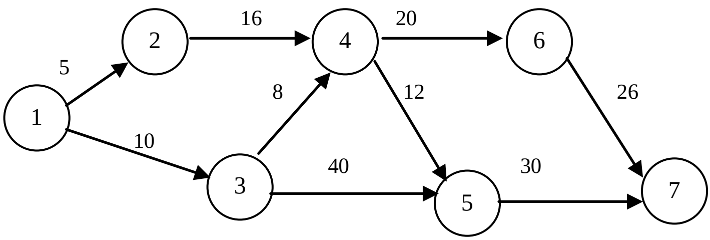


Рис. 4.18. Сетевой график для выбора кратчайшей цепи

Составим ограничения двойственной задачи:

1) для дуги (1,2): $u_2 - u_1 \le 5$;

2) для дуги (1,3): $u_3 - u_1 \le 10$;

3) для дуги (2,4): $u_4 - u_2 \le 16$;

4) для дуги (3,4): $u_4 - u_3 \le 8$;

5) для дуги (3,5): $u_5 - u_3 \le 40$;

6) для дуги (4,5): $u_5 - u_4 \le 12$;

7) для дуги (4,6): $u_6 - u_4 \le 20$;

8) для дуги (5,7): $u_7 - u_5 \le 30$;

9) для дуги (6,7): $u_7 - u_6 \le 26$;

10) расстояние до вершины 1 равно нулю: $u_1 = 0$.

Целевая функция экономико-математической задачи:

$$F_{\max} = u_7 - u_1.$$

Используя Excel, получено следующее оптимальное решение:

$$u_1 = 0 \qquad u_4 = 18$$

$$u_2 = 3 \qquad u_5 = 30$$

$$u_3 = 10 \qquad u_6 = 35$$

$$u_7 = 60$$

$$F_{\max} = 60.$$

Подставляя значения u_i в ограничения задачи, получим:

1) для дуги (1,2): $3 - 0 \le 5$;

2) для дуги (1,3): $10 - 0 = 10$;

3) для дуги (2,4): $18 - 3 \le 16$;

4) для дуги (3,4): $18 - 10 = 8$;

5) для дуги (3,5): $30 - 10 \le 40$;

6) для дуги (4,5): $30 - 18 = 12$;

7) для дуги (4,6): $35 - 18 \le 20$;

8) для дуги (5,7): $60 - 30 = 30$;

9) для дуги (6,7): $60 - 35 \le 26$.

Ограничения двойственной задачи, выполненные в виде равенства, определяют кратчайший путь:

$$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7.$$

Кратчайший путь можно определить по значениям соответствующих двойственных переменных данной задачи, значения которых равны 1, так как ресурсы, согласно второй теореме двойственности, использованы полностью. Обозначим двойственную оценку данной задачи через y_i, тогда:

$$y_1 = 0 \qquad y_4 = 1 \qquad y_7 = 0$$

$$y_2 = 1 \qquad y_5 = 0 \qquad y_8 = 1$$

$$y_3 = 0 \qquad y_6 = 1 \qquad y_9 = 0.$$

Кратчайший путь:

$$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7$$

имеет расстояние 60 км.

4.4. Задача о максимальном потоке в сетях и ее обобщения

Задача состоит в обосновании максимального потока (например, комбикормов, т) из источника или источников (комбикормовых заводов) до стока или стоков (пунктов назначения – птицефабрик, комплексов по откорму свиней и т. д.). При этом под источником понимают исходную вершину сети, под стоком – завершающую вершину сети. По путям сети направляется однородное вещество (комбикорм, природный газ, нефть, транспорт и т. д.) из источников в стоки. Каждая дуга сети характеризуется числом b_{ij}, называемым *пропускной способностью дуги*, под которой понимают максимальное количество вещества, пропускаемого за единицу времени. Ставится задача определить для данной сети максимальную величину потока из источника в сток, под которым понимают совокупность потоков x_{ij} по всем дугам сети, равных количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени.

Важную роль в решении этой задачи играет понятие разреза. Разрез определяет множество дуг (ребер), при удалении которых из сети полностью прекращается поток от источника к стоку. При этом пропускная способность разреза равна сумме пропускных способностей дуг (ребер) разреза. Среди всех разрезов сети разрез с минимальной пропускной способностью определяет максимальный поток в сети.

Но перебор всех разрезов сети – непростая задача, поэтому для поиска максимального потока целесообразно использовать алгоритм Форда. Форд фактически изобрёл этот алгоритм в 1956 г. при изучении другой математической задачи, подзадача которой свелась к поиску кратчайшего пути в графе, и Форд дал набросок алгоритма, решающего эту задачу Беллману. Беллман в 1958 г. опубликовал статью, посвящённую конкретно задаче нахождения кратчайшего пути, и в этой статье он чётко сформулировал алгоритм в том виде, в котором он известен сейчас.

Для применения алгоритма Форда предварительно формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) сети. В таблицу в клетку (i, j) записывают пропускную способность дуги b_{ij}, если она больше нуля, а если пропускная способность симметричной ей дуги равна нулю, то в клетку (j, i) ставят нуль. Если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j, i) не заполняются.

Пример. Сформируем матрицу пропускных способностей дуг (ребер) сети, изображенной на рис. 4.19 (табл. 4.14).

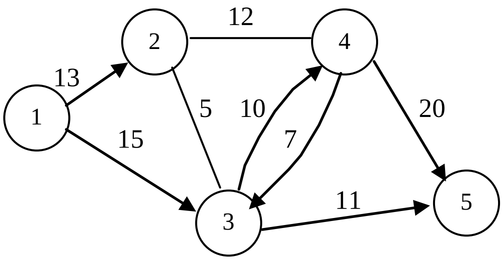


Рис. 4.19. Сеть для определения максимального потока

Т а б л и ц а 4.14. **Матрица пропускных способностей дуг V_0**

	(*)	(1)	(1)	(2)	(3)
E_i	E_j				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		13	15^-		
E_2	0		5	12	
E_3	0^+	5		10	11^-
E_4		12	7		20
E_5			0^+	0	

Алгоритм Форда:

1. Используя матрицу пропускных способностей дуг V_0, находим путь из исходной вершины E_1 в завершающую вершину E_n с пропускной способностью больше нуля. Для этого столбец E_1 помечаем значком «*». В строке E_1 ищем положительные элементы матрицы ($b_{ij} > 0$) и столбцы, в которых они находятся, помечаем номером просматриваемой строки.

В нашем случае, просмотрев строку E_1, столбцы E_2 и E_3 помечаем цифрой 1. Таким образом, выбрали дуги, которые являются первыми дугами пути из E_1 в E_n.

Процедуру пометок продолжаем до тех пор, пока:

а) не будет помечен столбец E_n, т. е. сток;

б) нельзя пометить новые столбцы, что означает отсутствие пути из E_1 в E_n, проходящего по дугам с положительной пропускной способностью.

В нашем случае просматриваем строку E_2, в которой можно пометить столбец E_4, просматривая строку E_3, помечаем столбец E_5, который является стоком.

2. Находим путь из E_1 в E_n, используя пометки столбцов. При этом соответствующий элемент b_{ij} искомой дуги помечаем знаком «–», а симметричный ему элемент b_{ji} – знаком «+». Данный процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к истоку (вершине E_1) и не отметим знаком «–» элемент этой строки и знаком «+» – симметричный ему элемент.

Пометив столбцы и расставив знаки, находим путь (E_1, E_3, E_5), при этом элементы b_{13}, b_{35} помечены знаком «–».

3. Определяем пропускную способность пути, она равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь:

$$Q_i = \min_{(i,j)} \left\{ b_{ij}^{-} \right\}.$$

В нашем примере:

$$Q_i = \min\{b_{13}; b_{35}\} = \min\{15; 11\} = 11.$$

4. Определяем остаточные пропускные способности дуг пути и симметричных к ним дуг. Для этого из элементов таблицы b_{ij}^{-}, получивших знак «–», вычитаем выбранный минимальный элемент Q_i, а к элементам b_{ij}^{+}, получивших знак «+», прибавляем элемент Q_i. Все изменения заносим в новую матрицу пропускных способностей дуг V_1 (табл. 4.15).

Т а б л и ц а 4.15. **Матрица пропускных способностей дуг V_1**

	(*)	(1)	(1)	(2)	(4)
E_i	E_j				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		13^-	4		
E_2	0^+		5	12^-	
E_3	11	5		10	0
E_4		12^+	7		20^-
E_5			11	0^+	

Вычисления повторяем до тех пор, пока не получим таблицу, в которой нет ни одного пути из E_1 в E_n с пропускной способностью больше нуля.

5. Пометив столбцы табл. 4.15 и расставив знаки, находим путь из E_1 в E_n:

$$(E_1, E_2, E_4, E_5).$$

Среди элементов матрицы, получивших знак «–», выбираем наименьший:

$$Q_1 = \min\{b_{12}; b_{24}; b_{45}\} = \min\{13,12,20\} = 12 .$$

Изменяем пропускную способность дуг на Q_1, получаем табл. 4.16.

6. Выполнив вышеизложенный алгоритм, находим путь:

$$(E_1, E_2, E_4, E_5).$$

Величина потока равна:

$$Q_2 = \min\{4,10,8\} = 4 .$$

Т а б л и ц а 4.16. **Матрица пропускных способностей дуг V_2**

	(*)	(1)	(1)	(3)	(4)
E_i	E_j				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		1	4^-		
E_2	12		5	0	
E_3	11^+	5		10^-	0
E_4		24	7^+		8^-
E_5			11	12^+	

Определяем новую пропускную способность дуг (табл. 4.17).

Т а б л и ц а 4.17. **Матрица пропускных способностей дуг V_3**

	(*)	(1)	(2)	(3)	(4)
E_i	E_j				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		1^-	0		
E_2	12^+		5^-	0	
E_3	15	5^+		6^-	0
E_4		24	11^+		4^-
E_5			11	16^+	

7. Находим путь:

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5).$$

Величина потока по этому пути равна:

$$Q_3 = \min\{1,5,6,4\} = 1 .$$

Определяем новые элементы матрицы V_4 (табл. 4.18).

8. Помечаем столбец E_1 знаком «*». Просматриваем строку E_1, убеждаемся, что никакие столбцы пометить нельзя, так как не существует ни одного пути с положительной пропускной способностью из вершины E_1 в вершину E_5.

Т а б л и ц а 4.18. **Матрица пропускных способностей дуг V_4**

E_i	E_j				
	E_1 (*)	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		0	0		
E_2	13		4	0	
E_3	15	6		5	0
E_4		24	12		3
E_5			11	17	

9. Из элементов первоначальной таблицы (см. табл. 4.14) вычитаем соответствующие элементы последней таблицы (см. табл. 4.18), получаем табл. 4.19.

Т а б л и ц а 4.19. **Матрица пропускных способностей дуг**

E_i	E_j				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		13	15		
E_2	–13		1	12	
E_3	–15	–1		5	11
E_4		–12	–5		17
E_5			–11	–17	

Положительные элементы табл. 4.19 характеризуют величины дуговых потоков, т. е.:

$$x_{12} = 13; \qquad x_{13} = 15;$$

$$x_{23} = 1; \qquad x_{24} = 12;$$

$$x_{34} = 5; \qquad x_{35} = 11;$$

$$x_{45} = 17,$$

по остальным дугам потоки равны нулю.

Для определения максимального потока сети необходимо просуммировать элементы строки E_1 (источника) или элементы столбца E_5 (стока):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = 13 + 15 = 28;$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{in} = 11 + 17 = 28.$$

Разрез с минимальной пропускной способностью образован дугами, начальные вершины которых характеризуют элементы строки E_1, а конечные вершины – элементы столбца E_5, т. е., разрез с минимальной пропускной способностью образован совокупностью дуг:

$$\{(E_2, E_4); (E_3, E_4); (E_3, E_5)\}.$$

Удалив дуги разреза, блокируем все пути из источника в сток. Пропускная способность разреза равна:

$$b_{24} + b_{34} + b_{35} = 12 + 5 + 11 = 28.$$

Дуги разреза насыщены потоком.

Если имеется сеть с несколькими источниками и стоками, то для ее решения с помощью алгоритма Форда необходимо свести данную задачу с одним источником и одним стоком путем введения фиктивного источника (вершины E_0) и фиктивного стока (вершины E_{n+1}), а также фиктивных дуг (E_0, E_j) и (E_i, E_{n+1}).

Задачу определения максимального потока в сети можно свести к задаче линейного программирования. Обозначим через x_{ij} поток по дуге (E_i, E_j), равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени.

Требуется найти значения x_{ij}, максимизирующие одну из целевых функций:

1) максимальный поток, равный количеству вещества, вытекающего из источника:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j},$$

2) или максимальный поток, равный количеству вещества, притекающего в сток:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{in} .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij} , \; i, \, j = \overline{0, n} , \; i \ne j .$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0 , \; k = \overline{1, n-1} .$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \ge 0 \cdot$$

Пример. Используя структурную экономико-математическую модель, составим развернутую модель определения максимального потока в сети, изображенной сетевым графиком (рис. 4.20).

Составим развернутую экономико-математическую модель.

Целевая функция:

$$F_{1\max} = x_{13} + x_{12} \text{ или } F_{2\max} = x_{89} + x_{79} .$$

При условиях:

I. По предельной пропускной способности дуг:

1) $x_{12} \le 6$
2) $x_{13} \le 8$
3) $x_{23} \le 11$
4) $x_{32} \le 11$
5) $x_{24} \le 7$
6) $x_{25} \le 16$
7) $x_{34} \le 6$
8) $x_{36} \le 14$
9) $x_{47} \le 12$
10) $x_{56} \le 10$
11) $x_{57} \le 8$
12) $x_{67} \le 13$
13) $x_{68} \le 5$
14) $x_{78} \le 15$
15) $x_{87} \le 15$
16) $x_{89} \le 14$
17) $x_{79} \le 13$.

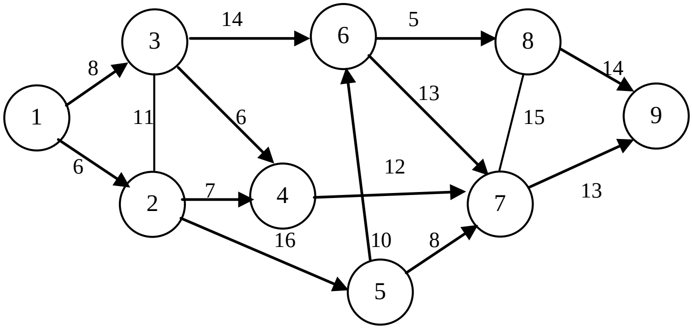


Рис. 4.20. Сетевой график

II. По балансу вещества:

18) для вершины 2: $x_{12} + x_{32} - x_{23} - x_{24} - x_{25} = 0$;

19) для вершины 3: $x_{13} + x_{23} - x_{32} - x_{34} - x_{36} = 0$;

20) для вершины 4: $x_{24} + x_{34} - x_{47} = 0$;

21) для вершины 5: $x_{25} - x_{56} - x_{57} = 0$;

22) для вершины 6: $x_{56} + x_{36} - x_{67} - x_{68} = 0$;

23) для вершины 7: $x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{87} - x_{78} - x_{79} = 0$;

24) для вершины 8: $x_{68} + x_{78} - x_{87} - x_{89} = 0$.

Решение задачи с разными целевыми функциями дает следующие результаты:

$F_{1\max} = 14$		$F_{2\max} = 14$	
$x_{12} = 6$	$x_{47} = 9$	$x_{12} = 6$	$x_{47} = 9$
$x_{13} = 8$	$x_{56} = 0$	$x_{13} = 8$	$x_{56} = 0$
$x_{23} = 0$	$x_{57} = 0$	$x_{23} = 0$	$x_{57} = 0$
$x_{32} = 1$	$x_{67} = 0$	$x_{32} = 1$	$x_{67} = 0$
$x_{24} = 7$	$x_{68} = 5$	$x_{24} = 7$	$x_{68} = 5$
$x_{25} = 0$	$x_{78} = 9$	$x_{25} = 0$	$x_{78} = 9$
$x_{34} = 2$	$x_{87} = 0$	$x_{34} = 2$	$x_{87} = 0$
$x_{36} = 5$	$x_{89} = 14$	$x_{36} = 5$	$x_{89} = 14$
$x_{79} = 0$.		$x_{79} = 0$.	

Положительные элементы характеризуют величины дуговых потоков. Максимальный поток сети равен 14. Имеется два разреза, состоящих из совокупности дуг:

$$\{(E_2, E_4);(E_3, E_4);(E_3, E_6)\},$$

$$\{(E_6, E_8);(E_7, E_8)\},$$

которые насыщены потоком.

Задача о потоке минимальной стоимости.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в сети с ограниченной пропускной способностью обобщает задачу определения максимального потока, так как каждой дуге соответствует определенная стоимость прохождения единицы потока по этой дуге (c_{ij}).

Требуется найти поток по дугам с заданной величиной B, минимизирующий общую стоимость прохождения потока по сети. При этом должны удовлетворяться ограничения на пропускные способности дуг и на баланс вещества, притекающего в промежуточную вершину и вытекающего из нее.

Используя условные обозначения предыдущей задачи, запишем структурную модель определения потока минимальной стоимости в сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij}, \; i, j = \overline{0, n}, \; i \ne j.$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, \; k = \overline{1, n-1}.$$

3. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток –

$$\text{а) } \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = B;$$

$$б)\ \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B\ .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \geq 0\ .$$

Пример. Требуется минимизировать стоимость в сети (см. рис. 4.20) с ограниченной пропускной способностью B = 12. Дополним сетевой график (см. рис. 4.20) стоимостью прохождения единицы потока по дугам этой сети, которую запишем над дугами графика в скобках (рис. 4.21).

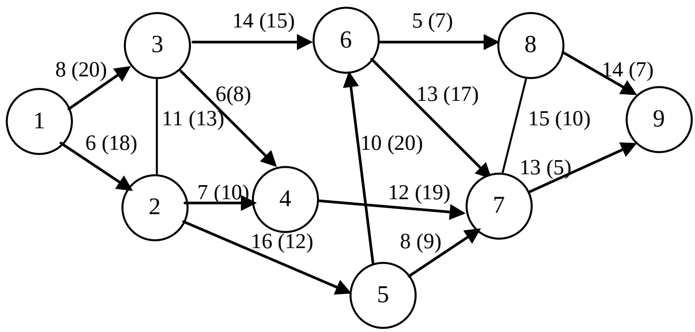


Рис. 4.21. Сетевой график

В развернутую экономико-математическую модель предыдущей задачи добавим следующие ограничения.

III. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток:

$$25)\ x_{12} + x_{13} = 12;$$

$$26)\ x_{79} + x_{89} = 12.$$

В качестве целевой функции возьмем:

$$F_{\min} = 20x_{13} + 18x_{12} + 13x_{23} + 13x_{32} + 10x_{24} + 8x_{34} + 12x_{25} + 15x_{36} + $$
$$+ 19x_{47} + 20x_{56} + 9x_{57} + 17x_{67} + 7x_{68} + 15x_{78} + 15x_{87} + 5x_{79} + 7x_{89}.$$

В результате решения задачи получим:

$$x_{12} = 6 \quad x_{47} = 1$$

$$x_{13} = 6 \quad x_{56} = 0$$

$$x_{23} = 0 \quad x_{57} = 6$$

$$x_{32} = 0 \quad x_{67} = 0$$

$$x_{24} = 0 \quad x_{68} = 5$$

$$x_{25} = 6 \quad x_{78} = 0$$

$$x_{34} = 1 \quad x_{87} = 0$$

$$x_{36} = 5 \quad x_{89} = 5$$

$$x_{79} = 7$$

$$F_{\min} = 561 \text{ у. д. е.}$$

Поток сети равен 12, минимальная стоимость в сети – 561 у. д. е. Разрезы с пропускной способностью 12 образованы совокупностью дуг:

$$\{(E_2, E_5); (E_3, E_4); (E_3, E_6)\},$$

$$\{(E_4, E_7); (E_5, E_7); (E_6, E_8)\}.$$

Дуги разрезов насыщены потоком.

4.5. Элементы сетевого и календарного планирования

Математический аппарат теории сетевого планирования и управления базируется на теории графов. Граф $G = (X, U)$ считается заданным, если заданы все его вершины и дуги. Отождествим вершины орграфа с событиями, а дуги – с работами. События и работы, составляющие сетевой график, являются основными понятиями в сетевом планировании и управлении (СПУ).

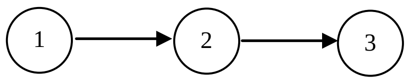
Сетевой график – это динамическая модель, в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий, отображающих процесс достижения определенной цели.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов или времени, или логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении работа изображается стрелкой с указанием продолжительности работы в каких-либо единицах времени. Работа обозначается парой заключенных в скобки чисел (i, j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность $t(i, j)$. Например, запись $t_{(2,5)} = 4$ означает, что работа (2,5) имеет продолжительность 4 единицы времени.

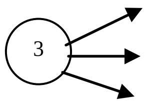
К работам также относятся такие процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени для их выполнения. Это *фиктивные работы*. Они показывают, что одна работа не может совершиться, пока не закончена другая, связанная с ней логически. На сетевых графиках фиктивные работы изображают пунктирными стрелками. Работа на графике соединяет два события.

Событиями называют результаты выполнения одной или нескольких работ. Событие свершается в тот момент, когда оканчиваются все работы, входящие в него. Оно становится предпосылкой для начала следующих за ним работ. События обозначаются одним числом, на графике изображаются кружком (реже точкой, ромбом и т. д.), внутри которого проставляют его порядковый номер ($i = 1, 2, \ldots, N$). Событие с номером 1 называется *исходным*. Событие под номером n называется *завершающим*.

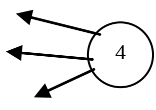
Работа на сетевом графике соединяет два события – начальное (№ 1) и конечное (№ 2). Причем конечное событие (№ 2) данной работы является начальным событием последующей работы, т. е. № 3:



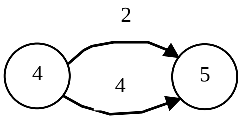
Начальное событие может быть началом нескольких работ:



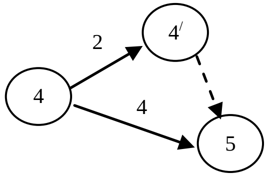
Конечное событие может обозначать завершение нескольких работ:



Если две работы выполняются параллельно, но имеют разную продолжительность, то их следует изображать так, чтобы любая работа могла соединяться только с двумя событиями. Для того чтобы показать взаимосвязь работ, вводят дополнительное событие (4) и фиктивную работу:



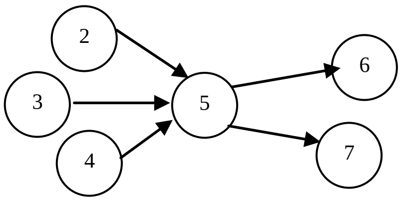
(неправильно)



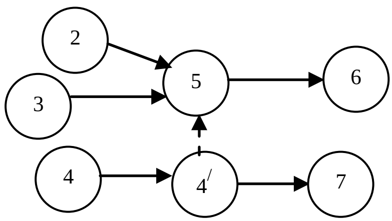
(правильно)

При построении сетевых графиков могут встречаться и такие ситуации, когда для выполнения одной из работ (5,6) надо выполнить предварительно работы (2,5); (3,5); (4,5), а для выполнения работы (5,7), выходящей из общего события 5, надо выполнить только работу (4,5).

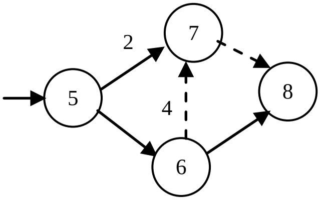
Нельзя таким способом изображать взаимосвязь событий и работ, так как получится, что для выполнения работы (5,7) надо выполнить все предыдущие три работы:



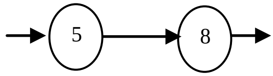
В этом случае вводят дополнительное событие ($4^{/}$) и фиктивную работу ($4^{/}$,5):



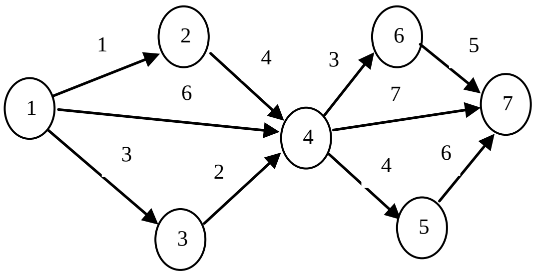
При построении сетевых графиков иногда бывает целесообразным укрупнить работы, если какая-то группа имеет одно начальное и одно конечное событиях:



можно заменить на



Любая непрерывная логическая (технологическая) последовательность работ от исходного события до завершающего называется *путем*. Один и тот же путь не проходит дважды через одно и то же событие. Через одно и то же событие могут проходить несколько путей:



При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике не должно быть тупиков, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);

2) в сетевом графике не должно быть и событий (кроме исходного события), которым не предшествует хотя бы одна работа;

3) не должно быть двух событий, связанных двумя или большим количеством работ;

4) в сети не должно быть контуров, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;

5) не должно быть петель, т. е. начало выполнения работы является и условием ее окончания.

Длина пути определяется суммой продолжительности лежащих на нем работ. От исходного события до завершающего может быть много путей. В результате анализа сетевого графика определяют такой путь, суммарная продолжительность работ на котором будет максимальной.

Он называется *крит ическим* и характеризует время, необходимое для выполнения всех работ, включенных в сетевой график. В графике может быть несколько критических путей. Работы, лежащие на критическом пути, не имеют резервов времени. Пути, близкие по времени к критическому, называются *подкрит ическими*, остальные пути являются *некрит ическими*, или ненапряженными. Работы, лежащие на некритическом пути, имеют резерв времени, т.е. сроки выполнения их можно сдвигать. Наличие резервов времени у некритических работ дает возможность маневрировать внутренними ресурсами и этим ускорять выполнение критических и подкритических работ. На этом основана оптимизация сетевых графиков.

4.6. Сетевые графики и их параметры

Расчет параметров сетевого графика рассмотрим на примере (рис. 4.22).

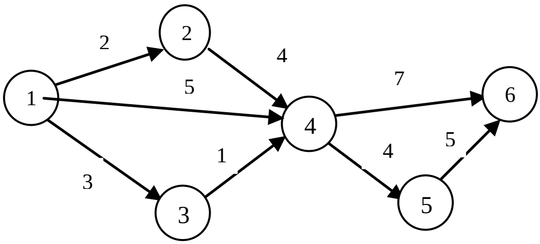


Рис. 4.22. Сетевой график

На основе сетевого графика рассчитаем критический путь (табл. 4.20).

Т а б л и ц а 4.20. **Продолжительность путей сетевого графика**

Номер пути	Совокупность работ	Продолжительность пути
1	1, 4, 6	12
2	1, 2, 4, 6	13
3	1, 2, 4, 5, 6	16
4	1, 4, 5, 6	15
5	1, 3, 4, 6	11
6	1, 3, 4 5, 6	14

Путь № 3, проходящий по работам 1, 2, 4, 5, 6, является критическим, так как его продолжительность максимальная и составляет 16 дней. Путь № 4, проходящий по работам 1, 4, 5, 6, является подкритическим, его продолжительность составляет 15 дней. Растягивание сроков выполнения работ на этом направлении на один день приведет к тому, что путь № 4 станет критическим.

Имеется 9 основных временных параметров сетевого графика. Введем условные обозначения:

Элемент сети	Наименование параметра	Условное обозначение
Событие	Ранний срок свершения	$t_p(i)$
	Поздний срок свершения	$t_п(i)$
	Резерв времени события	$R(i)$
Работа	Продолжительность работы	$t_{(i,j)}$
	Ранний срок начала работы	$t_{рн}(i, j)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{ро}(i, j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i, j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i, j)$
	Полный резерв времени	$R_п(i, j)$
	Свободный резерв времени	$R_с(i, j)$
	Независимый резерв времени	$R_н(i, j)$

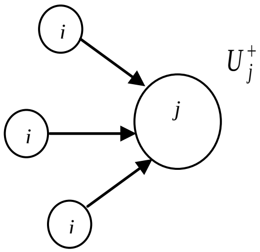
Когда рассчитываем ранние сроки свершения событий $t_р(i)$, двигаемся с начала в конец графика, когда рассчитываем поздние сроки свершения событий $t_п(i)$, двигаемся с конца в начало сетевого графика.

Расчет временных параметров событий выполняется на сетевом графике, для этого каждое событие укрупняется и разбивается на 4 сектора:

i – номер события;

$t_р(i)$ – ранний срок свершения события мальная сумма ранних сроков свершения событий *i* и продолжительность работ, входящих в событие *j* (рис. 4.23):

$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in u_j^+} \{t_p(i) + t_{(i,j)}\} .$$

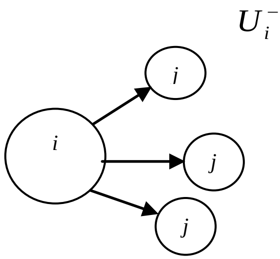


U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие *j*.

Рис. 4.23. Фрагмент сетевого графика

Если нескольким событиям *j* предшествует свершение одного события *i*, то *поздний срок свершения события i* определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий *j* и продолжительность работ, выходящих из события *i* (рис. 4.24):

$$t_n(i) = \min_{(i,j)\in u_i^-} \{t_n(j) - t_{(i,j)}\} .$$



U_i^- – множество всех работ, выходящих из события *i*.

Рис. 4.24. Фрагмент сетевого графика

Резерв времени события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R_{(i)} = t_n(i) - t_p(i) .$$

Значения временных характеристик событий приведены на сетевом графике (рис. 4.25).

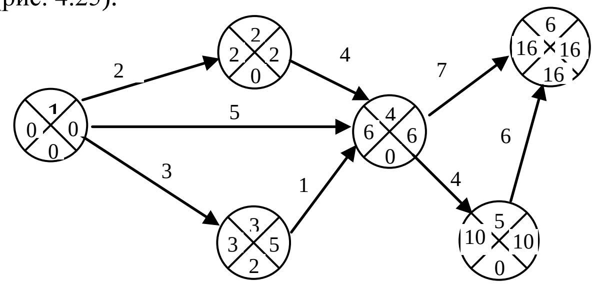


Рис. 4.25. Сетевой график с указанием временных характеристик событий

У критических работ резерв времени начального и конечного событий равен нулю. Работа лежит на критическом пути, если выполняются следующие требования:

1) ранний и поздний сроки свершения событий, из которых выходит работа-стрелка, совпадают:

$$t_{\text{р}}(i) = t_{\text{п}}(i);$$

2) ранний и поздний сроки свершения событий, в которые входит работа-стрелка, совпадают:

$$t_{\text{р}}(j) = t_{\text{п}}(j);$$

3) разница между ранними и поздними сроками свершения предшествующего и последующего событий работы равна продолжительности работы:

$$t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) = t_{(i,j)}.$$

Зная сроки свершения событий, можно определить временные параметры работ.

Пример. Рассчитаем временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 4.26.

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком свершения начального события:

$$t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i).$$

Ранний срок окончания работы равен раннему сроку начала работы плюс продолжительность работы:

$$t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{рн}}(i, j) + t_{(i,j)}.$$

При расчете раннего срока начала работы $t_{\text{рн}}(i, j)$ и раннего срока окончания работы $t_{\text{ро}}(i, j)$ мы двигались по таблице сверху вниз. При расчете позднего срока начала работы $t_{\text{пн}}(i, j)$ и позднего срока окончания работы $t_{\text{по}}(i, j)$ необходимо двигаться снизу вверх.

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения конечного события:

$$t_{\text{по}}(i, j) = t_{\text{п}}(i, j).$$

Поздний срок начала работы равен позднему сроку окончания работы минус продолжительность работы:

$$t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{по}}(i, j) - t_{(i,j)}.$$

Полный резерв времени определяется как разность между поздним сроком окончания и ранним сроком начала работы и продолжительностью работы:

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{по}}(i, j) - t_{\text{рн}}(i, j) - t_{(i,j)},$$

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{(i,j)};$$

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{по}}(i, j) - t_{\text{пн}}(i, j).$$

Полный резерв времени работы – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока. Работы, лежащие на критическом пути, полного резервного времени не имеют.

Заполним сводную таблицу временных параметров работ (табл. 4.21).

Т а б л и ц а 4.21. **Временные параметры работ**

Условные обозначения работ (i, j)	Продолжительность работы $t_{(i,j)}$	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени		
		начала $t_{рн}(i, j)$	окончания $t_{ро}(i, j)$	начала $t_{пн}(i, j)$	окончания $t_{по}(i, j)$	полный $R_п(i, j)$	свободбодный $R_с(i, j)$	независимый $R_н(i, j)$
(1,2)	2	0	2	0	2	0	0	0
(1,3)	3	0	3	2	5	2	0	0
(1,4)	5	0	5	1	6	1	1	1
(2,4)	4	2	6	2	6	0	0	0
(3,4)	1	3	4	5	6	2	2	0
(4,5)	4	6	10	6	10	0	0	0
(4,6)	7	6	13	9	16	3	3	3
(5,6)	6	10	16	10	16	0	0	0

Полный резерв времени может быть использован частично или полностью для выполнения данной работы или для любой другой работы, лежащей на данном пути.

Если растянуть сроки выполнения работ, лежащих на критическом пути на одни сутки, то критический путь возрастет на одни сутки и, следовательно, на такое же время увеличится срок выполнения всего комплекса работ.

Свободный резерв времени – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное и конечное ее события наступят в свои ранние сроки:

$$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t_{(i,j)} .$$

Свободный резерв присущ только данной работе, и его использование никак не повлияет на выполнение последующих работ.

Независимый резерв времени – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное ее событие наступит в свой поздний срок, а конечное – в свой ранний срок:

$$R_н(i, j) = t_р(j) - t_п(i) - t_{(i,j)} .$$

Для небольших проектов удобным дополнением к сетевому графику является *линейный график, или график Гант а* (см. прил. А). На графике Ганта каждая работа (i,j) изображается с учетом оси времени $0t$ горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна продолжительности работы $t_{(i,j)}$. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события. Работы изображаются в той же последовательности, что и на сети (рис. 4.26).

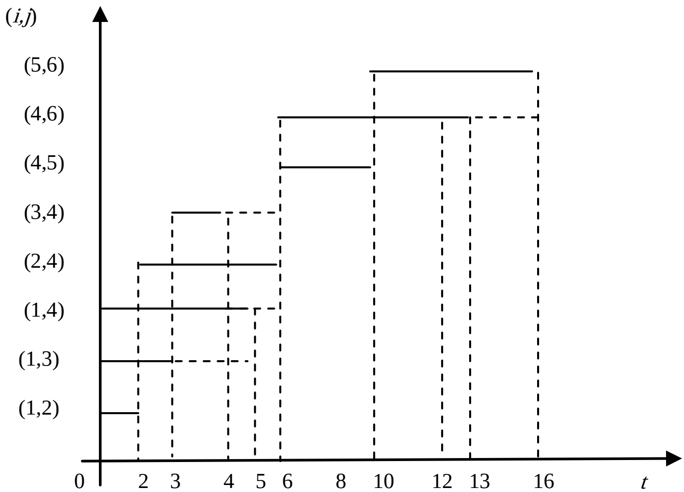


Рис. 4.26. График Ганта

4.7. Задачи распределения ресурсов на сетях

Рассмотрим задачу распределения ресурсов на сетевом графике. **Пример.** На перерабатывающем предприятии необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 4.27).

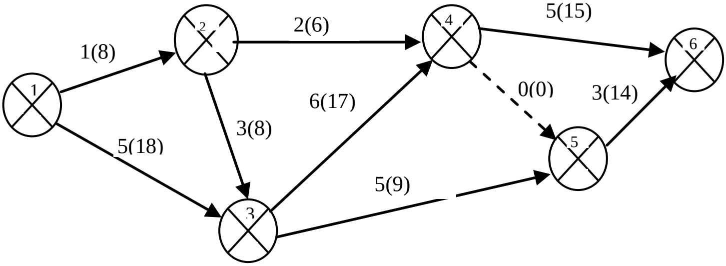


Рис. 4.27. Сетевой график комплекса проектных работ

На его дугах проставлена продолжительность выполнения работ, а в скобках – необходимое для выполнения работы число исполнителей, т. е. интенсивность потребления ресурса $v(i, j)$.

В распоряжении руководителей проектных работ имеется 26 человек. Следует распределить трудовые ресурсы во времени, т. е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить проектные работы в минимальный срок.

Используем *эвристический метод распределения ресурсов*.

Алгоритм решения задачи следующий:

1. Рассчитываем продолжительность критического пути (рис. 4.28).

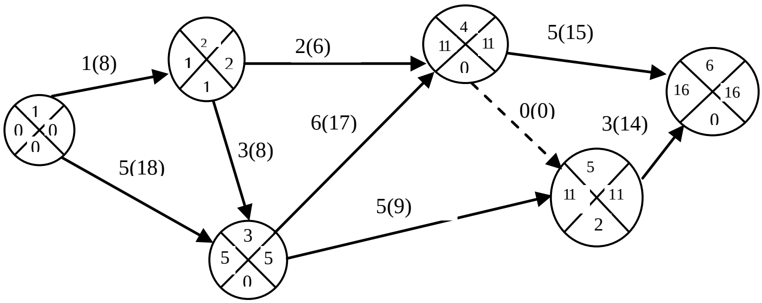


Рис. 4.28. Сетевой график комплекса проектных работ

2. Рассчитываем на графике ранний и поздний сроки свершения событий и резерв времени событий (см. рис. 4.29). Критический путь составляет 16 дней.

3. Рассчитаем временные характеристики работ (табл. 4.22).

Т а б л и ц а 4.22. **Временные характеристики работ**

Условное обозначение работ (i, j)	Продолжительность работы $t_{(i, j)}$	Интенсивность потребления ресурса $v(i, j)$	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени полный $R_п(i, j)$
			начала $t_{рн}(i, j)$	окончания $t_{ро}(i, j)$	начала $t_{пн}(i, j)$	окончания $t_{по}(i, j)$	
1,2	1	8	0	1	1	2	1
1,3	5	18	0	5	0	5	0
2,3	3	8	1	4	2	5	1
2,4	2	6	1	3	9	11	8
3,4	6	17	5	11	5	11	0
3,5	5	9	5	10	8	13	3
4,5	0	0	11	11	13	13	2
4,6	5	15	11	16	11	16	0
5,6	3	14	11	14	13	16	2

4. Строим сетевой график в календарной шкале времени по ранним и поздним срокам начала и окончания работ (график Ганта) (рис. 4.29).

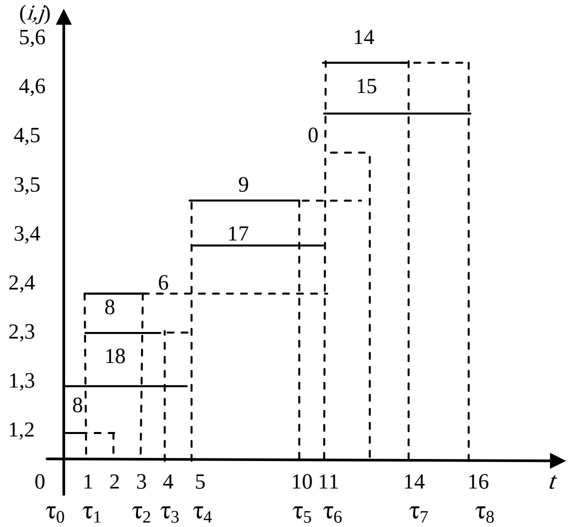


Рис. 4.29. График Ганта № 1

5. Просуммируем количество человек, которые выполняют одновременно разные виды работ, и построим эпюру интенсивности потребления ресурсов (рис. 4.30).

Наверху каждой проекции-работы запишем ее интенсивность потребления ресурса, т. е. количество человек, которые должны выполнять работу.

Проецируем на ось времени ($0t$) начало и конец каждой работы и обозначим проекцию, совпадающую с началом координат, через τ_0, следующую за ней – через τ_1 и т. д.

Таким образом, получим промежутки:

1. $(\tau_0, \tau_1) = (0,1)$
2. $(\tau_1, \tau_2) = (1,3)$
3. $(\tau_2, \tau_3) = (3,4)$
4. $(\tau_3, \tau_4) = (4,5)$
5. $(\tau_4, \tau_5) = (5,10)$
6. $(\tau_5, \tau_6) = (10,11)$
7. $(\tau_6, \tau_7) = (11,14)$
8. $(\tau_7, \tau_8) = (14,16)$.

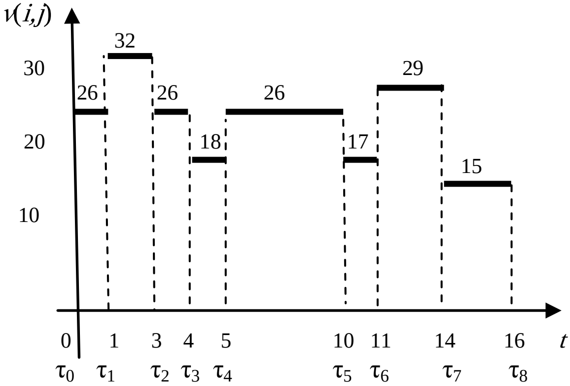


Рис. 4.30. Эпюра интенсивности потребления ресурса № 1

6. Из анализа графика Ганта и эпюры интенсивности потребления видно, что существуют два интервала (τ_1, τ_2) и (τ_6, τ_7), для которых интенсивность ресурсов превышает их наличное количество (26 чел.), следовательно, график необходимо оптимизировать:

а) рассмотрим первый промежуток (τ_0, τ_1) = [0, 1]. Над ним расположены работы (1,2) и (1,3). Так как сумма ресурсов для их исполнения (8 + 18) не превышает наличных ресурсов (26 чел.), то эти работы оставляем без изменения;

б) анализируем второй промежуток (τ_1, τ_2) = [1, 3], под ним расположены работы (1,3); (2,3); (2,4). Сумма ресурсов для их выполнения:

$$v_{1,3} + v_{2,3} + v_{2,4} = 18 + 8 + 6 = 32 \text{ чел.},$$

$$32 > 26 \text{ имеющихся работников.}$$

Следовательно, необходимо *установить порядок выполнения работ*:

1) в первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке;

2) оставшиеся работы нумеруют в порядке возрастания их полных резервов времени;

3) если полные резервы времени одинаковы, то в порядке убывания интенсивностей использования ресурсов.

В нашем случае работа (1,3) начата выполняться во временном промежутке (τ_0, τ_1). Для ее выполнения необходимо 18 чел.

Работа (2,3) имеет полный резерв времени, который составляет один день ($R_п(2,3) = 1$), а работа (2,4) – 8 дней ($R_п(2,4) = 8$). Следовательно, сначала начинаем выполнять работу (2,3). Интенсивность выполнения работ (1,3) и (2,3) равна 18 + 8 = 26, а это равно наличным ресурсам.

Следовательно, начало выполнения работы (2,4) сдвигаем к началу следующего временного промежутка, т. е. к моменту времени $\tau_2 = 3$.

Все изменения отражаем в новом графике Ганта (график Ганта № 2, рис. 4.31).

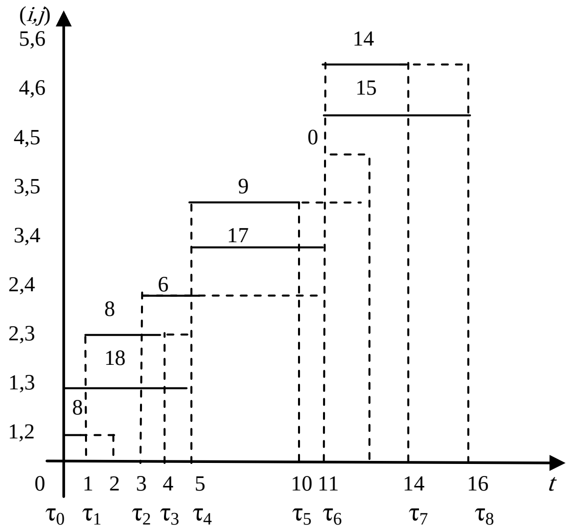


Рис. 4.31. График Ганта № 2

Проецируем на ось времени ($0t$) начало и конец каждой работы, выделяем временные промежутки;

в) сдвинув работу (2,4) к моменту τ_2, видим, что в промежутке $(\tau_2, \tau_3) = [3, 5]$ интенсивность потребления ресурса равна:

$$v_{1,3} + v_{2,3} + v_{2,4} = 18 + 8 + 6 = 32 > 26 \text{ чел.}$$

Так как работы (1,3) и (2,3) начаты в предыдущих временных промежутках, а работа (2,4) имеет полный резерв времени равный 6 дней ($R_п(2,4) = 6$), то работу (2,4) сдвигаем к началу следующего временного промежутка, т. е. к моменту времени $\tau_3 = 4$ и строим новый график

Ганта (график Ганта № 3, рис. 4.33). Проецируем на ось времени ($0t$) начало и конец каждой работы, выделяем временные промежутки;

г) в промежутке (τ_3, τ_4) = [4, 5] имеем интенсивность потребления ресурса, равную:

$$v_{1,3} + v_{2,4} = 18 + 6 = 24 < 26 \text{ чел.};$$

д) анализ графика Ганта (см. график Ганта № 3, рис. 4.32) показывает, что в промежутке (τ_3, τ_4) = [5, 6] интенсивность потребления превышает наличный ресурс:

$$v_{2,4} + v_{3,4} + v_{3,5} = 6 + 17 + 9 = 32 > 26 \text{ чел.}$$

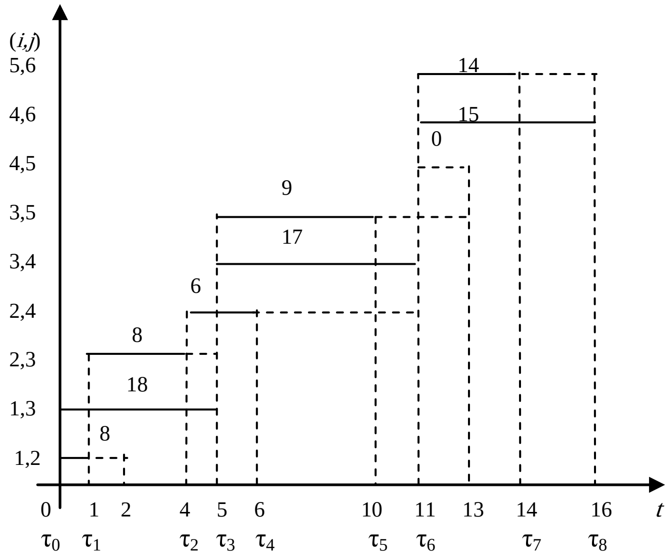


Рис. 4.32. График Ганта № 3

Так как работа (2,4) выполнялась в предыдущем временном промежутке, то, рассмотрим порядок выполнения работ (3,4) и (3,5). Сравним их полные резервы времени $R_{п}(3,4) = 0$ и $R_{п}(3,5) = 3$.

Следовательно, в момент времени $\tau_3 = 5$ начнем работу (3,4), а работу (3,5) сдвинем к моменту времени $\tau_4 = 6$. Получим новый график Ганта (график Ганта № 4, рис. 4.33). Проецируем на ось времени ($0t$) начало и конец каждой работы, выделяем временные промежутки;

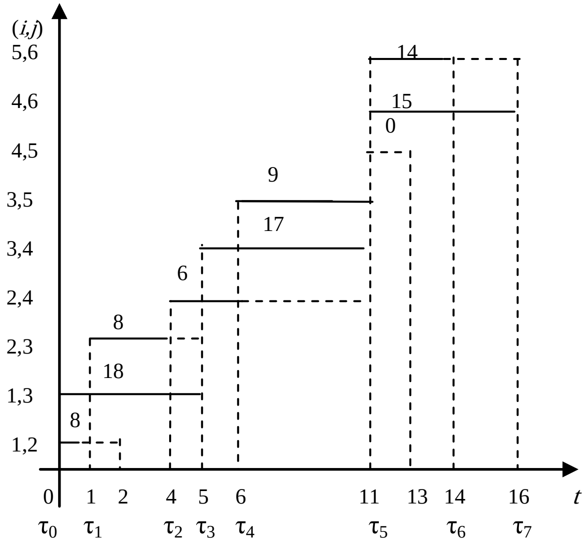


Рис. 4.33. График Ганта № 4

е) анализируем интенсивность потребления ресурса в каждом выделенном временном промежутке. В промежутке $(\tau_4, \tau_5) = [6, 11]$ интенсивность потребления ресурса:

$$v_{3,4} + v_{3,5} = 17 + 9 = 26 \text{ чел.},$$

т. е. равна наличному ресурсу, следовательно, время начала работ (3,4), (3,5) оставляем без изменения;

ж) в промежутке $(\tau_5, \tau_6) = [11, 14]$ выполняются работы (4,6), (5,6). Интенсивность потребления ресурса для этих работ равна:

$$v_{4,6} + v_{5,6} = 15 + 14 = 29 \text{ чел.},$$

$$29 > 26 \text{ имеющихся работников.}$$

Сравним полные резервы времени работ (4,6), (5,6). Так как $R_п(4,6) = 0$, $R_п(5,6) = 2$, то необходимо сдвинуть начало работы (5,6) к моменту времени $\tau_7 = 14$. Но это приведет к увеличению срока выполнения всего комплекса проектных работ на 1 день, т. е. до 16 + 1 = 17 дней, это не выгодно, так как критический путь увеличится до 17 дней.

Если *есть возможность выбора, то растягиваем сроки выполнения работы, задействовав на ее выполнении меньше работников* (или, если необходимо, *выполняем работу в более сжатые сроки, направив на ее выполнение больше работников*), т. е. увеличим продолжительность работы с 3 до 4 дней, сократив количество человек, ежедневно занятых на этой работе. У руководителя проектных работ имеется 26 работников. На выполнение работы (4,6), которая не имеет полного резерва времени ($R_п$(4,6) = 0), задействовано 15 чел. У руководителя проектных работ остается 26 – 15 = 11 работников. На работе (5,6) необходимо отработать 14 чел. × 3 дня = 42 чел.-дн. Для работы (5,6) можно срок выполнения увеличить на 1 день, т. е. работу (5,6) можно выполнить за 4 дня, задействовав 11 работников (42 чел.-дн.: 4 дня ≈ ≈ 11 чел.).

Таким образом, получим окончательный график Ганта (график Ганта № 5, рис. 4.34).

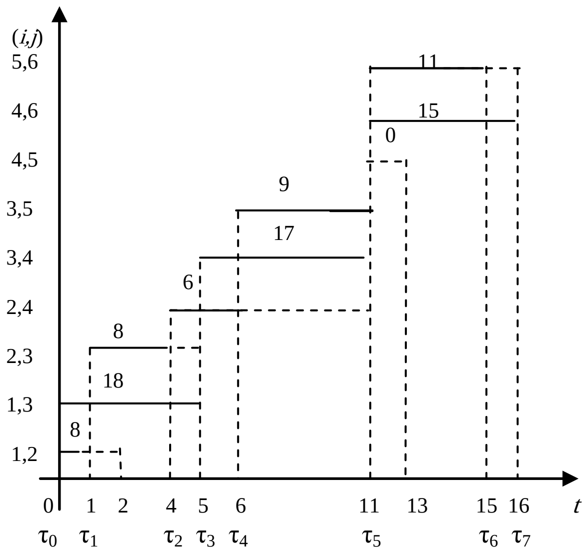


Рис. 4.34. График Ганта № 5

Проецируем на ось времени (0*t*) начало и конец каждой работы, выделяем временные промежутки (см. рис. 4.35). Анализируем интенсивность использования ресурса в каждом выделенном временном промежутке;

з) строим эпюру ежедневной потребности в трудовых ресурсах при выполнении работ проекта (рис. 4.36). Видим, что для выполнения работ в выделенных временных промежутках достаточно имеющихся 26 работников.

Таким образом, анализ графика Ганта (см. рис. 4.35) и эпюры интенсивность использования ресурса (см. рис. 4.35) показывает:

– время начала каждой работы;

– время окончания каждой работы;

– количество работников, занятых на выполнении каждой работы.

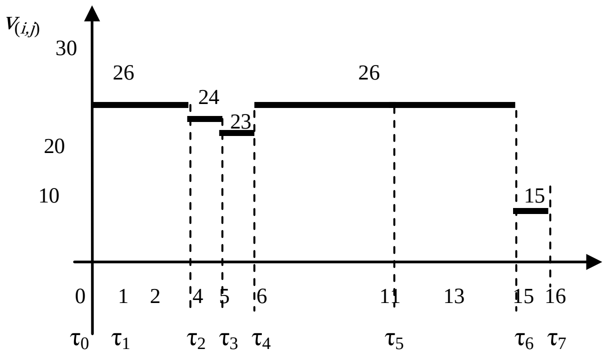


Рис. 4.35. Эпюра интенсивности потребления ресурса № 2

4.8. Задачи оптимизации сетей по времени

Необходимо обосновать минимальную величину дополнительных вложений x_{ij} в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины времени t_0.

Пусть задан сетевой график выполнения проекта. Продолжительность каждой работы равна t_{ij}. Вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i, j) сокращает время ее выполнения до времени t'_{ij}, причем:

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

где k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных средств.

Но время выполнения каждой работы можно сократить до минимально возможного времени ее выполнения, т. е. до d_{ij}.

Требуется определить количество дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо вложить в работы (i, j), а также время начала $t_{ij}^{\text{Н}}$ и время окончания $t_{ij}^{\text{О}}$ выполнения этих работ, чтобы проект был выполнен в срок. При этом суммарные дополнительные затраты должны быть минимальными.

Запишем *структурную модель задачи оптимизации проекта по времени.*

I. Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы (i, j));

j – номер последующего события (конечного события работы (i, j));

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

1 – номер исходного события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

II. Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу (i, j), позволяющий сократить время ее выполнения;

$t_{ij}^{\text{Н}}$ – время начала работы (i, j);

$t_{ij}^{\text{О}}$ – время окончания работы (i, j).

III. Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы (i, j);

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных средств, позволяющих сократить время выполнения работы (i, j);

t_{ij} – время выполнения работы i, j.

Целевая функция модели – суммарные затраты дополнительных вложений должны быть минимальными:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \;.$$

При условиях:

1. По времени завершения проекта, т. е. время завершения проекта не должно превышать заданного времени –

$$t_{in}^{0} \le t_0, (i,n) \in \vec{e}\,\cdot$$

2. По продолжительности работ, т. е. продолжительность каждой работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \geq d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

3. По сокращению времени продолжительности работ, т. е. в зависимости от величины вложенных средств, продолжительность работ может быть сокращена –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

4. По последовательности выполнения работ, т. е. время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ –

а) $t_{1j}^{H} = 0, (1, j) \in E$,

б) $t_{jr}^{\text{Н}} \geq t_{ij}^{0}$, $(i, j, r) \in E$.

5. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{\text{Н}},\quad t_{ij}^{0},\quad x_{ij} \geq 0,\quad (i, j) \in \vec{e}.$$

Пример. Пусть проект перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание задан сетевым графиком (рис. 4.36).

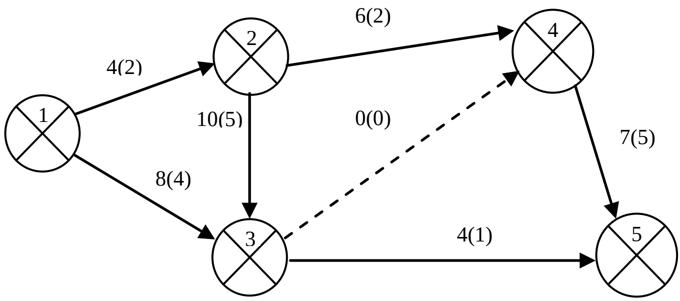


Рис. 4.36. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК
на самообслуживание

Для каждой работы приведена над дугами продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}). Задан срок выполнения проекта: t_0 = 15 дней. Известны также технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,2; k_{13} = 0,5; k_{23} = 0,1; k_{24} = 0,3; k_{35} = 0,2; k_{45} = 0,4.

Требуется найти такие значения $t_{ij}^{\text{н}}$, t_{ij}^{0}, x_{ij}, чтобы:

1) суммарное количество дополнительных средств было минимальным;

2) время выполнения всего комплекса работ не превышало t_0;

3) продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{ij}.

Весь комплекс работ можно выполнить за 21 день (рис. 4.37), а требуется завершить все работы по переводу фирменного магазина СПК на самообслуживание за 15 дней.

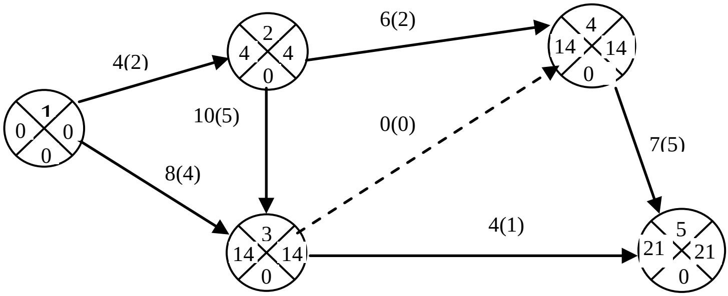


Рис. 4.37. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание при несрочном графике выполнения работ

Составим развернутую экономико-математическую задачу:

$$F_{\min} = x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{45}.$$

При условиях:

I. По времени завершения проекта –

$$1.\ t_{35}^{0} \le 15$$

$$2.\ t_{45}^{0} \le 15.$$

II. По продолжительности работ –

3. $t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} \geq 2$ 5. $t_{23}^{0} - t_{23}^{\text{н}} \geq 3$ 7. $t_{34}^{0} - t_{34}^{\text{н}} = 0$

4. $t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} \geq 4$ 6. $t_{24}^{0} - t_{24}^{\text{н}} \geq 2$ 8. $t_{35}^{0} - t_{35}^{\text{н}} \geq 1$

9. $t_{45}^{0} - t_{45}^{\text{н}} \geq 5$

III. По сокращению времени продолжительности работ –

10. $t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} = 4 - 0,2x_{12}$ 13. $t_{24}^{0} - t_{24}^{\text{н}} = 6 - 0,3x_{24}$

11. $t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} = 8 - 0,5x_{13}$ 14. $t_{35}^{0} - t_{35}^{\text{н}} = 4 - 0,2x_{35}$

12. $t_{23}^{0} - t_{23}^{\text{н}} = 10 - 0,1x_{23}$ 15. $t_{45}^{0} - t_{45}^{\text{н}} = 7 - 0,4x_{45}$.

IV. По последовательности выполнения работ –

16. $t_{12}^{\text{н}} = 0$ 20. $t_{34}^{\text{н}} \geq t_{13}^{0}$ 24. $t_{45}^{\text{н}} \geq t_{34}^{0}$

17. $t_{13}^{\text{н}} = 0$ 21. $t_{34}^{\text{н}} \geq t_{23}^{0}$ 25. $t_{45}^{\text{н}} \geq t_{24}^{0}$.

18. $t_{23}^{\text{н}} \geq t_{12}^{0}$ 22. $t_{35}^{\text{н}} \geq t_{23}^{0}$

19. $t_{24}^{\text{н}} \geq t_{12}^{0}$ 23. $t_{35}^{\text{н}} \geq t_{13}^{0}$

Информацию экономико-математической задачи преобразуем:

1) все неизвестные величины переносим в левую часть ограничений, все известные величины – в правую и приводим подобные;

2) если получено:

а) ограничение со знаком «≤», «=» или «≥» и отрицательным свободным членом $(-B_i)$, то левую и правую части ограничения умножаем на (–1) и знак меняем на противоположный;

б) ограничение со знаком «≤» и свободным членом, равным 0 (≤0), то левую и правую части ограничения умножаем на (–1) и знак меняем на противоположный.

В таком виде информацию развернутой экономико-математической модели записываем в матрицу (т. е. в таблицу, в которой в математизированном виде записана информация экономико-математической задачи).

Решаем задачу на персональном компьютере симплексным методом. После решения задачи получено следующее оптимальное решение:

$$x_{12} = 10; \qquad x_{13} = 0;$$

$$x_{23} = 20; \qquad x_{24} = 0;$$

$$x_{35} = 0; \qquad x_{45} = 5;$$

$$t_{12}^{\text{н}} = 0\,; \qquad t_{13}^{\text{н}} = 0\,;$$

$$t_{23}^{\text{н}} = 2\,; \qquad t_{24}^{\text{н}} = 4\,;$$

$$t_{34}^{\text{н}} = 10\,; \qquad t_{35}^{\text{н}} = 10\,;$$

$$t_{45}^{\text{н}} = 10\,; \qquad t_{12}^{0} = 2\,;$$

$$t_{13}^{0} = 8\,; \qquad t_{23}^{0} = 10\,;$$

$$t_{24}^{0} = 10\,; \qquad t_{34}^{0} = 10\,;$$

$$t_{35}^{0} = 14\,; \qquad t_{45}^{0} = 15\,;$$

$$F_{\min} = 35.$$

Таким образом, выполнить проект можно за время $t_0 = 15$ дней, для этого необходимо дополнительно вложить 35 у. д. е. средств (рис. 4.38):

– в работу (1,2) – 10 у. д. е., что позволит сократить ее продолжительность с 4 до 2 дней;

– в работу (2,3) – 20 у. д. е., что сократит ее продолжительность с 10 до 8 дней;

– в работу (4,5) – 5 у. д. е. при уменьшении срока ее выполнения с 7 до 5 дней.

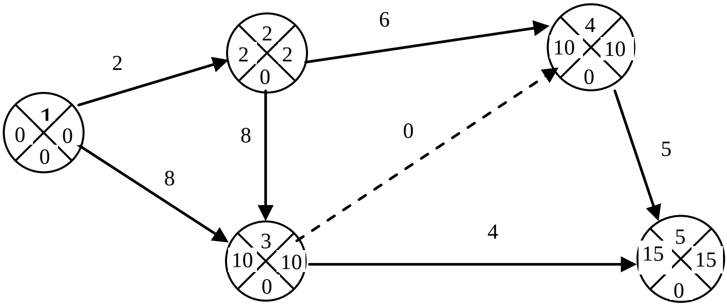


Рис. 4.38. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание при срочном графике выполнения работ

Рассмотрим второй вариант этого типа задач.

Задача состоит в сокращении срока выполнения комплекса работ на столько, насколько это возможно за счет вложения определенной суммы дополнительных средств (т. е. не более B). Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени (d_{ij}).

Требуется определить время начала $t_{ij}^{\text{Н}}$ и окончания $t_{ij}^{\text{О}}$ каждой работы и величину дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо выделить для сокращения продолжительности выполнения работ (i, j).

Используем ранее изложенные три группы условных обозначений: индексацию, неизвестные и известные величины. В известные величины добавим величину B – количество дополнительных средств, выделяемых для сокращения продолжительности работ.

Структурная экономико-математическая модель имеет следующий вид:

$$F_{\min} = \underset{(i,n)\in\vec{e}}{t_{in}^{0}},$$

т. е. срок выполнения проекта должен быть минимальным.

При условиях:

1. По использованию дополнительных вложений в работы, т. е. суммарное количество дополнительных вложений в работы проекта не должно превышать выделяемых для сокращения продолжительности работ дополнительных средств –

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B \cdot$$

2. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{Н}} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}\,.$$

3. По сокращению продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{Н}} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}, (i, j) \in \vec{e}\,.$$

4. По последовательности выполнения работ –

а) $t_{1j}^{\text{Н}} = 0$, $(1, j) \in E$,

$$б)\ t_{jr}^{\text{Н}} \geq t_{ij}^{0},\ (i, j, r) \in E\ .$$

5. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{\text{Н}},\quad t_{ij}^{0},\quad x_{ij} \geq 0,\qquad (i, j) \in \vec{e}\,.$$

Пример. Сетевой график выполнения работ на новый календарный год имеет такой вид (рис. 4.39). Для каждой работы под дугами приведена продолжительность работ t_{ij}, а в скобках – минимально возможное время выполнения работ d_{ij}. Известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств:

$$k_{12} = 0{,}2,\ k_{13} = 0{,}8\,,$$

$$k_{25} = 0{,}1\,,\ k_{34} = 0{,}5\,,$$

$$k_{45} = 0{,}3\,,\ k_{46} = 0{,}6\,,$$

$$k_{56} = 0{,}7\ .$$

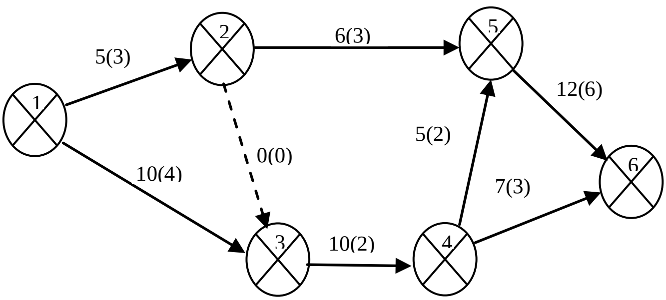


Рис. 4.39. Сетевой график комплекса работ

Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 30 у. д. е.

Требуется найти такие значения $t_{ij}^{\text{Н}},\quad t_{ij}^{0},\quad x_{ij}$, чтобы:

1) срок выполнения комплекса работ был минимальным;

2) суммарное количество дополнительных средств не превышало значения B;

3) продолжительность выполнения каждой работы не превышала заданной величины d_{ij}.

При несрочном режиме весь комплекс работ можно выполнить за 36 дней (рис. 4.40).

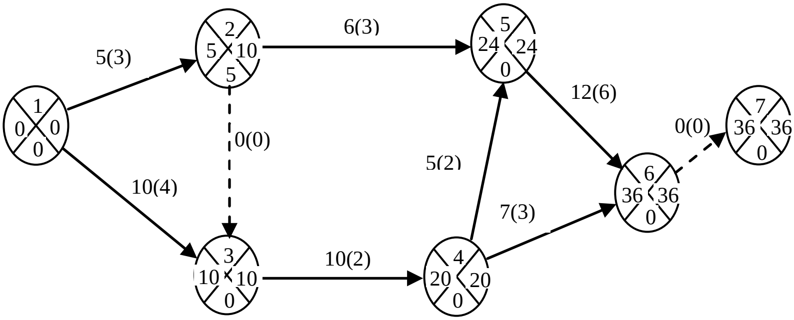


Рис. 4.40. Сетевой график комплекса работ при несрочном графике их выполнения

Требуется минимизировать срок выполнения комплекса работ. Для этого составим развернутую экономико-математическую модель. Так как *в последнее событие сети входят сразу две работы, то необходимо добавить фиктивную работу и фиктивное событие* № 7, время выполнения работы (6,7) равно 0.

Тогда $F_{\min}$ можно записать следующим образом:

$$F_{\min} = t_{6,7}^{0},$$

т. е. срок выполнения проекта стремится к минимуму.

При условиях:

I. По использованию дополнительных вложений в работы в целях сокращения их продолжительности –

$$1.\ x_{12} + x_{13} + x_{25} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \le 30.$$

II. По продолжительности работ –

$$2.\ t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} \ge 3 \qquad 7.\ t_{45}^{0} - t_{45}^{\text{н}} \ge 2$$

$$3.\ t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} \ge 4 \qquad 8.\ t_{46}^{0} - t_{46}^{\text{н}} \ge 3$$

$$4.\ t_{23}^{0} - t_{23}^{\text{н}} = 0 \qquad 9.\ t_{56}^{0} - t_{56}^{\text{н}} \ge 6$$

$$5.\ t_{34}^{0} - t_{34}^{\text{н}} \ge 2 \qquad 10.\ t_{67}^{0} - t_{67}^{\text{н}} = 0.$$

$$6.\ t_{25}^{0} - t_{25}^{\text{н}} \ge 3$$

III. По сокращению продолжительности работ –

11. $t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} = 5 - x_{12} \cdot 0,2$

14. $t_{34}^{0} - t_{34}^{\text{н}} = 10 - x_{34} \cdot 0,5$

12. $t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} = 10 - x_{13} \cdot 0,8$

15. $t_{45}^{0} - t_{45}^{\text{н}} = 4 - x_{45} \cdot 0,3$

13. $t_{25}^{0} - t_{25}^{\text{н}} = 6 - x_{25} \cdot 0,1$

16. $t_{46}^{0} - t_{46}^{\text{н}} = 7 - x_{46} \cdot 0,6$

17. $t_{56}^{0} - t_{56}^{\text{н}} = 12 - x_{56} \cdot 0,7$.

IV. По последовательности выполнения работ –

18. $t_{12}^{\text{н}} = 0$

24. $t_{45}^{\text{н}} \geq t_{34}^{0}$

19. $t_{13}^{\text{н}} = 0$

25. $t_{56}^{\text{н}} \geq t_{45}^{0}$

20. $t_{23}^{\text{н}} \geq t_{12}^{0}$

26. $t_{56}^{\text{н}} \geq t_{25}^{0}$

21. $t_{34}^{\text{н}} \geq t_{13}^{0}$

27. $t_{46}^{\text{н}} \geq t_{34}^{0}$

22. $t_{34}^{\text{н}} \geq t_{12}^{0}$

28. $t_{67}^{\text{н}} \geq t_{56}^{0}$

23. $t_{25}^{\text{н}} \geq t_{12}^{0}$

29. $t_{67}^{\text{н}} \geq t_{46}^{0}$.

В процессе решения экономико-математической задачи на компьютере получены следующие значения переменных:

$x_{12} = 0$ $\quad x_{13} = 6,25$

$x_{25} = 0$ $\quad x_{34} = 15,18$

$x_{45} = 0$ $\quad x_{46} = 0$

$x_{56} = 8,57$

$t_{12}^{\text{н}} = 0$ $\quad t_{13}^{\text{н}} = 0$ $\quad t_{23}^{\text{н}} = 5$

$t_{25}^{\text{н}} = 5,41$ $\quad t_{34}^{\text{н}} = 5$ $\quad t_{45}^{\text{н}} = 7,4$

$t_{46}^{\text{н}} = 10,4$ $\quad t_{56}^{\text{н}} = 11,4$ $\quad t_{67}^{\text{н}} = 17,4$

$t_{12}^{0} = 5$ $\quad t_{13}^{0} = 5$ $\quad t_{23}^{0} = 5$

$t_{25}^{0} = 11,4$ $\quad t_{34}^{0} = 7,4$ $\quad t_{45}^{0} = 11,4$

$t_{46}^{0} = 17,4$ $\quad t_{56}^{0} = 17,4$ $\quad t_{67}^{0} = 17,4$

$F_{\min} = 17,4.$

Рассчитаем продолжительность выполнения работ, позволяющих за счет их сокращения уменьшить срок выполнения всего комплекса работ:

$$t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{Н}} = 10 - 6{,}25 \cdot 0{,}8 = 10 - 5 = 5$$

$$t_{34}^{0} - t_{34}^{\text{Н}} = 10 - 15{,}18 \cdot 0{,}5 = 2{,}4$$

$$t_{56}^{0} - t_{56}^{\text{Н}} = 12 - 8{,}57 \cdot 0{,}7 = 6\,.$$

Анализ оптимального решения свидетельствует, что весь комплекс работ можно сократить с 36 (см. рис. 4.40) до 17,4 дня (рис. 4.41) за счет дополнительного вложения средств 30 у. д. е.:

– в работу (1,3) – 6,25 у. д. е., что позволит сократить ее продолжительность с 10 до 5 дней;

– в работу (3,4) – 15,18 у. д. е., что сократит ее продолжительность с 10 до 24 дней;

– в работу (5,6) – 8,57 у. д. е. при уменьшении срока ее выполнения с 12 до 6 дней.

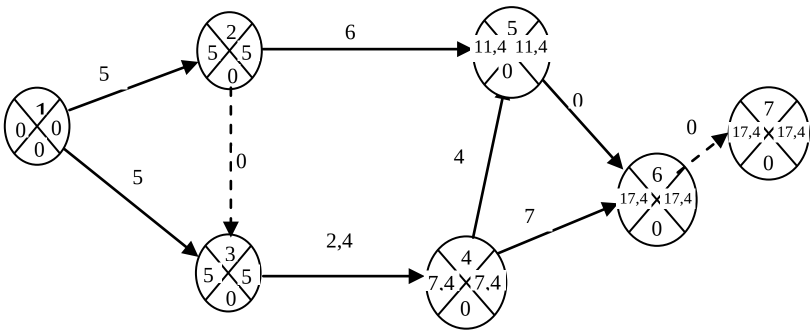


Рис. 4.41. Сетевой график комплекса работ при сокращении срока их выполнения

4.9. Задачи оптимизации сетей по стоимости

Рассмотрим *минимизацию стоимости проекта при фиксированной его продолжительности.* Пусть задан сетевой график работ проекта $G = (E, \vec{e})$ (рис. 4.42).

Для каждой работы в скобках на графике дана минимальная продолжительность работ d_{ij} (т. е. срочный режим их выполнения), которому соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}. Также известна нормальная (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij}, которой соответствуют наименьшие затраты средств c_{ij}.

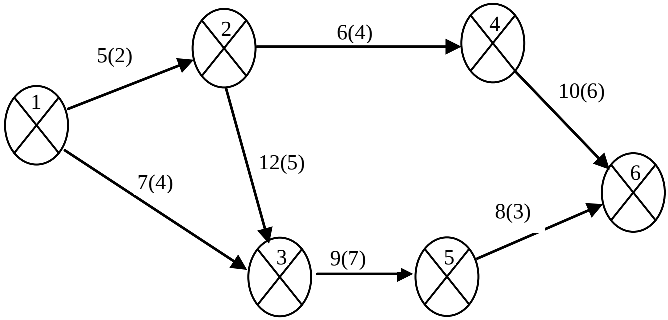


Рис. 4.42. Сетевой график работ проекта

Известно, что затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения.

Рассчитывают коэффициент дополнительных затрат:

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}},$$

который показывает, на сколько увеличится стоимость работы (i, j) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени.

Параметры сетевого графика представлены в табл. 4.23.

Т а б л и ц а 4.23. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работы						
	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)
d_{ij}	2	4	5	4	7	6	3
C_{ij}	50	30	85	60	40	70	90
D_{ij}	5	7	12	6	9	10	8
c_{ij}	20	10	30	40	30	60	25
h_{ij}	10	6,67	7,86	10	5	2,5	13

Алгоритм решения задачи:

1) рассчитаем коэффициент дополнительных затрат для каждой работы;

2) продолжительность критического пути составляет 34 дня, минимальная стоимость проекта равна (рис. 4.43):

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij} = 215 \text{ у. д. е.}$$

Максимальная стоимость проекта равна:

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} C_{ij} = 425 \text{ у. д. е.,}$$

продолжительность критического пути – 17 дней (рис. 4.44).

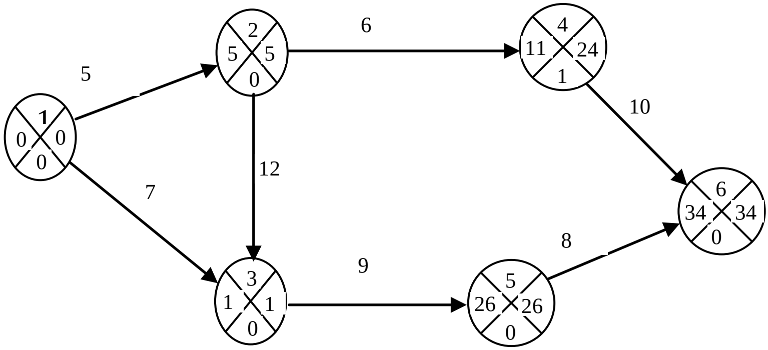


Рис. 4.43. Сетевой график проекта при минимальной его стоимости

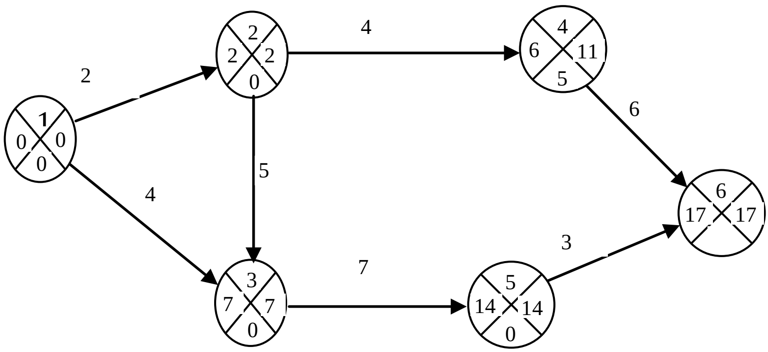


Рис. 4.44. Сетевой график проекта при максимальной его стоимости

Требуется найти начало и окончание работ при необходимости выполнения проекта за фиксированное время $t_0 = 20$ дней при наименьшей стоимости затрат.

Целевую функцию экономико-математической задачи можно записать в следующем виде:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} - d_{ij})].$$

При условиях:

1. По предельной продолжительности работ –

$$d_{ij} \le t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} \le D_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

2. По окончании проекта –

$$t_{in}^{0} \le t_{0}, (i, n) \in \vec{e}.$$

3. По последовательности выполнения работ –

$$\text{а) } t_{1j}^{\text{н}} = 0, (i, j) \in E,$$

$$\text{б) } t_{jr}^{\text{н}} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$t_{jr}^{\text{н}}, t_{ij}^{0} \ge 0, (i, j) \in \vec{e};$$

3) составим развернутую экономико-математическую модель:

$$F_{\min} = 50 - 10\,(t_{1,2}^{0} - t_{1,2}^{\text{н}} - 2) + 30 - 6{,}67\,(t_{1,3}^{0} - t_{1,3}^{H} - 4) + 85 -$$

$$- 7{,}86\,(t_{2,3}^{0} - t_{2,3}^{H} - 5) + 60 - 10\,(t_{2,4}^{0} - t_{2,4}^{H} - 4) + 40 -$$

$$- 5\,(t_{3,5}^{0} - t_{3,5}^{\text{н}} - 7) + 70 - 2{,}5\,(t_{4,6}^{0} - t_{4,6}^{\text{н}} - 6) + 90 - 13\,(t_{5,6}^{0} - t_{5,6}^{\text{н}} - 3).$$

I. По предельной продолжительности работ –

1. $t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} \ge 2$	8. $t_{12}^{0} - t_{12}^{\text{н}} \le 5$
2. $t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} \ge 4$	9. $t_{13}^{0} - t_{13}^{\text{н}} \le 7$
3. $t_{23}^{0} - t_{23}^{\text{н}} \ge 5$	10. $t_{23}^{0} - t_{23}^{\text{н}} \le 12$
4. $t_{24}^{0} - t_{24}^{\text{н}} \ge 4$	11. $t_{24}^{0} - t_{24}^{\text{н}} \le 6$
5. $t_{35}^{0} - t_{35}^{H} \ge 7$	12. $t_{35}^{0} - t_{35}^{H} \le 9$
6. $t_{46}^{0} - t_{46}^{H} \ge 6$	13. $t_{46}^{0} - t_{46}^{H} \le 10$
7. $t_{56}^{0} - t_{56}^{H} \ge 3$	14. $t_{56}^{0} - t_{56}^{H} \le 8$.

II. По окончании проекта –

$$15.\ t_{56}^{0} \le 20$$

$$16.\ t_{46}^{0} \le 20.$$

III. По последовательности выполнения работ –

$$17.\ t_{12}^{\text{Н}} = 0 \qquad 22.\ t_{35}^{\text{Н}} \ge t_{23}^{0}$$

$$18.\ t_{13}^{\text{Н}} = 0 \qquad 23.\ t_{35}^{\text{Н}} \ge t_{13}^{0}$$

$$19.\ t_{23}^{\text{Н}} \ge t_{12}^{0} \qquad 24.\ t_{46}^{\text{Н}} \ge t_{24}^{0}$$

$$20.\ t_{24}^{\text{Н}} \ge t_{12}^{0} \qquad 25.\ t_{56}^{\text{Н}} \ge t_{35}^{0}.$$

$$21.\ t_{24}^{\text{Н}} \ge t_{12}^{0}$$

Преобразуем целевую функцию:

$$F_{\min} = 50 - 10\,t_{1,2}^{0} + 10t_{1,2}^{\text{Н}} + 20 + 30 - 6{,}67\,t_{1,3}^{0} + 26{,}68 + 6{,}67\,t_{1,3}^{\text{Н}} + 85 -$$

$$-7{,}86\,t_{2,3}^{0} + 7{,}86\,t_{2,3}^{\text{Н}} + 39{,}3 + 60 - 10\,t_{2,4}^{0} + 10\,t_{2,3}^{\text{Н}} + 40 + 40 - 5t_{3,5}^{0} + 5t_{3,5}^{\text{Н}} +$$

$$+35 + 70 + 2{,}5t_{4,6}^{\text{Н}} + 15 - 2{,}5t_{4,6}^{0} + 90 + 13t_{5,6}^{\text{Н}} + 39 - 13t_{5,6}^{0} = 639{,}98 -$$

$$-10t_{1,2}^{0} + 10t_{1,2}^{\text{Н}} - 6{,}67t_{1,3}^{0} + 6{,}67t_{1,3}^{\text{Н}} - 7{,}86t_{2,3}^{0} + 7{,}86t_{2,3}^{\text{Н}} - 10t_{2,4}^{0} + 10t_{2,4}^{\text{Н}} -$$

$$-5t_{3,5}^{0} + 5t_{3,5}^{\text{Н}} - 2{,}5t_{4,6}^{0} + 2{,}5t_{4,6}^{\text{Н}} - 13t_{5,6}^{0} + 13t_{5,6}^{\text{Н}}.$$

В процессе решения задачи на компьютере получены следующие результаты:

$$t_{12}^{\text{Н}} = 0 \qquad t_{12}^{0} = 2$$

$$t_{13}^{\text{Н}} = 0 \qquad t_{13}^{0} = 7$$

$$t_{23}^{\text{Н}} = 2 \qquad t_{23}^{0} = 7$$

$$t_{24}^{\text{Н}} = 2 \qquad t_{24}^{0} = 8$$

$$t_{35}^{\text{Н}} = 7 \qquad t_{35}^{0} = 14$$

$$t_{46}^{\text{Н}} = 8 \qquad t_{46}^{0} = 18$$

$$t_{56}^{\text{Н}} = 14 \qquad t_{56}^{0} = 20.$$

Проанализируем результаты решения задачи (рис. 4.45).

Рассчитаем оптимальные затраты средств, направляемых в работы (i, j) (табл. 4.24):

$$C_{ij\text{опт}} = C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{Н}} - d_{ij}) .$$

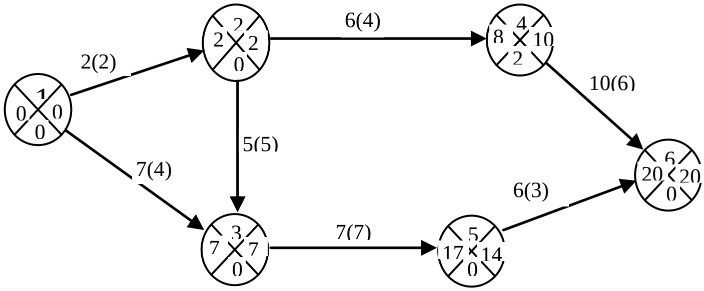


Рис. 4.45. Сетевой график проекта при оптимальной его стоимости

Определим количество средств, необходимых для сокращения срока выполнения проекта:

$$F_{\min} = 639{,}98 - 303{,}99 = 336{,}0 \text{ у. д. е. или } \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij\text{опт}} = 336{,}0 \text{ у. д. е.}$$

Т а б л и ц а 4.24. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работы						
	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)
C_{ij}	50	30	85	60	40	70	90
h_{ij}	10	6,67	7,86	10	5	2,5	13
$t_{ij} = t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H}$	2	7	5	6	7	10	6
d_{ij}	2	4	5	4	7	6	3
$C_{ij\text{опт}}$	50	10	85	40	40	60	51
c_{ij}	20	10	30	40	30	60	25

Данный проект можно выполнить за 20 дней, вместо 34, если вложить в него 336 у. д. е. средств вместо 215, т. е. необходимо дополнительно вложить 121 у. д. е.:

– в работу (1,2) – 50 – 20 = 30 у. д. е., что позволит сократить ее продолжительность с 5 до 2 дней;

– в работу (2,3) – 85 – 30 = 55 у. д. е., что сократит ее продолжительность с 12 до 5 дней;

– в работу (3,5) – 40 – 30 = 10 у. д. е., что уменьшит срок ее выполнения с 9 до 7 дней;

– в работу (5,6) – 51 – 25 = 26 у. д. е. при уменьшении срока ее выполнения с 8 до 6 дней.

4.10. Варианты задачи о назначениях

Ставится задача так распределить исполнителей по работам, чтобы суммарная стоимость выполненных работ была максимальной или суммарные затраты на выполнение работ были минимальными.

Сформулированную таким образом *задачу о назначениях* можно представить как транспортную задачу, в которой исполнители соответствуют пунктам отправления груза A_i, а работы – пунктам назначения B_j. Если число исполнителей не равно числу работ, то открытая задача о назначениях должна быть приведена *к закрытому виду* путем ввода фиктивных исполнителей или фиктивных работ.

Особенность задачи о назначениях состоит в том, что каждый исполнитель может работать только на одной работе, следовательно, $A_i = 1$; $B_j = 1$, и неизвестные величины задачи могут принимать только два значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-й исполнитель выполняет работу вида } j; \\ 0, \text{в противном случае} \, (i, j = \overline{1,n}; i \neq j). \end{cases}$$

Назначения исполнителей на работы x_{ij} должны удовлетворять ограничениям:

1. По распределению работ для выполнения –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1,n} \, .$$

2. По распределению исполнителей по работам –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \, .$$

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0; x_{ij} \in \{0,1\}.$$

При этом в зависимости от постановки требуется максимизировать или минимизировать целевую функцию:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \text{или} \quad F_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ .$$

где c_{ij} – соответственно производительность исполнителя вида i при выполнении работы вида j или затраты на выполнение работы вида j исполнителем вида i.

Пример. Необходимо распределить 8 исполнителей на выполнение 8 работ с целью максимизации их стоимости. Производительность труда работников приведена в табл. 4.25.

Т а б л и ц а 4.25. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Исполнители A_i	Работы B_j							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	4	6	5	1	7	2	9	13
A_2	7	8	12	5	4	–	–	10
A_3	1	3	5	8	9	–	–	14
A_4	15	13	10	6	3	–	–	2
A_5	3	–	–	2	10	8	12	5
A_6	8	–	–	7	12	6	1	3
A_7	7	–	–	4	8	5	6	1
A_8	2	5	9	10	13	1	16	4

Работников A_5, A_6 и A_7 не целесообразно использовать при выполнении работ B_2 и B_3, а на работах B_6 и B_7 нельзя использовать работников A_2, A_3 и A_4.

Составим ограничения развернутой экономико-математической задачи:

I. По распределению работ для выполнения –

1) работа $B_1 - x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} = 1$;

2) работа $B_2 - x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{82} = 1$;

3) работа $B_3 - x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{83} = 1$;

4) работа $B_4 - x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} = 1$;

5) работа $B_5 - x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} + x_{85} = 1$;

6) работа $B_6 - x_{16} + x_{56} + x_{66} + x_{76} + x_{86} = 1$;

7) работа $B_7 - x_{17} + x_{57} + x_{67} + x_{77} + x_{87} = 1$;

8) работа $B_8 - x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{88} = 1$;

II. По распределению исполнителей по работам –
9) исполнитель $A_1 - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1$;
10) исполнитель $A_2 - x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{28} = 1$;
11) исполнитель $A_3 - x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{38} = 1$;
12) исполнитель $A_4 - x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{48} = 1$;
13) исполнитель $A_5 - x_{51} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 1$;
14) исполнитель $A_6 - x_{61} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} = 1$;
15) исполнитель $A_7 - x_{71} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} = 1$;
16) исполнитель $A_8 - x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} + x_{87} + x_{88} = 1$.

$$F_{\max} = 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 1x_{14} + 7x_{15} + 2x_{16} + 9x_{17} + 13x_{18} + 7x_{21} +$$
$$+ 8x_{22} + 12x_{23} + 5x_{24} + 4x_{25} + 10x_{28} + 1x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 8x_{34} +$$
$$+ 9x_{35} + 14x_{38} + 15x_{41} + 13x_{42} + 10x_{43} + 6x_{44} + 3x_{45} + 2x_{48} + 3x_{51} +$$
$$+ 2x_{54} + 10x_{53} + 8x_{56} + 12x_{57} + 5x_{58} + 8x_{61} + 7x_{64} + 12x_{65} + 6x_{66} +$$
$$+ 1x_{67} + 3x_{68} + 7x_{71} + 4x_{74} + 8x_{75} + 5x_{76} + 6x_{77} + 1x_{78} + 2x_{81} + 5x_{82} +$$
$$+ 9x_{83} + 10x_{84} + 13x_{85} + 1x_{86} + 16x_{87} + 4x_{88}.$$

Для решения задачи используем «Поиск решения» в электронных таблицах Excel. При этом x_{ij} – двоичные, т. е. принимают значение 1 или 0.

При решении задачи на компьютере получены следующие значения:

$$x_{15} = 1 \quad x_{56} = 1$$
$$x_{23} = 1 \quad x_{61} = 1$$
$$x_{44} = 1 \quad x_{78} = 1$$
$$x_{52} = 1 \quad x_{87} = 1$$
$$F_{\max} = 115.$$

Следует отметить, что значения других переменных экономико-математической задачи равны нулю. Для неизвестных величин задачи, получивших значение «1», следует подчеркнуть, что первый индекс x_{ij} указывает номер исполнителя, второй индекс – номер работы. При таком распределении исполнителей по работам выполненная стоимость работ будет максимальной и равной 115 у. д. е.

Для решения задач о назначениях можно использовать *венгерский метод*, названный в честь венгерского математика Денеша Кёнига.

Пример. Требуется пятерых работников распределить между пятью работами с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 4.26.

Т а б л и ц а 4.26. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в строках**

A_i	B_j					$\min c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	6	7	9	6	8	6
A_2	8	9	7	8	9	7
A_3	9	7	8	7	8	7
A_4	7	8	9	8	9	7
A_5	10	7	8	7	10	7

Алгоритм венгерского метода:

1) среди элементов каждой строки матрицы c_{ij} (табл. 4.26) находим наименьшие элементы:

$$(\min_j c_{ij});$$

2) из элементов каждой строки матрицы c_{ij} вычитаем выбранные минимальные элементы, результаты заносим в новую матрицу (табл. 4.27);

3) выбираем среди элементов каждого столбца новой матрицы (табл. 4.27) наименьшие элементы ($\min_i c_{ij}$);

Т а б л и ц а 4.27. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в столбцах**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	0	2
A_2	1	2	0	1	2
A_3	2	0	1	0	1
A_4	0	1	2	1	2
A_5	3	0	1	0	3
$\min c_{ij}$	0	0	0	0	1

4) из элементов каждого столбца матрицы почленно вычитаем выбранные минимальные элементы, в результате получаем таблицу, в которой каждая строка и каждый столбец содержат хотя бы по одному нулевому значению (табл. 4.28);

5) используя нулевые значения элементов, получаем допустимое решение задачи о назначениях;

Т а б л и ц а 4.28. **Допустимое решение задачи о назначениях**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	$\underline{0}$	1
A_2	1	2	$\underline{0}$	1	1
A_3	2	0	1	0	$\underline{0}$
A_4	$\underline{0}$	1	2	1	1
A_5	3	$\underline{0}$	1	0	2

6) анализируя допустимое решение, находим оптимальное решение задачи о назначениях.

Проанализируем данные табл. 4.28. Строки A_2 и A_4 содержат по одному нулю, выделим их и примем $x_{23} = 1$ и $x_{41} = 1$. Строки и столбцы, содержащие эти элементы, исключим из рассмотрения. Это строки A_2 и A_4 и столбцы B_1 и B_3.

Среди оставшихся строк находим строку с минимальным количеством нулей. В нашем примере это строка A_1, содержащая один нуль, следовательно, принимаем $x_{14} = 1$ и исключаем из анализа первую строку и четвертый столбец.

Строка A_5 содержит один нуль, поэтому положим, что $x_{52} = 1$.

В оставшейся строке A_3 нулевой элемент укажет на $x_{35} = 1$.

Переменные x_{14}, x_{23}, x_{35}, x_{41}, x_{52}, равные единице, укажут на оптимальную расстановку работников по работам, которой соответствуют суммарные затраты:

$$F_{\min} = 6 + 7 + 8 + 7 + 7 = 35 \text{ у. д. е.}$$

Рассмотрим *различные ситуации при решении задачи о назначениях:*

а) допустим, после проведения алгоритма венгерского метода имеется столбец или строка, не содержащие нулевых элементов, это является признаком недопустимого решения задачи. Для его поиска необходимо выполнить следующее:

1) провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (кроме диагоналей) таким образом, чтобы они проходили через все нулевые элементы таблицы;

2) найти наименьший элемент среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых;

3) скорректировать элементы матрицы на величину выбранного элемента:

– вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые;

– прибавить выбранный наименьший элемент ко всем элементам таблицы, которые находятся на пересечении прямых линий;

– все элементы, которые пересекает только одна прямая, оставить без изменения;

4) используя полученное допустимое значение, найти оптимальное решение задачи.

Пример. Получено следующее решение экономико-математической задачи (табл. 4.29).

Т а б л и ц а 4.29. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Так, в столбцах B_2 и B_4 нулевые элементы стоят только в строке A_4, следовательно, можно из четырех назначений выполнить только три. Для выполнения всех назначений необходимо иметь нулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце таблицы. Так как данное условие не соблюдается, то проводим наименьшее число прямых линий через нулевые элементы таблицы (табл. 4.30).

Т а б л и ц а 4.30. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Наименьшим элементом, через который не прошли прямые линии, является число 1. Используя вышеизложенные правила, рассчитываем элементы новой таблицы (табл. 4.31).

Т а б л и ц а 4.31. **Скорректированные элементы таблицы**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	$\underline{0}$	5	5
A_2	$\underline{0}$	1	3	6
A_3	7	3	$\underline{0}$	1
A_4	4	0	1	$\underline{0}$

Осуществляем назначения. Оптимальное решение будет равно:

$$x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1;$$

б) алгоритм венгерского метода предполагает минимизацию целевой функции задачи о назначениях. Если же целевую функцию требуется максимизировать, то все элементы первой таблицы умножают на (–1) и минимальный (наибольший по модулю отрицательный) элемент вычитают из элементов соответствующих строк, получая положительные элементы скорректированной таблицы. Далее задача о назначениях решается с использованием вышеизложенного алгоритма;

в) если в задаче имеются недопустимые назначения, то в соответствующую клетку таблицы заносят максимальный элемент c_{ij}, который позволяет избежать этого назначения;

г) если число работников m не равно числу работ n, то для решения задачи вводят фиктивных исполнителей или фиктивные работы.

4.11. Задача коммивояжера и ее приложения

Задачей, схожей с задачей о назначениях, является *задача о коммивояжере*. Постановка ее состоит в том, что имеется n городов, которые должен посетить коммивояжер только один раз, выезжая из первого города и возвращаясь в исходный пункт.

Цель решения задачи – найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий через каждый пункт только один раз, называемый полным циклом.

Введем неизвестные величины:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется минимизировать маршрут коммивояжера:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – расстояние между городом i и городом j.

При условиях:

1. По въезду в города – $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}$.

2. По выезду из городов – $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$.

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Основными методами решения задачи коммивояжера являются методы решения целочисленных задач линейного программирования:

– методы ветвей и границ;

– отсекающих плоскостей.

Идея применения метода отсекающих плоскостей для решения задачи коммивояжера состоит в том, чтобы в первоначальную задачу ввести дополнительные ограничения, позволяющие исключить возможность разрыва пути коммивояжера и появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов. Общее количество таких ограничений равно:

$$(n-1)\cdot(n-2).$$

Они имеют следующий вид:

по формированию маршрута коммивояжера –

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n-1,\ i,\ j = \overline{2,n},\ i \neq j.$$

Основным недостатком применения метода отсекающих плоскостей к решению данной задачи является увеличение размерности задачи при введении дополнительных ограничений.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятиям «граф», «вершина», «дуга», «ребро», «степень» вершины».
2. Что такое путь, критический путь?
3. Как определяется длина пути?
4. Какими способами можно задать граф?
5. Чем отличается орграф от неориентированного графа?
6. Как формируются матрицы смежности дуг и ребер?
7. Как построить матрицы инциденций для дуг и ребер?
8. Каким образом можно сформировать матрицу смежности вершин?
9. Какими способами можно упорядочить граф?
10. Дайте определение понятию «минимальное покрывающее дерево».
11. Приведите алгоритм построения минимального покрывающего дерева.
12. Какими методами можно обосновать кратчайшую цепь?
13. Приведите алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшей цепи.
14. Приведите алгоритм Флойда для решения задач о кратчайших цепях.
15. Дайте определение понятию «треугольный оператор Флойда».
16. Как построить матрицу расстояний и матрицу последовательности вершин графа?
17. Приведите структурные модели прямой и двойственной задач линейного программирования для обоснования кратчайшего пути между исходной и завершающей вершинами цепи.
18. Как формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) графа?
19. Приведите алгоритм Форда для решения задач о максимальном потоке в сети.
20. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования максимального потока в сети.
21. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования потока минимальной стоимости в сети.
22. Дайте определение понятиям «сетевой график», «событие», «работа», «фиктивная работа».

23. Как рассчитать ранний, поздний сроки свершения события, резерв времени события?

24. Как рассчитать ранние сроки начала и окончания работ?

25. Как рассчитать поздние сроки начала и окончания работ?

26. Приведите формулы расчета полного, свободного и независимого резервов времени работ.

27. Как строится график Ганта?

28. Приведите алгоритм распределения ресурсов на сетях.

29. Как построить эпюру интенсивности потребления ресурса?

30. Каким образом оптимизируется порядок выполнения работ при распределении ресурсов на сетях?

31. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации проекта во времени с целью минимизации суммарных затрат дополнительных вложений.

32. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации проекта во времени с целью минимизации срока выполнения работ проекта.

33. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации сети по стоимости.

34. Как определяется и что показывает коэффициент дополнительных затрат в задачах оптимизации сетей по стоимости?

35. Как определить оптимальные затраты средств в работы при оптимизации сетей по стоимости?

36. Перечислите особенности задач о назначениях.

37. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи о назначениях.

38. Приведите алгоритм венгерского метода решения задачи о назначениях.

39. Охарактеризуйте различные ситуации при решении задачи о назначениях.

40. Охарактеризуйте сущность задачи коммивояжера.

41. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи коммивояжера.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шафранская Ирина Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

В двух частях

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. П. Савчиц*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 22.07.2025. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 11,13.
Тираж 60 экз. Заказ .

Белорусская государственная сельскохозяйственная академия.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в Белорусской государственной сельскохозяйственной академии.
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.