МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

И. В. Шафранская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
в сфере высшего образования Республики Беларусь
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
общего высшего образования по специальности
6-05-0811-04 Агробизнес*

Горки
Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия

УДК 330.45(076.5)
ББК 22.18 я73
Ш30

Одобрено методической комиссией
экономического факультета 24.02.2025 (протокол № 6)
и Научно-методическим советом
Белорусской государственной сельскохозяйственной академии
26.02.2025 (протокол № 7)

Автор:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*

Рецензенты:
кандидат экономических наук, доцент *Н. В. Артюшевский*;
кандидат педагогических наук, доцент *О. Л. Сапун*

Шафранская, И. В.
Ш30 Исследование операций в экономике. Практикум : учебно-методическое пособие / И. В. Шафранская. – Горки : Белорус. гос. с.-х. акад., 2025. – 280 с.
ISBN 978-985-882-689-5.

Приведены информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе методов исследования операций осуществляется решение задач по оптимизации управления предприятиями АПК. Издание предназначено для подготовки студентов к проведению научных исследований с применением методов исследования операций и персональных компьютеров.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение общего высшего образования по специальности 6-05-0811-04 Агробизнес.

УДК 330.45(076.5)
ББК 22.18 я73

ISBN 978-985-882-689-5

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и возрастающий объем стоящих перед экономистами задач требует использования количественных методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные решения по вопросам управления предприятиями АПК.

В этих условиях важное значение имеет обучение студентов основам моделирования и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, связанных с планированием использования земельных, материальных, трудовых и денежных ресурсов, определения нормативных экономических показателей, параметров работы предприятий, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на предприятиях АПК.

Задания ориентированы на учет реальных производственных ситуаций, предполагают широкое использование персональных компьютеров и учитывают современные достижения в развитии количественных методов и моделей.

Порядок размещения материала предполагает переход от простых к более сложным темам.

Тема 1 посвящена изучению конфликтной ситуации на основе игрового моделирования и разработке рекомендаций по наиболее рациональному действию каждого из участников игры.

Изучение материала темы 2 позволяет на основе экономической информации по предприятиям научиться составлять системы линейных неравенств, находить решение линейных экономико-математических задач.

Задания темы 3 знакомят студентов с основными понятиями систем сетевого планирования и управления. Излагается методика решения сетевых моделей симплексным методом.

Материал темы 4 посвящен изучению моделей теории расписаний, позволяющих минимизировать простои оборудования предприятий.

Темы 5 и 6 посвящены моделям теории массового обслуживания и теории управления запасами.

Порядок выполнения заданий предусматривает индивидуальную работу каждого студента. Содержание индивидуального задания формирует студент. Для того чтобы получить исходные данные заданий, необходимо в формулы, имеющиеся в задании, подставить значения N (равное последней цифре шифра зачетной книжки) и K (равное 1, если фамилия студента начинается с букв А, Б, В, Г; 2 – Д, Е, Ж, З, И, Н; 3 – К, Л, М, П; 4 – С, Т, О, Р; 5 – Ш, Щ, Э, У, Ф, Ц, Ч, Х, Ю, Я).

1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т. е. таких действий, которые обеспечивали бы игроку наилучший результат при многократном повторении игры (прил. А). При этом *игра* рассматривается как упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам, которые устанавливают: выбор действий игроков на каждом этапе игры; информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении своих выборов; выигрыши или проигрыши каждого игрока после завершения игры.

Суть игры состоит в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший ход игры, т. е. величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

При этом оптимальной считается та стратегия, которая обеспечивает игроку при многократном повторении игры максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш.

Принятие решений может происходить в условиях определенности, неопределенности и риска.

1.1. Статистические игры

Игра – это формализованное описание (модель) конфликтной ситуации (или ситуации с неполным совпадением интересов сторон, имеющих общие цели), включающее четко определенные правила действий участников (игроков), добивающихся выигрыша в результате принятия той или иной стратегии.

Статистическая игра (игра с «природой») – это игра, в которой имеется только один игрок, причем исход игры зависит не только от его решения, но и от состояния «природы», т. е. не от сознательно противодействующего противника, а от объективной, невраждебной действительности. При обосновании оптимальной стратегии игрока используются различные критерии.

Задание 1.1. Требуется дать рекомендации сельскохозяйственной организации по выращиванию картофеля в зависимости от почвенного состава полей и погодных условий с целью достижения максимальной урожайности.

Исходная информация.

1. Имеются три поля с различным почвенным плодородием: A_1, A_2, A_3.

2. Погодные условия характеризуются тремя состояниями: $П_1$ – неблагоприятные, $П_2$ – средние, $П_3$ – благоприятные.

3. Вероятность появления погодных условий составит:

$$p_{П_1} = 0,45; \quad p_{П_2} = 0,35; \quad p_{П_3} = 0,20.$$

4. Средняя урожайность картофеля в зависимости от погодных условий и качества почв приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1. **Урожайность картофеля, ц/га**

Поля с разным почвенным плодородием	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	190	200	220
A_2	170+2K	180	240–2K
A_3	150+2N	210	250–2N

Задание 1.2. Необходимо обосновать дозы внесения органических удобрений в расчете на 1 га картофеля с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация планирует выращивать картофель на конкретном поле.

2. На урожайность картофеля оказывают влияние погодные условия (стратегия $П_1$ – сухое лето, $П_2$ – нормальное, $П_3$ – влажное) и количество вносимых под сельскохозяйственную культуру удобрений (стратегия A_1 – меньше рекомендуемой нормы внесения, A_2 – соответствует норме, A_3 – больше нормы внесения удобрений).

3. Прибыль с 1 га посева картофеля в зависимости от норм внесения удобрений и погодных условий приведена в табл. 1.2.

Таблица 1.2. **Прибыль с 1 га картофеля, у. д. е.**

Норма внесения удобрений, ц д. в.	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	250	300	180 + K
A_2	350	400 – N	200
A_3	150 + N	450 – K	350

Задание 1.3. Требуется дать рекомендации сельскохозяйственной организации по выращиванию сельскохозяйственных культур в зависимости от погодных условий с целью достижения максимальных результатов.

Исходная информация.

1. На поле предполагается выращивать одну из культур: тимофеевку, вику и ежу сборную.

2. Погодные условия, влияющие на урожайность сельскохозяйственных культур, характеризуются тремя состояниями: $П_1$ – засушливый год, $П_2$ – нормальный год, $П_3$ – дождливый.

3. Вероятность появления погодных условий составит:

$$p_{П_1} = 0,27; \; p_{П_2} = 0,35; \; p_{П_3} = 0,38.$$

4. Средняя урожайность культур в зависимости от погодных условий приведена в табл. 1.3.

Т а б л и ц а 1.3. **Урожайность сельскохозяйственных культур, ц к. ед/га**

Сельскохозяйственная культура	Погодные условия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
Тимофеевка	22 + К	30 – 0,2К	26
Вика	23	28	27
Ежа сборная	21 + N	29 – 0,2N	28

Задание 1.4. Требуется обосновать вариант производства модификации товара, величина предложения которого обеспечит предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса, приведены в табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1.4. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,0	2,1	2,0 + 0,1N
T_2	1,9	2,2 – 0,1К	2,1
T_3	1,8 + 0,1К	1,9	2,3

Задание 1.5. Необходимо обосновать объем заказываемой партии товара с целью минимизации дополнительных затрат, связанных с хранением товара и срочным его завозом.

Исходная информация.

1. Руководство магазина заказывает определенный товар с оптовой базы, спрос на который колеблется в пределах от 50 до 100 шт. (стратегии второго игрока).

2. Если спрос на товар будет неудовлетворен, то можно срочно заказать и завезти недостающее количество товара в магазин. Затраты по срочному заказу составляют 4,0 + 0,5N у. д. е. в расчете на единицу товара.

3. Если спрос будет меньше имеющегося количества товара, то нереализованный товар будет храниться на складе. Расходы на хранение единицы товара составляют 2 + 0,2К у. д. е.

Задание 1.6. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия, т. е. стратегию продаж изделий (C_1, C_2, C_3, H_1, H_2, H_3).

Исходная информация.

Предприятие планирует продажи старых товаров (C_1, C_2, C_3) при наличии новых товаров (H_1, H_2, H_3). Выигрыш от продажи товаров (a_{ij}) и условные вероятности продажи (p_{ij}) приведены в табл. 1.5.

Т а б л и ц а 1.5. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Старые товары	Новые товары		
	$H_1(p)$	$H_2(p)$	$H_3(p)$
C_1	6 (0,5)	4 (0,3)	1 (0,2)
C_2	7 (0,3)	2 + 0,1N (0,1)	5 (0,6)
C_3	4 (0,3)	3 + 0,1K (0,3)	6 (0,4)

Используя приведенную информацию заданий 1.1–1.6, необходимо:

1) используя критерии Байеса (с учетом вероятности появления исходов) и Лапласа, определить, на каком участке сельскохозяйственная культура (или какая сельскохозяйственная культура) обеспечивает сельскохозяйственной организации наибольшую урожайность; производство или продажа какого товара (или товаров) обеспечивает предприятию наибольшую прибыль;

2) используя критерий Вальда, определить, на каком участке сельскохозяйственная культура гарантирует сельскохозяйственной организации наилучшие результаты в наихудших условиях; производство или продажа какого товара гарантирует предприятию наилучшие результаты в наихудших условиях;

3) обосновать оптимальную стратегию предприятия по критерию Сэвиджа. Для этого необходимо следующее:

а) построить матрицу риска (определить значение коэффициентов риска r_{ij}):

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}, \text{ по каждому столбцу } j,$$

где i – номер строки;

j – номер столбца;

a_{ij} – элемент матрицы а, стоящий в i-й строке j-го столбца;

$\max a_{ij}$ – максимальный элемент a_{ij} в каждом столбце;

б) найти максимальное значение коэффициентов риска по каждой строке, т. е. $\max\limits_{j} r_{ij}$;

в) найти минимальное значение коэффициентов риска по столбцу, полученному выше, т. е. $\min\limits_{i}(\max\limits_{j} r_{ij})$.

В результате определим стратегию предприятия, характеризующуюся наименьшим максимальным риском;

4) определить по критерию Гурвица оптимальную стратегию предприятия, которая выбирается по формуле:

$$\max[\lambda \cdot \min a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max a_{ij}],$$

где $0 \le \lambda \le 1$;

5) обосновать, используя различные критерии, на каком участке сельскохозяйственная культура обеспечивает предприятию наибольшую урожайность при заданных условиях; производство или продажа какого товара (товаров) более выгодны предприятию при любом уровне спроса.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.7. Необходимо дать рекомендации фермеру для получения максимальной урожайности яровых зерновых культур при любых природно-климатических исходах.

Исходная информация.

Фермер планирует посев яровых зерновых культур в текущем году на различных полях, имеющих в почве определенное количество влаги. Он может сознательно выбирать сев на участке с влажностью ниже, на уровне нормы и выше нормы (стратегии S_1, S_2, S_3). Урожайность яровых зерновых будет зависеть от метеорологического фактора, в качестве которого берется гидротермический коэффициент ниже, со средним и выше среднего значения (стратегии M_1, M_2, M_3). Гидротермический коэффициент представляет собой отношение суммы осадков за определенный период к сумме температур выше 10 °С за тот же период, уменьшенной в десять раз.

Средняя урожайность яровых зерновых за предыдущие годы при каждой паре стратегий (S_i, M_j) представлена в табл. 1.6.

Таблица 1.6. **Матрица урожайности яровых зерновых, ц/га**

Стратегия природы и исследователя	M_1	M_2	M_3
S_1	27,8	29,6	44,1
S_2	30,5	32,7	40,9
S_3	38,6	30,5	29,5

Задание 1.8. Необходимо дать рекомендации сельскохозяйственному предприятию для получения максимальной урожайности элитных семян озимой ржи на участках, различающихся запасом продуктивной влаги.

Исходная информация.

Предприятие, специализирующееся на производстве элитных семян зерновых культур, предполагает заключение договора на поставку семян озимой ржи с отдельными сельскохозяйственными кооперативами. Для возделывания данной культуры имеются три посевных участка, расположенных в различных подразделениях и различающихся запасом продуктивной влаги во время сева (стратегии A_1, A_2, A_3). Урожайность озимой ржи в определенной степени зависит от количества осадков за вегетационный период. Опыт показывает, что по многолетним данным можно установить среднюю урожайность озимой ржи на каждом из полей в зависимости от климатического фактора: осадков меньше нормы (стратегия $П_1$), нормальное количество (стратегия $П_2$) и выше нормы (стратегия $П_3$). Данные сведем в табл. 1.7.

Таблица 1.7. **Платежная матрица урожайности озимой ржи, ц/га**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	25,0	28,6	23,2
A_2	32,2	39,5	32,4
A_3	33,1	41,4	31,9

Применяя различные критерии, экономическая служба должна выработать научные рекомендации о стратегии посева озимой ржи для последующего заключения обоснованного контракта по продаже семян этой культуры.

Задание 1.9. Необходимо определить наиболее целесообразные варианты технологической переработки сырья.

Исходная информация.

Овощеконсервный завод может ежедневно изготовлять 80 единиц консервов по одному из четырех технологических способов. Сельскохозяйственное сырье, необходимое для изготовления этих продуктов, подразделяется на два сорта. Известны затраты на изготовление консервов по каждому технологическому способу из сырья каждого сорта. Рынок сбыта пищевых продуктов может находиться в двух состояниях. Известно, что при первом состоянии конъюнктуры рынка каждую единицу продукта перерабатывающего предприятия коммерческая служба может реализовать по цене 20 у. д. е., а при втором состоянии конъюнктуры рынка – по цене 18 у. д. е. Решая задачу, используйте информацию табл. 1.8.

Таблица 1.8. **Прибыль от реализации консервов, у. д. е.**

Технологические способы переработки	A_i	Ежедневный сбыт консервов ($П_j$)			
		из 1-го сорта при первом состоянии рынка	из 1-го сорта при втором состоянии рынка	из 2-го сорта при первом состоянии рынка	из 2-го сорта при втором состоянии рынка
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
1	A_1	1040	880	560	400
2	A_2	800	640	1120	960
3	A_3	960	800	800	640
4	A_4	1040	880	720	560

Следовательно, в качестве статистика выступает коммерческая служба предприятия, которая может принять одно из четырех следующих решений (стратегии игрока A):

A_1 – выпуск консервов по первому технологическому способу;

A_2 – выпуск консервов по второму технологическому способу;

A_3 – выпуск консервов по третьему технологическому способу;

A_4 – выпуск консервов по четвертому технологическому способу.

Так как качество сырья и цена консервов зависят от случайных факторов, можно выделить четыре возможных состояния среды (стратегии игрока $П$):

$П_1$ – сырье поступает первого сорта при первом состоянии рынка сбыта;

$П_2$ – сырье поступает первого сорта при втором состоянии рынка сбыта;

$П_3$ – сырье поступает второго сорта при первом состоянии рынка сбыта;

$П_4$ – сырье поступает второго сорта при втором состоянии рынка сбыта.

Задание 1.10. Требуется обосновать оптимальную стратегию выпуска новых видов продукции для мясокомбината.

Исходная информация.

На мясоперерабатывающем комбинате готовятся к переходу на выпуск новых видов продукции для освоения зарубежных рынков сбыта. При этом возможны четыре решения – стратегии игрока A (стратегии A_1, A_2, A_3, A_4), каждому из которых соответствует определенная модификация выпускаемой продукции. Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки (степени обеспеченности производства материальными ресурсами), которая может быть трех видов – стратегии игрока $П$ (стратегии $П_1$, $П_2$, $П_3$). Каждому сочетанию решений A_i и обстановки $П_j$ соответствует определенный выигрыш в виде дохода от продажи новых видов продукции (табл. 1.9).

Таблица 1.9. **Платежная матрица дохода от сбыта продукции, тыс. у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0,5	0,7	0,8
A_2	1,4	0,4	0,6
A_3	0,7	1,7	0,4
A_4	1,6	0,2	0,7

Задание 1.11. Требуется обосновать оптимальную стратегию реализации овощной продукции населению республики для агроторговой организации.

Исходная информация.

Агроторговая организация планирует населению нашей республики реализацию в зимний сезон овощной продукции, учитывая возможные варианты покупательского спроса – стратегии $П_j$ (низкий, средний, высокий, очень высокий).

Служба маркетинга разрабатывает три варианта стратегий сбыта товаров на различных рынках – стратегии A_i. Объем товарооборота, зависящий от стратегий агроторговой организации и покупательского спроса населения, представлен в табл. 1.10.

Т а б л и ц а 1.10. **Платежная матрица товарооборота, у. д. е.**

A_i	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	630	610	620	625
A_2	750	770	710	725
A_3	625	635	640	660

Задание 1.12. Требуется обосновать оптимальную стратегию реализации изделий из льноволокна для торгового объединения.

Исходная информация.

Торговое объединение ведет переговоры с зарубежной организацией о продаже изделий из льноволокна. Плановый отдел в ходе предварительных соглашений стремится повысить эффективность заключаемого контракта и для достижения цели может воспользоваться тремя возможными стратегиями (стратегии A_1, A_2, A_3). Зарубежная организация имеет возможность применить три стратегии (стратегии $П_1$, $П_2$, $П_3$), позволяющие снизить выгодность договора для торгового объединения.

Прибыль торговой структуры (у. д. е.) при возможных ее стратегиях поведения и стратегиях внешней среды (зарубежной организации) представлена в виде платежной матрицы игры (табл. 1.11).

Т а б л и ц а 1.11. **Прибыль от экспорта продукции, у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	912	742	928
A_2	926	886	916
A_3	808	904	935

Задание 1.13. Требуется обосновать оптимальную стратегию игрока – ПМК, занимающегося сервисным обслуживанием доильного и холодильного оборудования.

Исходная информация.

Специалисты районной ПМК, занимающиеся сервисным обслуживанием доильного и холодильного оборудования, установили, что дальнейшая эксплуатация производственного оборудования для охлаждения молока в одном из сельскохозяйственных предприятий может привести к следующему состоянию: а) к замене отдельных деталей; б) к капитальному ремонту; в) к поставке нового охлаждающего устройства.

Специалисты обслуживающей организации рассчитали объем затрат, которые необходимо понести сельскохозяйственной организации при выборе различных решений (табл. 1.12) в зависимости от времени их осуществления.

Т а б л и ц а 1.12. **Матрица денежных затрат или потерь, у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1, решение № 1	755	751	832
A_2, решение № 2	766	788	810
A_3, решение № 3	830	854	799

Задание 1.14. Требуется обосновать оптимальную стратегию игрока – районного агропромтехснаба, занимающегося сервисным обслуживанием машинно-тракторного парка сельскохозяйственных организаций.

Исходная информация.

Районный агропромтехснаб занимается сервисным обслуживанием машинно-тракторного парка сельскохозяйственных организаций. В его производственном цеху установлены четыре станка, один из которых нужно выбрать для изготовления определенного количества единиц запасных частей (1000; 2000; 3000; 4000). Производственные затраты на изготовление конкретного объема единиц продукции на разных станках включают фиксированные и удельные издержки:

$$ПРЗ_i = K_i + C_i \cdot Q,$$

где $ПРЗ_i$ – производственные затраты на изготовление Q единиц продукции на станке вида i ;

K_i – фиксированные затраты на изготовление Q единиц продукции на станке вида i ;

C_i – удельные затраты на производство единицы продукции на станке вида i ;

Q – объем производимой продукции, шт.

Данные о затратах приведены в табл. 1.13, предполагая, что: а) первый игрок принимает решение о выборе одного из четырех станков; б) второй игрок – природа – это возможные категории производства деталей; в) платежная матрица – это производственные затраты для любой комбинации решений и объемов.

Т а б л и ц а 1.13. **Фиксированные и удельные издержки, у. д. е.**

Станок	K_i	C_i
1	200	10
2	80	24
3	300	6
4	180	16

Задание 1.15. Требуется обосновать оптимальную стратегию игрока – коммерческой организации – инвестора предприятий агропромышленного комплекса.

Исходная информация.

Коммерческая организация имеет три варианта вложения инвестиций в различные объекты агропромышленного комплекса (стратегии A_1, A_2, A_3). Ожидаемая прибыль зависит от возможных банковских процентных ставок (ниже сложившегося уровня, на уровне прошлого года, выше сложившегося уровня – стратегии $П_1$, $П_2$, $П_3$) и представлена в табл. 1.14.

Т а б л и ц а 1.14. **Прибыль от инвестиций, у. д. е.**

Варианты инвестиций	A_i	Процентные ставки ($П_j$)		
		ниже сложившегося уровня	на уровне прошлого года	выше сложившегося уровня
		$П_1$	$П_2$	$П_3$
1	A_1	1250	1200	1100
2	A_2	1200	1230	1120
3	A_3	1100	1240	1260

Предлагается найти оптимальный вариант вложения денежных средств.

Задание 1.16. Определить, какой объем привлеченных ресурсов следует планировать коммерческому банку с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Коммерческий банк планирует привлечь денежные ресурсы. Специалисты, изучив возможные ситуации, дали руководству пояснение о том, что имеются три возможные стратегии игрока A: стратегия A_1 – привлечь ресурсы в объеме 400 тыс. у. д. е.; стратегия A_2 – 425 тыс. у. д. е.; стратегия A_3 – 450 тыс. у. д. е.

Спрос на ресурсы банка возникнет в объеме 400, 425, 450 тыс. у. д. е. Платежная матрица, представленная в табл. 1.15, показывает процентную маржу банка при различных вариантах.

Т а б л и ц а 1.15. **Элементы платежной матрицы, тыс. у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	5,0	3,3	1,7
A_2	3,0	5,2	3,6
A_3	1,0	3,2	5,5

Задание 1.17. Необходимо найти наилучший вариант по количеству закупаемых средств защиты сельскохозяйственных растений.

Исходная информация.

Агросервисная организация, оказывая услуги по агрохимическому обслуживанию сельского хозяйства, занимается розничной торговлей семенами, удобрениями и средствами защиты растений. Сезонный спрос населения на гербициды по обработке сельскохозяйственной культуры может составить 1500, 2500, 3500, 4500, 5500 упаковок. Организация импортирует гербициды по цене 6 у. д. е. за одну упаковку, а реализует по цене 11 у. д. е. Если препараты не будут проданы в весенне-летний период, то их остаток реализуется оптом по сниженной цене 2 у. д. е. за одну упаковку.

В этой ситуации можно выделить два игрока:

– руководитель организации, который должен принять решение о закупке импортных препаратов, действующий сознательно,

– спрос на гербициды, который не является сознательно действующим противником.

Возможные стратегии игрока *А* (руководителя): запланировать импорт препаратов в объеме 1500, 2500, 3500, 4500, 5500 упаковок. Возможные стратегии игрока *П* (природа – спрос на средства защиты растений в сезон): установить спрос на препараты в количестве 1500, 2500, 3500, 4500, 5500 упаковок.

Необходимо решить задачу, предварительно рассчитав платежную матрицу игры.

Задание 1.18. Необходимо обосновать наиболее оптимальную стратегию по выбору приемлемого проекта строительства оздоровительного отеля с различным количеством однокомнатных номеров.

Исходная информация.

Агропромышленный концерн подобрал место для строительства оздоровительного отеля. Руководство считает, что число заезжающих для улучшения своего здоровья может быть 50, 100, 150 и 200 человек, так как это связано с программой мероприятий и различными вариантами проекта строящейся гостиницы. Отклонения в сторону уменьшения или увеличения относительно идеальных уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты, обусловленные строительством избыточных (неиспользуемых) комнат или потерей возможности получить прибыль в случае, когда некоторые потребности не удовлетворяются.

Следовательно стратегии A_1, A_2, A_3, A_4 представляют собой возможное количество номеров (50, 100, 150, 200), которые необходимо иметь в отеле. Тогда стратегии игрока $П$ – $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$ будут обозначать возможное количество заполненных номеров при различных вариантах заезда отдыхающих, зависящих от множества случайных факторов (0, 50, 100, 150, 200). В зависимости от количества однокомнатных номеров, которые будут заполнены, рассчитан ожидаемый доход агропромышленного концерна (табл. 1.16).

Таблица 1.16. **Платежная таблица дохода, у. д. е.**

A_i	$П_j$				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	–742	990	990	990	990
A_2	–836	896	1260	1260	1260
A_3	–932	800	1164	1530	1530
A_4	–1028	702	1068	1436	1800

Задание 1.19. Требуется определить, на каком участке выращивать корнеплоды, чтобы получить хороший урожай.

Исходная информация.

Сельскохозяйственное предприятие имеет три подготовленных участка различного плодородия и состава почв для выращивания корнеплодов (стратегии природы A_1, A_2, A_3). Известно, что для получения хорошего урожая требуется определенное количество осадков (стратегии природы $П_1$, $П_2$, $П_3$). На участке A_1 урожайность данной культуры составляет 400, 200 и 500 ц/га соответственно при выпадении нормального количества осадков, больше и меньше нормы. Аналогично, на участке A_2 – 460, 240 и 400 ц/га; на участке A_3 – 480, 520, 200 ц/га.

Выигрыш сельскохозяйственного предприятия при каждой паре стратегий (A_i; $П_j$) задается урожайностью корнеплодов в табл. 1.17.

Таблица 1.17. **Элементы платежной матрицы, ц/га**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	550	450	250
A_2	450	510	290
A_3	250	530	570

1.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричные игры – это класс антагонистических игр, в которых участвуют два игрока, причем каждый располагает конечным числом стратегий. Если один игрок имеет m стратегий, а второй n, то можно построить матрицу игры размерностью $m \times n$, которая характеризует выигрыш первого игрока и проигрыш второго.

Задание 1.20. Требуется обосновать оптимальный уровень производства и реализации товаров, обеспечивающий кафетерию наибольшую эффективность работы.

Исходная информация.

Кафетерий реализует торты собственного производства. В зависимости от покупательского спроса ежедневный сбыт колеблется в пределах от 10 до 15 единиц. Прибыль предприятия от каждого реализованного торта равна 1,5 у. д. е. Если торты не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафетерий несет убытки, равные в расчете на каждый торт 2,5 у. д. е.

Задание 1.21. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия (т. е. стратегию продаж товаров).

Исходная информация.

Торговое предприятие планирует продажу сезонных товаров с учетом возможных вариантов покупательского спроса (C_1, C_2, C_3, C_4). Предприятие разработало три стратегии продажи товаров ($П_1$, $П_2$, $П_3$). Прибыль от сбыта сезонных товаров (a_{ij}) приведена в табл. 1.18.

Таблица 1.18. **Прибыль торгового предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Стратегии продаж	Состояние спроса			
	C_1	C_2	C_3	C_4
$П_1$	6	4	3	5
$П_2$	3	2 + 0,1К	1	4
$П_3$	2 + 0,1К	3	2 + 0,1К	1

Задание 1.22. Требуется обосновать, производство каких товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство шести товаров (T_1, …, T_6) с неопределенным спросом, предлагаемый уровень которого характеризуется тремя состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса (коэффициенты платежей матрицы a_{ij}), приведены в табл. 1.19.

Таблица 1.19. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Товар	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	4	3	6
T_2	6	2 + 0,2К	4
T_3	2	1	5
T_4	3	3	1 + 0,1N
T_5	5	2	3
T_6	4	1 + 0,1К	8

Задание 1.23. Требуется обосновать стратегию закупки угля для отопления административных зданий сельскохозяйственной организации с целью минимизации затрат на его приобретение.

Исходная информация.

1. Котельная сельскохозяйственной организации работает на угле, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом 1 т угля стоит 90 + N у. д. е., в мягкую зиму – 110, в обычную – 120, в холодную – 130 у. д. е.

2. Расход угля за отопительный сезон зависит от характера зимы: в мягкую зиму расходуется 20 + К т, в обычную – 30 + К т, в холодную – 40 + К т угля.

3. Следует иметь в виду, что уголь можно закупить летом, докупить недостающее количество зимой, но продавать неиспользованный уголь зимой нельзя.

Используя приведенную информацию заданий 1.20–1.23, необходимо:

1) составить платежную матрицу игры;

2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} ,$$

т. е. сначала найти минимально возможный выигрыш (минимальное значение) α_i:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} (i = \overline{1,m}) ,$$

а затем из всех α_i выбрать наибольшее значение α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

и определить соответствующую ему чистую стратегию A_i^o .

Величина α – это гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок *A*, правильно применяя свои стратегии:

3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \ ,$$

т. е. сначала найти максимально возможный проигрыш (максимальное значение) β_j :

$$\beta_j = \max_i a_{ij} (j = \overline{1,n}) ,$$

а затем из всех β_j выбрать минимальное значение β :

$$\beta = \min_j \beta_j$$

и определить соответствующую ему чистую стратегию B_j^o.

Величина β – это наименьший проигрыш игрока *B* независимо от того, какие стратегии применяет игрок *A* в процессе игры:

4) найти чистую цену игры.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены совпадают (α = β), то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$v = \alpha = \beta;$$

$$v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

5) найти оптимальное решение игры $\{ A_i^*, B_j^*, a_{ij}^* \}$ и обосновать, какие стратегии более выгодны для игрока *A* и игрока *B*,

где A_i^* – оптимальная чистая стратегия игрока *A*;

B_j^* – оптимальная чистая стратегия игрока *B*;

a_{ij}^* – седловой элемент платежной матрицы, стоящий в строке *i* и в столбце *j*.

Примечание. Седловой элемент a_{ij}^* является наименьшим в строке *i* и наибольшим в столбце *j*. Он определяет принцип, предполагающий, что противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все, для того чтобы добиться своей цели: максимизировать выигрыш – для игрока *A* и минимизировать проигрыш – для игрока *B*.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.24. Необходимо решить задачу игрового моделирования, основываясь на обеспечении наилучшего результата из наихудших для каждого игрока.

Исходная информация.

Внешнеторговые предприятия занимаются реализацией вакцины для сельскохозяйственных животных.

Предприятие A (игрок A) рекламирует продукцию через следующие виды печатной рекламы: буклеты (стратегия A_1), каталоги (стратегия A_2), проспекты (стратегия A_3).

Предприятие B (игрок B) в дополнение к использованию буклетов (стратегия B_1), каталогов (стратегия B_2) и проспектов (стратегия B_3) рассылает также информационные письма (стратегия B_4).

В зависимости от деятельности маркетинговых отделов каждое из предприятий может привлечь на свою сторону часть покупателей конкурента. Это определяется умением и интенсивностью проведения рекламной кампании. Приведенная ниже матрица характеризует процент покупателей, которые привлечены или потеряны предприятием A (табл. 1.20).

Т а б л и ц а 1.20. **Платежная матрица привлечения покупателей, %**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	26	–14	28	–16
A_2	22	20	22	26
A_3	–14	18	–28	20

Задание 1.25. Требуется обосновать, завоз какого типа спортивных костюмов обеспечит магазину наибольшую прибыль.

Исходная информация.

На торговой базе имеется три типа спортивных костюмов. Руководство агропромышленного комбината планирует завезти в фирменный магазин только один из этих типов товара для продажи своим работникам. Естественно, что если одежда будет пользоваться спросом, то магазин от ее реализации получит доход, если нет – то издержки на хранение принесут предприятию убыток. Данные о прибыли, которую получит агрокомбинат при сбыте товаров при разном состоянии спроса, приведены в табл. 1.21.

Т а б л и ц а 1.21. **Прибыль магазина в расчете на единицу товара, у. д. е.**

Тип товара	Состояние спроса				
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Первый	14	30	16	38	20
Второй	26	28	20	22	24
Третий	30	26	18	26	34

Следовательно, конфликтная ситуация товароснабжения формализуется матричной игрой, где первый игрок (игрок A) – магазин со стратегиями A_1, A_2, A_3; второй игрок (игрок B) – покупательский спрос со стратегиями B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.

Задание 1.26. Необходимо определить оптимальную стратегию продажи деталей для сельскохозяйственных машин, применение которой позволит специалистам специализированного завода добиться наибольшего объема выручки от реализованных товаров на данном рынке.

Исходная информация.

Специализированный завод A (игрок A), занимающийся материально-техническим обеспечением предприятий агропромышленного комплекса, поставляет в систему свободной продажи детали для сельскохозяйственных машин. Специалисты коммерческого отдела рассчитали объемы денежной выручки для завода, которая может быть получена при различных вариантах появления аналогичных деталей на данном рынке, которые поставит коммерческая организация B (игрок B). Данные представлены в табл. 1.22.

Т а б л и ц а 1.22. **Платежная матрица реализации деталей, тыс. у. д. е.**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	35	40	50
A_2	50	45	45
A_3	55	45	40

Задание 1.27. Руководству организации необходимо дать научно обоснованные рекомендации, применение которых позволит добиться того, что среднеожидаемое количество выручки от проданных товаров будет наибольшим, что бы не предпринимал конкурент.

Исходная информация.

Коммерческая организация (игрок A) поставляет на рынок продовольственные товары. Специалисты отдела маркетинга рассчитали объемы денежной выручки для своего предприятия (стратегии игрока

A_1, A_2, A_3), которые могут быть получены при различных вариантах появления продукции конкурирующей организации (игрок B) на данном рынке (стратегии игрока B_1, B_2, B_3) (табл. 1.23).

Т а б л и ц а 1.23. **Платежная матрица выручки, тыс. у. д. е.**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	600	700	900
A_2	900	800	800
A_3	1000	800	700

1.3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом

Задание 1.28. Требуется обосновать управленческое решение о внесении удобрений под сахарную свеклу с целью максимизации прибыли при любых погодных условиях.

Исходная информация.

1. Урожайность сахарной свеклы зависит от количества внесенных удобрений (стратегии A_1, A_2) и состояния погоды (стратегии $П_1$, $П_2$).

2. Возможны следующие варианты внесения удобрений: A_1 – количество удобрений на 1 га посевов сахарной свеклы находится на фактическом уровне за прошлый год; A_2 – норма внесения удобрений на 1 га площади больше на 30 % фактического уровня.

3. Могут быть два состояния погоды:

$П_1$ – лето сухое; $П_2$ – лето влажное.

4. Поступление прибыли с 1 га посевов сахарной свеклы (с учетом урожайности, формирующейся под влиянием внесения удобрений и погодно-климатических условий выращивания) приведено в табл. 1.24.

Т а б л и ц а 1.24. **Прибыль сельскохозяйственной организации в расчете на 1 га сахарной свеклы, у. д. е.**

Внесение удобрений, кг д. в.	Погодные условия	
	$П_1$	$П_2$
A_1	80 – N	45 + K
A_2	55 + N	70 – K

Задание 1.29. Требуется обосновать оптимальные стратегии сельскохозяйственных организаций по финансированию строительства

перерабатывающих модулей по производству молочных и мясных продуктов.

Исходная информация.

1. Две сельскохозяйственные организации выделяют денежные средства на строительство двух перерабатывающих модулей по производству молочных и мясных продуктов. Первая организация может выделить 3000 у. д. е., вторая – 2000 у. д. е.

2. Прибыль первого предприятия формируется под влиянием конкретных экономических условий и в зависимости от объема финансирования выражается элементами платежной матрицы (табл. 1.25).

Т а б л и ц а 1.25. **Прибыль сельскохозяйственной организации, у. д. е.**

Стратегии первой сельскохозяйственной организации	Стратегии второй сельскохозяйственной организации	
	B_1 – вложить средства в строительство модуля по производству мясных продуктов	B_2 – вложить средства в строительство модуля по производству молочных продуктов
A_1 – вложить средства в строительство модуля по производству мясных продуктов	500 – N	200 + N
A_2 – вложить средства в строительство модуля по производству молочных продуктов	250 + K	400 – K

Используя приведенную информацию заданий 1.28–1.29, необходимо:

1) найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры (максимин и минимакс) согласно п. 2 и 3 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

2) найти седловую точку игры ($\alpha = \beta$). Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях. При этом нижней ценой игры будет число α, а верхней ценой игры – число β:

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q});$$

$$\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q})$$

Цена игры (v) равна:

а) $v = \alpha = \beta$;

б) $v = f(\overline{p}^*, \overline{q}^*)$;

в) $v = \max\limits_{\overline{p}} \min\limits_{\overline{q}} f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = \min\limits_{\overline{q}} \max\limits_{\overline{p}} f(\overline{p}^*, \overline{q}^*)$;

где $\overline{p}$ – смешанная стратегия игрока *A*;

$$\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_m),$$

$$p_i \geq 0 (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$\overline{q}$ – смешанная стратегия игрока *B*;

$$\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

$$q_j \geq 0 (j = \overline{1, n}), \sum_{i=1}^{n} q_j = 1;$$

$\overline{p}^*, \overline{q}^*$ – соответственно оптимальная смешанная стратегия игроков *A* и *B*;

3) сравнивая почленно элементы строк и столбцов платежной матрицы, вычеркнуть заведомо невыгодные стратегии для игроков *A* и *B*. При этом заведомо невыгодной называется такая i-я стратегия, для которой элементы некоторой строки, определяющей i-ю стратегию игрока *A*, не больше (меньше или равны) соответствующих элементов другой строки. Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего j-ю стратегию игрока *B*, не меньше (больше или равны) соответствующих элементов другого столбца, то j-я стратегия является заведомо невыгодной. В результате исходную платежную матрицу задачи необходимо привести к виду $2 \times n$ или $2 \times m$;

4) на координатной оси отложить горизонтальный отрезок [0,1];

5) через концы отрезка [0,1] провести два перпендикуляра: левый перпендикуляр должен соответствовать чистой стратегии A_1 игрока *A* (или чистой стратегии B_1 игрока *B*), а правый – чистой стратегии A_2 игрока *A* (или чистой стратегии B_2 игрока *B*);

6) на левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0,1] отложить, как на вертикальной числовой оси, все элементы первой строки матрицы (для игрока *A*) или все элементы первого столбца матрицы (для игрока *B*);

7) на правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком [0,1] отложить, как на вертикальной числовой оси, все элементы второй строки (второго столбца) для игрока A (для игрока B).

Примечание 1. Масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковые и могут не совпадать с масштабом горизонтального отрезка [0,1];

8) каждую пару точек, лежащих на разных перпендикулярах, изображающих элементы a_{1j} и a_{2j}, $j = 1, \ldots, n$ – для игрока A (или a_{i1} и a_{i2}, $i = 1, \ldots, m$ – для игрока B), соединить отрезком $[a_{1j}, a_{2j}]$ (или отрезком $[a_{i1}, a_{i2}]$). В результате получаем n (или m) отрезков, представляющих собой графики n (или m) пересекающихся линейных функций;

9) найти нижнюю (для игрока A) или верхнюю (для игрока B) огибающую линию семейства отрезков, которая в общем случае будет представлять собой выпуклую вверх (выпуклую вниз) ломаную линию. Точки данной ломаной линии должны соответствовать нижней границе выигрыша игрока A (или верхней границе проигрыша игрока B);

10) найти наивысшую точку нижней огибающей линии (для игрока A) или наинизшую точку верхней огибающей линии (для игрока B);

11) спроектировать выбранную точку ортогонально на горизонтальный отрезок [0,1];

12) полученная проекция точки (абсцисса) является вероятностью случайного выбора игроком A своих чистых стратегий (p_2; $p_1 = 1 - p_2$) или вероятностью случайного выбора игроком B своих чистых стратегий (q_2; $q_1 = 1 - q_2$);

13) ордината наивысшей точки огибающей линии (для игрока A) или наинизшей точки огибающей линии (для игрока B) равна цене игры v;

14) решить игру, найдя пересекающиеся линейные функции в точке, характеризующей вероятности смешивания чистых стратегий игрока и цену игры;

15) решение данной игры свести к решению системы линейных уравнений для нахождения вероятностей применения стратегий игроками:

для игрока A

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

для игрока B

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

16) обосновать оптимальные смешанные стратегии игроков A и B.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.30. Найти решение игр, представленных платежными матрицами (табл. 1.26–1.29).

Исходная информация.

Т а б л и ц а 1.26. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	9	7	5	6	2+0,5K
A_2	6	5	4	3	4
A_3	7	8	7	4	6
A_4	4	1 + 0,5N	3	2 + 0,5K	3

Т а б л и ц а 1.27. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	8 – 0,5N	5
A_2	1	4	7 – 0,5K	0
A_3	0	5	4	–2
A_4	1	5	7 – 0,5K	0

Т а б л и ц а 1.28. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	3	1 + 0,5N	4	5
A_2	2	5	7	3	6
A_3	1 + 0,5N	5	3	2 + 0,5K	3

Т а б л и ц а 1.29. **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8 – 0,5K	8 – 0,5K	1	0
A_2	6	7 – 0,5N	8 – 0,5K	5
A_3	2	4	6	6
A_4	4	6	0	–1
A_5	3	3	4	2

1.4. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Задание 1.31. Требуется обосновать выбор сельскохозяйственной культуры, обеспечивающей сельскохозяйственной организации наибольшую прибыль при сбыте продукции.

Исходная информация.

Сельскохозяйственная организация имеет возможность выращивать две сельскохозяйственные культуры (K_1, K_2), которые по-разному реагируют на погодные условия. Урожайность первой культуры выше при сухой погоде, а второй – при более влажной. Погодные условия, влияющие на урожайность сельскохозяйственных культур, характеризуются следующими состояниями:

$П_1$ – лето прохладное сухое,

$П_2$ – лето прохладное влажное,

$П_3$ – лето теплое сухое,

$П_4$ – лето теплое влажное,

$П_5$ – лето жаркое сухое,

$П_6$ – лето жаркое влажное.

Прибыль сельскохозяйственной организации зависит от сбыта выращенной продукции и, следовательно, от урожайности сельскохозяйственных культур (табл. 1.30).

Таблица 1.30. **Прибыль сельскохозяйственной организации в расчете на 1 га сельскохозяйственных культур, у. д. е.**

Сельскохозяйственная культура	Погодные условия					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$П_6$
K_1	12 + 0,1К	13	15	17	19 – 0,1К	21 – 0,1N
K_2	20 – 0,1N	19 – 0,1К	18	16	12 + 0,1К	11 + 0,1N

Задание 1.32. Требуется обосновать оптимальные стратегии двух перерабатывающих предприятий (A и B), борющихся за рынки сбыта в условиях конкуренции.

Исходная информация.

1. Каждый игрок имеет возможность выделять определенное количество средств на конкретный рынок сбыта для укрепления своих позиций на нем.

2. Прибыль первого предприятия (игрока A) или убыток второго предприятия (игрока B) выражается коэффициентами платежной матрицы (табл. 1.31).

Таблица 1.31. **Прибыль (убыток) предприятия в расчете на 100 у. д. е. товара**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B		
	1-й рынок	2-й рынок	3-й рынок
1-й рынок	45	10 + N	15
2-й рынок	23	42	28
3-й рынок	14+К	26	53

Задание 1.33. Необходимо обосновать оптимальные пропорции поставки овощной продукции потребителю в свежем виде, после хранения продукции в холодильнике и после ее переработки с целью максимизации прибыли сельскохозяйственной организации.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация имеет три стратегии реализации овощной продукции:

A_1 – реализация продукции в свежем виде,

A_2 – временное хранение продукции в холодильнике,

A_3 – промышленная переработка продукции.

2. Спрос потребителей можно охарактеризовать следующими стратегиями:

B_1 – купить продукцию в свежем виде,

B_2 – приобрести продукцию через определенный период времени,

B_3 – купить переработанную продукцию.

3. Прибыль от реализации овощной продукции в зависимости от поведения потребителей приведена в табл. 1.32.

Таблица 1.32. **Прибыль от реализации единицы овощной продукции, у. д. е.**

Стратегии сельскохозяйственной организации	Стратегии потребителя		
	B_1	B_2	B_3
A_1	14	11 + 0,4K	15
A_2	12	10 + 0,3N	16
A_3	18 – 0,2N	16	14

Задание 1.34. Требуется обосновать рекомендации по управленческому решению.

Исходная информация.

1. Сельскохозяйственная организация, подготавливая сельскохозяйственную технику к уборочным работам, имеет 3 состояния техники:

$П_1$ – требуется незначительный ремонт,

$П_2$ – необходимо заменить отдельные детали и узлы машин,

$П_3$ – дальнейшая эксплуатация возможна после капитального ремонта.

2. В зависимости от сложившейся ситуации руководство сельскохозяйственной организации может принять решения:

A_1 – произвести ремонт своими силами,

A_2 – произвести ремонт силами предприятий агросервиса,

A_3 – заменить оборудование новым.

3. Вероятности появления исходов и затраты материально-

денежных средств на ремонт и замену сельскохозяйственных машин при разном уровне их износа и выбранных управленческих решениях приведены в табл. 1.33.

Т а б л и ц а 1.33. **Затраты материально-денежных средств на ремонт и замену машин, тыс. у. д. е.**

Управленческое решение	Стратегии игрока B		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	–1	–5	–10 + 0,2N
A_2	–12	–4	–8
A_3	–14 + 0,2К	–9	–6

Задание 1.35. Требуется определить оптимальные стратегии предприятий по выпуску товаров однородного назначения с целью максимизации прибыли первого предприятия и минимизации убытка.

Исходная информация.

1. Два предприятия, занимающихся переработкой сельскохозяйственной продукции, реализуют в пределах города плодовоовощные консервы.

2. Первое предприятие (игрок A) специализируется на выпуске 8 видов товаров (стратегии A_1, A_2, …, A_8). Второе предприятие также выпускает 8 видов плодовоовощных консервов (стратегии B_1, B_2, …, B_8).

3. Емкость рынка этой продукции в городе, как установила маркетинговая служба предприятий, равна 1000 единиц консервов. Прибыль от реализации единицы товара равна 2 у. д. е.

4. Прогнозируемая доля сбыта товаров первым предприятием при условии поступления на рынок товаров второго предприятия приведена в табл. 1.34.

Т а б л и ц а 1.34. **Прогнозируемая доля сбыта товаров первым предприятием**

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B							
	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я
1-я	0,6	0,6	0,5	0,4	0,3	0,7	0,2	0,6
2-я	0,2	0,5	0,8	0,2	0,7	0,6	0,1	0,4
3-я	0,3	0,4	0,5	0,3	0,8	0,6	0,3	0,3 + 0,1К
4-я	0,4	0,7	0,2	0,4	0,3	0,5	0,2	–
5-я	0,5	0,5	0,4	0,1	0,2	0,7	0,1	0,6
6-я	0,8	0,6	0,4	0,5	0,6	0,2	0,5	0,4
7-я	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,5	0,6	0,5
8-я	0,1	0,4	0,7	0,1	0,6	0,5	0,7	0,1 + 0,2N

Задание 1.36. Требуется обосновать ассортиментный набор товарной группы, который целесообразно завести в магазин с целью максимизации результатов его работы.

Исходная информация.

На оптовой базе имеется ассортиментный набор товарной группы, товары которого могут быть завезены в магазин. Если товар будет пользоваться спросом, то от его реализации магазин получит прибыль p_j, в противном случае магазин понесет издержки, связанные с хранением, порчей товара и т. д., т. е. получит убыток c_j (табл. 1.35).

Таблица 1.35. **Результаты сбыта единицы товара**

Показатели	Товар					
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Доход от сбыта, у. д. е.	40 + 0,5К	38	42	39	41	40
Издержки, у. д. е.	14 + 0,5К	2	8	4	6	16

Используя приведенную информацию заданий 1.31–1.36, необходимо:

1) составить платежную матрицу (для задания 1.36) согласно информации табл. 1.36;

Таблица 1.36. **Информация платежной матрицы**

Товар	Состояние спроса					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
T_1	P_1	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$
T_2	$-C_2$	P_2	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$
T_3	$-C_3$	$-C_3$	P_3	$-C_3$	$-C_3$	$-C_3$
T_4	$-C_4$	$-C_4$	$-C_4$	P_4	$-C_4$	$-C_4$
T_5	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	P_5	$-C_5$
T_6	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	P_6

2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α согласно п. 2 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β согласно п. 3 (решение матричных игр в чистых стратегиях);

4) найти седловую точку игры ($\alpha = \beta$). Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях;

5) свести решение матричной игры в смешанных стратегиях к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования.

Примечание 2. Если среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные элементы, то их необходимо преобразовать в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы постоянной величины C, значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. В противном случае цена игры может быть числом отрицательным;

6) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины двойственных задач;

7) составить развернутые экономико-математические задачи, используя следующие структурные модели.

а) Задача линейного программирования для игрока A:

Требуется найти целевую функцию модели линейного программирования для игрока A:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} x_i .$$

При условиях:

1. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1,n}$;

2. $x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$x_i = \dfrac{p_i}{v}$;

v – цена игры;

p_i – вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии A_i.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i и в столбце j.

б) Задача линейного программирования для игрока B:

Требуется найти целевую функцию модели линейного программирования для игрока B:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j .$$

При условиях:

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, i = \overline{1,m}$;

2. $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$y_j = \dfrac{q_j}{v}$;

v – цена игры;

q_j – вероятности, с которыми игрок B использует в ходе игры свои чистые стратегии B_j.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент платежной матрицы a, стоящий в строке i и в столбце j;

8) решить экономико-математические задачи, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

9) найти оптимальное решение задач, проанализировав его;

10) преобразовать результаты решения экономико-математических задач в результате решения матричной игры:

для игрока A	для игрока B
$v = \dfrac{1}{F_{\min}}$,	$v = \dfrac{1}{F_{\max}}$,
$p_i = \dfrac{x_i}{F_{\min}}$ или	$q_j = \dfrac{y_j}{F_{\max}}$ или
$p_i = v\, x_i, (i = 1, m)$.	$q_j = v\, y_j, (j = 1, n)$.

11) найти оптимальное решение игры $\{ \overline{p}^*, \overline{q}^*, v \}$.

12) дать экономическую интерпретацию оптимальным смешанным стратегиям игроков.

Задание 1.37. Необходимо обосновать рекомендации по оптимальным срокам поставки товара на рынок сбыта с целью максимизации прибыли первого предприятия и минимизации убытка второго предприятия.

Исходная информация.

1. Два предприятия производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом n единиц времени. Прибыль от сбыта единицы товара составляет p у. д. е.

2. Первое предприятие стремится вытеснить второе с рынка сбыта, и оно, не снижая цены на товар, вкладывает дополнительные средства, повышая его качество, что требует дополнительного времени на совершенствование технологии производства товара. Следовательно, чем выше качество товара, тем он позже поступает на рынок и пользуется спросом.

Используя приведенную информацию задачи 1.37, необходимо:

1) обозначить через $A_i (i = 1, \ldots, m)$ чистые стратегии игрока A, состоящие в том, что он поставляет свой товар на рынок в i-ю единицу времени; через $B_j (j = 1, \ldots, n)$ – чистые стратегии игрока B, состоящие в том, что он поставляет свой товар на рынок в j-ю единицу времени;

2) рассчитать элементы платежной матрицы для игрока A, используя следующие формулы:

$$a_{ij} = \begin{cases} p(j-i), i < j \\ 0{,}5\, p(n-i+1), i = j \\ p(n-i+1), i > j \end{cases}$$

3) найти решение игры, используя п. 2–12 заданий 1.31–1.36.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.38. Необходимо определить, какое количество изделий необходимо выпустить специализированному заводу с целью получения максимальной прибыли от их продажи.

Исходная информация.

Специализированный завод системы агросервисного обслуживания занимается производством дополнительных приспособлений для кормоуборочной и зерноуборочной техники. Исследования показывают, что завод может продать за сезон при дождливом лете 100 единиц для кормоуборочной техники и 650 – для зерноуборочной. Статистические данные за предыдущие годы свидетельствуют также о том, что при засушливой летней погоде сельскохозяйственным производителям реализуется 2450 приспособлений для зерноуборочной техники и 600 – для кормоуборочной. Определить, какое количество изделий необходимо выпустить специализированному заводу с целью получения максимальной прибыли от их продажи, если известно, что себестоимость единицы производимых приспособлений для кормоуборочной и зерноуборочной техники равна соответственно 65 и 25 у. д. е., а цена их реализации – 115 и 45 у. д. е.

Следовательно, A_1 и A_2 – это стратегии руководства завода по выпуску изделий в расчете на засушливое и дождливое лето; $П_1$ и $П_2$ – соответственно состояние погоды (дождливое и засушливое).

Для решения задачи необходимо: предварительно рассчитать элементы платежной матрицы игры для ситуаций (A_1; $П_1$); (A_1; $П_2$); (A_2; $П_1$); (A_2; $П_2$), заполнив платежную матрицу игры (табл. 1.37).

Таблица 1.37. **Прибыль специализированного завода, у. д. е.**

Стратегии	$П_1$	$П_2$
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Задание 1.39. Необходимо найти оптимальные стратегии коммерческих организаций – инвесторов проекта.

Исходная информация.

Для реконструкции производственных линий трех филиалов молочно-консервного комбината необходимы дополнительные инвестиции. Руководство перерабатывающего предприятия провело переговоры с двумя коммерческими организациями (игроки A и B), которые могут вложить денежные средства в данный проект. С учетом условий финансирования, особенностей налогообложения, объема выделяемых финансовых средств, прибыль в первый год инвестирования для организации A представлена в платежной матрице (табл. 1.38).

Таблица 1.38. **Платежная матрица прибыли, тыс. у. д. е.**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	180	120	160
A_2	160	200	140
A_3	10	220	260

Требуется найти оптимальные стратегии коммерческих организаций A и B (известно, что первый инвестор, т. е. игрок A может выделить 700 тыс. у. д. е., второй инвестор, т. е. игрок B – 400 тыс. у. д. е.).

Задание 1.40. Необходимо определить оптимальную стратегию посева сельскохозяйственных культур.

Исходная информация.

Сельскохозяйственное объединение может экспортировать в одну из стран СНГ такие виды продукции, как зерно, картофель, овощи. Исходя из этого, агрономическая служба принимает решение о возделывании перечисленных трех культур (стратегии игрока A_1, A_2, A_3). При прочих равных условиях урожай, а, следовательно, и выручка от реализации продукции зависит главным образом от погоды. Год может оказаться засушливым (стратегия игрока B_1), нормальным (стратегия игрока B_2) и дождливым (стратегия игрока B_3). Платежная матрица, представляющая выручку сельскохозяйственного объединения от реализации своей продукции, приведена в табл. 1.39.

Таблица 1.39. **Платежная матрица выручки, у. д. е. с 1 га**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	66	69	78
A_2	51	117	63
A_3	78	54	60

Необходимо определить оптимальную стратегию посева культур (площадь пахотных земель – 4000 га), обеспечивающую максимальную выручку сельскохозяйственному объединению.

Задание 1.41. Необходимо составить заявку на инструмент для обтачивания валов колесных тракторов.

Исходная информация.

Моторемонтный завод при обтачивании валов для колесных тракторов сельскохозяйственных товаропроизводителей использует четыре типа резцов. Каждый из них отличается материалом режущей части. На обработку могут поступать заготовки четырех групп твердости. В зависимости от типа инструмента и группы твердости известна информация о затратах на износ и эксплуатацию инструмента в себестоимости одной детали (табл. 1.40). Потребность в резцах для выполнения работ в зимний период по программе составляет 600 шт. Необходимо составить заявку на инструмент с учетом минимизации затрат на износ и эксплуатацию резцов.

Таблица 1.40. **Издержки механического участка, у. д. е.**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1,4	2,0	3,3	3,8
A_2	2,6	1,8	3,0	3,5
A_3	2,9	3,5	2,4	3,0
A_4	3,7	4,1	2,9	2,6

Следовательно, стратегии A_1, A_2, A_3, A_4 – это решения о заказе инструмента с определенным типом резца каждого вида; стратегии B_1, B_2, B_3, B_4 – это возможные поставки заготовок первой, второй, третьей, четвертой групп твердости.

Задание 1.42. Две внешнеторговые организации занимаются реализацией вакцины для сельскохозяйственных животных. Организация A рекламирует продукцию через следующие виды печатной рекламы: буклеты (стратегия A_1), каталоги (стратегия A_2) и проспекты (стратегия A_3). Организация B в дополнение к использованию буклетов (стратегия B_1), каталогов (стратегия B_2) и проспектов (стратегия B_3) рассылает также информационные письма (стратегия B_4). В зависимости от деятельности маркетинговых отделов каждая из организаций может привлечь на свою сторону часть покупателей конкурирующей организации. Приведенная ниже платежная матрица игры характеризует процент покупателей, привлеченных организацией A или потерянных организацией B (табл. 1.41). Необходимо дать рекомендации для организаций A и B с указанием выбираемых стратегий, а также найти цену игры.

Таблица 1.41. **Процент покупателей, привлеченных организацией, %**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	16	–4	18	–6
A_2	12	10	12	16
A_3	–4	8	–18	10

Задание 1.43. Сельскохозяйственное объединение может экспортировать в одну из стран СНГ такие виды продукции, как зерно, картофель, овощи. Таким образом, агрономическая служба принимает решение о возделывании перечисленных трех сельскохозяйственных культур (стратегии A_1, A_2, A_3). При прочих равных условиях урожай, а, следовательно, и выручка зависит главным образом от погоды. Год может оказаться засушливым (стратегия B_1), нормальным (стратегия B_2) и дождливым (стратегия B_3). Платежная матрица игры, представляющая доход сельскохозяйственного объединения от реализации своей продукции, приведена в табл. 1.42.

Таблица 1.42. **Выручка от реализации продукции с 1 га, у. д. е.**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	22	23	25
A_2	17	39	20
A_3	26	18	11

Необходимо определить оптимальную стратегию посева культур (площадь 1000 га), чтобы программа обеспечивала максимальный доход сельхозобъединения. Требуется решить матричную игру сведением к задаче линейного программирования.

1.5. Позиционные игры

Позиционные игры – это игры, описываемые с помощью «дерева игры», последовательно по ходам фиксирующего, какой информацией располагают игроки перед каждым ходом, какие варианты они могут выбирать и какими могут быть предельные размеры платежей в конце игры.

Задание 1.44. Решить позиционную игру, состоящую из трех ходов, которые делают два игрока (два зарубежных предприятия, занимающихся переработкой молока, решают вопрос о привлечении инвестиций для строительства перерабатывающего цеха, причем первое предприятие инвестирует строительство цеха на втором предприятии).

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.1.

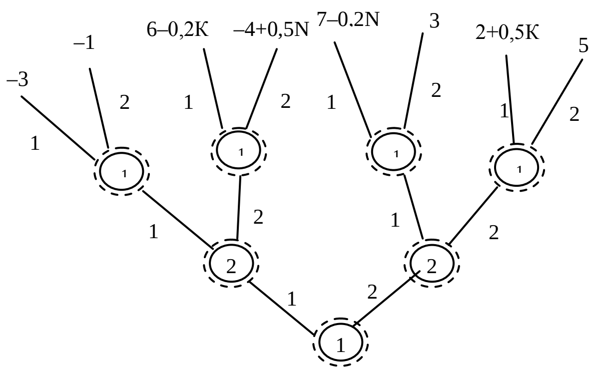


Рис. 1.1. Дерево игры

2. Первый игрок (первое зарубежное предприятие) делает на первом ходу выбор из двух альтернатив:

1-я – предложить второму предприятию построить цех по производству масла;

2-я – предложить построить цех по производству сыра.

3. На втором ходу второй игрок (второе предприятие), зная, какую альтернативу выбрало первое предприятие на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив:

1-я – построить цех по производству масла и заключить договор с первым зарубежным предприятием;

2-я – построить цех по производству сыра и заключить договор с инвестором.

4. На третьем ходу первое предприятие, зная выбор второго предприятия на втором ходу и помня свой выбор на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив:

1-я – согласиться с предложением второй стороны и заключить договор;

2-я – не согласиться с предложением второго предприятия.

Так как каждый игрок, делая свой ход, знает, в каком месте дерева он находится, то каждая позиция (или узел) игры образует отдельное информационное множество, выделенное пунктирной линией.

5. После того, как сделаны 3 хода, первое предприятие получит выигрыш, характеризующийся функцией $M(x; y; z)$,
где x – выбор числа 1 или 2 на первом ходу;

y – выбор числа 1 или 2 на втором ходу;

z – выбор числа 1 или 2 на третьем ходу.

Используя приведенную информацию задачи 1.44, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) обозначить стратегии первого игрока через (i_0, i_1, i_2),
где i_0 – выбор числа x первым игроком на первом ходе;

i_1 – выбор числа z первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число $y = 1$;

i_2 – выбор числа z первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число $y = 2$;

3) определить стратегии второго игрока (число y):

1-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

2-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 2$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

3-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = x$;

4-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, если первый игрок выбрал число $x = 2$, и выбор числа $y = 2$, если первый игрок выбрал число $x = 1$;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав элементы матрицы в соответствии с функцией $M(x; y; z)$. При этом первый игрок имеет 8 стратегий, второй игрок – 4;

5) решить матричную игру, используя п. 2–12 (решение матричных игр в смешанных стратегиях);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.45. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.2.

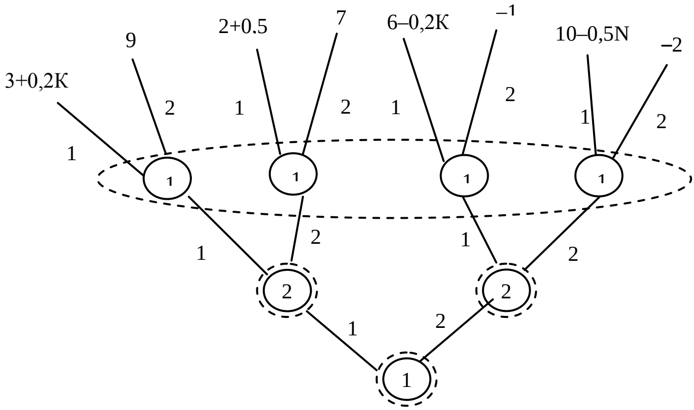


Рис. 1.2. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией. Так как первый ход делает первое лицо, а третий ход – второе лицо, то при графическом представлении игры эти обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходе не знает, в какой позиции третьего уровня он находится, поэтому все четыре позиции (или узла) третьего уровня образуют информационное множество.

Используя приведенную информацию задачи 1.45, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии второго игрока, согласно п. 3 задачи 1.44 (позиционные игры);

3) определить стратегии первого игрока, состоящие из пары чисел (x, z), т. е. на первом ходу первый игрок может выбрать число x = 1 или 2.

На третьем ходу, не зная предыдущих выборов, он может выбрать число z =1 или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав элементы матрицы в соответствии с функцией M (x; y; z). При этом и первый, и второй игроки имеют по 4 стратегии;

5) решить матричную игру, используя п. 2–12 (решение матричных игр в смешанных стратегиях);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.46. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.3.

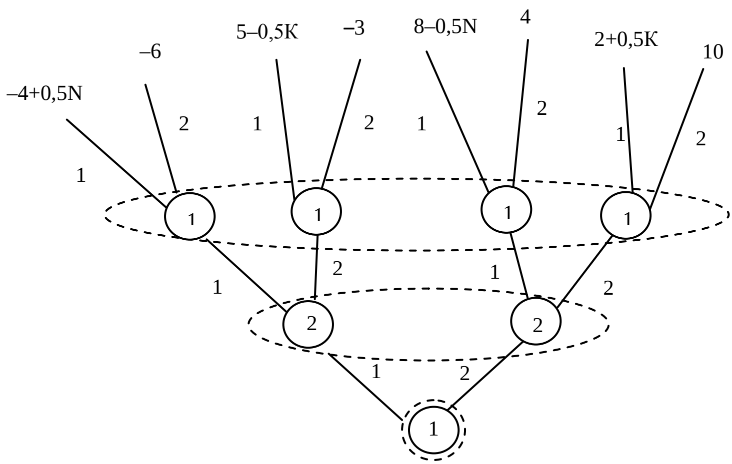


Рис. 1.3. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией, поэтому позиции третьего уровня образуют информационное множество. Второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходу, поэтому позиции второго уровня также образуют информационное множество.

Используя приведенную информацию задания 1.46, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока согласно п. 3 задачи 1.45 (позиционные игры);

3) определить стратегии второго игрока. Не зная предыдущих выборов, он может выбрать число y = 1 или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией M (x; y; z). При этом первый игрок имеет 4 стратегии, второй игрок – 2;

5) решить матричную игру геометрическим способом, используя п. 1–15 (решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.47. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.4.

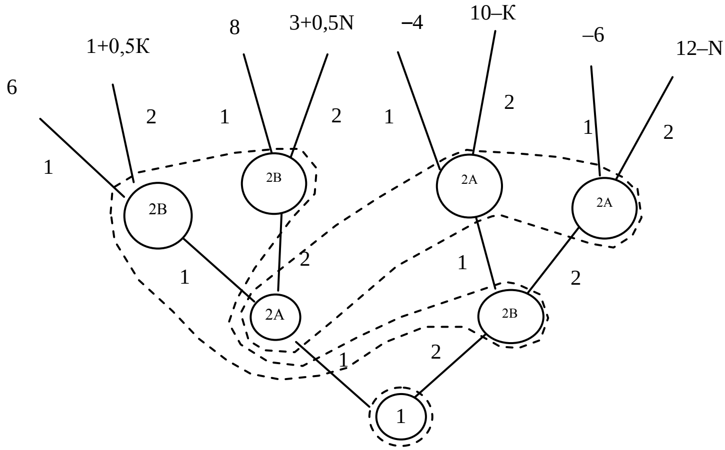


Рис. 1.4. Дерево игры

2. В игре участвуют 2 игрока, второй игрок представляет собой команду из двух человек – *A* и *B*. Три человека изолированы друг от друга и не могут обмениваться информацией.

Если на первом ходу первый игрок выбрал число $x = 1$, то на втором ходу делает выбор игрок *A*, который выбирает число $y = 1$ или 2, после чего на третьем ходу делает выбор игрок *B* и выбирает число $z = 1$ или 2.

Если же первый игрок на первом ходу выбрал число $x =2$, то на втором ходу делает выбор игрок *B*, выбирая число $y = 1$ или 2, а на третьем ходу выбор делает игрок *A*, выбирая число $z = 1$ или 2, о чем свидетельствуют информационные множества, изображенные на рис. 1.4.

Информационные множества для второго игрока охватывают второй и третий уровни, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход.

Используя приведенную информацию задания 1.47, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока. Так как ему никто не мешает сделать свой выбор, то он имеет две стратегии:

1-я – выбрать число $x =1$;

2-я – выбрать число $x =2$;

3) определить стратегии второго игрока, представленного командой из двух человек – A и B. Второй игрок имеет 4 стратегии:

1-я – игрок A и B выбирают число 1;

2-я – игрок A выбирает число 1, а игрок B – число 2;

3-я – игрок B выбирает число 1, а игрок A – число 2;

4-я – игроки A и B выбирают число 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией $M\,(x; y; z)$;

5) решить матричную игру геометрическим способом, используя п. 1–15 (решение матричных игр в смешанных стратегиях геометрическим способом);

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.48. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.5.

2. Первый ход производится случайно, т. е. игрок «0» выбирает число $x = 1$ с вероятностью 0,5 и число $x = 2$ с такой же вероятностью.

Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x на первом ходу выбрал игрок «0», первый игрок выбирает число $y = 1$ или 2.

Третий ход делает второй игрок, не зная выбор числа x игроком «0» на первом ходу, но зная выбор числа y первым игроком на втором ходу, он выбирает число $z = 1$ или 2.

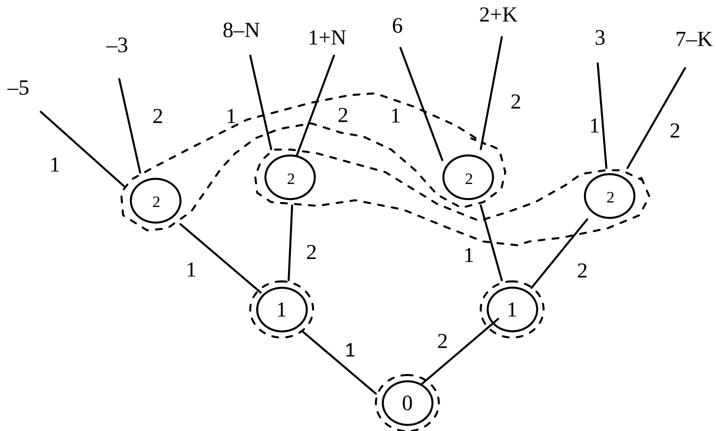


Рис. 1.5. Дерево игры

Используя приведенную информацию задания 1.48, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока:

1-я стратегия – первый игрок выбирает число $y = 1$ независимо от выбора игроком «0» на первом ходе числа x;

2-я стратегия – первый игрок выбирает число y, равное числу x;

3-я стратегия – первый игрок на втором ходу выбирает число $y = 1$, если на первом ходу игрок «0» выбрал число $x = 2$, и выбирает число $y = 2$, если на первом ходу игрок «0» выбрал число $x = 1$;

4-я стратегия – первый игрок на втором ходу выбирает число $y = 2$ независимо от выбора числа x игроком «0» на первом ходу;

3) определить стратегии второго игрока:

1-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z = 1$ независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходу;

2-я стратегия – второй игрок выбирает число z, равное числу y;

3-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z = 1$, если на втором ходу первый игрок выбрал число $y = 2$, и выбирает число $z = 2$, если на втором ходу первый игрок выбрал число $y = 1$;

4-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z =2$ независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходу;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы с учетом вероятностей выбора игроком «0» своих альтернатив и в соответствии с функцией $M(x; y; z)$;

5) решить матричную игру;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.49. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.6.

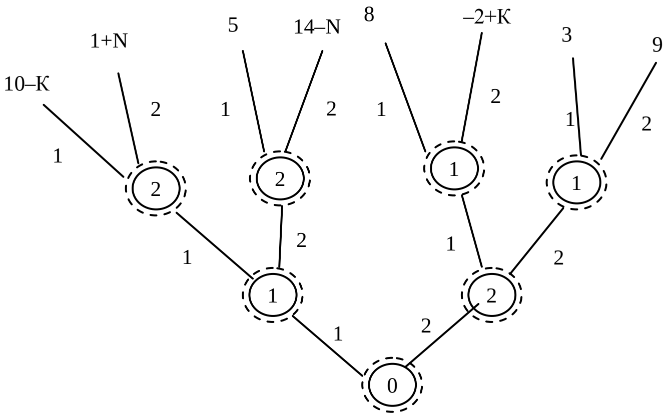


Рис. 1.6. Дерево игры

2. Первый ход делает игрок «0» – природа, который с вероятностью 0,3 выбирает число $x = 1$, т. е. первую альтернативу, а с вероятностью 0,7 – вторую альтернативу, т. е. число $x = 2$.

Если игрок «0» на первом ходу выбрал первую альтернативу ($x = 1$), то второй ход делает первый игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает второй игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2.

Если же игрок «0» на первом ходу выбрал вторую альтернативу ($x = 2$), то второй ход делает второй игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает первый игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2.

Используя приведенную информацию задания 1.49, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока, каждую из которых записать как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на втором ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу;

i_1 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал вторую альтернативу, а на втором ходу первую альтернативу выбрал второй игрок;

i_2 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходу, если на первом и втором ходу выбрана вторая альтернатива;

3) определить стратегии второго игрока, каждую из которых записать как систему чисел (j_0, j_1, j_2),

где j_0 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на втором ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал вторую альтернативу;

j_1 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходу первый игрок тоже выбрал первую альтернативу;

j_2 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходу первый игрок выбрал вторую альтернативу;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы с учетом вероятностей выбора альтернатив игроком «0» и в соответствии с функцией M (x; y; z; z'). При этом первый и второй игроки имеют по восемь стратегий;

5) решить матричную игру в чистых или смешанных стратегиях;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задание 1.50. Решить позиционную игру, состоящую из четырех ходов, которые делают два игрока.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.7.

2. Первый ход делает первый игрок, находясь в информационном множестве первой позиции (или узла). Он выбирает число x из двух альтернатив: 1 или 2.

Второй ход принадлежит второму игроку, который находится в информационном множестве позиций второго уровня. Он выбирает число y из двух альтернатив: 1 или 2.

Третий ход делает первый игрок и выбирает число z = 1 или 2.

Четвертый ход делает второй игрок, находясь в информационном множестве четвертого уровня, он выбирает число $z' = 1$ или 2.

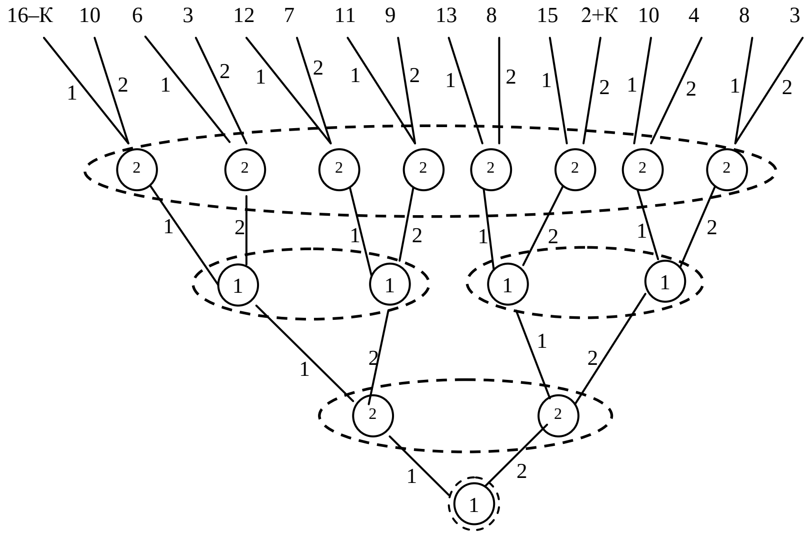


Рис. 1.7. Дерево игры

Используя приведенную информацию задания 1.50, необходимо:

1) свести позиционную игру к матричному виду;

2) определить стратегии первого игрока, каждую из которых записать как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива (x = 1 или 2), выбираемая на первом ходу первым игроком;

i_1 – альтернатива (z = 1 или 2), выбираемая на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал первую альтернативу, т. е. число $y = 1$;

i_2 – альтернатива (z = 1 или 2), выбираемая на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал вторую альтернативу, т. е. число y =2;

3) определить стратегии второго игрока, каждую из которых записать как систему чисел (j_1, j_2),

j_1 – альтернатива, выбираемая вторым игроком на втором ходу, т. е. число y = 1 или 2;

j_2 – альтернатива, выбираемая вторым игроком на четвертом ходу, т. е. $z' = 1$ или 2;

4) составить платежную матрицу игры, сформировав ее элементы в соответствии с функцией M (x; y; z; z'). При этом первый игрок имеет 8 стратегий, а второй – 4;

5) решить матричную игру в чистых или смешанных стратегиях;

6) обосновать оптимальный выбор первого игрока.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.51. Решить позиционную игру, состоящую из трех ходов, которые делают два игрока.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.8.

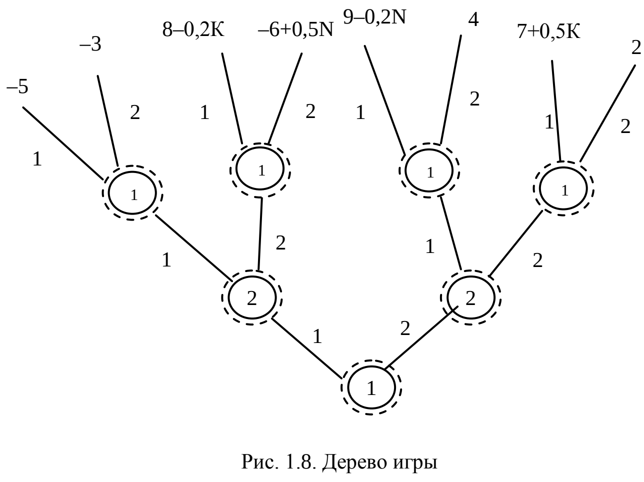


Рис. 1.8. Дерево игры

Так как каждый игрок, делая свой ход, знает, в каком месте дерева он находится, то каждая позиция игры образует отдельное информационное множество, выделенное пунктирной линией.

Стратегии первого игрока обозначаются через (i_0, i_1, i_2),
где i_0 – выбор числа x первым игроком на первом ходу;

i_1 – выбор числа z первым игроком на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал число $y = 1$;

i_2 – выбор числа z первым игроком на третьем ходу, если второй игрок на втором ходу выбрал число $y = 2$;

Стратегии второго игрока обозначаются следующим образом:

1-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

2-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 2$, не взирая на выбор первым игроком числа x;

3-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = x$;

4-я стратегия – выбор вторым игроком числа $y = 1$, если первый игрок выбрал число $x = 2$, и выбор числа $y = 2$, если первый игрок выбрал число $x = 1$;

После того как сделаны 3 хода, первый игрок получит выигрыш, характеризующийся функцией $M(x; y; z)$,
где x – выбор числа 1 или 2 на первом ходу;

y – выбор числа 1 или 2 на втором ходу;

z – выбор числа 1 или 2 на третьем ходу.

Задание 1.52. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.9.

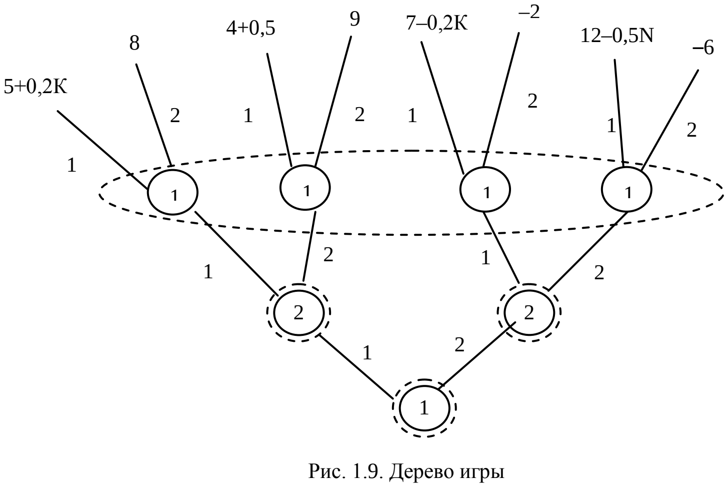


Рис. 1.9. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией. Так как первый ход делает первое лицо, а третий ход – второе лицо, то при графическом представлении игры эти обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходу не знает, в какой позиции третьего уровня он находится, поэтому все четыре позиции третьего уровня образуют информационное множество.

Стратегии первого игрока в этой игре, состоят из пары чисел (x, z), т. е. на первом ходу первый игрок может выбрать число x = 1 или 2. На третьем ходу, не зная предыдущих выборов, он может выбрать число z = 1 или 2.

Следует отметить, что и первый, и второй игроки имеют по 4 стратегии.

Задание 1.53. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.10.

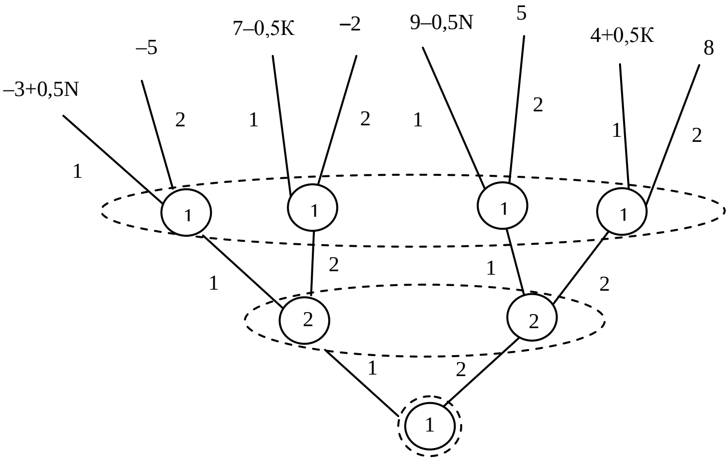


Рис. 1.10. Дерево игры

2. Первый игрок представлен двумя лицами, которые не могут обмениваться информацией, поэтому позиции третьего уровня образуют информационное множество. Второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходу, поэтому позиции второго уровня также образуют информационное множество.

Стратегии первого игрока в этой игре, состоят из пары чисел (x, z), т. е. на первом ходу первый игрок может выбрать число $x = 1$ или 2. На третьем ходу, не зная предыдущих выборов, он может выбрать число $z = 1$ или 2.

Второй игрок, не зная предыдущих выборов, может выбрать число $y = 1$ или 2.

При этом первый игрок имеет 4 стратегии, второй игрок – 2.

Задание 1.54. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.11.

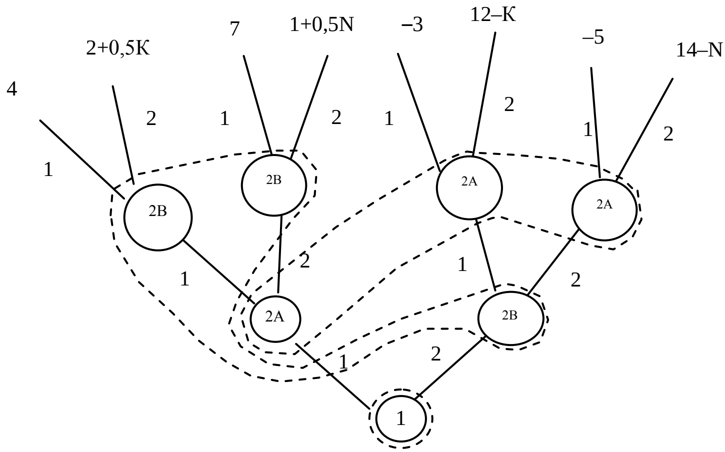


Рис. 1.11. Дерево игры

2. В игре участвуют 2 игрока, второй игрок представляет собой команду из двух человек – *A* и *B*. Три человека изолированы друг от друга и не могут обмениваться информацией.

Если на первом ходу первый игрок выбрал число $x = 1$, то на втором ходу делает выбор игрок *A*, который выбирает число $y = 1$ или 2, после чего на третьем ходу делает выбор игрок *B* и выбирает число $z = 1$ или 2.

Если же первый игрок на первом ходу выбрал число $x = 2$, то на втором ходу делает выбор игрок *B*, выбирая число $y = 1$ или 2, а на третьем ходу выбор делает игрок *A*, выбирая число $z = 1$ или 2, о чем свидетельствуют информационные множества, изображенные на рис. 1.11.

Информационные множества для второго игрока охватывают второй и третий уровни, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход.

Первый игрок в этой игре имеет две стратегии:

1-я – выбрать число $x = 1$;

2-я – выбрать число $x = 2$;

Второй игрок, представленный командой из двух человек – A и B, имеет 4 стратегии:

1-я – игрок A и B выбирают число 1;

2-я – игрок A выбирает число 1, а игрок B – число 2;

3-я – игрок B выбирает число 1, а игрок A – число 2;

4-я – игроки A и B выбирают число 2;

Задание 1.55. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.12.

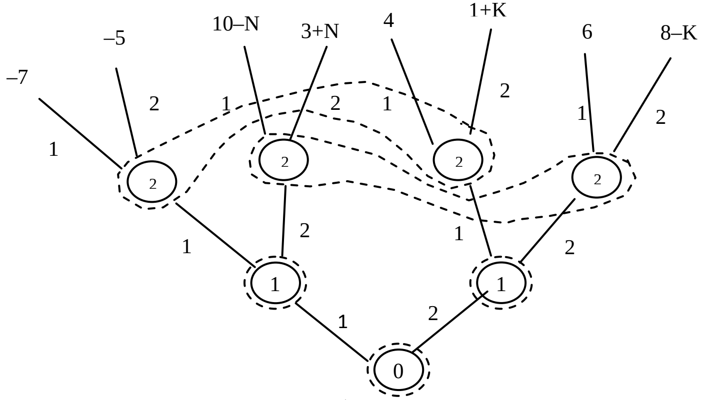


Рис. 1.12. Дерево игры

Первый ход производится случайно, т. е. игрок «0» выбирает число $x = 1$ с вероятностью 0,5 и число $x = 2$ с такой же вероятностью.

Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x на первом ходу выбрал игрок «0», первый игрок выбирает число $y = 1$ или 2.

Третий ход делает второй игрок, не зная выбор числа x игроком «0» на первом ходу, но зная выбор числа y первым игроком на втором ходу, он выбирает число $z = 1$ или 2.

Первый игрок имеет следующие стратегии:

1-я стратегия – первый игрок выбирает число $y = 1$ независимо от выбора игроком «0» на первом ходу числа x;

2-я стратегия – первый игрок выбирает число y, равное числу x;

3-я стратегия – первый игрок на втором ходу выбирает число $y = 1$, если на первом ходу игрок «0» выбрал число $x = 2$, и выбирает число $y = 2$, если на первом ходу игрок «0» выбрал число $x = 1$;

4-я стратегия – первый игрок на втором ходу выбирает число $y = 2$ независимо от выбора числа x игроком «0» на первом ходу;

Стратегии второго игрока:

1-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z = 1$ независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходу;

2-я стратегия – второй игрок выбирает число z, равное числу y;

3-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z = 1$, если на втором ходу первый игрок выбрал число $y = 2$, и выбирает число $z = 2$, если на втором ходу первый игрок выбрал число $y = 1$;

4-я стратегия – второй игрок на третьем ходу выбирает число $z = 2$ независимо от выбора числа y первым игроком на втором ходу;

Задание 1.56. Решить позиционную игру.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.13.

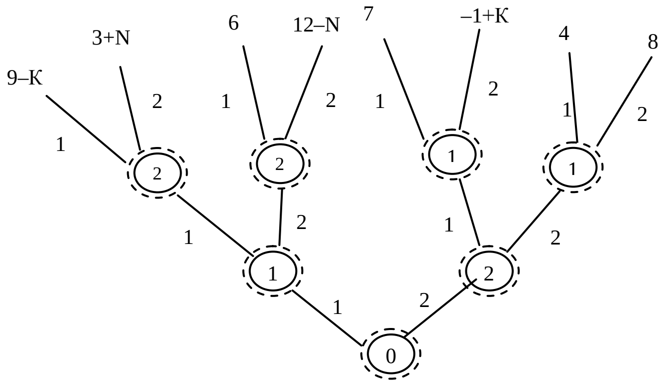


Рис. 1.13. Дерево игры

Первый ход делает игрок «0» – природа, который с вероятностью 0,5 выбирает число $x = 1$, т. е. первую альтернативу, а с вероятностью 0,5 – вторую альтернативу, т. е. число $x = 2$.

Если игрок «0» на первом ходу выбрал первую альтернативу ($x = 1$), то второй ход делает первый игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает второй игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2.

Если же игрок «0» на первом ходу выбрал вторую альтернативу ($x = 2$), то второй ход делает второй игрок, который выбирает число $y = 1$ или 2, и третий ход делает первый игрок, который выбирает число $z = 1$ или 2.

Стратегии первого игрока обозначены через систему чисел (i_0, i_1, i_2), где i_0 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на втором ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу;

i_1 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал вторую альтернативу, а на втором ходу первую альтернативу выбрал второй игрок;

i_2 – альтернатива, которую первый игрок выбирает на третьем ходу, если на первом и втором ходу выбрана вторая альтернатива.

Стратегии второго игрока обозначены через систему чисел (j_0, j_1, j_2), где j_0 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на втором ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал вторую альтернативу;

j_1 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходу первый игрок тоже выбрал первую альтернативу;

j_2 – альтернатива, которую второй игрок выбирает на третьем ходу, если на первом ходу игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором ходу первый игрок выбрал вторую альтернативу;

Задание 1.57. Решить позиционную игру, состоящую из четырех ходов, которые делают два игрока.

Исходная информация.

1. Позиционная игра изображена на рис. 1.14.

2. Первый ход делает первый игрок, находясь в информационном множестве первой позиции. Он выбирает число x из двух альтернатив: 1 или 2.

Второй ход принадлежит второму игроку, который находится в информационном множестве позиций второго уровня. Он выбирает число y из двух альтернатив: 1 или 2.

Третий ход делает первый игрок и выбирает число z = 1 или 2.

Четвертый ход делает второй игрок, находясь в информационном множестве четвертого уровня, он выбирает число $z' = 1$ или 2.

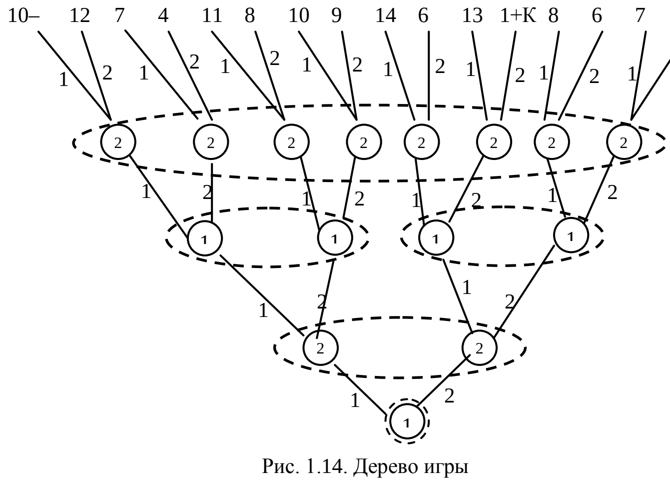


Рис. 1.14. Дерево игры

1.6. Биматричные игры

Биматричные игры (игры с ненулевой суммой) – класс игр, в которых не обязательно, что выигрыш одного игрока означает проигрыш другого. Так как интересы игроков не являются полностью противоположными, то они обмениваются информацией и в некоторых случаях координируют свои действия.

Задание 1.58. Необходимо обосновать оптимальную стратегию предприятия по реализации рекламной компании на двух рынках, контролируемых более сильным конкурентом.

Исходная информация.

Небольшое предприятие (игрок A) планирует, развернув рекламную деятельность, сбывать свои товары на одном из двух рынков, контролируемых более сильным предприятием (игроком B).

1. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.43, 1.44).

Таблица 1.43. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–180	20 + K
A_2	5 + N	–20

Таблица 1.44. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	120 + K	–30
A_2	–10	40 + N

2. Выигрыши игроков характеризуются следующими платежными матрицами (табл. 1.45, 1.46).

Таблица 1.45. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–150	30 + N
A_2	20 + K	–40

Таблица 1.46. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	130 – N	–50
A_2	–20	30 + K

3. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.47, 1.48).

Т а б л и ц а 1.47. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–220	60 + K
A_2	40 + N	–30

Т а б л и ц а 1.48. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	180 – K	–40
A_2	–10	50 + N

Используя приведенную информацию задания 1.58, п. 1–3, необходимо:

1) ввести следующие обозначения, используя платежную матрицу игрока *A*:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}\,,$$
$$\alpha = a_{22} - a_{12};$$

2) ввести обозначения, используя платежную матрицу игрока *B*:

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}\,,$$
$$\beta = b_{22} - b_{21};$$

3) рассчитать значения *C*, α, *D*, β для информации задания 1.58, п. 1–5;

4) проверить биматричную игру, согласно теореме Джона Нэша, на наличие точки равновесия, т. е. набора стратегий в игре для двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют. Считается, что необходимым и достаточным условием существования равновесной ситуации в биматричной игре 2×2 является такая пара чисел (*p*, *q*), для которых выполняются следующие неравенства:

$$(p-1)(Gq-\alpha) \ge 0,$$
$$p(Gq-\alpha) \ge 0\,,$$
$$(q-1)(Dp-\beta) \ge 0\,,$$
$$q(Dp-\beta) \ge 0\,,$$
$$0 \le p \le 1\,,$$
$$0 \le q \le 1\,;$$

5) определить значение q, рассмотрев условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации для игрока A при:

1. $p = 1$,
2. $p = 0$,
3. $0 < p < 1$;

6) определить значение p, рассмотрев условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации для игрока B при:

1. $q = 1$,
2. $q = 0$,
3. $0 < q < 1$;

7) изобразить графически для игроков A и B полученные результаты, выделив в системе координат единичный квадрат, соответствующий неравенствам:

$$0 \le p \le 1,$$
$$0 \le q \le 1;$$

8) найти координаты точки пересечения $(p,\ q)$, являющейся точкой равновесия;

9) определить оптимальные смешанные стратегии игрока A – $p^*(p;\ 1-p)$ и игрока B – $q^*(1-q;q)$;

10) найти средние выигрыши игроков:

$$f_A(p;q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p +$$
$$+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22};$$

$$f_B(p;q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p +$$
$$+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22};$$

11) обосновать оптимальный выбор игроков.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.59. Необходимо обосновать оптимальную стратегию предприятия по реализации рекламной компании на двух рынках, контролируемых более сильным конкурентом.

Исходная информация.

Небольшое предприятие (игрок A) планирует, развернув рекламную деятельность, сбывать свои товары на одном из двух рынков, контролируемых более сильным предприятием (игроком B).

1. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.49, 1.50).

Т а б л и ц а 1.49. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–100	50 + N
A_2	60 + K	–120

Т а б л и ц а 1.50. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	80 + K	–60
A_2	–40	110 – N

2. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.51, 1.52).

Т а б л и ц а 1.51. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–70	60 + K
A_2	50 – N	–100

Т а б л и ц а 1.52. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	50 + N	–70
A_2	–100	30 + K

3. Выигрыши игроков характеризуются платежными матрицами (табл. 1.53, 1.54).

Т а б л и ц а 1.53. **Платежная матрица игрока *A***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	–150	80 + N
A_2	90 + K	–170

Т а б л и ц а 1.54. **Платежная матрица игрока *B***

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	120 + K	–70
A_2	–60	140 – N

1.7. Кооперативные игры

Кооперативные игры – это игры с нулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом и вступать в коалиции.

Задание 1.60. Решить кооперативную игру, заданную матрицами (1–5).

Исходная информация.

$$1.\ \begin{Vmatrix} (12,8) & (0,0) \\ (6,6) & (2,7) \end{Vmatrix};$$

$$2.\ \begin{Vmatrix} (8,2) & (4,4) \\ (0,0) & (1,6) \end{Vmatrix};$$

$$3.\ \begin{Vmatrix} (10,5) & (5,5) \\ (1,9) & (0,0) \end{Vmatrix};$$

$$4.\ \begin{Vmatrix} (0,0) & (12,4) \\ (2,9) & (3,3) \end{Vmatrix};$$

$$5.\ \begin{Vmatrix} (7,7) & (0,0) \\ (10,6) & (4,4) \end{Vmatrix}.$$

Используя приведенную информацию задания 1.60, п. 1–5, необходимо:

1) изобразить в системе координат выпуклое, замкнутое множество, определяющее игру;

2) найти множество Парето, т. е. множество, характеризующееся тем, что увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет другого игрока;

3) указать координаты точки (T_1, T_2), определяющей выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером;

4) найти переговорное множество игроков;

5) найти на переговорном множестве координаты точки, соответ-

ствующей равновесию по Дж. Нэшу, в которой достигается максимум произведения:

$$\max(a_1 - T_1)(a_2 - T_2)\ .$$

Равновесие по Дж. Нэшу гласит, что ситуация, образованная в результате выбора всеми игроками некоторых своих стратегий, является равновесной, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий;

6) обосновать оптимальный выбор игроков.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.61. Решить кооперативную игру, заданную матрицами (1–4).

Исходная информация.

$$1.\ \begin{Vmatrix} (10,5) & (0,0) \\ (4,8) & (2,5) \end{Vmatrix};$$

$$2.\ \begin{Vmatrix} (8,5) & (4,5) \\ (0,0) & (1,5) \end{Vmatrix};$$

$$3.\ \begin{Vmatrix} (12,5) & (3,5) \\ (2,9) & (0,0) \end{Vmatrix};$$

$$4.\ \begin{Vmatrix} (0,0) & (8,4) \\ (1,8) & (5,5) \end{Vmatrix};$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение теории игр.
2. Что вы понимаете под игрой?
3. Дайте определение понятия «оптимальная стратегия игрока».
4. Приведите особенности статистических игр.
5. Охарактеризуйте критерии определения оптимальной стратегии игрока в статистической игре.
6. Дайте определение понятий «седловая точка», «верхняя и нижняя чистая цена матричной игры».

7. Как практически решаются матричные игры в смешанных стратегиях?

8. Приведите структурные модели линейного программирования, позволяющие обосновать оптимальные стратегии игроков при решении матричной игры в смешанных стратегиях.

9. Каким образом перейти от результатов решения задач линейного программирования к результатам решения матричной игры в смешанных стратегиях?

10. Как происходит обоснование оптимальной стратегии игрока в позиционной игре?

11. Как происходит формирование элементов платежной матрицы позиционной игры?

12. Какие неравенства должны выполняться для пары чисел, характеризующих равновесную ситуацию биматричной игры?

13. Как геометрически происходит выбор оптимальных стратегий игроков в биматричной игре?

14. Дайте определение понятия «равновесие по Нэшу (точка Нэша)», чем оно характеризуется?

2. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Под *экономико-математической линейной моделью* понимают программу вычислений, обеспечивающую нахождение наилучшего, т. е. оптимального решения задачи, условия которой заданы в виде линейных уравнений или неравенств, сведены в единую систему, подчиненную цели решения задачи (т. е. целевой функции, записанной в виде линейного уравнения).

В зависимости от характера моделируемых объектов и процессов структура моделей может быть различной. Но имеются и общие элементы модели, включающие следующие группы:

1) неизвестные величины, значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают x_j, где $i = 1, \dots, m$ или y_i, где $j = 1, \dots, n$. Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;

2) технико-экономические коэффициенты, т. е. известные величины при переменных, они служат для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с результатами решения задачи. Технико-экономические коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индек-

сы при a_{ij} показывают, что коэффициент a стоит в i-й строке (или в ограничении вида i) и в j-м столбце (или при переменной вида j), где $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$;

3) известные величины, стоящие в правой части ограничений (т. е. уравнений или неравенств). Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например A_i, где $i = 1, \ldots, m$. Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче;

4) коэффициенты целевой функции, или коэффициенты F-строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например, p_j ($p_1, p_2, \ldots, p_n$), где $j = 1, \ldots, n$. Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче.

Элементы второй, третьей и четвертой групп составляют исходную информацию экономико-математической задачи.

Задачи линейного программирования имеют свойства, сформулированные следующими теоремами.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек (прил. В).

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений и, наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу такого же класса, называемую двойственной (обратной) по отношению к исходной (прямой) задаче. Принято считать, что прямой будет та задача, в результате решения которой получают размеры отраслей и другие параметры. Решение *двойственной задачи* дает систему двойственных оценок (объективно обусловленных оценок, теневых цен ресурсов) (прил. С).

Свойства двойственных оценок базируются на содержании первой и второй теорем двойственности.

Теорема 4. *Первая теорема двойственности*:

если одна из задач или прямая, или двойственная, имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, т. е., если целевая функция прямой задачи записана в виде $F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j$, а двойственной задачи – в виде $F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i$,то согласно первой теореме двойственности:

$$\max \sum_{j \in J_0} c_j x_j = \min \sum_{i = I_0} A_i u_i .$$

Теорема 5. *Вторая теорема двойственности*:

1) если двойственные оценки положительны, то производственные ресурсы, для которых они рассчитаны, используются полностью, т. е.:

$$\text{если } u_i > 0, \text{ то } \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0 ;$$

2) двойственные оценки равны нулю, если производственные ресурсы, к которым они относятся, недоиспользуются, т. е.:

$$u_i = 0 \text{ при условии } \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i, i \in I_0 .$$

Анализ устойчивости (чувствительности) оптимального плана основывается на изменении параметров задачи:

$$a_{ij},\ A_i,\ и\ p_j,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$.

Влияние изменения параметров задачи на оптимальный план можно посмотреть, если найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых они измеряют влияние ограничений на целевую функцию задачи (прил. D и E).

Среди практических задач линейного программирования важное место занимают задачи с требованием целочисленности переменных (всех или части неизвестных величин). Экстремальные задачи, в которых на переменные накладываются условия целочисленности, а область допустимых решений конечна, являются предметом изучения целочисленного, или дискретного, программирования. Они возникают в случае, когда искомые переменные определяют неделимые объекты: тракторы, животные и т. д.

Целочисленные линейные модели решаются методом отсечений и методом ветвей и границ (прил. F и G).

2.1. Решение задач линейного программирования геометрическим способом

Задание 2.1. Требуется обосновать ассортимент выпуска и реализации продукции молокоперерабатывающего цеха сельскохозяйственной организации с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Объемы и расход сырья на производство единицы продукции приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Расход на 1 т		Наличие ресурса
	фасованного молока	фасованной сметаны	
Молоко, т	1,01	9,5	500
Фасовка молока, машино-ч	0,2	–	4
Фасовка сметаны, машино-ч	–	3,5	120
Прибыль, у. д. е.	10 + 0,1N	80 – 0,1K	

Учитывая спрос покупателей, с перерабатывающего цеха в фирменный магазин должно поступить не менее 100 т фасованного молока.

Задание 2.2. Необходимо обосновать оптимальный товарооборот фирменного магазина предприятия, доставляющий максимум прибыли.

Исходная информация.

Фирменный магазин предприятия реализует два вида продукции подсобного цеха. Объемы ресурсов и их расход на реализацию единицы товара приведены в табл. 2.2.

Т а б л и ц а 2.2. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Расход ресурсов на сбыт единицы товаров, у. д. е.		Наличие ресурса
	1-й товар	2-й товар	
Торговая площадь, м^2	0,25	0,15	100 + 2N
Рабочее время продавцов, чел.-ч	2,0	3,5	3600 – К
Прибыль, у. д. е.	3,0 + 0,2К	6,5 + 0,1N	

Отдел маркетинга, учитывая спрос покупателей, рекомендует соотношение 1-го и 2-го товаров как 2:1.

Задание 2.3. Требуется обосновать ассортимент выпуска продукции перерабатывающего цеха фермерского хозяйства с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Объемы заготовки и расход сырья на производство единицы продукции приведены в табл. 2.3.

Т а б л и ц а 2.3. **Объемы заготовки и расход сырья**

Сырье	Расход на 1 ц колбасы, кг		Ресурсы жилованного мяса, кг
	столовой	докторской	
Говядина высшего и I сорта, кг	36	25	900 + 2N
Свинина полужирная, кг	60	70	2500 – N
Полезный фонд работы шприца, ч	2	2	80
Прибыль, у. д. е./ц	4,2 + 2К	3,5 + N	

Изучение рынка сбыта отделом маркетинга показало, что реализация докторской колбасы не должна превышать сбыт столовой колбасы более чем на 5 ц.

Задание 2.4. Необходимо определить количество дней выработки продукции в разрезе технологического способа производства с целью максимизации прибыли организации.

Исходная информация.

Организация получила заказ на изготовление не менее 70 единиц продукции, которая может производиться по двум технологиям. По первой технологии организация выпускает за один рабочий день две единицы продукции, по второй – пять единиц.

Расход ресурсов на производство продукции и получаемая прибыль за один рабочий день, а также объем ресурсов, которыми располагает организация, представлены в табл. 2.4.

Т а б л и ц а 2.4. **Объемы и расход ресурсов**

Ресурсы	Технологические способы производства		Наличие ресурса
	1-й	2-й	
Сырье, т	3	4	80
Оборудование, чел.-ч	4	6	100
Рабочая сила, чел.-ч	8	5	120
Электроэнергия, кВт·ч	4	5	70
Прибыль за рабочий день, у. д. е.	90 + N	60 + K	

Задание 2.5. Требуется обосновать оптимальный состав заказываемых транспортных средств на перевозку оборудования с целью минимизации затрат.

Исходная информация.

Для перевозки 100 единиц оборудования 1-го типа и 150 единиц оборудования 2-го типа организация может заказать четыре вида транспорта. Количество единиц оборудования, вмещаемого на одно транспортное средство конкретного вида, указаны в табл. 2.5.

Т а б л и ц а 2.5. **Количество оборудования, ед.**

Вид транспорта	Тип оборудования		Затраты на транспортировку единицы оборудования, у. д. е.
	1-й	2-й	
1-й	6	9	7 – 0,1K
2-й	4	7	5
3-й	2	6	4 + 0,5N
4-й	3	4	6

Используя приведенную информацию заданий 2.1–2.5, необходимо:

1) ввести неизвестные переменные задачи;

2) представить условия экономико-математической задачи в виде системы неравенств;

3) построить многогранник решений системы неравенств;

4) изобразить геометрически целевую функцию, количественно выражающую цель решения экономико-математической задачи;

5) найти наиболее удаленную от начала координат точку пересечения целевой функции и многогранника решений при решении задачи на максимум или наиболее близко расположенную от начала координат точку пересечения при решении задачи на минимум;

6) найти оптимальные значения переменных экономико-математической задачи, проанализировать оптимальное решение (прил. В).

Задания для самостоятельной работы

Задание 2.6. Необходимо определить количество выпускаемой в производственном цеху кондитерской фабрики карамели с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

В производственном цеху освоен выпуск двух ассортиментных групп карамели.

Расход основного сырья, его запас, получаемая прибыль указаны в табл. 2.6.

Таблица 2.6. **Расход и запас сырья**

Основное сырье	Ассортиментная группа карамели		Наличие сырья
	1-я	2-я	
Сахарный песок, т	0,7	0,7	600
Фруктовое пюре, т	–	0,2	100
Патока, т	0,3	0,2	250
Прибыль с 1 т продукции, тыс. у. д. е.	10,0 + 0,5N	12,0 + 0,5K	

Задание 2.7. Необходимо обосновать объемы выпуска изделий швейного цеха сельскохозяйственной организации с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Швейный цех выпускает меховые шапки и полушубки в ассортименте 3:1.

В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка. Время обработки изделий на каждом участке, себестоимость и отпускная цена изделий приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7. **Основные показатели работы швейного цеха**

Показатели	Изделие		Фонд рабочего времени, чел.-ч
	меховая шапка	полушубок	
Норма времени на участках, чел.-ч: дубильном	0,2	0,6	340
раскройном	0,3	1,7	420
пошивочном	0,4	2,8	500
Себестоимость одного изделия, у. д. е.	40	130	
Цена одного изделия, у. д. е.	60 + 0,2N	180 + 0,3K	

Задание 2.8. Необходимо обосновать оптимальное сочетание посевов пшеницы и овса в фермерском хозяйстве с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

В фермерском хозяйстве под зерновые культуры отведено 30 + N га пахотных земель. Выход продукции и затраты на возделывание 1 га культур, а также запасы ресурсов приведены в табл. 2.8.

Т а б л и ц а 2.8. **Информация по возделыванию 1 га зерновых культур**

Показатели	Сельскохозяйственная культура		Запасы ресурсов
	пшеница	овес	
Урожайность, ц	35	30	
Затраты механизированного труда, тракторо-смен	0,8	0,7	23
Себестоимость 1 ц зерна, у. д. е.	55	45	
Цена 1 ц, у. д. е.	70 + 0,1K	65	

Задание 2.9. Требуется определить объемы закупок картофеля у двух поставщиков с целью максимизации прибыли организации.

Исходная информация.

Организация специализируется на производстве замороженных пищевых полуфабрикатов: картофельных долек, кубиков и хлопьев, используемых для приготовления пюре.

Объемы выпуска полуфабрикатов в ассортименте из картофеля первого и второго поставщиков и прибыль от их производства приведены в табл. 2.9.

Т а б л и ц а 2.9. **Выпуск полуфабрикатов с 1 т картофеля, т**

Продукция	Поставщики		Максимальный объем выпуска продукции
	1-й	2-й	
Картофельные дольки	0,22	0,30	1,9
Картофельные кубики	0,23	0,12	1,3
Картофельные хлопья	0,31	0,32	2,5
Прибыль в расчете на 1 т сырья, у. д. е.	450 + K	550 + N	

2.2. Модели оптимизации продовольственной программы

Задание 2.10. Определить оптимальные размеры отраслей с целью получения максимума прибыли.

Исходная информация.

В фермерском хозяйстве имеется 50 + N га пахотных земель. Запас труда составляет 1600 + 10 N чел.-дн. Возможно возделывание зерновых, картофеля и многолетних трав, а также предусмотрен откорм свиней.

Затраты труда на 1 га зерновых, картофеля и многолетних трав составляют соответственно 5,0; 25,0 и 2,0 чел.-дн./га, а на 1 голову свиней – 5 чел.-дн. Выход кормов соответственно 50, 10, 40 ц к. ед., расход кормов на 1 гол. – 10 ц к. ед.

Минимальное поголовье свиней – 100 голов, минимальная площадь зерновых – 20 га.

Прибыль на 1 га посева картофеля – 150 + 2N, а на 1 голову свиней – 30 + 0,8N у. д. е.

Задание 2.11. Определить площадь посева сельскохозяйственных культур с целью производства максимума стоимости валовой продукции в стоимостном выражении.

Исходная информация.

В подразделении хозяйства планируется выращивать зерновые, многолетние травы на сено, однолетние травы на зеленый корм.

Производственные ресурсы подразделения: пахотные земли – 1200 – 2N га; труд – 8180 + 4N чел.-дн.

Технологические ограничения на размеры отраслей: зерновые культуры – не менее 450 + 2N, не более 720 + N га.

Эффективность развития отраслей отражена в табл. 2.10.

Т а б л и ц а 2.10. **Экономические показатели развития отраслей растениеводства**

Показатели	Сельскохозяйственная культура		
	зерновые	многолетние травы	однолетние травы
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн./га	6 + 0,2К	4 + 0,1К	2 + 0,1К
Стоимость валовой продукции, у. д. е./га	92 + 4К	28 + 2К	20 + К

Задание 2.12. Определить размеры отраслей подразделения, обеспечивающих получение максимума прибыли.

Исходная информация.

В подразделении хозяйства получили развитие зерновые, лен-долгунец, картофель.

Производственные ресурсы подразделения: пахотные земли – 700 + + 10N га; труд – 22000 + 20N чел.-дн.

Технические ограничения на размеры отраслей: зерновые – не менее 180 га, лен-долгунец – не более 150 га.

Показатели развития отраслей приведены в табл. 2.11.

Таблица 2.11. **Экономические показатели развития отраслей**

Показатели	Сельскохозяйственная культура		
	зерновые	лен	картофель
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн./га	9 – 0,3К	30 – 0,8К	32 + 0,2К
Прибыль, у.д.е./га	38 – 0,5К	120 – 2К	180 – 1,5К

На основе приведенной информации заданий 2.10–2.12 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум прибыли, стоимости валовой, товарной продукции:

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j .$$

При условиях:

1. По использованию земельных угодий –

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1 .$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i, i \in I_2 .$$

3. По балансу питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_2} w_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_1} d_{ij} x_j + W_i, i \in I_3 .$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j,\ j \in J_0 .$$

5. По производству (реализации) продукции –

$$\sum_{j \in J_0} \bar{d}_{ij} x_j \ge D_i, i \in I_4 .$$

6. Неотрицательность переменных:

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей и сельскохозяйственных культур;

J_1 – множество отраслей растениеводства, $J_1 \subset J_0$;

J_2 – множество отраслей животноводства, $J_2 \subset J_0$;

i – номер ресурса (вида земельного угодья, труда, питательного вещества, продукции);

I_1 – множество видов земельных угодий;

I_2 – множество видов труда;

I_3 – множество видов питательных веществ;

I_4 – множество видов продукции.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j

Известные величины:

A_i – ресурсы земельного угодья вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – расход питательного вещества вида i на единицу отрасли животноводства вида j;

d_{ij} – выход корма в пересчете на питательное вещество вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

w_i – выход корма с природных кормовых угодий в пересчете на питательное вещество вида i;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

$\overline{d}_{ij}$ – выход продукции вида i с единицы отрасли вида j;

D_i – минимальный объем производства (реализации) продукции вида j;

p_j – прибыль, товарная, валовая продукция в расчете на единицу отрасли вида j.

Задание 2.13. Определить оптимальное сочетание посевных площадей культур, обеспечивающее максимальное производство кормов.

Исходная информация.

На участках пахотных земель с поливом и без орошения могут возделываться две культуры: кормовые корнеплоды и кукуруза на силос.

Производственные ресурсы: площадь орошаемых пахотных земель – 150 + 5N га; площадь богарных (неполивных) земель – 250 + 2N га; труд – 13000 + 10N чел.-дн.; ресурсы воды – 270 + 3N тыс. м^3.

Нормы затрат ресурсов и урожайность сельскохозяйственных культур приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12. **Экономические показатели возделывания сельскохозяйственных культур**

Показатели	Кормовые корнеплоды		Кукуруза на силос	
	без полива	на поливе	без полива	на поливе
Расход пахотных земель, га	1	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн/га	48 + 0,2К	60 + 0,2К	12 + 0,1К	16 + 0,1К
Норма полива, тыс. м^3/га	–	2,0	–	1,0
Выход кормов, ц к. ед./га	40 – К	70 – К	30 – 0,5К	50 – 0,5К

На основе приведенной информации задания 2.13 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум производства кормов:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{j \in J_0} W_{ij} x_j .$$

При условиях:

1. По использованию пахотных земель –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1.$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i, i \in I_2.$$

3. По использованию ресурсов воды –

$$\sum_{j \in J_0} v_{ij} x_j \le V_i, i = 2.$$

4. Технологические ограничения по площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j, j \in J_0.$$

5. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей растениеводства и сельскохозяйственных культур;

i – номер ресурса (вида пахотных земель, труда, питательного вещества, ресурса воды);

i = 1 – номер питательного вещества;

i = 2 – номер ресурса воды;

I_1 – множество видов пахотных земель (орошаемой, богарной (неполивной));

I_2 – множество видов труда.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы пахотных земель (орошаемой, богарной) вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – выход питательного вещества вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размер отрасли вида j;

v_{ij} – расход ресурса (воды) вида i на единицу отрасли вида j;

V_i – количество ресурса (воды) вида i.

Задание 2.14. Определить оптимальную программу трансформации земельных угодий, обеспечивающую получение максимума стоимости дополнительной продукции.

Исходная информация.

Имеется 90 + 0,5N га, не используемых в сельскохозяйственном производстве угодий, которые могут трансформироваться в пахотные земли, сенокосы или пастбища.

В пашню может быть трансформировано от 20 до 30 га.

Показатели эффективности трансформации угодий приведены в табл. 2.13.

Т а б л и ц а 2.13. **Исходные данные в расчете на 1 га**

Показатели	Трансформация угодий		
	в пахотные земли	в сенокосы	в пастбища
Затраты на трансформацию, у. д. е.	120 + 0,1K	90 – 0,2K	40 + 0,3K
Стоимость дополнительной продукции, у. д. е.	80 + 2K	30 + K	15 + 5K

На проведение работ по трансформации выделено 8500 + 2N у. д. е.

На основе приведенной информации задания 2.14 необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум стоимости дополнительной продукции:

$$F_{\max} = \sum_{i=1} \sum_{k \in K_1} \sum_{\tilde{k} \in K_2} p_{ik\tilde{k}}\, x_{k\tilde{k}}.$$

1. По использованию угодий, подлежащих трансформации –

$$\sum_{\tilde{k} \in K_2} x_{k\tilde{k}} \le A_k, k \in K_0.$$

2. По площади трансформации угодий –

$$x_{k\tilde{k}} \le A_{k\tilde{k}}, k \in K_0, \tilde{k} \in K_2.$$

3. По использованию ресурсов –

$$\sum_{k \in K_0} \sum_{\tilde{k} \in K_2} b_{ik\tilde{k}} x_{k\tilde{k}} \le B_i, i \in I_0.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{k\tilde{k}} \ge 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса (труда, материально-денежных средств, основных производственных фондов);

$i = 1$ – номер ресурса (денежных средств);

I_0 – множество видов ресурсов;

k – номер вида земельного угодья;

$\tilde{k}$ – номер вида трансформируемого земельного угодья, $\tilde{k} \subset k$;

K_0 – множество видов земельных угодий;

K_1 – множество видов сельскохозяйственных угодий, $K_1 \subset K_0$;

K_2 – множество видов трансформации земельных угодий.

Неизвестные величины:

$x_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом вида $\tilde{k}$.

Известные величины:

$p_{ik\tilde{k}}$ – стоимость дополнительной продукции (ресурса) вида i с единицы угодья вида k после трансформации его способом вида $\tilde{k}$;

$A_{k\tilde{k}}$ – площадь угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

A_k – площадь угодья вида k, подлежащего трансформации;

$b_{ik\tilde{k}}$ – расход ресурса вида i на единицу угодья вида k, трансформируемого способом $\tilde{k}$;

B_i – наличие ресурса вида i.

Задания для самостоятельной работы

Задание 2.15. Определить площади посева сельскохозяйственных культур с целью производства максимума стоимости товарной продукции.

Исходная информация.

1. В подразделении хозяйства планируется выращивать зерновые культуры, картофель, сахарную свеклу.

2. Для возделывания сельскохозяйственных культур выделяется: пахотных земель – 600 + 3N га; трудовых ресурсов – 12500 + 5,0N чел.-дн.

3. Минимальный объем производства, ц: зерна – 5500 + 10N; картофеля – 10000 + 20N; сахарной свеклы – 12000 + 15N.

4. Экономические показатели развития отрасли растениеводства характеризуются данными табл. 2.14.

Таблица 2.14. **Экономические показатели развития отраслей растениеводства**

Показатели	Сельскохозяйственная культура		
	зерновые	картофель	сахарная свекла
Расход пахотных земель, га	1	1	1
Затраты труда, чел.-дн./га	7 + 0,2K	30 + K	33 + 0,5K
Стоимость товарной продукции, у. д. е./га	90 + 2,9K	1200 + 18K	800 + 22K
Урожайность, ц/га	29 + 0,8K	260 + 5K	300 + 8K

Задание 2.16. Определить площади посева зерновых культур с целью максимизации выручки от реализации продукции семенного сельскохозяйственного предприятия.

Исходная информация.

Специализированное семенное сельскохозяйственное предприятие занимается возделыванием семян зерновых культур (озимой ржи, озимой пшеницы, ячменя и овса), поставляя их также для реализации в другие регионы.

Подразделению, занимающемуся производством этих культур, выделено 320 + K га пашни, 505 ц д. в. минеральных удобрений.

Определено, что для рентабельного ведения данной отрасли объем производства озимых культур должен быть не менее 3000 + N ц, а яровых – не менее 6200 + N ц.

Планово-аналитическая служба разработала прогнозируемые показатели развития зерновой отрасли (табл. 2.15).

Т а б л и ц а 2.15. **Экономические показатели в расчете на 1 га**

Показатели	Сельскохозяйственные культуры			
	Озимая пшеница	Озимая рожь	Ячмень	Овес
Расход пашни, га	1	1	1	1
Внесение удобрений, ц д. в.	1,7	2,0	1,5	1,6
Урожайность, ц/га	26	30	34	28
Выручка от реализации продукции, у. д. е.	410	360	450	330

Задание 2.17. Разместить посевы сельскохозяйственных культур на эродированных землях производственного участка сельскохозяйственного предприятия с целью получения максимально чистого дохода в стоимостном выражении.

Исходная информация.

На пашне производственного участка сельскохозяйственного предприятия выделено 3 категории эродированных земель.

Площадь посева сельскохозяйственных культур следующая: яровые зерновые – 100 + 2K; многолетние травы – 200 – 2N; кукуруза – 150 – 2K; озимые зерновые – 50 + 2N га.

Площадь эродированных земель составляет: 1-я категория – 140 + 2N; 2-я – 190; 3-я – 220 – 2N га.

Не предполагается возделывать кукурузу на участке с 1-й категорией эродированных земель.

Чистый доход с 1 га приведен в табл. 2.16.

Т а б л и ц а 2.16. **Чистый доход с 1 га, у. д. е.**

Сельскохозяйственные культуры	Категории эродированных земель		
	1-я	2-я	3-я
Яровые зерновые	120 – K	110	150 – 2N
Многолетние травы	50 + N	90	70
Кукуруза	–	80	60 + K
Озимые зерновые	140 – N	100	130 – 2K

Задание 2.18. Необходимо найти оптимальное решение задачи, проанализировав полученную программу выпуска новых видов сыров с целью получения максимальной прибыли.

Исходная информация.

Производственное подразделение агропромышленного комбината налаживает выпуск четырех новых видов сыров с возможностью их дальнейшего экспорта. Масштаб производства данной продукции ограничивается в основном имеющимися трудовыми ресурсами, лимитом на электроэнергию и размером выделяемых Беларусбанком кредитных ресурсов под каждую из перерабатывающих линий.

На текущий период подразделение агропромышленного комбината располагает соответственно следующими ресурсами: 10300 чел.-ч, 72000 кВт/ч и 3250 у. д. е.

Закупаемое оборудование позволяет производить сыр № 3 в количестве до 150 + К ц, а сыр № 4 – не ниже 200 – К ц за период.

Расход ресурсов и эффективность производства различных видов сыров по ассортименту в расчете на 1 ц даны в табл. 2.17.

Т а б л и ц а 2.17. **Экономические параметры производства сыров**

Показатели	Номенклатура сыров			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Расход трудовых ресурсов, чел.-ч	16	16	19	22
Расход электроэнергии, кВт/ч	150 + К	220 – К	200	180
Привлечение денежных кредитов, у. д. е.	10	12	8	11
Прибыль от реализации, у. д. е.	2,5	2,6	2,3	2,4 + 0,1К

Задание 2.19. Требуется определить оптимальный ассортимент объема выпечки хлебных изделий с целью получения максимальной прибыли.

Исходная информация.

Хлебозавод для выпечки четырех видов хлеба использует муку двух сортов, маргарин, яйца.

Производственные мощности и установленное оборудование позволяют перерабатывать в сутки не более 350 + К кг муки первого сорта, 320 – К кг муки второго сорта, 180 кг маргарина и 1670 шт. яиц.

В табл. 2.18 приведены нормы расходов продуктов, а также прибыль от продажи 1 кг хлеба каждого вида.

Т а б л и ц а 2.18. **Экономические показатели выпуска хлебных изделий**

Показатели	Вид хлебных изделий			
	«А»	«Б»	«В»	«Г»
Мука 1-го сорта, кг	0,61	0,56	–	–
Мука 2-го сорта, кг	–	–	0,44	0,49
Маргарин, кг	0,134	0,130	0,121	0,126
Яйца, шт.	2	1	I	1
Прибыль, у. д. е.	830 – 100N	710	260 + К	420

Исследования коммерческой службы хлебозавода установили, что постоянным спросом у населения пользуется хлеб вида «В» и поэтому его надо выпекать не менее 105 кг в сутки.

Задание 2.20. Требуется определить оптимальное количество вносимых органических и минеральных удобрений при минимизации общих расходов.

Исходная информация.

Арендное подразделение сельскохозяйственного предприятия планирует внесение удобрений на закрепленные поля площадью 50 га.

В соответствии с разработанной картосхемой на каждый гектар требуется не менее 75 кг азота, 25 кг фосфора и 35 кг калия.

Органическое удобрение будет получено на собственной животноводческой ферме, а коммерческой службой предприятия изучена возможность покупки минеральных удобрений.

Затраты на внесение органических и минеральных удобрений с учетом их приобретения составляют соответственно 2,3 + 10К и 130 – 10К у. д. е. за 1 т. Химический состав удобрений дан в табл. 2.19.

Т а б л и ц а 2.19. **Состав питательных веществ в удобрениях**

Показатели	Состав, кг/т		
	Азот	Фосфор	Калий
Органические удобрения	7	2	5
Минеральные удобрения	230	100	80

Производительность труда при разбрасывании органического удобрения составляет 80 т/ч, а при внесении сложного минерального удобрения – 4.

Для выполнения этих работ в ограниченный период арендное подразделение может выделить трудовые ресурсы в количестве не более 230 ч.

Задание 2.21. Необходимо агробизнесмену рекомендовать оптимальную программу развитие сельскохозяйственного производства (размер посевных площадей и поголовья свиней) для получения максимальной прибыли.

Исходная информация.

Частный предприниматель в сфере сельского хозяйства занимается производством зерна, картофеля и корнеплодов по экологосберегающей технологии, а также в отрасли животноводства выращивает свиней, что позволяет ему вывозить отдельные виды продукции на рынки ряда городов нашей республики.

Для этих целей он располагает пашней площадью 100 га, а годовой фонд рабочего времени составляет 2000 чел.-дн.

Для производства каждого продукта затраты труда на 1 га (1 гол.) составят: зерновые – 6, картофель – 18, корнеплоды – 23, свиньи – 5 чел.-дн.

Предпринимателем закуплены корма в количестве 600 ц к. ед., кроме того собственное их производство с 1 га посева каждой культуры планируется в следующих размерах: зерно – 30, картофель – 36, корнеплоды – 52 ц к. ед.

Расход кормов на 1 гол. свиней составит 8 ц к. ед.

Имеющееся типовое животноводческое помещение позволяет содержать поголовье свиней в пределах от 200 до 250 гол.

Оценочная прибыль от единицы каждой товарной отрасли будет составлять: зерновые – 90, картофель – 230, свиноводство – 60 у. д. е.

Задание 2.22. Требуется обосновать оптимальную структуру товарооборота для фирменного магазина с целью получения максимума валового дохода.

Исходная информация.

Молочный комбинат открыл в одном из городов Республики Беларусь фирменный магазин для продажи сыров различных наименований: «А», «В», «С» и «Д».

Для своего функционирования торговое предприятие располагает следующими ресурсами: площадь торговых залов – 420 м^2, рабочая сила – 90000 чел.-ч. Издержки обращения не должны превышать 1800 у. д. е.

Минимальный спрос на сыр «В» составляет 10 ц.

Показатели фирменного магазина приведены в табл. 2.20.

Т а б л и ц а 2.20. **Технико-экономические показатели торгового предприятия в расчете на 1 ц**

Показатели	Товар			
	«А»	«В»	«С»	«Д»
Торговая площадь, м^2	7,1	8,0	7,3	6,9
Рабочая сила, чел.-ч	268	260	270	265
Издержки обращения, у. д. е.	31	29	35	33
Валовой доход, у. д. е.	110	105	108	109

Задание 2.23. Требуется обосновать оптимальную программу работы мясоперерабатывающего цеха агрокомбината (производство мясной продукции) с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Мясоперерабатывающий цех агрокомбината выпускает четыре вида мясных продуктов для продажи на внутренних и внешних рынках. Для этого используются три вида производственных ресурсов: сырье, труд, электроэнергия.

Ежедневно цех располагает первым из указанных видов ресурсов в количестве 89 ц, вторым – в количестве 28 чел.-дн. и третьим – 23 кВт·ч. Для производства одной единицы мясной продукции требуется соответствующих ресурсов в количестве: первого – 0,34; 1,23; 1,36; 1,1 ц соответственно; второго – 0,14; 0,22; 0,29; 0,13 чел.-дн. соответственно, третьего – 0,25; 0,37; 0,26; 0,14 кВт·ч соответственно.

Предполагаемая прибыль перерабатывающего цеха от реализации одной единицы продукции каждого вида составит соответственно 16, 13, 18 и 14 у. д. е.

Задание 2.24. Требуется обосновать оптимальную программу работы завода по производству безалкогольных напитков с целью максимизации прибыли.

Исходная информация.

Завод по производству безалкогольных напитков производит три вида продукта для продажи на экспорт. Один из напитков является стандартным, второй предназначен для детей, а третий – для людей пожилого возраста, так как имеет отдельные добавки, укрепляющие организм.

Известны основные ингредиенты, их ежедневное количество, а также экспертные оценки максимального спроса на каждый товар (табл. 2.21).

Т а б л и ц а 2.21. **Экономические показатели завода безалкогольных напитков**

Показатели	Расход сырья на 1 кг продукта, кг			Ежедневный спрос, кг
	Сахар	Экстракт из солода	Сливки	
Стандартный напиток	0,25	0,35	0,30	10000
Напиток для детей	0,15	0,30	0,50	9000
Напиток для пенсионеров	0,20	0,35	0,25	6000
Ежедневный объем сырья, кг	5000	6250	6000	

Цена продажи 1 кг напитков следующая: стандартный – 10, для детей – 12, для пенсионеров – 15 у. д. е.

Издержки производства 1 кг каждого их этих продуктов таковы: соответственно по каждому товару – 4,7 и 8 у. д. е.

2.3. Транспортные (распределительные) модели

Задание 2.25. Составить план перевозок кормов на фермы, обеспечивающий минимальные транспортные затраты на перевозку кормов.

Исходная информация.

В сельскохозяйственном предприятии имеется 4 севооборота (2 полевых и 2 кормовых) и 4 фермы.

Потребность в кормах на фермах составляет: 1-й фермы – 20000 – 100К; 2-й – 10000 + 50(N + K); 3-й – 18000 – 20(N + K); 4-й – 7000 + 100N ц к. ед.

Выход кормов с севооборотов равен: с 1-го севооборота – 8500 + 100N; со 2-го – 16100 – 20(N + K); с 3-го – 14300 + 50(N + K); с 4-го – 17300 – 100N ц к. ед.

С третьего севооборота нет возможности транспортировать корма на первую и вторую фермы.

Стоимость транспортировки единицы груза (с учетом расстояний) приведена в табл. 2.22.

Таблица 2.22. **Стоимость транспортировки единицы груза, у. д. е.**

Фермы	Севообороты			
	1-й (полевой)	2-й (полевой)	3-й (кормовой)	4-й (кормовой)
1-я	2 + 0,1К	6	–	5
2-я	5	3	–	3
3-я	7 – 0,1К	4	8 – 0,1N	7 – 0,1К
4-я	6	2	1 + 0,1N	4

Задание 2.26. Определить оптимальную программу использования полей севооборота с целью получения максимума зеленых кормов.

Исходная информация.

В сельскохозяйственном предприятии для посева четырех культур выделено четыре поля севооборота.

Площадь посева сельскохозяйственных культур (с учетом запасов семенного фонда) следующая: тимофеевка – 130 – 3К; вика – 150 – 3К; клевер – 90 + 2N; ежа сборная – 140 – 2N га.

Имеются четыре поля севооборота: 1-е – 125 – 3К; 2-е – 110 + 3К; 3-е – 100 + 2N; 4-е – 180 – 2N га.

На четверном поле высевать клевер не планируется.

Продуктивность сельскохозяйственных культур приведена в табл. 2.23.

Таблица 2.23. **Выход кормов с 1 га посева, ц к. ед.**

Сельскохозяйственные культуры	Поля севооборота			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Тимофеевка	20	24	25 – K	28 – N
Вика	18	16 + N	22	20
Клевер	28 – N	23	21	–
Ежа сборная	17 + K	20	16 + N	23

Задание 2.27. Распределить севообороты по участкам с разным плодородием с целью получения максимума чистого дохода в стоимостном выражении.

Исходная информация.

При землеустроительном обследовании в сельскохозяйственном предприятии выделено 4 участка с разным плодородием (пригодных для трансформации угодий), на которых планируется разместить три севооборота.

Площади севооборотов составят: 1-го (полевого) – 300; 2-го (полевого) – 500 – 2K; 3-го (кормового) – 200 + 3N га.

Площади участков, пригодных для трансформации угодий, равны: 1-го – 200; 2-го – 280; 3-го – 150 + 3N; 4-го – 400 – 2K га.

Не планируется размещать первый полевой севооборот на четвертом земельном участке.

Чистый доход с 1 га площади севооборота приведен в табл. 2.24.

Таблица 2.24. **Чистый доход с 1 га площади севооборота, у. д. е.**

Севообороты	Земельные участки с разным плодородием			
	1-й	2-й	3-й	4-й
1-й (полевой)	100	130	50 + 2N	–
2-й (полевой)	60 + 2K	110	140 + 2K	80
3-й (кормовой)	150 – 2N	90	70	120

Задание 2.28. Составить план перевозок кормов на фермы, обеспечивающий минимальные транспортные затраты на перевозку кормов.

Исходная информация.

В сельскохозяйственном предприятии имеется 4 севооборота (2 полевых и 2 кормовых) и 4 молочно-товарные фермы.

Потребность в кормах на фермах составляет: 1-й фермы – 20000 – 100K; 2-й – 10000 + 50(N + K); 3-й – 18000 – 20 (N + K); 4-й – 7000 + 100N ц к. ед.

Выход кормов с севооборотов равен: с 1-го севооборота – 8500 + 100N; со 2-го – 16100 – 20(N + K); с 3-го – 14300 + 50(N + K); с 4-го – 17300 – 100N ц к. ед.

С третьего севооборота нет возможности транспортировать корма на первую и вторую фермы.

5. Стоимость транспортировки единицы груза (с учетом расстояний) приведена в табл. 2.25.

Таблица 2.25. **Стоимость транспортировки единицы груза, у. д. е.**

Молочно-товарные фермы	Севообороты			
	1-й (полевой)	2-й (полевой)	3-й (кормовой)	4-й (кормовой)
1-я	2 + 0,1K	6	–	5
2-я	5	3	–	3
3-я	7 – 0,1K	4	8 – 0,1N	7 – 0,1K
4-я	6	2	1 + 0,1N	4

Задание 2.29. Составить план перераспределения чересполосных участков между сельскохозяйственными предприятиями, обеспечивающий минимальные транспортные затраты на перевозку кормов.

Исходная информация.

Три сельскохозяйственных предприятия имеют 5 чересполосных участков, продукция которых используется в кормопроизводстве.

Объем производства кормов в хозяйствах на первоначально закрепленных за ними участках составляет: 1-е хозяйство – 5000 + 50(N + K); 2-е – 3000 + 100(N + K); 3-е – 10000 – 100(N + K) ц к. ед.

Объемы производства кормов на чересполосных участках равны: 1-й – 3500; 2-й – 5200 – 100(N + K); 3-й – 2900 + 50(N + K); 4-й – 4100; 5-й – 2500 + 100(N + K) ц к. ед.

Первое хозяйство в силу своего расположения не может обменяться чересполосным участком с третьим хозяйством.

Стоимость транспортировки единицы груза (с учетом расстояний) приведена в табл. 2.26.

Таблица 2.26. **Стоимость транспортировки единицы груза, у. д. е.**

Хозяйства	Чересполосные участки хозяйств				
	1-й (1-е хоз-во)	2-й (1-е хоз-во)	3-й (2-е хоз-во)	4-й (2-е хоз-во)	5-й (3-е хоз-во)
1-е	1 + 0,1N	6	3	6	–
2-е	9 – 0,1N	5	2 + 0,1K	4	8 – 0,1K
3-е	4	8 – 0,1K	7	5	3

Используя приведенную информацию заданий 2.25–2.29, необходимо:

1) привести открытую экономико-математическую модель к закрытому виду. Модель является открытой, если объем ресурсов не равен объему потребностей. Для того чтобы открытую модель привести к закрытому виду, в нее вводят фиктивный ресурс или фиктивный потребитель в объеме, равном разнице между объемами ресурсов и потребностей. Оценочные коэффициенты перевозки единицы груза от поставщиков к потребителям в этом случае принимают равными нулю. Ввести неизвестные величины задач;

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую модель.

Требуется найти минимум затрат на перевозку грузов:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} \sum_{i \in I_0} c_{ij} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По использованию ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} x_{ij} = A_i, i \in I_0.$$

2. По удовлетворению потребностей –

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} = B_j, j \in J_0.$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \geq 0.$$

Индексация:

i – номер ресурса;

I_0 – множество ресурсов;

j – номер потребителя;

J_0 – множество потребителей.

Неизвестные величины:

x_{ij} – количество груза, запланированного к перевозке от поставщика вида i к потребителю вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы поставщика вида i;

B_j –заказ потребителя вида j;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от поставщика вида i к потребителю вида j.

Задания для самостоятельной работы

Задание 2.30. Определить оптимальную программу распределения объемов работ по маркам тракторов в крестьянском (фермерском) хозяйстве с целью минимизации затрат.

Исходная информация.

Тракторный парк крестьянского (фермерского) хозяйства состоит из тракторов 4 марок, выполняющих в весенний период 5 видов работ.

Объем работ в весенний период в крестьянском (фермерском) хозяйстве, усл. эт. га:

а) закрытие влаги………………………...500 + 4N;
б) культивация…………………………...1500 – 8N;
в) вспашка……………………………..….1200 + 6N;
г) боронование с прикатыванием……….1600 – 9N;
д) посев…………………………..…… ….800 + 5N.

Возможности тракторного парка, усл. эт. га:

а) I………1400 + 4N;
б) II………1400 – 6N;
в) III……..1100 + 5N;
г) IV…… 1700 + 8N.

Стоимость единицы выполнения работы приведена в табл. 2.27.

Т а б л и ц а 2.27. **Материально-денежные затраты на 1 усл. эт. га, у. д. е.**

Виды работ	Материально-денежные затраты на 1 усл. эт. га, у. д. е.			
	Марки тракторов			
	I	II	III	IV
Закрытие влаги	3	5	–	–
Культивация	4	6	8	3
Вспашка	2	3 + 0,03N	5	4
Боронование с прикатыванием	2 + 0,01N	3	2	3 + 0,05N
Посев	5	4 – 0,04N	6	5

Тракторы марки III и IV не задействованы на закрытие влаги. Оптимизация закрепления тракторов за видами работ направлена на их выполнение в установленные сроки и с минимальными издержками.

Задание 2.31. Составить оптимальную программу посева зерновых в кооперативе агропромышленного предприятия с целью получения максимального выхода продукции.

Исходная информация.

Для посева четырех зерновых культур имеются пять полей. На поле №5 не предусматривается посев ячменя и овса.

Размер полей для производства зерна, га:

а) № 1……….220 + 2N;

б) № 2……….190 + 6N;

в) № 3……….260 – 5N;

г) № 4………..200 + 3N;

д) № 5……….350 – N.

Запланированная площадь посева каждой культуры, га:

а) рожь……………..350 – 10N;

б) тритикале………..310 + 4N;

в) ячмень…………...280 + 7N;

г) овес……………….230 – 3N.

Выход продукции с каждого поля представлен в табл. 2.28.

Т а б л и ц а 2.28. **Урожайность зерновых, ц/га**

Культуры	Номер поля				
	1	2	3	4	5
Рожь	34	32 + 0,1N	29	26	28
Тритикале	36 – 0,2N	35	32	27	30
Ячмень	33	31	28 + 0,4N	25	–
Овес	30	29 + 0,3N	24	31 – 0,1N	–

Оптимизация экономико-математической задачи состоит в распределении посева культур по полям кооператива с целью получения максимального объема зерна.

Задание 2.32. Найти оптимальное распределение кредитов с максимизацией общей прибыли по процентам, получаемой филиалами головного банка от торгово-посреднических структур.

Исходная информация.

Четыре торгово-посреднические структуры для развития своих производств нуждаются в финансовых средствах – соответственно 150, 170 + К, 120, 180 у. д. е.

Филиалы Беларусбанка имеют возможность выделить кредит на различный срок возмещения с целью получения для себя максимальной прибыли от процентов в следующих размерах: 160, 120, 130 + N, 140 у. д. е. соответственно.

Выделяемая сумма кредитов филиалами банка, потребность в кредите торгово-посреднических организаций и процентные ставки из расчета на 100 у. д. е. в зависимости от сроков возмещения кредита приведены в табл. 2.29.

Т а б л и ц а 2.29. **Размер кредитов и процентные ставки по ним**

Филиалы банка	Торгово-посреднические структуры				
	1	2	3	4	Итого
А	22-К	19	11	16	160
Б	16	17	19	20	120
В	14	22	20	18	130 + N
Г	17	21	18	14	140
И т о г о…	150	170 + К	120	180	–

Задание 2.33. Необходимо составить оптимальный план перевозки овощей из агропромышленных предприятий в магазины с целью минимизации транспортных издержек.

Исходная информация.

Пять агропромышленных предприятий области, занимаясь выращиванием овощей, получили возможность их реализовать в четырех специализированных магазинах объединения. Наличие овощей в хранилищах каждого товаропроизводителя представлено в табл. 2.30.

Т а б л и ц а 2.30. **Производственное хранение продукции по поставщикам, т**

Объекты	Объем
Агропредприятие	490
Агроторговое предприятие	550 – К
Агрофирма	400
Агрокомбинат	640
Сельскохозяйственное предприятие	470 + К

Заказчиками овощеводческой продукции являются специализированные торговые магазины объединения (табл. 2.31).

Т а б л и ц а 2.31. **Потребители сельскохозяйственной продукции, т**

Наименование торгового магазина	Потребность в ресурсах
Магазин № 1	530 + К
Магазин № 2	470
Магазин № 3	560 – К
Магазин № 4	630

Потребности магазинов рассчитаны исходя из возможного товарооборота, мощности реализации, изученного спроса на продукцию в регионе. Перевозка овощей будет осуществляться специальными рефрижераторами объединения.

Расстояния от агропромышленных предприятий до магазинов приведены в табл. 2.32. Причем доставка овощей из агропредприятия и агроторгового предприятия в магазин № 4 нецелесообразна из-за состояния дорожной инфраструктуры.

Т а б л и ц а 2.32. **Расстояния на перевозку овощей, км**

Агропромышленное предприятие	Магазины			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Агропредприятие	48	36	51	–
Агроторговое предприятие	44	41 + К	45	–
Агрофирма	40	39	42	46
Агрокомбинат	52–К	34	50	39
Сельскохозяйственное предприятие	46	36	38	43

Задание 2.34. Рассчитать оптимальную программу отгрузки партии продуктов перерабатывающего предприятия заказчикам с целью максимизации денежной выручки.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие, занимающееся выпуском различных видов овощных консервов, должно решить вопрос их продажи своим потребителям.

Объем и ассортимент выпускаемой продукции следующий: соус томатный острый – 140, соус томатный краснодарский – 131, лук в томатном соусе – 133, солянка овощная – 118, томатный сок – 112 туб.

Коммерческая служба предприятия нашла возможных потребителей данной продукции: областная бакалея – 118, областная торговая сеть – 81, районная торговля – 100, республиканский военторг – 93, специализированные магазины – 75, торговые киоски – 88 туб.

Возможные цены, по которым реализуются продукты, даны в разрезе каждого заказчика (табл. 2.33).

Т а б л и ц а 2.33. **Цены реализации пищевых продуктов, у. д. е. за 1 т**

Овощные консервы	Покупатели					
	Област-ная бакалея	Областная торговая сеть	Районная торговля	Республи-канский военторг	Специа-лизиро-ванные магазины	Торго-вые киоски
Соус томатный острый	117	115	116	118 – К	125	123
Соус томатный «Краснодарский»	103 + К	106	109	116	114	120
Лук в томатном соусе	115	112	118 – К	112	99 + К	107
Солянка овощная	98	103	104	97	95	88
Томатный сок	107	114	109	123	121	111

2.4. Модели оптимального составления смеси

Задание 2.35. Составить рецептуру смеси молочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси молочного мороженого должно содержаться 3,5 + 0,2К % жира, 10 + 0,1К % сухих обезжиренных веществ, 17,5 + 0,3К % сахара.

Расход сырья для производства молочного мороженого приведен в табл. 2.34.

Т а б л и ц а 2.34. **Расход сырья для производства молочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжи-ренных ве-ществ	сахара	
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,15 + 0,1K
сухое обезжиренное	–	93	–	0,50
Сливки сухие	42	51	–	1,46
Сахар	–	–	100	0,86
Ванилин	–	–	–	50,00 + 2К
Агар	–	–	–	1,85
Вода	–	–	–	–

Согласно рецептуре для производства молочного мороженого должно быть не более 3 + 2К % сухого обезжиренного молока, не более 4,5 % сухих сливок, не более 75 + 0,05N % натурального молока.

На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Задание 2.36. Составить рецептуру смеси сливочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси сливочного мороженого должно содержаться 9 + 2К % жира, 10 + 0,1К % сухих обезжиренных веществ, 16 % сахара.

Расход сырья для производства сливочного мороженого приведен в табл. 2.35.

Т а б л и ц а 2.35. **Расход сырья для производства сливочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжиренных веществ	сахара	
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,15 + 0,1К
сухое обезжиренное	–	93	–	0,50
сухое цельное	26	68	–	0,90
Масло сливочное	83	1	–	3,00 + 0,1N
Сахар	–	–	100	0,86
Ванилин	–	–	–	50,00 + 2К
Агар	–	–	–	1,86
Вода	–	–	–	–

Согласно рецептуре для производства сливочного мороженого должно быть не более 4 + 0,1К % сухого обезжиренного молока, не более 3 + 0,1N % сухого молока.

На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Задание 2.37. Составить рецептуру смеси сливочного мороженого, обеспечивающую минимальную его себестоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси мороженого должно содержаться 10 + 0,05К % жира, 9 + 0,06 N % сухих обезжиренных веществ, 16 + 0,1К % сахара.

Расход сырья для производства сливочного мороженого приведен в табл. 2.36.

Т а б л и ц а 2.36. **Расход сырья для производства сливочного мороженого**

Сырье	Содержание, %			Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	сухих обезжиренных веществ	сахара	
Молоко:				
натуральное	3,2	8 + 0,1N	–	0,15 + 0,1K
сухое цельное	26	28	–	0,90
сгущенное с сахаром	8,5	20	42	0,71
сгущенное обезжиренное с сахаром	–	26	42	0,55
Масло сливочное	83	1	–	3,00 + 0,1N
Сливки:				
сухие	42	51	–	1,46
натуральные	20 + 2K	7	–	0,93
Сахар	–	–	100	0,86
Ванилин	–	–	–	50,00 + 2K
Агар	–	–	–	1,86
Вода	–	–	–	–

Согласно рецептуре для производства сливочного мороженого, должно быть не более 4 % сухого цельного молока и не более 4 % сухих сливок, порошкообразных молочных продуктов (сухого молока и сухих сливок) должно быть не более 7 %.

На 100 кг смеси мороженого должно приходиться 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина.

Используя приведенную информацию заданий 2.35–2.37, необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум затрат:

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j .$$

При условиях:

1. По содержанию питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le (\ge, =) A_i \ , i \in I_0 .$$

2. По предельным нормам продуктов (сырья) –

$$\tilde{M}_j \le x_j \le M_j,\; j \in J_0 .$$

3. По весу рецептурной смеси –

$$\sum_{j \in J_0} x_j = 100 .$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

i – номер вида питательного вещества;

I_0 – множество видов питательных веществ;

j – номер вида продукта (сырья);

J_0 – множество видов продуктов (сырья).

Неизвестные величины:

x_j – количество единиц продукта (сырья) вида j, входящего в рецептурную смесь.

Известные величины:

a_{ij} – содержание питательного вещества вида i в единице продукта (сырья) вида j;

A_i – количество питательного вещества вида i в рецептурной смеси;

$\tilde{M}_j, M_j$ – соответственно минимальное и максимальное количество продукта (сырья) вида j в рецептурной смеси;

c_j – цена единицы продукта (сырья) вида j.

Задания для самостоятельной работы

Задание 2.38. Требуется составить рецептуру смеси колбасы вареной докторской высшего сорта, обеспечивающую минимальную ее себестоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси колбасы вареной докторской высшего сорта должно содержаться 11,7 + 0,04K кг белка, 22,8 + 0,06N кг жира.

Энергетическая ценность 100 г данной смеси должна быть равна 252 ккал.

Расход сырья для производства колбасы вареной докторской высшего сорта приведен в табл. 2.37.

Т а б л и ц а 2.37. **Расход сырья для производства колбасы вареной докторской высшего сорта**

Сырье	Содержание		Энергетическая ценность в 100 г, ккал	Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	белка, г в 100 г сырья	жира, г в 100 г сырья		
Говядина жилованная высшего сорта	20	7	165	4,5 + 0,2N
Свинина жилованная полужирная	14,3	33,3	357	4,0 + 0,1K
Яйца куриные или меланж	12,7	11,5	157	2,0 + 0,1N
Молоко коровье	2,8	3,2	58	0,5 + 0,2K
Вода	–	–	–	–

Согласно рецептуре для производства колбасы вареной докторской высшего сорта на 100 кг смеси должно приходиться 2,09 кг соли поваренной пищевой, 0,2 кг сахара-песка, 7,1 г натрия нитрита, 50 г ореха мускатного.

В 100 кг смеси для производства колбасы вареной докторской высшего сорта свинина жилованная полужирная не должна быть более 70 кг.

Задание 2.39. Необходимо составить рецептуру смеси сметаны 25%-ной жирности, минимизирующую ее стоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси сметаны 25%-ной жирности должно содержаться 315 + 0,05N г сухих веществ, 25 + 0,04K г белка, 250 + 0,06K г жира, 27 + 0,03N г углеводов и 5 г золы.

Энергетическая ценность 100 г данной смеси должна быть равна 248 ккал.

Расход сырья для производства сметаны 25%-ной жирности приведен в табл. 2.38.

Т а б л и ц а 2.38. **Расход сырья для производства сметаны 25%-ной жирности**

Сырье	Содержание, г в 100 г сырья					Энергетическая ценность в 100 г, ккал	Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	сухих веществ	белка	жира	углеводов	золы		
1	2	3	4	5	6	7	8
Молоко цельное	11,5	2,8	3,2	4,7	0,7	58	0,5 + 0,1N
Масло	40,0	0,8	72,5	1,3	0,3	661	4,0 – 0,1K

Окончание табл. 2.38

1	2	3	4	5	6	7	8
Сливки сухие	51,0	2,5	42,0	3,0	0,4	337	4,86 – 0,1N
Закваска на цельном молоке	11,7	2,8	3,2	3,6	0,7	56	0,3 + 0,1K
Вода	–	–	–	–	–	–	–

Согласно рецептуре смеси сметаны 25%-ной жирности на 100 кг смеси не должно быть более 66,1 кг молока цельного.

Задание 2.40. Составить рецептуру смеси сырков творожных сладких, минимизирующую их стоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси сырков творожных сладких должно быть не менее 23 + 0,04N % жира, не более 51 + 0,06K % влаги, не менее 14,0 + 0,01N % сахара.

Расход сырья для производства сырков творожных сладких приведен в табл. 2.39.

Таблица 2.39. **Расход сырья для производства сырков творожных сладких**

Сырье	Содержание, %				Энергетическая ценность в 100 г, ккал	Цена 1 кг сырья, у. д. е.
	жира	влаги	белка	углеводов		
Творог	18	65	14	2,8	232	2,5 + 0,1K
Масло крестьянское	72,5	25	0,8	1,3	661	4,0 – 0,1N
Сахар-песок	–	–	–	99,8	–	3,9 – 0,1K
Вода	–	100	–	–	–	–

Согласно рецептуре смеси сырков творожных сладких на 100 кг смеси не должно быть более 72 кг творога.

Задание 2.41. Требуется составить рецептуру смеси хлеба, минимизирующую его стоимость.

Исходная информация.

В 100 кг смеси хлеба должно содержаться не менее 6 + 0,01N % белка, не менее 0,9 % жира, не менее 45 + 0,04K % углеводов, не более 42 – 0,01K влаги.

Расход сырья для производства хлеба приведен в табл. 2.40.

Т а б л и ц а 2.40. **Расход сырья для производства хлеба**

Сырье	Содержание, %						Цена за 1 кг сырья, у. д. е.
	белка	жира	углеводов	клетчатки	золы	влаги	
Мука ржаная обдирная	8,9	1,7	65,6	1,2	1,2	14	0,9 + 0,2K
Мука ржаная сеяная	6,9	1,1	68	0,5	0,6	14	1,1 + 0,2N
Мука пшеничная 1-го сорта	10,6	1,5	69	0,1	0,7	14	1,5 + 0,1K
Дрожжи	43	5,7	38	4,2	5,2	–	2,3
Масло растительное	–	99,9	–	–	–	–	1,5 + 0,1N
Вода	–	–	–	–	–	–	–

Согласно рецептуре хлеба на 100 кг смеси может приходиться муки ржаной обдирной от 28 до 51 кг, муки ржаной сеяной – от 13 до 25 кг, муки пшеничной 1 сорта – от 25 до 47 кг.

На 100 кг данной смеси должно приходиться 2,7 кг солода и 1,4 кг соли. Цена 1 кг солода и соли соответственно равна 1,7 и 0,3 у. д. е.

Задание 2.42. Необходимо рассчитать оптимальный суточный рацион для одной коровы с целью минимизации его стоимости.

Исходная информация.

Фермер для ведения молочного животноводства закупил в Голландии коров высокопродуктивной породы. Для их содержания имеется возможность выделить следующие корма: комбикорм, силос, корнеплоды, солому, сено и сенаж в период зимовки скота.

Необходимо рассчитать оптимальный суточный рацион для одной коровы с учетом того, что ежедневный удой требует расхода не менее 13 кг к. ед., а стоимость всех кормов в рационе должна быть минимальной.

Сбалансированный рацион требует, чтобы переваримого протеина было не менее 1339 г на 1 корову.

Причем зоотехнические нормы кормления предусматривают, что питательность сена составляет 60 % в группе грубых кормов (солома, сено, сенаж). Кроме того, в рационе должно быть комбикорма не менее 3 кг, соломы не более 6 кг, сенажа – в пределах от 2 до 7 кг.

Данные о содержании питательных веществ в 1 кг корма и их стоимости приведены в табл. 2.41.

Т а б л и ц а 2.41. **Экономические показатели кормов**

Показатели	Содержание в 1 кг корма		Стоимость 1 кг корма, у. д. е.
	кормовых единиц, кг	переваримого протеина, г	
Комбикорм	1,00	125	0,60
Силос	0,19	15	0,20
Корнеплоды	0,13	10	0,10
Солома	0,25	12	0,02
Сено	0,48	49	0,30
Сенаж	0,28	29	0,15

Задание 2.43. Требуется определить оптимальный состав автомобильного бензина с целью минимизации его себестоимости.

Исходная информация.

Российский завод поставляет для агропромышленного комплекса нашей республики автомобильный бензин.

Стандартом предусмотрено, что октановое число поставляемой марки бензина должно быть не ниже 72, а содержание серы в нем – не более 0,4 %.

Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов: № 1, № 2, № 3, № 4, количество которых соответственно не должно превышать 550, 650, 450 и 350 л.

Данные об октановом числе, о содержании серы, себестоимости каждого компонента приведены в табл. 2.42.

Т а б л и ц а 2.42. **Характеристика видов компонентов для составления смеси автомобильного бензина**

Показатели	Компонент бензина			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Октановое число	69	73	81	91
Содержание серы, %	0,34	0,35	0,29	0,21
Себестоимость, у. д. е. за 1 л	2,0	2,2	3,0	4,0

Требуется определить, сколько литров каждого компонента следует использовать для получения 1000 л автомобильного бензина, чтобы его себестоимость была минимальной.

Т а б л и ц а 2.44. **Характеристики инвестиционных проектов, тыс. у. д. е.**

Проект	Требуется площади, га	Первоначальные инвестиции	Планируемый выпуск продукции, т	Чистые денежные потоки по годам				
				t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
1	0,8	300 + N	1000 + K	100	150	190	250	270
2	0,6	350 – N	700 + N	20	25	300	132	233
3	0,2	200 + K	400 + 2K	50	80	100	150	190
4	0,4	650 – 2N	1300 – N	200	300	400	500	620
5	1,1	400 – 2K	1200 – K	250	280	300	350	380

Ставка дисконтирования составляет 11 % в год.

На модернизацию выделено 1000 + 10N тыс. у. д. е. денежных средств, 2 га земельной площади.

Емкость рынка продукции составляет 3000 + 5N т в год.

Используя информацию заданий 2.44–2.45, необходимо:

1) оценить эффективность каждого инвестиционного проекта, используя показатель чистого дисконтированного дохода (*NPV*);

2) сформировать оптимальный портфель инвестиционных проектов для модернизации оборудования, используя следующую структурную экономико-математическую модель.

Определить максимум доходности портфеля инвестиционных проектов:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i \ .$$

При условиях:

1) по использованию финансовых ресурсов:

$$\sum_{i=1}^{n} I_0^i x_i \leq I_c;$$

2) по использованию земельных ресурсов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq A_0;$$

3) по рыночным объемам продаж:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P_0\,;$$

4) ограничения на значения переменных:

$$x_i = 0 \cup 1 (i = \overline{1, n}),$$

где x_i – инвестиционный проект вида i:

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } i \text{ - й инвестиционный проект отклоняется;} \\ 1, \text{ если } i \text{ - й инвестиционный проект реализуется;} \end{cases}$$

I_0^i – начальные инвестиции в проект вида i;

$I_с$ – количество финансовых средств, выделяемых для реализации инвестиционных проектов;

a_i – земельные ресурсы, необходимые для реализации инвестиционного проекта вида i;

A_0 –

Исходная информация.

Менеджер инвестиционного фонда, занимающийся ценными бумагами, намерен разместить 50000 у. д. е. денежных средств таким образом, чтобы получить максимальные годовые проценты с дохода. Его выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций, которые входят в сферу спиртовой промышленности и расположены в городах «P», «R», «S» и «T».

Размещение ценных бумаг в предприятие города «P» позволяет получать 3 % годовых, города «R» – 4 %, города «S» – 5 %, а города «T» – 4,5 %.

Для всех четырех предприятий степень риска и условия размещения капитала различны. Чтобы снизить возможный риск, принято решение, что не менее 45 % инвестиций необходимо вложить в объекты городов «P» и «R». Для обеспечения ликвидности, не менее 20 % общей суммы капитала нужно поместить в предприятие города «T». С учетом возможных изменений в политике республиканского концерна предусматривается, что в объект города «S» следует вкладывать не более 17 % инвестиций, тогда как особенности системы налогообложения требуют, чтобы в объект города «P» было вложено не менее 6 % финансовых средств.

2.6. Модели оптимального портфеля ценных бумаг

Задание 2.47. Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг.

Исходная информация.

Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, имеющий наименьший риск при заданной ожидаемой доходности равной 25 %. Доходность ценных бумаг на протяжении 4 кварталов представлена в табл. 2.45.

Т а б л и ц а 2.45. **Доходность ценных бумаг**

Квартал	Доходность ценных бумаг, %		
	1-й	2-й	3-й
1	5	30 – 0,2K	15
2	15	20 – 0,1N	20
3	20	10	10
4	25 – 0,1N	2 + 0,2K	5 + 0,2N

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) рассчитать ожидаемую доходность каждой ценной бумаги по формуле:

$$R_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T},$$

где R_i – доходность ценной бумаги вида i;

R_{it} – доходность ценной бумаги вида i в период времени t, при $t = 1, \ldots, T$;

T – число наблюдаемых периодов;

2) рассчитать вариацию доходности каждой ценной бумаги, которая выступает мерой риска, используя следующую формулу:

$$V_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - R_i)^2}{T},$$

где V_i – вариация между доходностями ценной бумаги вида i;

3) рассчитать ковариацию доходности ценных бумаг вида i и j, выступающую мерой риска, используя формулу:

$$V_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - R_i) \cdot (R_{jt} - R_j)}{T},$$

где V_{ij} – ковариация между доходностями ценных бумаг вида i и j;

R_{it}, R_{jt} – соответственно доходность ценной бумаги вида i и вида j в период времени t;

R_i, R_j – соответственно доходность ценной бумаги вида i и вида j;

4) составить развернутую экономико-математическую модель, используя структурную модель Марковица.

Требуется минимизировать риск портфеля ценных бумаг при заданной ожидаемой доходности:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min \cdot$$

При условиях:

1) по обеспечению заданного уровня доходности:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i = \overline{R}_p^*;$$

2) по формированию суммы долей капитала инвестора:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

3) неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

где x_i – вложения в ценную бумагу вида i;

$\overline{R}_p^*$ – заданное значение доходности портфеля ценных бумаг.

Примечание. Если выполняется третье ограничение задачи, т. е. $x_i > 0$, то это означает, что инвестор должен вложить x_i – долю своего капитала в ценные бумаги вида i. Но инвестор может и взять в долю ценные бумаги вида i на сумму, равную x_i долей своего капитала. Взятые в долг ценные бумаги инвестор может сразу реализовать и полученную сумму денег, равную $(1 + x_i^*)$ долей капитала, может инвестировать в ценные бумаги вида j в пропорциях $x_j\,(j = \overline{1, n},\ j \neq i)$, а через некоторое время инвестор может выкупить ценные бумаги вида i и возвратить первоначальному владельцу. В этом случае неизвестные величины x_i принимают отрицательные значения $x_i < 0$ и третье ограничение структурной модели в этом случае опускают.

5) решить экономико-математическую задачу на персональном компьютере;

6) проанализировать оптимальное решение задачи, обосновать оптимальный портфель ценных бумаг.

Задание 2.48. Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг.

Исходная информация.

Требуется сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, имеющий максимальную ожидаемую доходность при заданном уровне риска 50 %.

Доходность ценных бумаг на протяжении 3 кварталов представлена в табл. 2.46.

Т а б л и ц а 2.46. **Доходность ценных бумаг**

Квартал	Доходность ценных бумаг, %		
	1-й	2-й	3-й
1	8	30 – 0,2N	10
2	15	15 + 0,1K	20
3	20	2 + 0,2K	15

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) рассчитать ожидаемую доходность каждой ценной бумаги $\overline{R_i}$;

2) определить ковариацию доходности ценных бумаг вида i и j;

3) составить развернутую экономико-математическую модель, используя следующую структурную модель.

Требуется максимизировать ожидаемую доходность портфеля ценных бумаг при заданном уровне риска:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \to \max.$$

При условиях:

1) по формированию заданного уровня риска:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j = \overline{V}_p^*;$$

2) по формированию суммы долей капитала инвестора:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

3) неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

где $\overline{V}_p^*$ – заданный уровень риска портфеля ценных бумаг;

$V_p = \delta_p^2$.

Задание 2.49. Необходимо определить чувствительность ценных бумаг и рыночного портфеля к изменениям на рынке ценных бумаг.

Исходная информация.

Решить экономико-математическую задачу, использую следующую информацию: доходность ценных бумаг на протяжении пяти месяцев представлена в табл. 2.47.

Т а б л и ц а 2.47. **Доходность ценных бумаг**

Месяцы	Доходность ценных бумаг, %			
	1-й	2-й	3-й	Рынка ценных бумаг
1	20	5 + 0,2K	30	20 + 0,2K
2	15	10	20	15
3	25	15 – 0,1K	10	15 – 0,1K
4	10	20 – 0,2N	2	15 – 0,2N
5	8	6 + 0,1N	15	20 + 0,1N

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) рассчитать ожидаемую доходность каждой ценной бумаги;

2) рассчитать ожидаемую доходность рынка ценных бумаг:

$$R_m = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{mt}}{T},$$

где R_m – доходность рынка ценных бумаг;

R_{mt} – доходность рынка ценных бумаг в период времени t;

3) определить вариацию доходности рынка ценных бумаг, используя формулу:

$$V_m = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{mt} - R_m)^2}{T},$$

где V_m – риск рыночного портфеля.

4) рассчитать ковариацию доходности ценной бумаги вида i и рынка:

$$V_{im} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - R_i) \cdot (R_{mt} - R_m)}{T},$$

где V_{im} – ковариация доходности ценной бумаги вида i и рынка ценных бумаг;

5) рассчитать β-коэффициенты, выступающие мерой чувствительности конкретной ценной бумаги к изменениям на рынке ценных бумаг:

$$\beta_i = \frac{V_{im}}{V_m}.$$

6) определить чувствительность портфеля ценных бумаг, используя следующую формулу:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i ,$$

где β_p – чувствительность портфеля ценных бумаг.

7) проанализировать значение β-коэффициентов.

Примечание. Значение β_i показывает, на сколько процентов изменится доходность ценной бумаги при изменении доходности рыночного портфеля на 1 %. При этом ценные бумаги, имеющие $\beta_i > 1$, более чувствительны к изменениям на рынке и их называют агрессивными. Ценные бумаги, имеющие $\beta_i < 1$, менее чувствительны к изменения на рынке и их называют оборонительными.

Задание 2.50. Требуется сформировать оптимальный портфель, содержащий рисковые и безрисковые ценные бумаги (государственные обязательства с фиксированным доходом).

Исходная информация.

Характеристики рисковых ценных бумаг приведены в задании 2.49. Безрисковые ценные бумаги имеют доходность 5 %.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) рассчитать ожидаемую доходность каждой ценной бумаги $\overline{R_i}$;

2) определить ковариацию доходности рисковых ценных бумаг вида i и j;

3) определить доходность рынка ценных бумаг $\overline{R_m}$;

4) рассчитать β_i – риск ценной бумаги вида i, характеризующий степень зависимости отклонений доходности ценной бумаги от отклонений доходности рынка в целом:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T} \right) \cdot \left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T} \right)}{\sum_{t=1}^{T} \left(R_{mt} - R_{ft} - \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T} \right)}$$

5) определить α_i – избыточную доходность ценной бумаги вида i:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - R_{ft})}{T} - \beta_i \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})}{T},$$

где R_{ft} – доходность безрисковой ценной бумаги вида f в период времени t, $t = \overline{1, T}$;

R_{it} – доходность рисковой ценной бумаги вида i в период времени t, $t = \overline{1, T}$;

R_{mt} – доходность рынка ценных бумаг в период времени t, $t = \overline{1, T}$;

6) обосновать δ_m – риск рынка ценных бумаг:

$$\delta_m = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft}) - \sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - R_{ft})^2}{T}};$$

7) рассчитать δ_{si} – остаточный риск ценной бумаги вида i:

$$\delta_{si} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - R_f - \alpha_i - \beta_i(R_{mt} - R_f))}{T};$$

8) составить развернутые экономико-математические модели, используя модель Шарпа.

а) Требуется максимизировать ожидаемую доходность портфеля, содержащего рисковые и безрисковые ценные бумаги при заданном уровне риска:

$$R_p = R_f + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{n}(\beta_i x_i) \to \max .$$

При условиях:

1) по формированию заданного уровня риска:

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i x_i)^2 \cdot \delta_m^2 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_{si}^2 x_i) = \overline{V}_p^*;$$

2) по формированию суммы долей капитала инвестора:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

3) неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n};$$

б) Требуется минимизировать риск портфеля, содержащего рисковые и безрисковые ценные бумаги при заданной ожидаемой доходности:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i x_i)^2 \cdot \delta_m^2 + \sum_{i=1}^{n} (\delta_{si}^2 x_i) \to \min .$$

При условиях:

1) по обеспечению заданного уровня доходности:

$$R_f + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i) + (R_m - R_f) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\beta_i x_i) = \overline{R}_p^*;$$

2) по формированию суммы долей капитала инвестора:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

3) неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

где R_f – доходность безрисковых ценных бумаг.

4) решить экономико-математические задачи заданий 2.47–2.50 на персональном компьютере, найти значение неизвестных величин (функциональная клавиша F1 (PRIMAL VALUES OUTPUT MENU) программы LPX.88 или «Результаты поиска решения» программы Excel);

5) найти оптимальное решение задач заданий 2.47–2.50, проанализировать его, используя значение двойственных оценок (функциональная клавиша F2 (DUAL VALVES OUTPUT MENU) программы LPX.88);

6) проанализировать устойчивость (чувствительность) оптимального решения, используя информацию устойчивости по критерию (функциональная клавиша F3 (COST RANCES OUTPUT MENU) программы LPX.88 или «Отчет по устойчивости» и «Отчет по пределам» программы Excel);

7) решить экономико-математические задачи заданий 2.47–2.50, используя программу Excel, наложив на неизвестные величины требование целочисленности (устанавливаем курсор на требование Целое);

8) проанализировать оптимальное решение целочисленных задач линейного программирования.

Задания для самостоятельной работы

Задание 2.51. Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг.

Исходная информация.

Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, имеющий наименьший риск при заданной ожидаемой доходности равной 25 %.

Доходность ценных бумаг на протяжении 4 кварталов представлена в табл. 2.48.

Т а б л и ц а 2.48. **Доходность ценных бумаг**

Квартал	Доходность ценных бумаг, %							
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-м	8-й
1	10	30 – 0,2K	15	25	10	30 – 0,2N	5	10
2	15	25	20	20	20	20	10	5
3	20	15	15	15	30	10	15	15
4	25	5 + 0,1N	25	10	20	5 + 0,1K	20	30

Задание 2.52. Необходимо сформировать оптимальный портфель ценных бумаг.

Исходная информация.

Требуется сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, имеющий максимальную ожидаемую доходность при заданном уровне риска 50%.

Доходность ценных бумаг на протяжении 3 кварталов представлена в табл. 2.49.

Т а б л и ц а 2.49 **Доходность ценных бумаг**

Квартал	Доходность ценных бумаг, %							
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
1	7	30	10	26	15 – 0,1K	12	4	12
2	20	10	15	18	25 – 0,2K	22	16	8
3	18	15	25	10	5 + 0,2N	17	28	32

Задание 2.53. Необходимо определить чувствительность ценных бумаг и рыночного портфеля к изменениям на рынке ценных бумаг.

Исходная информация.

Решить экономико-математическую задачу, использую следующую информацию: доходность ценных бумаг на протяжении пяти месяцев представлена в табл. 2.50.

Т а б л и ц а 2.50. **Доходность ценных бумаг**

Месяцы	Доходность ценных бумаг, %								
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	Рынка ценных бумаг
1	8	30	6	20	10 + 0,2N	25	15	22	18
2	10	25	10	18	20 + 0,2K	20	20	20	20 – 0,1K
3	15	20	14	16	30 – 0,2N	15	20	18	22
4	19	15	18	14	28 – 0,2K	10	15	16	20 + 0,1N
5	25	5	22	12	26	5	5	10	18

Задание 2.54. Требуется сформировать оптимальный портфель, содержащий рисковые и безрисковые ценные бумаги (государственные обязательства с фиксированным доходом).

Исходная информация.

Характеристики рисковых ценных бумаг приведены в задании 2.51. Безрисковые ценные бумаги имеют доходность 8 %.

Задание 2.55. Необходимо сформировать оптимальный портфель акций клиента консультационной компании с целью максимизации прибыли от инвестиций в различные сферы перерабатывающей промышленности.

Исходная информация.

Консультационная компания дает рекомендации бизнесмену по поводу инвестирования в акции предприятий мясной, сахарной и кондитерской промышленности. При рассмотрении трех наименований акций установлено, что каждая из них имеет следующие текущие цены за одну единицу: «М» – 12, «С» – 8 и «Л» – 10 у. д. е.

В наличии предпринимателя имеются средства к вложению в объеме 60000 у. д. е. Консультационная компания оценила риски, связанные с этими наименованиями акций, по шкале от 1 до 10 баллов, причем 1 балл означает очень надежное, безрисковое вложение, а 10 баллов – крайне высокорискованное вложение.

Клиент желает, чтобы вложение было достаточно надежным и средняя оценка инвестиционного портфеля не превышала 5 баллов.

Указанные акции оцениваются с точки зрения риска следующим образом: «М» – 3; «С» – 8; «К» – 6 баллов.

К тому же, исходя из своих интересов, бизнесмен решил, что акций «С» должно быть приобретено в количестве не более 4000 штук.

По прогнозным расчетам прибыль от вложения на одну акцию за год составит: «М» – 0,5, «С» – 1, «К» – 0,75 у. д. е.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение экономико-математической линейной модели.
2. Охарактеризуйте группы исходной информации экономико-математической модели.
3. Сформулируйте теоремы, характеризующие основные свойства задач линейного программирования.
4. Приведите алгоритм геометрического решения экономико-математической линейной модели в двухмерном пространстве.
5. Приведите примеры базовых моделей линейного программирования, применяемых при планировании производства и макроэкономики.
6. Дайте определение понятия «двойственные экономико-математические оценки».
7. Охарактеризуйте сущность первой и второй теорем двойственности.
8. Дайте определение понятия «устойчивость оптимального плана экономико-математической задачи».
9. Перечислите особенности задач целочисленного программирования.
10. Перечислите методы решения задач дискретного программирования.
11. Охарактеризуйте алгоритм решения целочисленных линейных моделей методом отсечения.
12. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом ветвей и границ.
13. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом отсечения.

3. МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Объектом управления в теории сетевого планирования и управления являются коллективы исполнителей, располагающих определенными ресурсами и выполняющих комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например, внедрение нового вида товара на рынок сбыта, организация пробных продаж, подготовка и проведение сбытовых мероприятий и рекламных компаний, реализация инвестиционных проектов, мероприятий по реконструкции и модернизации производства, посевная кампания, уход за сельскохозяйственными посевами, заготовка кормов, комплекс строительных работ и т. д.

Сетевое планирование и управление основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика. Первые системы, использующие сетевые графики, были применены в США в конце 50-х гг. и получили название CPM (метод критического пути) и PERT (метод оценки и обзора программы). Система CPM была впервые применена при управлении строительными работами, а система PERT – при управлении крупными инженерными разработками новой техники, при разработке систем «Поларис».

Система сетевого планирования и управления в экономике агропромышленного комплекса позволяет:

а) формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

б) выявлять и мобилизовать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

в) повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между исполнителями работ.

Основным элементом систем сетевого планирования и управления является сетевая модель, то есть такая экономико-математическая модель, которая отражает совокупность работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (производственного, научно-исследовательского и др.), в их логической и технологической последовательности и связи. Анализ сетевой модели, которая может быть представлена в графической или табличной (матричной) форме, позволяет:

1) более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проектов;

2) определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Таким образом, методы сетевого моделирования относятся к методам принятия наилучших решений.

3.1. Экстремальные задачи на графах

Граф – с одной стороны, это совокупность двух множеств: множества элементов $x \in X$ и множества отношений между этими элементами; с другой стороны, это некая геометрическая схема, в которой элементы множества X выступают точками или вершинами, а отношения между ними выражены отрезками (ребрами) или дугами (направленными ребрами), соединяющими элемент X с элементами, которые с ним связаны.

В экономике широкое использование получил такой граф, как сеть.

Сеть – это ориентированный конечный связный граф без контуров, имеющий начальную (источник) и конечную (сток) точки.

Задание 3.1. Требуется построить сетевой график, заданный перечнем работ.

Исходная информация (табл. 3.1).

Таблица 3.1. **Перечень работ**

Работа (i, j)	Продолжительность, дн.
1, 2	3
1, 3	5
2, 3	4
2, 4	2
2, 5	6
3, 4	3
4, 5	2
4, 6	1
5, 6	7

Задание 3.2. Требуется построить сетевой график, заданный структурной таблицей.

Исходная информация (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Структурная таблица**

Дуга орграфа	Опирается на дуги
$\vec{e}_1$	–
$\vec{e}_2$	–
$\vec{e}_3$	–
$\vec{e}_4$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_6$	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$
$\vec{e}_7$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_8$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$
$\vec{e}_9$	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_8$
$\vec{e}_{10}$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$

Задание 3.3. Построить матрицу инциденций для ребер неориентированного графа и дуг орграфа.

Исходная информация.

Неориентированный граф и орграф представлены на рис. 3.1 и 3.2.

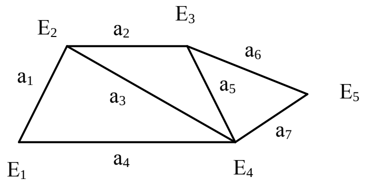


Рис. 3.1. Неориентированный граф

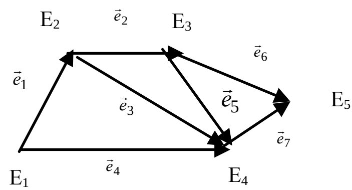


Рис. 3.2. Орграф

При этом матрицей инциденций для дуг орграфа является матрица $\left\| a_{ij} \right\|$, строки (m) которой соответствуют вершинам, столбцы (n) – дугам, а каждый элемент a_{ij} формируется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } E_i - \text{начальная вершина дуги } \vec{e}, \\ -1, \text{ если } E_j - \text{конечная вершина дуги } \vec{e}, \\ 0, \text{ если } E \text{ не инцидентна } \vec{e}. \end{cases}$$

Если имеем неориентированный граф, то элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ размером $m \cdot n$ формируются таким образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } E_i \text{ инцидентна ребру } a_i, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задание 3.4. Построить матрицу смежности ребер и дуг неориентированного графа и орграфа.

Исходная информация.

Неориентированный граф и орграф представлены на рис. 3.3 и 3.4.

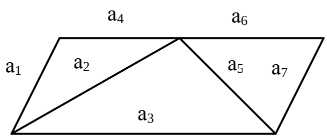


Рис. 3.3. Неориентированный граф

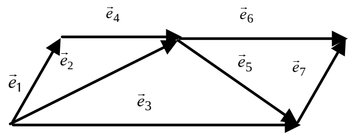


Рис. 3.4. Орграф

При этом матрицей смежности дуг (ребер) орграфа (неориентированного графа) называется матрица A, каждый элемент которой a_{ij} равен 1, если конечная вершина дуги $\vec{e}_i$ является начальной вершиной дуги $\vec{e}_j$ (если ребра имеют общую вершину), и нулю в остальных случаях:

$$\text{а) } A = \|a_{ij}\|, \overline{i, j} = \overline{1, m},$$

где m – число ребер неориентированного графа,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребра } a_i \text{ и } a_j \text{ имеют общую вершину,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\text{б) } A = \|a_{ij}\|, \overline{i, j} = \overline{1, m},$$

где m – число дуг орграфа,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } \vec{e}_i \text{ непосредственно предшествует дуге } \vec{e}_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задание 3.5. Построить матрицу смежности вершин для неориентированного графа (рис. 3.5) и орграфа (рис. 3.6).

Исходная информация.

Неориентированный граф и орграф представлены на рис. 3.5 и 3.6.

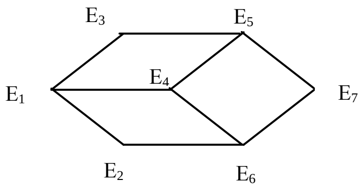


Рис. 3.5. Неориентированный граф

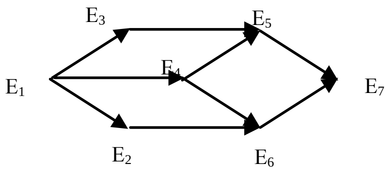


Рис. 3.6. Орграф

При этом матрицей смежности вершин орграфа является квадратная матрица A, каждый элемент которой a_{ij} численно равен количеству дуг, идущих из вершины E_i в вершину E_j. Следует отметить, что матрица смежности вершин орграфа является не симметричной относительно главной диагонали. Для неориентированного графа матрица смежности вершин является симметричной, так как ребра (E_i, E_j) и (E_j, E_i) существуют одновременно.

Задание 3.6. Требуется разбить элементы орграфа по рангам (слоям) и упорядочить их для орграфа.

Исходная информация.

Орграф представлен на рис. 3.7.

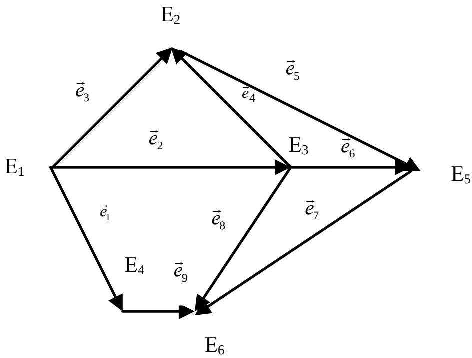


Рис. 3.7. Неупорядоченный орграф

Используя приведенную информацию, упорядочить орграф с помощью графического способа:

1) суть графического способа упорядочения элементов орграфа состоит в последовательном нахождении вершины, степень входящих дуг которой равна нулю: $\rho^{+}(E) = 0$. Такая вершина E_i является вершиной 1-го ранга.

Вершина называется вершиной 2-го ранга, если в нее входят несколько дуг из вершин 1-го ранга, и не входит ни одна дуга из вершин выше 1-го ранга.

Вершина E_i называется вершиной k-го ранга, если в нее входят дуги из вершин не выше (k–1)-го ранга, и при этом имеется хотя бы одна дуга, исходящая из вершин (k–1)-го ранга.

Дуга $\vec{e}_i$ называется дугой k-го ранга, если она опирается на дугу (дуги) не выше (k–1)-го ранга, среди которых есть хотя бы одна дуга (k–1)-го ранга;

2) после разбиения на ранги элементам орграфа придать более удобную нумерацию, такую, чтобы:

а) все номера элементов некоторого ранга были меньше номеров элементов следующего ранга; номера элементов 1-го ранга были наименьшими, а номера элементов последнего ранга – наибольшими;

б) порядок элементов внутри одного и того же ранга был безразличен (так как вершины, принадлежащие одному рангу, не соединены между собой дугами, а дуги друг на друга не опираются).

Таким образом, графический способ упорядочения вершин (алгоритм Фалкерсона) состоит из следующих шагов:

а) находят вершины первого ранга и пронумеровывают их (1, 2…);

б) мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины (1-го ранга) и дуги из них выходящие;

в) вершины, оставшиеся без входящих дуг, относят ко второму рангу и присваивают им очередные номера и т. д.;

г) шаги п. б) и в) повторяют до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы;

3) изобразить упорядоченный орграф по рангам вершин;

4) аналогично, используя графический способ, определить ранги дуг. Найти дуги, не имеющие непосредственно предшествующих дуг. Они образуют 1-й ранг. После их мысленного вычеркивания вновь найти дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (это дуги 2-го ранга). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на ранги.

При этом дуги, выходящие из вершин конкретного ранга, относятся к этому же рангу;

5) изобразить упорядоченный по рангам дуг орграф.

Задание 3.7. Требуется упорядочить орграф, используя матрицу смежности вершин орграфа.

Исходная информация.

Орграф представлен на рис. 3.8.

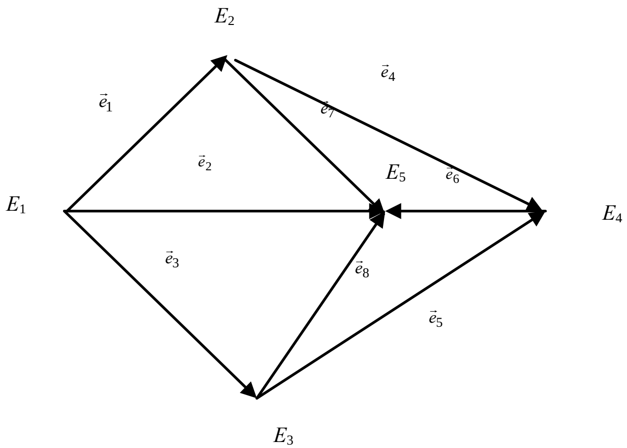


Рис. 3.8. Неупорядоченный орграф

Используя приведенную информацию, упорядочить орграф с помощью метода Демукрона, основанного на использовании матрицы смежности вершин орграфа:

1) обозначить через $V_{Ei} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = \overline{1, n}$ векторы, являющиеся строками матрицы смежности;

2) вычислить компоненты вектора V_1:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n} V_{E_i}$$

и поместить результат в $(n+1)$-ю строку табл. 3.3;

Т а б л и ц а 3.3. **Матрица смежности вершин**

Номер строки	E_i	E_j							Ранг	Новая нумерация вершин
		E_1	…	E_k	…	E_s	…	E_n		
1	E_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	r	E'_n
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k	E_k	a_{k1}	…	a_{kk}	…	a_{ks}	…	a_{kn}	1	E'_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	E_s	a_{s1}	…	a_{sk}	…	a_{ss}	…	a_{sn}	1	E'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	E_n	a_{n1}	…	a_{nk}	…	a_{ns}	…	a_{nn}	2	E'_3
$n + 1$	V_1	$a_1^{(1)}$	…	$a_k^{(1)}$	…	$a_s^{(1)}$	…	$a_n^{(1)}$		
$n + 2$	V_2	$a_1^{(2)}$	…	$a_k^{(2)}$	…	$a_s^{(2)}$	…	$a_n^{(2)}$		
…	…	…	…	…	…	…	…	…		
$n + r$	V_r	0	…		…		…			

3) среди неотрицательных компонентов вектора $V_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)})$ найти компоненты, равные нулю.

Пусть $a_k^{(1)}$ и $a_s^{(1)}$ равны нулю. Это значит, что в вершины E_k и E_s не входит ни одна дуга, и они относятся к 1-му рангу. В столбце, соответствующем рангу, в строках k и s записать ранг этих вершин;

4) из вектора V_1 вычесть векторы-строки, соответствующие вершинам 1-го ранга E_k и E_s;

5) в результате вычисления получен вектор $V_2 = V_1 - V_{E_k} - V_{E_s}$, в котором появятся новые компоненты, равные нулю. Пусть $a_n^{(2)} = 0$. Следовательно, вершина E_n относится ко 2-му рангу. Ранг этой вершины, равный 2, занести в таблицу;

6) вычислить вектор $V_3 = V_2 - V_{E_n}$, в котором появятся новые нули. Следовательно, определить вершины 3-го ранга;

7) аналогичным образом продолжить процесс вычисления до тех пор, пока не будет получен вектор, все компоненты которого равны нулю. Пусть V_r – нулевой вектор, новый нулевой компонент которого $a_1^{(r)}$. Тогда E_1 – вершина r-го ранга;

8) перенумеровать вершины орграфа согласно их рангам и записать новые номера в последний столбец табл. 3.3;

9) построить упорядоченный орграф.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.8. Требуется построить сетевой график мероприятий, и определить, какой период времени пройдет с момента разработки проекта до серийного выпуска мясного набора для реализации на внешних рынках.

Исходная информация.

Агропромышленный комбинат испытывает острую конкуренцию со стороны аналогичных организаций, которые экспортируют такой вид мясных изделий, как высококачественные сардельки и сосиски. Администрация агрокомбината приняла решение составить программу разработки нового набора мясного продукта для внедрения его на продовольственный рынок, для чего определила перечень основных работ, произвела оценку времени, которое займет решение каждого действия, и выявила мероприятия, предшествующие каждой работе. Данная информация представлена в табл. 3.4.

Таблица 3.4. **Показатели по проекту выпуска мясного продукта**

Работа	Содержание	Непосредственно предшествующая работа	Продолжительность работы, дней
A_1	Создание рецептуры продукта	–	16
A_2	Оформление упаковки	–	8
A_3	Изучение местного рынка сбыта	–	2
A_4	Подготовка перерабатывающей линии	A_1	8
A_5	Поставка мясного сырья и других компонентов	A_1	4
A_6	Производство опытной партии	A_4, A_5	6
A_7	Упаковка товаров	A_2	4
A_8	Комплектование опытной партии	A_6, A_7	4
A_9	Поставка продуктов на местный рынок	A_3, A_8	6
A_{10}	Продажа изделий потребителям	A_9	8
A_{11}	Оценка результатов внедрения продукта	A_{10}	6
A_{12}	Прогнозирование сбыта на внешнем рынке	A_{11}	8

Необходимо построить сетевой график, отражающий логическую последовательность решения указанных мероприятий, и определить, какой период времени пройдет с момента разработки проекта до серийного выпуска мясного набора для продажи на внешних рынках.

Задание 3.9. Требуется построить сетевой график мероприятий, и определить, какой период времени пройдет с момента заказ на переподготовку специалистов до их учебы.

Исходная информация.

Высшая школа агробизнеса получила заказ на переподготовку специалистов по основам внешнеэкономической деятельности для отделов райсельхозпродов и облсельхозпродов. Для того чтобы правильно составить календарный план учебы, руководитель школы подготовил перечень необходимых мероприятий с учетом их взаимозависимости и продолжительности (табл. 3.5).

Таблица 3.5. **Показатели по проекту переподготовки специалистов**

Работа	Содержание	Непосредственно предшествующая работа	Продолжительность работы, дней
A_1	Определение предмета курса	–	20
A_2	Разработка рабочего плана и программы курса	A_1	30
A_3	Составление текста объявлений о переподготовке кадров	A_1	15
A_4	Подготовка аудиторий и учебных лабораторий	A_1	5
A_5	Проведение рекламной кампании через средства информации	A_3, A_4	10
A_6	Отбор заявлений от слушателей	A_5	10
A_7	Составление групп для учебы	A_6	5
A_8	Начало занятий	A_2, A_7	10

3.2. Задача о минимальных покрывающих деревьях

Покрывающее дерево – это дерево, содержащее все вершины сети. Минимальное покрывающее дерево предполагает, что все вершины сети соединены между собой путями наименьшей длины.

Задание 3.10. Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть.

Исходная информация.

Сельскохозяйственное предприятие планирует газифицировать свои населенные пункты. Структура планируемой газовой сети и расстояние между центральной усадьбой сельскохозяйственного предприятия и населенными пунктами приведены на рис. 3.9, *а–в*. Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть, используя алгоритм построения минимального покрывающего дерева.

На основании приведенной информации задания 3.10, применив алгоритм построения покрывающего дерева, необходимо:

1) разбить все вершины сети на два множества:

E_1 – множество, содержащее любую выбранную вершину сети (чаще всего вершину с номером 1),

$\overline{E}_1$ – множество, содержащее все другие вершины сети, за исключением выбранной;

2) среди вершин множества E_1 выбрать ту вершину из множества

$\overline{E}_1$, которая соединена самой короткой дугой или ребром с вершиной из множества E_1;

3) выбранную на предыдущем этапе вершину добавить в множество E_1, образовав множество вершин E_2, и отнять из множества $\overline{E}_1$, образовав множество вершин $\overline{E}_2$;

4) самую короткую дугу или ребро, соединяющую вершины двух множеств, выделить жирной линией;

5) алгоритм продолжить выполнять с пункта 2 до тех пор, пока множество $\overline{E}_k$ не будет содержать ни одного элемента;

6) рассчитать длину газовой сети сельскохозяйственного предприятия.

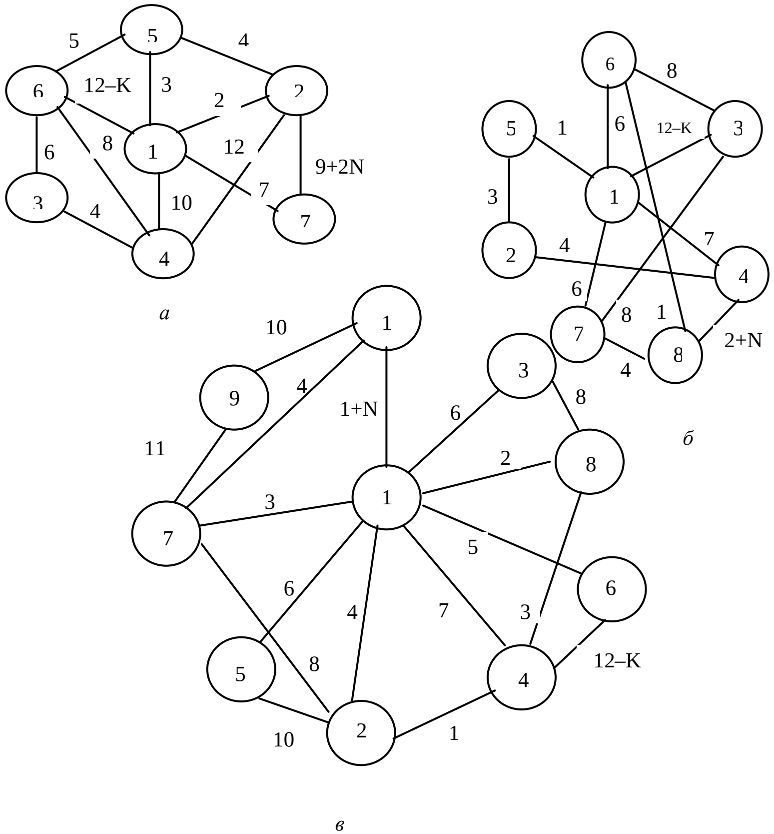


Рис. 3.9. Газовая сеть

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.11. Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть.

Исходная информация.

Структура планируемой газовой сети приведена на рис. 3.10, *а–в*.

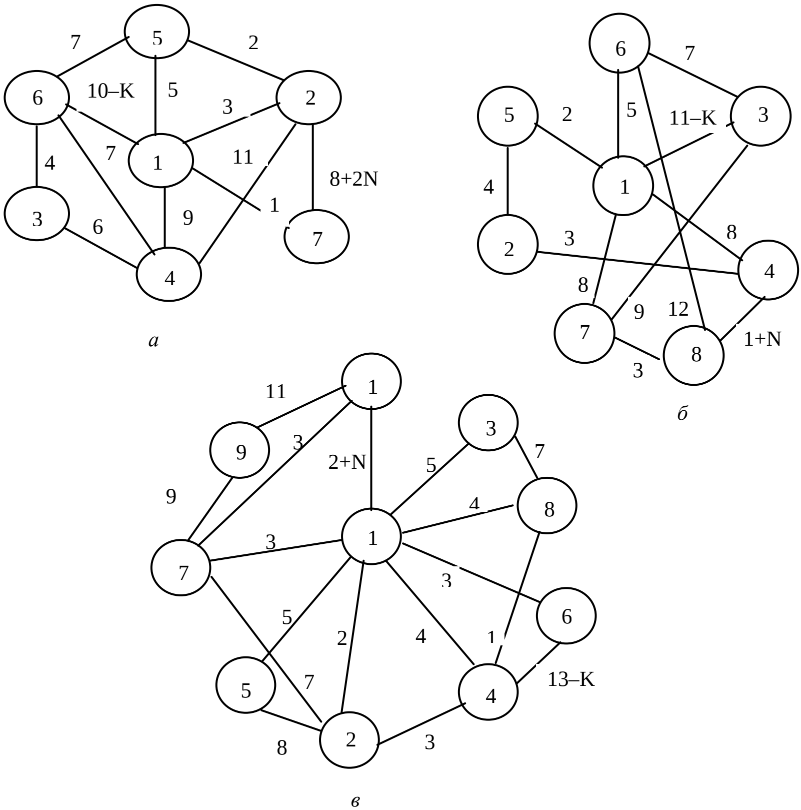


Рис. 3.10. Газовая сеть

3.3. Задача о кратчайших цепях

Цепь – это такая последовательность ребер (дуг) графа, при которой для каждого ребра (дуги) (кроме первого и последнего) одна из его вершин является общей с предыдущим ребром (дугой), а вторая – с последующим.

Цель данной задачи состоит в определении кратчайшего маршрута от исходной вершины сети до завершающей.

Задание 3.12. Требуется проложить кратчайший маршрут.

Исходная информация.

Фермер планирует доставлять часть сельскохозяйственной продукции фермерского хозяйства на переработку. Требуется проложить кратчайший маршрут от фермерского хозяйства до перерабатывающего цеха ассоциации фермерских хозяйств, используя существующую сеть дорог (рис. 3.11, *а–в*).

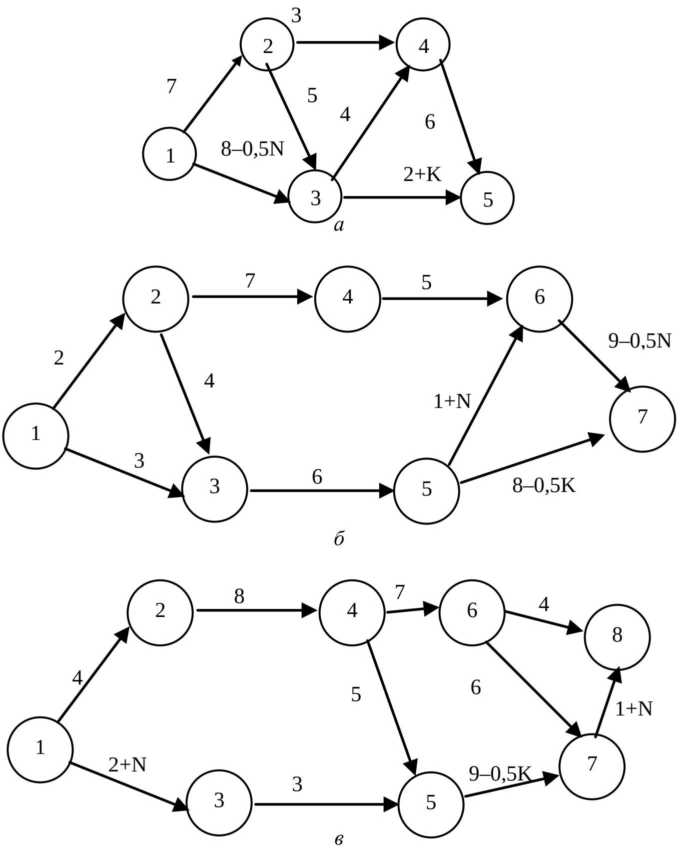


Рис. 3.11. Сеть дорог

На основании приведенной информации задания 3.12, применив алгоритм Дейкстры, необходимо:

1) присвоить исходной вершине постоянную метку [0, –] и пометить в круглых скобках номер шага (1);

2) определить временные метки для всех вершин, которых можно достичь из выбранной вершины, согласно пункту 1 (при этом данные вершины не должны иметь постоянных меток) следующим образом:

$$[u_j, i] = [u_i + t_{ij}, i], \text{ при } t_{ij} \geq 0,$$

где i – номер начальной вершины дуги (ребра) (i, j);

j – номер конечной вершины дуги (ребра) (i, j);

u_j – расстояние к вершине j;

u_i – кратчайшее расстояние к вершине i;

t_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

3) если вершина имеет две временные метки и более, то их заменить на постоянную метку, выбрав наименьшее расстояние между вершинами;

4) выбрав последнюю вершину с постоянной меткой, алгоритм продолжить выполнять с пункта 2 до тех пор, пока все вершины не будут иметь постоянных меток;

5) определить кратчайшую цепь, проходя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки;

6) рассчитать длину кратчайшего маршрута.

Задание 3.13. Требуется составить кратчайший маршрут.

Исходная информация.

Необходимо составить кратчайший маршрут от перерабатывающего предприятия до фирменного магазина, используя существующую сеть дорог (рис. 3.12, *а–в*).

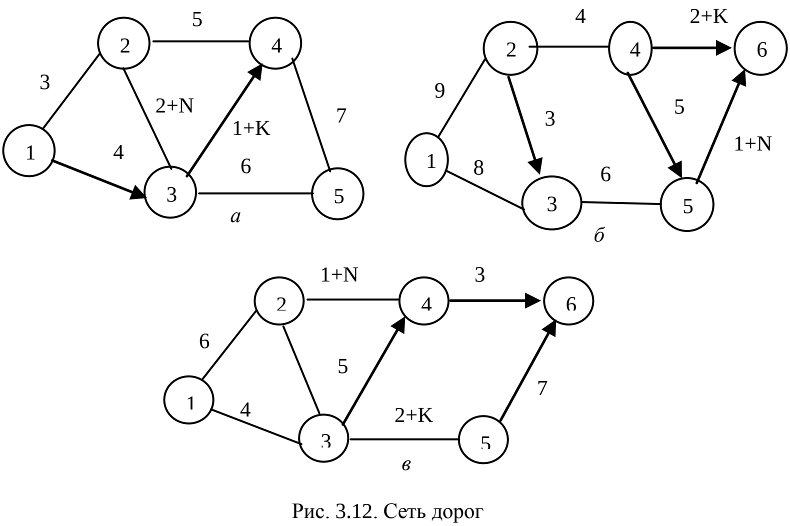


Рис. 3.12. Сеть дорог

На основании приведенной информации задания 3.13, применив алгоритм Флойда, необходимо:

1) представить сеть в виде матрицы расстояний U_0 (табл. 3.6).

Т а б л и ц а 3.6. **Матрица расстояний** U_0

U_0

E_i	E_j				
	1	2	3	…	n
1	–	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
2	a_{21}	–	a_{23}	…	a_{2n}
3	a_{31}	a_{32}	–	…	a_{3n}
…	…	…	…	–	…
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	–

При определении элементов матрицы расстояний учитывать следующее: если вершина i связана с вершиной j путем $i \rightarrow j$, то его расстояние U_{ij} занести в таблицу, в противном случае такое расстояние принять равным бесконечности.

Элементы матрицы U_0 симметричны относительно главной диагонали, за исключением пар элементов, соединенных между собой дугами, а не ребрами;

2) представить сеть в виде матрицы последовательности вершин E_0 (табл. 3.7);

Т а б л и ц а 3.7. **Матрица последовательности вершин** E_0

E_0

E_i	E_j				
	1	2	3	…	n
1	–	2	3	…	n
2	1	–	3	…	n
3	1	2	–	…	n
…	…	…	…	–	…
n	1	2	3	…	–

3) принять за ведущие первую строку и первый столбец (k = 1) матрицы расстояний U_0;

4) рассмотреть возможность применения треугольного оператора ко всем элементам U_{ij} матрицы U_0 (рис. 3.13). Суть треугольного оператора Флойда: над элементами матрицы расстояний выполнить процедуру замены:

$U_{ik} + U_{kj}$ на U_{ij}, если $U_{ij} > U_{ik} + U_{kj}$;

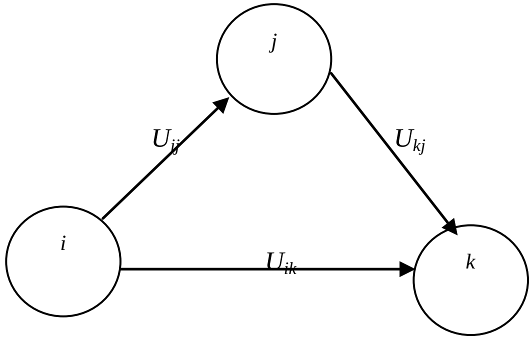


Рис. 3.13. Треугольный оператор Флойда

5) рассчитать новые элементы матрицы расстояний U_1 путем замены в матрице расстояний U_0 элемента U_{ij} на сумму элементов $U_{ik} + U_{kj}$;

6) определить новые элементы матрицы последовательности вершин E_1 путем замены в матрице последовательности вершин E_0 соответствующих элементов на элементы, равные номеру ведущей строки и столбца;

7) принять за ведущие вторую строку и второй столбец ($k = k + 1$) и алгоритм расчетов повторять с пункта 3 до тех пор, пока ни один элемент матрицы расстояний нельзя будет улучшить;

8) используя конечную матрицу последовательности вершин E_n, найти кратчайший путь от исходной до завершающей вершины сети;

9) используя конечную матрицу расстояний U_n, найти длину кратчайшего пути от исходной до завершающей вершины сети.

Задание 3.14. Требуется составить кратчайший маршрут.

Исходная информация.

Необходимо составить кратчайший маршрут от оптовой базы до магазина Райпо, используя существующие потоки сети (рис. 3.14, *а–в*).

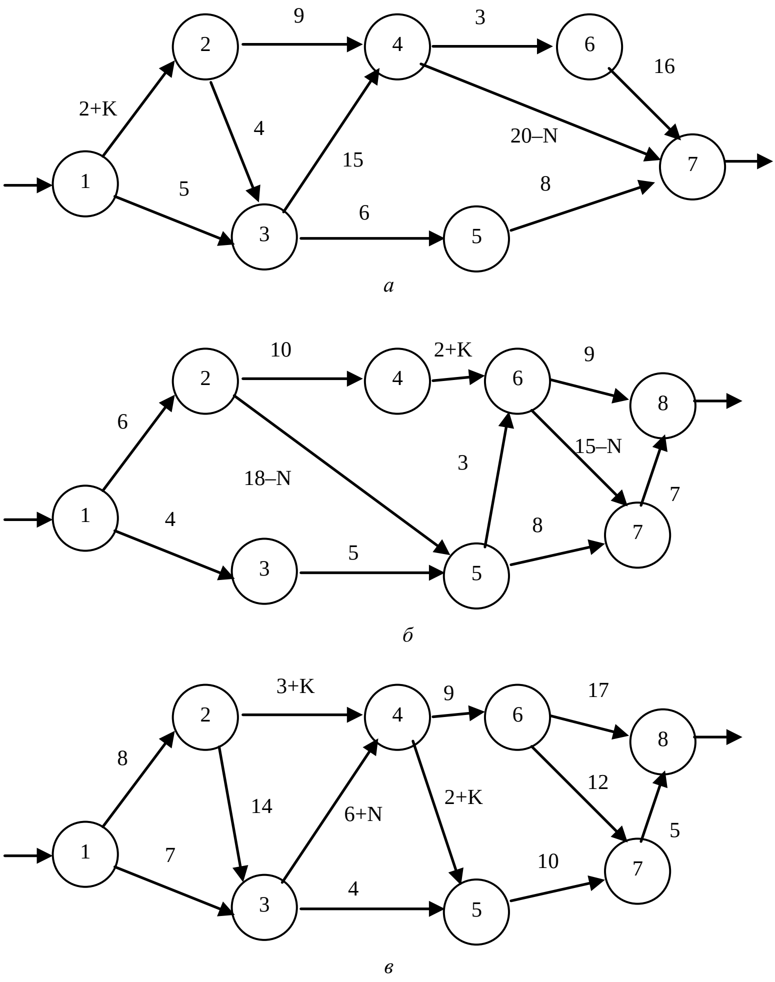


Рис. 3.14. Входные и выходные потоки сети

На основании приведенной информации задания 3.14, используя прямую задачу линейного программирования, необходимо:

1) сделать предложение о том, что в исходную вершину входит одна единица внешнего потока, которая и выходит из завершающей вершины сети;

2) ввести двоичные переменные задачи:

$$x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1, n}),$$

где i – номер вершины, из которой выходит поток;

j – номер вершины, в которую входит поток;

3) записать ограничения задачи в виде баланса потока, т. е. общий входной поток минус общий выходной поток, равный нулю;

4) составить целевую функцию задачи, позволяющую минимизировать длину сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j) \in \vec{e}} c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – расстояние от вершины сети i до вершины j;

5) решить прямую задачу линейного программирования с помощью электронных матриц Excel;

6) проанализировав оптимальное решение задачи, найти кратчайший путь из исходной вершины до завершающей вершины сети и определить его длину.

Задание 3.15. Требуется составить кратчайший маршрут.

Исходная информация.

Требуется обосновать кратчайший маршрут от центра кооперативного участка до базы райпотребсоюза, используя существующую сеть дорог (рис. 3.15, *а–в*).

На основании приведенной информации задания 3.15, используя двойственную задачу линейного программирования, необходимо:

1) ввести неизвестные величины задачи:

u_i – расстояние от исходной вершины до вершины сети i;

c_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

2) расстояние до исходной вершины сети принять равным нулю:

$$u_1 = 0;$$

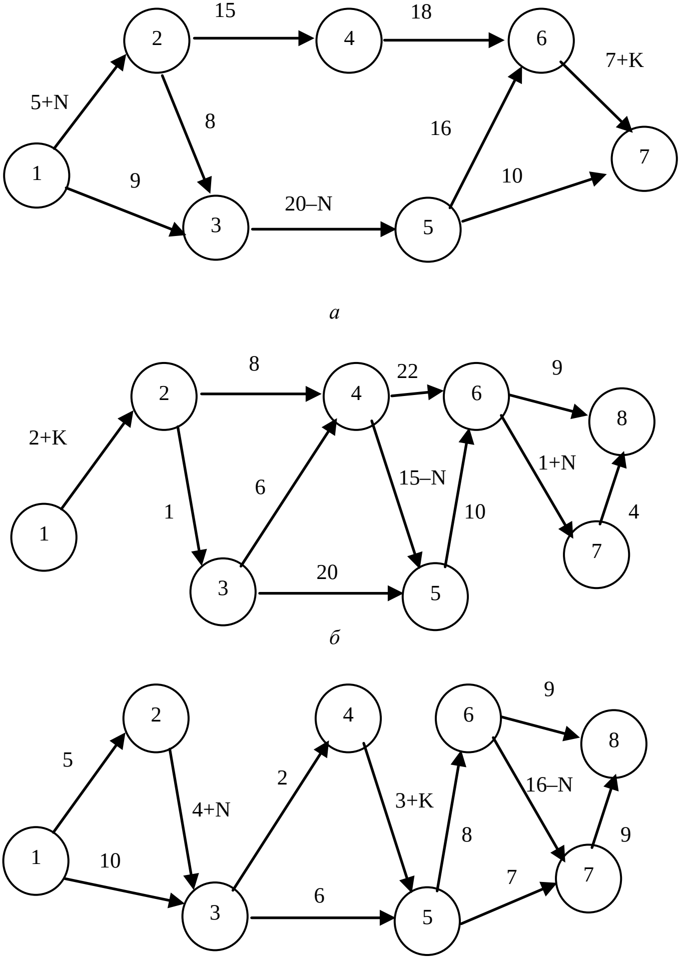


Рис. 3.15. Сеть дорог для выбора кратчайшего пути

3) составить ограничения двойственной задачи:

$$u_j - u_i \le c_{ij} ,$$

где $u_j - u_i$ – расстояние от вершины i до вершины сети j;
c_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j);

4) записать целевую функцию задачи, позволяющую максимизировать расстояние от исходной вершины сети u_1 до завершающей u_n:

$$F_{\max} = u_n - u_1\,;$$

5) решить двойственную задачу линейного программирования с помощью электронных таблиц Excel;

6) проанализировать оптимальное решение задачи и определить, используя значения двойственных переменных, равных единице, кратчайший путь из исходной вершины сети до завершающей;

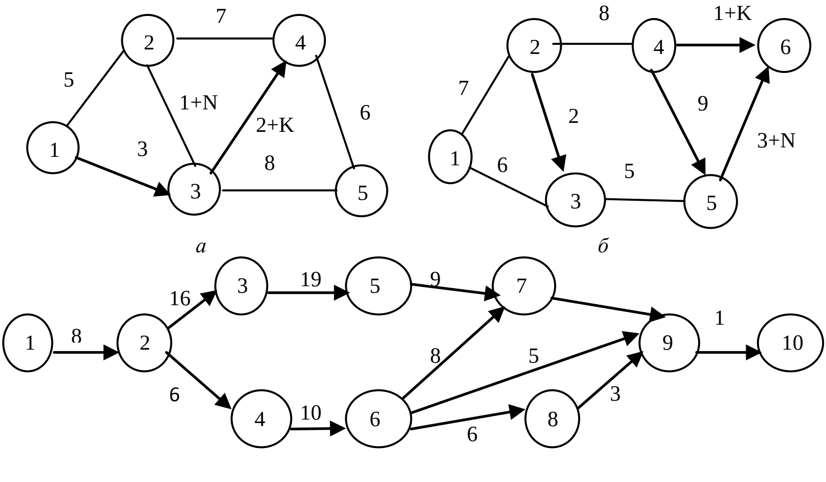
7) вычислить длину кратчайшего пути.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.16. Требуется составить кратчайший маршрут, используя разные алгоритмы.

Исходная информация.

Необходимо составить кратчайший маршрут, используя существующую сеть дорог (рис. 3.16, *а*–*в*).



в

Рис. 3.16. Сеть дорог

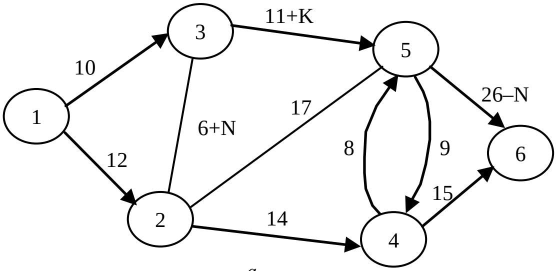
3.4. Задача о максимальном потоке в сетях

Поток – это экономическая величина, измеряемая в движении с учетом того периода времени, для которого делается расчет.

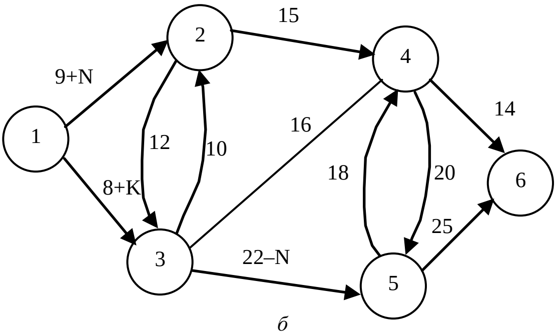
Задание 3.17. Требуется обосновать максимальную величину потока комбикормов, поступающих из комбикормового завода на птицефабрику.

Исходная информация.

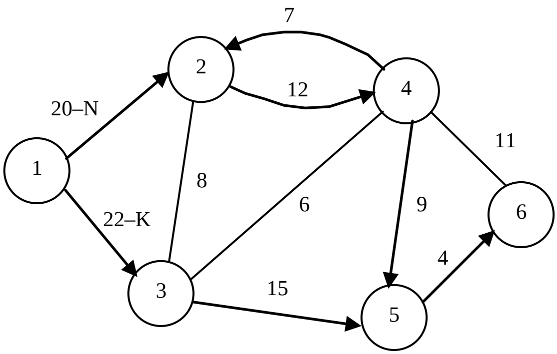
Необходимо обосновать максимальную величину потока комбикормов, используя следующую сеть (рис. 3.17, *а–в*).



а



б



в

Рис. 3.17. Сеть для определения максимального потока

Используя информацию задания 3.17, применив алгоритм Форда, необходимо:

1) сформировать матрицу пропускных способностей дуг (ребер) сети. При этом:

в метку (i, j) записывают пропускную способность дуги (b_{ij}), если она больше нуля;

если пропускная способность симметричной ей дуги равна нулю, то в клетку (j, i) ставят нуль;

если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j, i) не заполняют;

2) пометить значком * столбец E1 матрицы пропускных способностей;

3) найти в строке E_1 положительные элементы матрицы ($b_{ij} > 0$) и столбцы, в которых они находятся, пометить номером просматриваемой строки;

4) продолжить процедуру пометок до тех пор, пока:

а) не будет помечен столбец E_n, т. е. сток;

б) нельзя пометить новые столбцы, что означает отсутствие пути из E_1 в E_n, проходящего по дугам с положительной пропускной способностью;

5) найти путь из стока E_1 в сток E_n, используя пометки столбцов;

6) расставить знаки, используя соответствующие элементы сети b_{ij}. Последний положительный элемент столбца E_n, т. е. b_{in}, пометить знаком «–», а симметричный ему элемент – знаком «+».

Процесс пометок продолжить до тех пор, пока не придем к истоку (вершине E_1) и не отметим знаком «–» элемент этой строки и знаком «+» симметричный ему элемент;

7) определить пропускную способность пути Q_i, которая равна наименьшей из пропускных способностей дуг пути, получивших знак «–»:

$$Q_i = \min_{(i,j)} \left\{ \overset{-}{b}_{ij} \right\};$$

8) определить остаточные пропускные способности дуг пути и симметричных к ним дуг, т. е. из элементов таблицы $\overset{-}{b}_{ij}$, получивших знак «–», вычесть выбранный элемент Q_i, а к элементам $\overset{+}{b}_{ij}$, получивших знак «+», прибавить Q_i;

9) все изменения элементов b_{ij} занести в новую матрицу пропускных способностей дуг (ребер) и расчеты повторять с пункта 2 до тех пор, пока не получим матрицу V_n, в которой нет ни одного пути из истока E_1 в сток E_n с пропускной способностью больше нуля;

10) вычислить элементы новой таблицы путем вычитания из элементов матрицы последовательности дуг (ребер) V_0 соответствующих элементов матрицы V_n;

11) используя положительные элементы таблицы, охарактеризовать величины дуговых потоков;

12) определить величину максимального потока сети, просуммировав элементы строки E_1 (источника) или элементы столбца E_n (стока);

13) найти дуги, образующие разрез с минимальной пропускной способностью. При этом учесть, что данный разрез образован дугами, начальные вершины которых характеризуют строки E_1, а конечные вершины – элементы столбца E_n;

14) сделать вывод о степени насыщения дуг разреза потоком.

Задание 3.18. Необходимо обосновать максимальную пропускную способность потока зерна, поступающего из сельскохозяйственного предприятия на элеватор.

Исходная информация.

Требуется рассчитать максимальную пропускную способность потока зерна, используя следующую сеть (рис. 3.18, *а*–*в*).

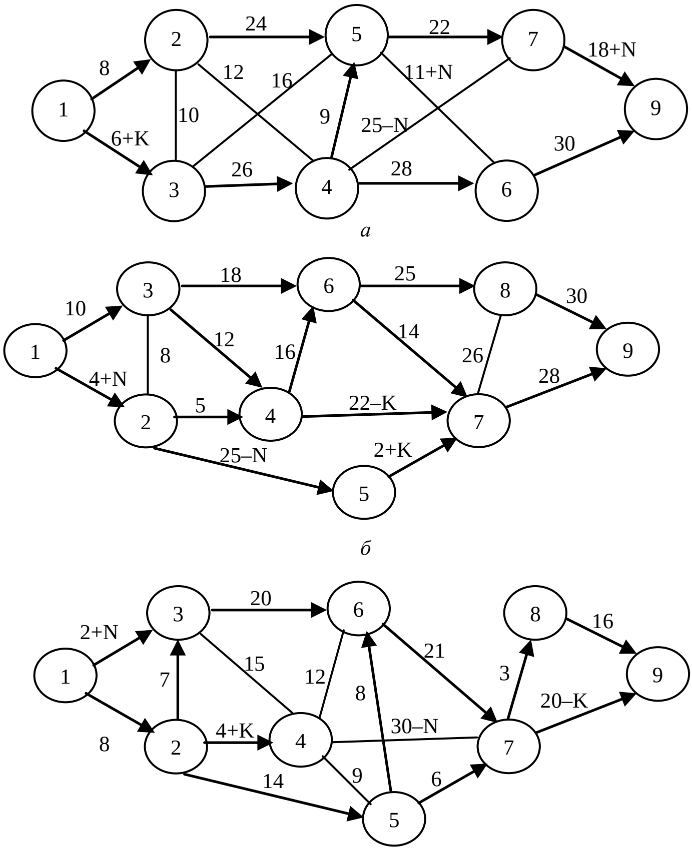


Рис. 3.18. Сеть дорог для определения максимального потока

Используя информацию задания 3.18, необходимо:

1) ввести неизвестные величины задачи линейного программирования x_{ij}, обозначающие поток по дуге (ребру) (E_i, E_j), равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени;

2) составить развернутую задачу линейного программирования, используя следующую структурную экономико-математическую модель.

Требуется найти значения x_{ij}, максимизирующие одну из целевых функций:

а) максимальный поток, равный количеству вещества, вытекающего из источника:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} ,$$

б) или максимальный поток, равный количеству вещества, притекающего в сток:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{in} .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

$$x_{ij} \le b_{ij} , \; i, j = \overline{0, n} , \; i \ne j .$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0 , \; k = \overline{1, n-1} .$$

3. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \ge 0 ;$$

3) решить задачу, используя электронные таблицы Excel (Поиск решения);

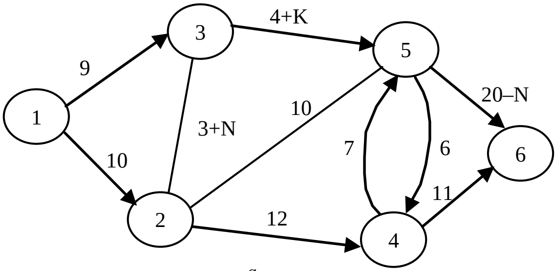
4) проанализировать оптимальное решение экономико-математической задачи, определив величины дуговых потоков, разрезы с минимальной пропускной способностью и величину максимального потока сети.

Задания для самостоятельной работы

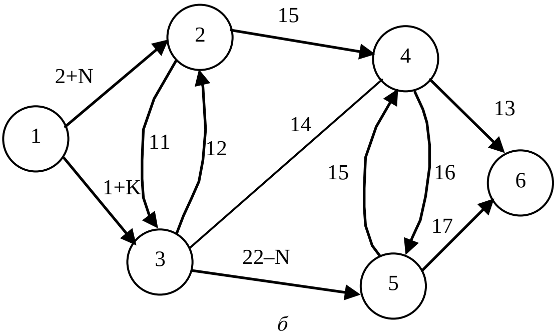
Задание 3.19. Требуется обосновать максимальную величину потока груза, применив разные алгоритмы.

Исходная информация.

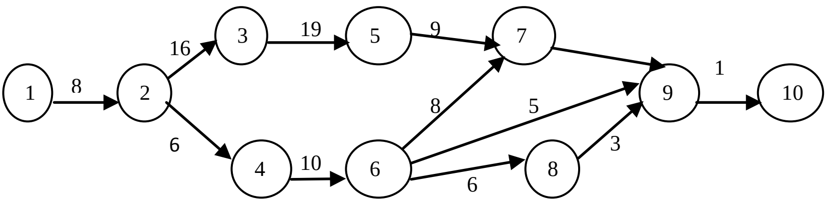
Необходимо обосновать максимальную величину потока груза, используя следующую сеть (рис. 3.19, *а–в*).



а



б



в

Рис. 3.19. Сеть для определения максимального потока

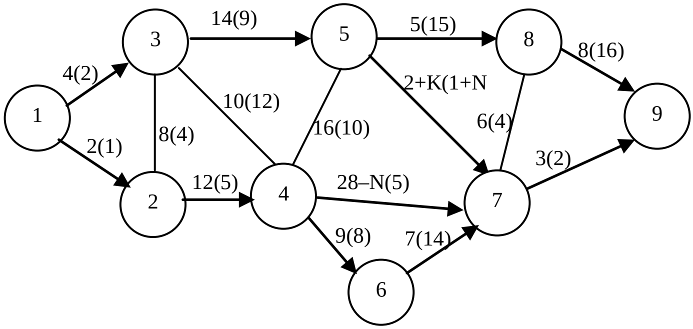
3.5. Задача о потоке минимальной стоимости

Задача нахождения потока минимальной стоимости в сети с ограниченной пропускной способностью обобщает задачу определения максимального потока, так как каждой дуге (ребру) соответствует определенная стоимость прохождения единицы потока по этой дуге (c_{ij}).

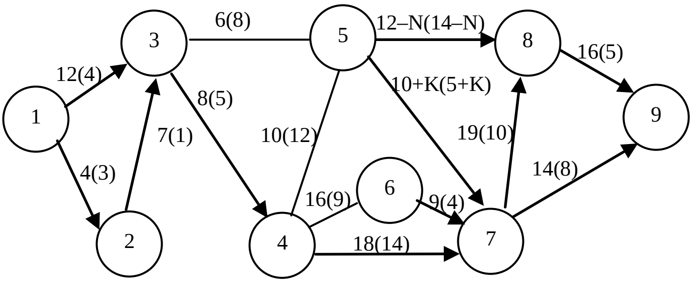
Задание 3.20. Требуется минимизировать стоимость в сети.

Исходная информация.

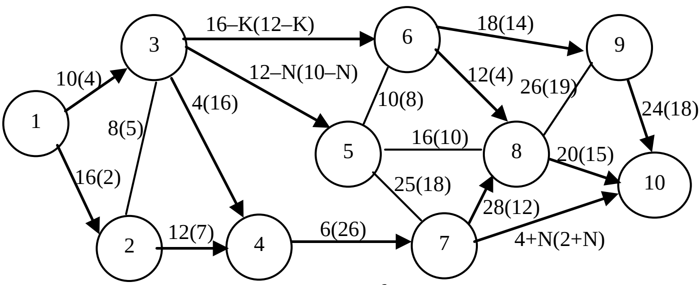
Требуется минимизировать стоимость в сети с ограниченной пропускной способностью B = 15. Сеть (рис. 3.20, *а*–*в*) дополнена стоимостью прохождения единицы потока по дугам (ребрам) c_{ij}, информация о которой записана в скобках над дугами (ребрами) сети.



а



б



в

Рис. 3.20. Сеть для определения потока минимальной стоимости

Используя информацию задания 3.20, необходимо:

1) ввести переменные величины задачи линейного программирования x_{ij}, обозначающие величину потока по дуге (ребру) (E_i, E_j), перемещаемого по ней в единицу времени;

2) составить развернутую задачу, используя следующую структурную экономико-математическую модель.

Требуется минимизировать стоимость потока в сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij} x_{ij} .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг –

$$x_{ij} \le b_{ij}\,,\ i, j = \overline{0, n}\,,\ i \ne j\,.$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее –

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0\,,\ k = \overline{1, n-1}\,.$$

3. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток –

$$\text{а) } \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = B\,;$$

$$\text{б) } \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B\,.$$

4. Неотрицательность переменных –

$$x_{ij} \ge 0\,;$$

3) решить задачу линейного программирования, используя электронные таблицы Excel;

4) сделать анализ оптимального решения экономико-математической задачи, определив разрезы с минимальной пропускной способ-

ностью, величины дуговых потоков, величину потока сети и его минимальную стоимость в сети.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.21. Требуется минимизировать стоимость в сети.

Исходная информация.

Требуется минимизировать стоимость в сети с ограниченной пропускной способностью B = 14. Сеть (рис. 3.21, *а*–*б*) дополнена стоимостью прохождения единицы потока по дугам (ребрам) c_{ij}, информация о которой записана в скобках над дугами (ребрами) сети.

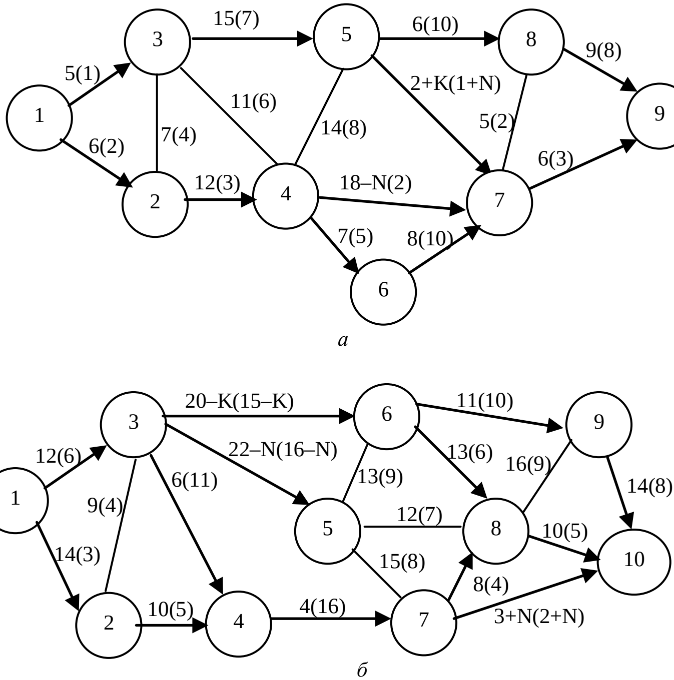


Рис. 3.21. Сеть для определения потока минимальной стоимости

3.6. Задачи о назначениях

Задание о назначениях является частичным случаем распределительных задач, особенность которых состоит в том, что в них объемы наличных и требующихся для выполнения каждой работы ресурсов равны единице, если работник i назначен на работу j, или нулю в противном случае, т.е. для выполнения каждой работы расходуется только один вид ресурса, а каждый ресурс может быть использован на одной работе.

Задание 3.22. Требуется распределить торговых работников по работам.

Исходная информация.

Необходимо распределить торговых работников супермаркета на выполнение работ с целью максимизации общей производительности труда. Производительность работников приведена в табл. 3.8–3.10.

Таблица 3.8. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	5	6	1	14	7	2	3	15
A_2	–	–	–	10	3	11	5	–
A_3	6	7	9	6	–	–	4	–
A_4	2	9	1 + N	3	–	–	14	–
A_5	8	3	9	2	6	17 – N	10	2
A_6	–	–	–	–	12	4	8	9
A_7	13	15	1	8	2	10	3	1 + K
A_8	10	4	16 – K	2	1	5	6	7

Таблица 3.9. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	10	12	3	13	15	5
A_2	4	18	9	20 – K	7	19
A_3	8	3	–	–	–	16
A_4	14	10	–	–	–	15
A_5	7	22 – N	–	–	–	6
A_6	21	1 + K	16	2 + N	4	17

Т а б л и ц а 3.10. **Производительность труда работников, у. д. е.**

Работники	Работа								
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	6	14	8	19	20	13	22	4	1
A_2	4	3	6	7	2 + K	10	12	16	2
A_3	8	6	4	15	10	–	–	–	5
A_4	1	21 – K	9	7	3	–	–	–	8
A_5	–	–	–	5	18	–	–	–	3
A_6	–	–	–	4	7	17	5	9	6
A_7	18	6	15	9	12	1 + N	3	10	4
A_8	7	2	20 – N	12	4	16	8	11	19
A_9	11	8	12	5	10	12	3	7	4

Используя информацию задания 3.22, применив линейное программирование, необходимо:

1) ввести двоичные неизвестные величины:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й исполнитель выполняет работу вида } j, \\ 0, \text{ в противном случае } (i,\ j = \overline{1,n}; i \neq j); \end{cases}$$

2) составить ограничения задачи, используя следующие структурные соотношения:

1. По распределению работ для выполнения –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}\ .$$

2. По распределению исполнителей по работам –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}\ .$$

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0; x_{ij} \in \{0,1\};$$

3) записать целевую функцию задачи в зависимости от постановки, требуется максимизировать или минимизировать целевую функцию:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \text{ или } F_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ ,$$

где c_{ij} – соответственно производительность исполнителя вида i при выполнении работы вида j или затраты на выполнение работы вида j исполнителем вида i;

4) решить задачу линейного программирования, используя электронные таблицы Excel (Поиск решения);

5) проанализировать оптимальное решение задачи и обосновать рациональное распределение исполнителей по работам.

Задание 3.23. Требуется распределить работников по работам.

Исходная информация.

Необходимо распределить работников маркетингового отдела предприятия на работы по проведению маркетинговых исследований рынка сбыта товаров с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 3.11–3.13.

Используя информацию задания 3.23, применив алгоритм венгерского метода, необходимо:

1) найти в каждой строке матрицы наименьший элемент ($\min_i c_{ij}$);

Т а б л и ц а 3.11. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	6	9	3 + 0,5K	8	7
A_2	6	10 – 0,3N	5	9	4 + 0,5N	4
A_3	7	8	6	5	5	9
A_4	5	6	9	3	7	8
A_5	10 – 0,3K	7	4	6	9	5
A_6	9	10	8	5	6	7

Т а б л и ц а 3.12. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	4	3	2 + 0,5K	11	9	7	5
A_2	6	2 + 0,5N	5	3	7	4	9
A_3	8	4	5	9	6	7	8
A_4	5	7	9 – 0,5N	5	3	8	2
A_5	13	9	6	8	4	12	10
A_6	9	6	4	13	7	11	12
A_7	12 – 0,5K	5	7	8	15	6	9 – 0,5K

Т а б л и ц а 3.13. **Затраты на выполнение работ, у. д. е.**

Работники	Работа				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	10 – 0,5N	7	9
A_2	7	3	6	4	5
A_3	8	5	4	6	7
A_4	9 – 0,5K	6	3	2 + K	4
A_5	4	8	5	3	1N

2) построить новую матрицу, элементы которой рассчитать как разность между соответствующим элементом каждой строки и выбранным минимальным элементом конкретной строки;

3) выбрать среди элементов каждого столбца новой матрицы наименьшие элементы ($\min\limits_{j} c_{ij}$);

4) почленно вычесть из элементов каждого столбца полученной матрицы минимальные элементы соответствующего столбца, получить матрицу, в которой каждая строка и каждый столбец содержат хотя бы по одному нулевому значению;

5) получить допустимое решение задачи, используя нулевые значения элементов матрицы;

6) получить оптимальное решение задачи о назначениях, анализируя допустимое решение задачи;

7) рассчитать суммарные затраты на выполнение работ, используя оптимальную расстановку работников по местам.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.24. Требуется распределить работников по работам.

Исходная информация.

Необходимо распределить работников сельскохозяйственной бригады на выполнение работ с целью максимизации общей производительности труда. Производительность работников сельскохозяйственной бригады приведена в табл. 3.14.

Таблица 3.14. **Производительность труда работников сельскохозяйственной бригады, у. д. е.**

Работники	Работа							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	7	8	2	12	7	2	3	13
A_2	–	–	–	15	3	11	6	–
A_3	6	7	8	9	–	–	4	–
A_4	3	11	1 + N	4	–	–	12	–
A_5	5	4	7	3	6	18 – N	9	5
A_6	–	–	–	–	12	4	8	9
A_7	10	13	3	8	2	12	5	2 + K
A_8	12	9	18 – K	10	8	5	6	7

Задание 3.25. Требуется распределить работников сельскохозяйственной бригады по работам, применив алгоритм венгерского метода.

Исходная информация.

Необходимо распределить работников на работы с целью минимизации суммарных затрат на их выполнение. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 3.15.

Таблица 3.15. **Затраты на выполнение работ работниками сельскохозяйственной бригады, у. д. е.**

Работники	Работа					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	8	7	9	2 + 0,5K	6	7
A_2	6	12 – 0,3N	7	9	3 + 0,5N	11
A_3	9	8	5	6	7	10
A_4	5	6	8	4	11	9
A_5	10 – 0,3K	9	11	10	9	8
A_6	7	14	9	5	6	6

3.7. Задача о коммивояжере

Задачей, схожей с задачей о назначениях, является задача о коммивояжере, постановка которой состоит в том, чтобы коммивояжер посетил n городов только один раз, выезжая из первого города и возвращаясь в исходный по кратчайшему маршруту.

Задание 3.26. Требуется определить кратчайший замкнутый маршрут.

Исходная информация.

Перерабатывающему предприятию необходимо развести свою продукцию по фирменным магазинам, расположенным в разных городах. Расстояние между городами приведено в табл. 3.16–3.18.

Таблица 3.16. **Расстояние между городами, км**

Города	Города					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	–	10 + N	50 – N	18	20	28
A_2	10 + N	–	35	15 + K	24	36
A_3	50 – N	35	–	55 – K	19	40
A_4	18	15 + K	55 – K	–	30	52
A_5	20	24	19	30	–	44
A_6	28	36	40	52	44	–

Т а б л и ц а 3.17. **Расстояние между городами, км**

Города	Города							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	–	15 + N	36	20	42	50	19	60 – K
A_2	15 + N	–	22	56	30	47	10 + K	82
A_3	36	22	–	16	20	34	56	70 – N
A_4	20	56	16	–	62	40	38	12
A_5	42	30	20	62	–	16	39	47
A_6	50	47	34	40	16	–	43	64
A_7	19	10 + K	56	38	39	43	–	52
A_8	60 – K	82	70 – N	12	47	64	52	–

Т а б л и ц а 3.18. **Расстояние между городами, км**

Города	Города				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	–	32	27 + N	44	19 + K
A_2	32	–	46	36	62 – K
A_3	27 + N	46	–	58	33
A_4	44	36	58	–	74 – N
A_5	19 + K	62 – K	33	74 – N	–

Используя информацию задания 3.26, применив метод отсекающих плоскостей, необходимо:

1) ввести неизвестные величины целочисленной задачи линейного программирования:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j, \\ 0, \text{в противном случае;} \end{cases}$$

2) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется минимизировать маршрут:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – расстояние между городом i и городом j.

При условиях:

1. По въезду в города –

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}.$$

2. По выезду из городов –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} .$$

3. Неотрицательность, целочисленность переменных –

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\};$$

3) в модель ввести дополнительные ограничения (по формированию маршрута коммивояжера) в количестве (n – 1)·(n – 2), позволяющие исключить возможность разрыва пути коммивояжера и появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \; i, j = \overline{2, n}, \; i \neq j;$$

4) найти оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования, используя электронные таблицы Excel;

5) проанализировать маршрут коммивояжера, определив его длину.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.27. Требуется определить кратчайший замкнутый маршрут.

Исходная информация.

Расстояние между городами приведено в табл. 3.19–3.20.

Т а б л и ц а 3.19. **Расстояние между городами, км**

Города	Города					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	–	12 + N	40 – N	28	30	28
A_2	22 + N	–	35	15 + K	24	36
A_3	30 – N	35	–	45 – K	29	32
A_4	28	15 + K	45 – K	–	40	42
A_5	26	28	29	30	–	44
A_6	18	26	30	32	34	–

Т а б л и ц а 3.20. **Расстояние между городами, км**

Города	Города							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	–	11 + N	36	40	42	54	29	50 – K
A_2	12 + N	–	22	56	50	47	5 + K	72
A_3	46	28	–	36	40	24	26	60 – N
A_4	30	46	16	–	52	70	38	32
A_5	22	30	20	52	–	36	49	27
A_6	40	37	34	60	26	–	43	54
A_7	29	20 + K	36	28	49	53	–	22
A_8	50 – K	62	70 – N	42	37	54	38	–

3.8. Сетевые графики и их параметры

Сетевой график – это граф типа сети, в котором фиксируется комплекс работ (операций) и событий, отражая их технологическую последовательность и взаимосвязь в процессе достижения цели.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов или времени, или логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий.

Событиями называют результаты выполнения одной или нескольких работ.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике не должно быть тупиков, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);

2) в сетевом графике не должно быть и событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;

3) не должно быть двух событий, связанных двумя или большим количеством работ;

4) в сети не должно быть контуров, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;

5) не должно быть петель, т. е. начало выполнения работы является и условием ее окончания.

Задание 3.28. Требуется построить сетевой график.

Исходная информация.

Необходимо построить сетевой график переоборудования фирменного магазина перерабатывающего предприятия, заданный списком работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.21).

Т а б л и ц а 3.21. **Список работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Демонтаж старого холодильного оборудования и витрин	–	1
$\vec{e}_2$	(2, 6)	Ремонтные строительно-монтажные работы	$\vec{e}_1$	20
$\vec{e}_3$	(2, 3)	Подготовка к монтажу нового холодильного оборудования и витрин	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_4$	(3, 4)	Монтаж нового оборудования	$\vec{e}_3$	5 + 0,1N
$\vec{e}_6$	(4, 5)	Подключение оборудования к электросети	$\vec{e}_4$	2
$\vec{e}_8$	(5, 7)	Наладка оборудования	$\vec{e}_6$	4 + 0,2K
$\vec{e}_7$	(6, 7)	Отделочные работы	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_5$ *	10
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Приемка фирменного магазина в эксплуатацию	$\vec{e}_7$, $\vec{e}_8$	1

* Работа $\vec{e}_5$ (4, 6) является фиктивной.

Задание 3.29. Необходимо построить сетевой график.

Исходная информация.

Требуется построить сетевой график подготовки выставочного зала для демонстрации товаров, выпускаемых перерабатывающей промышленностью, заданного списком работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.22).

Т а б л и ц а 3.22. **Список работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, ч
1	2	3	4	5
$\vec{e}_1$	(1,2)	Отбор образцов товара для выставки	–	2
$\vec{e}_2$	(2,6)	Изготовление буклетов и других рекламных материалов	$\vec{e}_1$	22
$\vec{e}_3$	(2,5)	Изготовление стендов для установки образцов товаров в демонстрационном зале	$\vec{e}_1$	32 – 0,2K

Окончание табл. 3.22

1	2	3	4	5
$\vec{e}_4$	(2, 3)	Доставка в зал выставки образцов товаров	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_5$	(3, 4)	Доставка в зал выставки стендов	$\vec{e}_4$	2
$\vec{e}_6$	(4, 5)	Монтаж стендов	$\vec{e}_5$	4 + 0,2N
$\vec{e}_7$	(5, 6)	Установка образцов товаров на стендах	$\vec{e}_3$, $\vec{e}_6$	1
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Оформление зала и стендов рекламными материалами	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Репетиция открытия выставки	$\vec{e}_8$	1

На основании приведенной информации заданий 3.28, 3.29 необходимо:

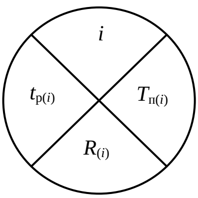
1) на сетевом графике рассчитать ранний срок свершения событий:

$$а)\ t_{р(1)} = 0;$$

$$б)\ t_{р(j)} = t_{р(i)} + t_{ij},$$

где $t_{р(j)}$ – ранний срок свершения события j (последующего события) (рис. 3.22);

t_{ij} – продолжительность работы (i, j);

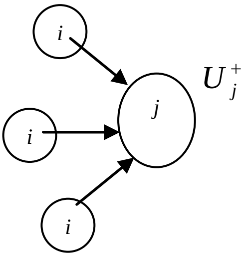


i – номер события;
$t_{р(i)}$ – ранний срок свершения события i;
$t_{п(i)}$ – поздний срок свершения события i;
$R_{(i)}$ – резерв времени события i.

Рис. 3.22. Временные параметры событий

в) если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i, то ранний срок свершения события j определяется как максимальная сумма ранних сроков свершения событий i и продолжительность работ, входящих в событие j (рис. 3.19):

$$t_{р(j)} = \max_{(i,j)\in u_j^+} \{t_{р(i)} + t_{ij}\}, (j = \overline{2,n});$$



U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие *j*.

Рис. 3.23. Фрагмент сетевого графика

2) определить продолжительность критического пути $t_{кр}$:

$$t_{кр} = t_{п(п)} ;$$

3) на сетевом графике рассчитать поздний срок свершения событий:

$$\text{а)}\ t_{п(п)} = t_{кр},$$

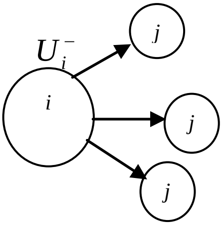
где $t_{кр}$ – продолжительность критического пути;

$$\text{б)}\ t_{п(i)} = t_{п(j)} - t_{ij} ,$$

где $t_{п(j)}$ – поздний срок свершения события *j* (предшествующего события);

в) если нескольким событиям *j* предшествует свершение одного события *i*, то поздний срок свершения события *i* определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий *j* и продолжительность работ, выходящих из события *i* (рис. 3.24):

$$t_{п(i)} = \min_{(i,j)\in u_i^-} \{t_{п(j)} - t_{ij}\}, (i = \overline{1, n-1}) ;$$



U_i^- – множество всех работ, выходящих из события *i*.

Рис. 3.24. Фрагмент сетевого графика

4) на сетевом графике рассчитать резерв времени событий:

$$R_{(i)} = t_{\text{п}(i)} - t_{\text{р}(i)};$$

5) рассчитать временные параметры работ (табл. 3.23):

Т а б л и ц а 3.23. **Временные параметры работ**

Условные обозначения работ (i, j)	Продолжительность работы, t_{ij}	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени работы		
		начала работы, $t_{\text{р.н}(i,j)}$	окончания работы, $t_{\text{р.о}(i,j)}$	начала работы, $t_{\text{п.н}(i,j)}$	окончания работы, $t_{\text{п.о}(i,j)}$	полный $R_{\text{п}(i,j)}$	свободный $R_{\text{с}(i,j)}$	независимый $R_{\text{н}(i,j)}$

а) ранний срок начала работы (i, j):

$$t_{\text{р.н}(i,j)} = t_{\text{р}(i)};$$

б) ранний срок окончания работы (i, j):

$$t_{\text{р.о}(i,j)} = t_{\text{р.н}(i,j)} + t_{ij};$$

в) поздний срок окончания работы (i, j):

$$t_{\text{п.о}(i,j)} = t_{\text{п}(j)};$$

г) поздний срок начала работы (i, j):

$$t_{\text{п.н}(i,j)} = t_{\text{п.о}(i,j)} - t_{ij};$$

д) полный резерв времени работы (i, j):

1) $R_{\text{п}(i,j)} = t_{\text{п.о}(i,j)} - t_{\text{р.н}(ij)} - t_{i,j};$

2) $R_{\text{п}(i,j)} = t_{\text{п}(j)} - t_{\text{р}(i)} - t_{i,j};$

3) $R_{\text{п}(i,j)} = t_{\text{п.о}(i,j)} - t_{\text{р.о}(ij)};$

е) свободный резерв времени работы (i, j):

$$1)\ R_{\text{с}(i,j)} = t_{\text{р}(j)} - t_{\text{р}(i)} - t_{ij};$$
$$2)\ R_{\text{с}(i,j)} = R_{\text{п}(i,j)} - R_{(j)};$$

ж) независимый резерв времени работы (i, j):

$$1)\ R_{\text{н}(i,j)} = t_{\text{р}(j)} - t_{\text{п}(i)} - t_{ij};$$
$$2)\ R_{\text{н}(i,j)} = R_{\text{п}(i,j)} - R_{(i)} - R_{(j)};$$

6) проанализировать временные характеристики событий и работ.

Задание 3.30. Требуется построить сетевой график.

Исходная информация.

Необходимо построить сетевой график реконструкции цеха перерабатывающего предприятия, заданного перечнем работ, и рассчитать временные характеристики событий и работ (табл. 3.24).

Таблица 3.24. **Перечень работ проекта**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Определение объема реконструкции	–	4
$\vec{e}_2$	(2, 3)	Составление сметы затрат	$\vec{e}_1$	12 + N
$\vec{e}_3$	(2, 4)	Выбор проекта реконструкции	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_4$	(3, 5)	Выбор подрядчика (строительной организации)	$\vec{e}_2$	2
$\vec{e}_5$	(3, 7)	Получение финансового обеспечения	$\vec{e}_2$	6 + K
$\vec{e}_6$	(5, 7)	Составление договора на выполнение работ проекта	$\vec{e}_4$	1
$\vec{e}_7$	(4, 6)	Экономическое обоснование проекта	$\vec{e}_3$	5
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Привязка проекта к условиям перерабатывающего предприятия	$\vec{e}_7$	4
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Работа по реконструкции	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_8$	40

Задание 3.31. Необходимо построить сетевой график.

Исходная информация.

Требуется составить сетевой график подготовительных мероприятий для участия в выставке товаров предприятия, заданного перечнем работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.25).

Т а б л и ц а 3.25. **Перечень подготовительных работ**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Определение рекламной стратегии	–	2
$\vec{e}_2$	(2, 3)	Разработка дизайна проекта экспозиции	$\vec{e}_1$	3
$\vec{e}_3$	(2, 4)	Изготовление рекламно-информационных материалов	$\vec{e}_1$	6 + N
$\vec{e}_4$	(4, 5)	Отбор экспонатов (товаров для выставки)	$\vec{e}_3$	1
$\vec{e}_5$	(3, 6)	Техническое и художественное оформление стендов	$\vec{e}_2$	4 + K
$\vec{e}_6$	(5, 6)	Упаковка и подготовка к транспортировке	$\vec{e}_4$	2
$\vec{e}_7$	(2, 6)	Заключение договора на участие и оплата аренды	$\vec{e}_2$	2
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Переезд и размещение, транспортировка экспозиции и товаров	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Установка стендов и подготовка их к открытию	$\vec{e}_8$	1

На основании приведенной информации заданий 3.30, 3.31 необходимо:

1) построить сетевой график работ проекта;

2) определить продолжительность критического пути;

3) рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 заданий 3.28, 3.29;

4) рассчитать временные характеристики работ согласно п. 5 заданий 3.28, 3.29;

5) определить резервы времени работ и проанализировать их.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.32. Необходимо построить сетевой график.

Исходная информация.

Агропромышленный комбинат переводит деятельность фирменного магазина на самообслуживание. В табл. 3.26 дана информация о намечаемых мероприятиях. Требуется представить комплекс работ в виде сетевого графика и определить временные характеристики событий и работ.

Т а б л и ц а 3.26. **Перечень и продолжительность работ по организации в магазине самообслуживания**

Наименование работ	Обозначение работы	Шифр работы (i, j)	Продолжительность работы, дней
Составление сметы	a_1	(1, 2)	5
Заказ оборудования с установкой	a_2	(2, 3)	10
Распределение кадров	a_3	(2, 4)	2
Установка оборудования	a_4	(3, 5)	12 + 0,5N
Подготовка кадров	a_5	(4, 6)	6
Оформление торгового зала	a_6	(5, 7)	3
Доставка товаров	a_7	(6, 7)	8 + 0,2K
Заказ, получение и изучение ценников	a_8	(6, 8)	3
Заказ и получение формы	a_9	(6, 9)	4
Выкладка товаров	a_{10}	(7, 9)	2
Заполнение ценников	a_{11}	(8, 9)	1
Генеральная репетиция	a_{12}	(9, 10)	1

Задание 3.33. Необходимо построить сетевой график.

Исходная информация.

Требуется составить сетевой график подготовительных мероприятий для участия в выставке товаров предприятия, заданного перечнем работ, и рассчитать его временные характеристики (табл. 3.27).

Т а б л и ц а 3.27. **Перечень подготовительных работ**

Дуги	(i, j)	Работа	Опирается на дуги	Продолжительность, дн.
$\vec{e}_1$	(1, 2)	Определение рекламной стратегии	–	2
$\vec{e}_2$	(2, 3)	Разработка дизайна проекта экспозиции	$\vec{e}_1$	4
$\vec{e}_3$	(2, 4)	Изготовление рекламно-информационных материалов	$\vec{e}_1$	3 + N
$\vec{e}_4$	(4, 5)	Отбор экспонатов (товаров для выставки)	$\vec{e}_3$	2
$\vec{e}_5$	(3, 6)	Техническое и художественное оформление стендов	$\vec{e}_2$	2 + K
$\vec{e}_6$	(5, 6)	Упаковка и подготовка к транспортировке	$\vec{e}_4$	1
$\vec{e}_7$	(2, 6)	Заключение договора на участие и оплата аренды	$\vec{e}_2$	2
$\vec{e}_8$	(6, 7)	Переезд и размещение, транспортировка экспозиции и товаров	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$	1
$\vec{e}_9$	(7, 8)	Установка стендов и подготовка их к открытию	$\vec{e}_8$	1

3.9. Задачи распределения ресурсов на сетях

Задание 3.34. Требуется распределить трудовые ресурсы во времени, т. е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить комплекс проектных работ в минимальный срок.

Исходная информация.

1. В распоряжении руководителя проектных работ имеется 35 + + 0,2K человек.

2. На перерабатывающем комбинате необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.25).

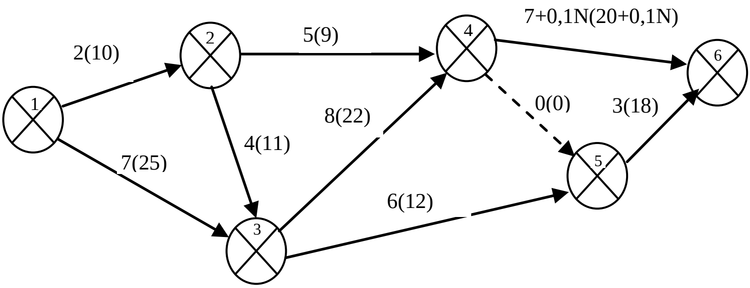


Рис. 3.25. Сетевой график выполнения комплекса проектных работ

3. Над дугами графика представлена продолжительность выполнения работ (t_{ij}), а в скобках – интенсивность потребления ресурса, т. е. необходимое для выполнения работы (i, j) число исполнителей в единицу времени (v_{ij}).

Задание 3.35. Требуется обосновать время начала и окончания работ по переводу производства на новую, более интенсивную технологию так, чтобы комплекс подготовительных работ был завершен в кратчайший срок.

Исходная информация.

1. К выполнению подготовительных работ можно привлечь не более 10 + 0,3K специалистов, имеющих соответствующую квалификацию.

2. С этой целью создана группа специалистов и составлен сетевой график выполнения комплекса работ (рис. 3.26).

3. Известны продолжительность выполнения работ (t_{ij}) и количество специалистов, необходимых для этого (v_{ij}).

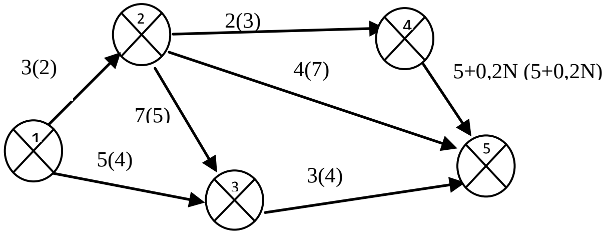


Рис. 3.26. Сетевой график выполнения комплекса подготовительных работ

На основании приведенной информации заданий 3.34, 3.35 необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 заданий 3.28, 3.29;

2) рассчитать временные характеристики работ, согласно п. 5 заданий 3.28, 3.29;

3) построить сетевой график в календарной шкале времени по ранним срокам начала и окончания работ (т. е. график Ганта), спроецировать на оси времени (0*t*) начало и окончание каждой работы, выделив промежутки;

4) построить эпюру интенсивности потребления ресурса (без учета ограничения), просуммировать в промежутках оси времени интенсивность потребления ресурсов.

Если для каждого промежутка интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то распределение ресурсов считается удовлетворительным;

5) в противном случае оптимизировать использование ресурсов:

а) все работы, сумма интенсивности использования ресурсов которых не превышает запасов ресурса, оставляем в первоначальном положении;

б) если после прибавления интенсивности использования ресурса какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше их запасов, то эту работу сдвигают вправо на величину рассматриваемого промежутка;

в) если суммарное потребление ресурсов больше их запасов, а необходимо выполнить несколько работ, то устанавливают очередность их выполнения:

– в первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке;

– затем выполняются те работы, которые имеют наименьший полный резерв времени $R_{п(i,\,j)}$;

– если полные резервы времени для некоторых работ равны, то выполняют сначала ту работу, для которой характерна наименьшая интенсивность использования ресурсов;

– если интенсивность использования ресурсов равна, то работы из промежутка выбирают в произвольном порядке;

– включение новых работ для выполнения в конкретный промежуток происходит тогда, когда для этого имеются ресурсы, в противном случае работу (или работы) сдвигают вправо на промежуток;

6) с учетом вышеизложенных корректировок построить новый график Ганта и эпюру интенсивности потребления ресурса. Если интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то задача решена. В противном случае оптимизацию графика повторяем с п. 5;

7) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его.

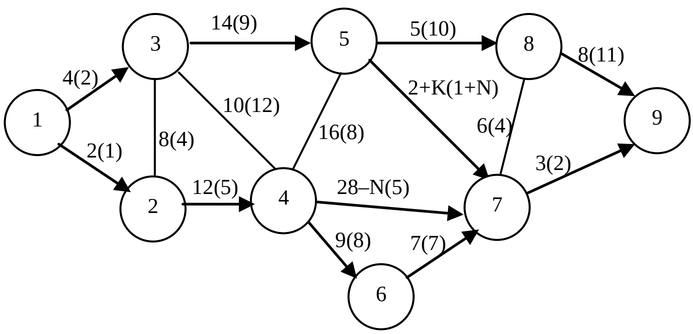
Задания для самостоятельной работы

Задание 3.36. Требуется распределить трудовые ресурсы во времени, т. е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить комплекс работ в минимальный срок.

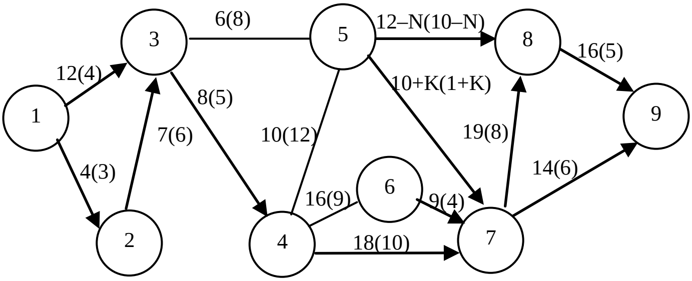
Исходная информация.

1. В распоряжении руководителя работ имеется 30 + 0,1N человек.

2. Необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.27, *а* и *б*).



а



б

Рис. 3.27. Сетевой график выполнения комплекса работ

Над дугами графика представлена продолжительность выполнения работ (t_{ij}), а в скобках – интенсивность потребления ресурса, т. е. необходимое для выполнения работы (i, j) число исполнителей в единицу времени (v_{ij}).

3.10. Задачи оптимизации сетей по времени

Задание 3.37 (1-й вариант). Необходимо минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы проекта, с тем чтобы общий срок его выполнения не превышал 25 + 0,5K дней.

Исходная информация.

1. В организации необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.28).

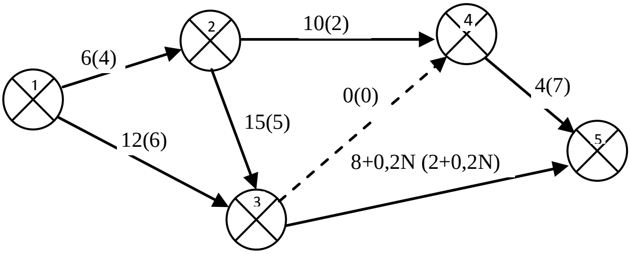


Рис. 3.28. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,2; k_{13} = 0,5; k_{23} = 0,4; k_{24} = 0,3; k_{35} = 0,6; k_{45} = 0,1.

Задание 3.38 (1-й вариант). Требуется минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы комплекса при условии завершения комплекса работ не позднее 26 – 0,2K дней.

Исходная информация.

1. Комплекс работ по организации рекламной компании предприятия представлен сетевым графиком (рис. 3.29).

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

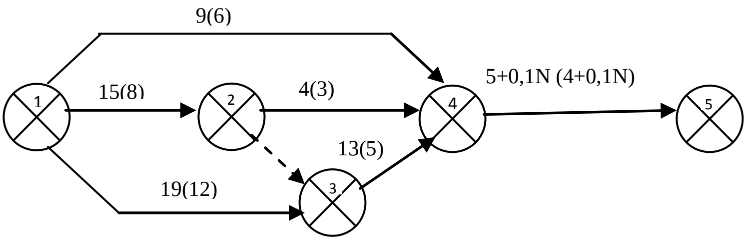


Рис. 3.29. Сетевой график выполнения комплекса работ

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,25; k_{13} = 0,4; k_{14} = 0,2; k_{24} = 0,3; k_{34} = 0,5; k_{45} = 0,15.

На основании приведенной информации задач 3.37, 3.38 необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1–4 заданий 3.28, 3.29;

2) ввести переменные задачи, обозначающие величину дополнительных вложений в работы, время начала и окончания работ;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум суммарных затрат дополнительных вложений:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{\text{н}} = 0, (1, j) \in \vec{e} \ .$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{in}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e} \ .$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e} \ .$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e} \ .$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{\text{н}} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E.$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{\text{н}}, t_{ij}^{0}, x_{ij} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу ij, позволяющая сократить время ее выполнения;

$t_{ij}^{\text{н}}$ – время начала работы ij;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij.

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных вложений в работу ij;

t_{ij} – продолжительность выполнения работы ij;

4) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Задание 3.39 (2-й вариант). Необходимо минимизировать срок выполнения проекта за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения плановых работ на новый календарный год имеет следующий вид (рис. 3.30).

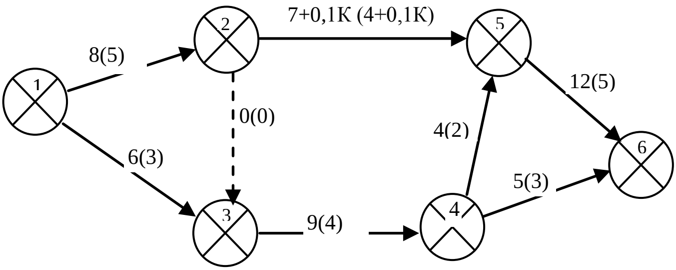


Рис. 3.30. Сетевой график выполнения плановых работ

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,5; k_{13} = 0,4; k_{25} = 0,1; k_{34} = 0,8; k_{45} = 0,2; k_{46} = 0,7; k_{56} = 0,6.

4. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 40 + 0,3N у. д. е.

Задание 3.40 (2-й вариант). Требуется минимизировать время выполнения комплекса работ за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 3.31).

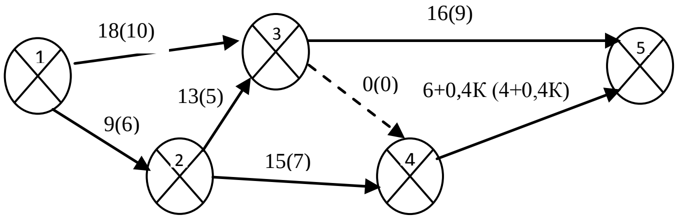


Рис. 3.31. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность работ (t_{ij}) и минимально возможное время их выполнения (d_{ij}) – в скобках).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,5; k_{13} = 0,1; k_{23} = 0,2; k_{24} = 0,3; k_{35} = 0,1; k_{45} = 0,4.

4. Для сокращения общего срока выполнения комплекса работ выделены дополнительные средства в размере 120 + 0,5N у. д. е.

На основании приведенной информации задач 3.39, 3.40 необходимо:

1) добавить на сетевом графике фиктивную работу и фиктивное событие, завершающее комплекс работ;

2) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий, согласно п. 1–4 задач 3.28, 3.29;

3) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи, согласно условным обозначениям задач 3.37, 3.38, п. 3;

4) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальный срок выполнения проекта:

$$F_{\min} = \underset{(i,n)\in\vec{e}}{t_{in}^{0}} .$$

При условиях:

1. По использованию дополнительных вложений –

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B .$$

2. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{\text{Н}} = 0, (1, j) \in \vec{e} \ .$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{Н}} \geq d_{ij}, (i, j) \in \vec{e} \ .$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{Н}} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e} \ .$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{\text{Н}} \geq t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E \ .$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{\text{Н}}, t_{ij}^{0}, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Условные обозначения те же, как и для вышеизложенной модели п. 3 задач 3.37 и 3.38.

В известные величины добавляют B – количество дополнительных вложений, выделяемых для сокращения продолжительности работ;

5) решить экономико-математическую задачу на персональном компьютере;

6) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

7) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

8) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.41 (1-й вариант). Необходимо минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы проекта, с тем чтобы общий срок его выполнения не превышал 22 + 0,5К дня.

Исходная информация.

1. В сельскохозяйственной организации необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 3.32).

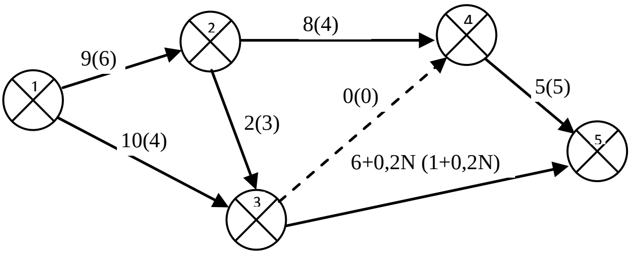


Рис. 3.32. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,4; k_{13} = 0,3; k_{23} = 0,5; k_{24} = 0,2; k_{35} = 0,7; k_{45} = 0,6.

Задание 3.42 (2-й вариант). Необходимо минимизировать срок выполнения проекта за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ на новый календарный год имеет следующий вид (рис. 3.33).

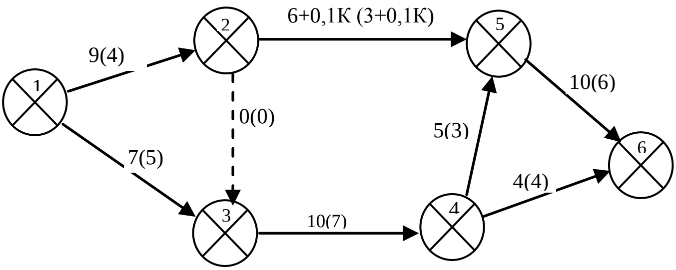


Рис. 3.33. Сетевой график выполнения плановых работ

2. Для каждой работы над дугами приведена продолжительность работ (t_{ij}), а в скобках – минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: k_{12} = 0,4; k_{13} = 0,6; k_{25} = 0,2; k_{34} = 0,5; k_{45} = 0,3; k_{46} = 0,7; k_{56} = 0,8.

4. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 55 + 0,3N у. д. е.

3.11. Задачи оптимизации сетей по стоимости

Задание 3.43. Необходимо минимизировать стоимость проектных работ при условии выполнения проекта не более чем за 30 + 0,2N дней.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ проекта имеет следующий вид (рис. 3.34).

2. Для каждой работы над дугами приведена нормальная (t_{ij}) (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij}, а в скобках – минимальная продолжительность работ d_{ij} (т. е. срочный режим выполнения работ).

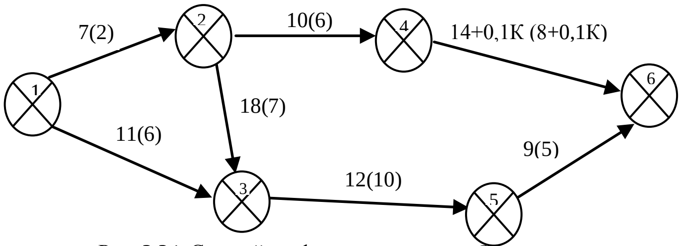


Рис. 3.34. Сетевой график выполнения работ проекта

3. Затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Так, срочному режиму выполнения работ (d_{ij}) соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}, а наибольшей продолжительности работ (D_{ij}) – наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.28).

Т а б л и ц а 3.28. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 6)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	2	6	7	6	10	8 + 0,1К	5
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	20	40	70	50	30	90 + 0,2N	60
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	7	11	18	10	12	14 + 0,1К	9
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	10	15	30	35	25	50 + 0,2N	20
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат							

Задание 3.44. Требуется минимизировать стоимость комплекса работ с целью его завершения не более чем за 25 + 0,3N дней.

Исходная информация.

1. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 3.35).

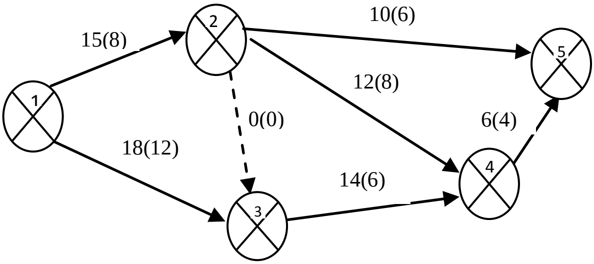


Рис. 3.35. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность выполнения работ в нормальном (t_{ij} или D_{ij}) и срочном режиме (d_{ij}) соответственно.

3. Для выполнения работ в срочном режиме (d_{ij}) требуются наибольшие затраты средств C_{ij}, а для работ в нормальном режиме (t_{ij} или с наибольшей продолжительностью работ D_{ij}) – соответственно наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.29).

Т а б л и ц а 3.29. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа					
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(4, 5)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	8	12	8	6	6	4
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	190	160	95	85	115	145
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	15	18	12	10	14	6
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	160	120	35	60	70	110
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат						

На основе приведенной информации задач 3.43, 3.44 необходимо:

1) на сетевом графике определить временные характеристики событий согласно п. 1–4 задач 3.28 и 3.29;

2) вычислить коэффициент дополнительных затрат для каждой работы, который показывает, на сколько увеличится стоимость работы (ij) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени:

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}};$$

3) рассчитать минимальную и максимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij},$$

$$F_{\max} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} C_{ij};$$

4) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

5) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} - d_{ij})].$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1j}^{\text{н}} = 0, (1, j) \in \vec{e}\ .$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{in}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e}\ .$$

3. По предельной продолжительности работ –

$$d_{ij} \le t_{ij}^{0} - t_{ij}^{\text{н}} \le D_{ij}, (i, j) \in \vec{e}\ .$$

4. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{\text{н}} \ge t_{ij}^{0}, (i, j, r) \in E\ .$$

5. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{\text{Н}}, t_{ij}^{0} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

$t_{ij}^{\text{Н}}$ – время начала работы ij;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij.

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij;

c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij;

h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат, показывающий увеличение стоимости работы ij при уменьшении ее продолжительности на единицу времени;

D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij;

6) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

7) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

8) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

9) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3.45. Необходимо минимизировать стоимость работ при условии выполнения проекта не более чем за 28 + 0,2N дней.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ проекта имеет следующий вид (рис. 3.36).

2. Для каждой работы над дугами приведена нормальная (t_{ij}) (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij}, а в скобках – минимальная продолжительность работ d_{ij} (т. е. срочный режим выполнения работ).

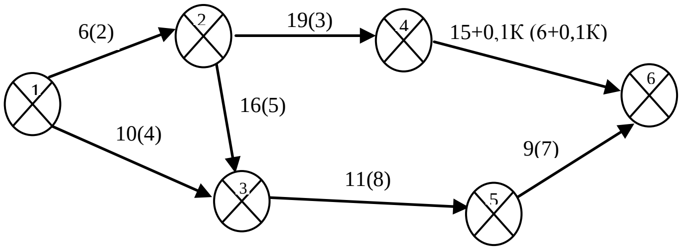


Рис. 3.36. Сетевой график выполнения работ проекта

3. Затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Так, срочному режиму выполнения работ (d_{ij}) соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}, а наибольшей продолжительности работ (D_{ij}) – наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.30).

Т а б л и ц а 3.30. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 6)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	2	4	5	3	8	6 + 0,1K	7
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	25	40	70	50	35	60 + 0,2N	65
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	6	10	16	10	9	11 + 0,1K	9
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	10	12	28	35	25	30 + 0,2N	15
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат							

Задание 3.46. Требуется минимизировать стоимость комплекса работ с целью его завершения не более чем за 22 + 0,3N дней.

Исходная информация.

1. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 3.37).

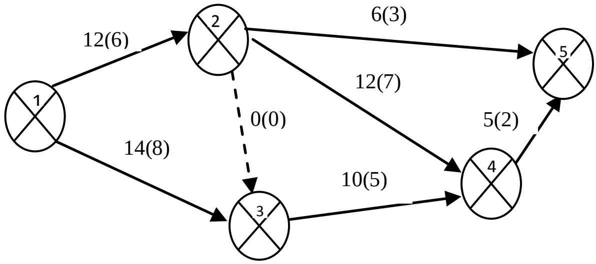


Рис. 3.37. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Цифры над дугами графика обозначают продолжительность выполнения работ в нормальном (t_{ij} или D_{ij}) и срочном режиме (d_{ij}) соответственно.

3. Для выполнения работ в срочном режиме (d_{ij}) требуются наибольшие затраты средств C_{ij}, а для работ в нормальном режиме (t_{ij} или с наибольшей продолжительностью работ D_{ij}) – соответственно наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 3.31).

Т а б л и ц а 3.31. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работа					
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(4, 5)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	6	8	7	3	5	2
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	120	150	95	85	75	115
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	12	14	12	6	10	5
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	80	70	35	50	40	60
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат						

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «граф».
2. Что такое путь, критический путь?
3. Как определяется длина пути?

4. Чем отличается орграф от неориентированного графа?

5. Как формируются матрицы смежности дуг и ребер?

6. Как построить матрицы инциденций для дуг и ребер?

7. Каким образом можно сформировать матрицу смежности вершин?

8. Какими способами можно упорядочить граф?

9. Дайте определение понятия «минимальное покрывающее дерево».

10. Приведите алгоритм построения минимального покрывающего дерева.

11. Какими методами можно обосновать кратчайшую цепь?

12. Приведите алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшей цепи.

13. Приведите алгоритм Флойда для решения задач о кратчайших цепях.

14. Дайте определение понятия «треугольный оператор Флойда».

15. Как построить матрицу расстояний и матрицу последовательности вершин графа?

16. Приведите структурные модели прямой и двойственной задач линейного программирования для обоснования кратчайшего пути между исходной и завершающей вершинами цепи.

17. Как формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) графа?

18. Приведите алгоритм Форда для решения задач о максимальном потоке в сети.

19. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования максимального потока в сети.

20. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования потока минимальной стоимости в сети.

21. Дайте определение понятий «сетевой график», «событие», «работа».

22. Как рассчитать ранний, поздний сроки свершения и резерв времени события?

23. Как рассчитать ранние сроки начала и окончания работ?

24. Как рассчитать поздние сроки начала и окончания работ?

25. Приведите формулы расчета полного, свободного и независимого резервов времени работ.

26. Как строится график Ганта?

27. Приведите алгоритм распределения ресурсов на сетях.

28. Каким образом оптимизируется порядок выполнения работ при распределении ресурсов на сетях?

29. Приведите структурные экономико-математические модели оптимизации проекта во времени.

30. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации сети по стоимости.

31. Как определяется и что показывает коэффициент дополнительных затрат в Задачах оптимизации сетей по стоимости?

32. Как определить оптимальные затраты средств в работы при оптимизации сетей по стоимости?

33. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи о назначениях.

34. Приведите алгоритм венгерского метода решения задачи о назначениях.

35. Охарактеризуйте сущность задачи коммивояжера.

36. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи коммивояжера.

4. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

С помощью задач оптимального упорядочения обосновываются расписания, под которыми понимают такие предписания, по которым в каждый момент времени можно установить, простаивает обслуживающее устройство или нет. Если оно не простаивает, то можно указать, какое из требований оно обслуживает. Таким образом, *расписание* – это последовательность выбора требований на обслуживание, которое обозначается:

$$\pi(n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

где i_2 – элемент из множества N, занимающий в последовательности $\pi(n)$ второе место.

В общем случае для задачи упорядочения должны быть известны:

1) подлежащие выполнению операции;
2) количество и типы обслуживающих устройств;
3) трудоемкость или время и порядок выполнения операций;
4) критерий эффективности расписания.

Типичной задачей теории расписаний является проблема составления расписания работы технологической линии, состоящей из m-станков $(i = \overline{1, m})$, на которых нужно обработать партии из n-деталей $(j = \overline{1, n})$. Критерием эффективности расписания станет минимальное время обработки всех n-деталей, каждая из которых должна последовательно пройти обработку на каждом станке. Исходными данными задачи служит продолжительность обработки на i-м станке j-й детали t_{ij}.

Такая задача получила название задачи Джонсона.

4.1. Системы с одним обслуживающим устройством

Задание 4.1. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований (полуфабрикатов, проходящих обработку на одном оборудовании в перерабатывающем цеху организации) одним обслуживающим устройством, минимизирующее суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.1–4.3.

Т а б л и ц а 4.1. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	5	3 + K	12	10	6	8	4	3 + N
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	15	9 + N	20	2	8	1	20	5 + K

Т а б л и ц а 4.2. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	6	3	4 + K	20	8	14	7	17	4
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	15	10	1 + N	7	3	6	2	5	8

Т а б л и ц а 4.3. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	22	12	5	7	9	14	4	2 + N	10
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	8	4	9	16	10	5	3	2 + K	6

На основе приведенной информации задачи 4.1 необходимо:

1) определить время начала обслуживания требований вида i для расписания, изложенного в табл. 4.1–4.3;

2) рассчитать штраф, связанный с ожиданием требований вида i в очереди для первоначального расписания:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{t}_i;$$

3) вычислить отношение $\frac{t_i}{\alpha_i}$ для каждого требования вида i;

4) определить оптимальный порядок обслуживания требований вида i, такой что (расположив данные требования по возрастанию):

$$\frac{t_i}{\alpha_i} \leq \frac{t_{i+1}}{\alpha_{i+1}};$$

5) определить время начала обслуживания требований вида i, согласно п. 1:

$$\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i,$$

где $\underline{t}_{i+1}, t_i$ – соответственно время начала обслуживания требования вида $i + 1$ и i;

6) рассчитать штраф, связанный с ожиданием требований в очереди:

$$\Phi_{1\min} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{t}_i;$$

7) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задание 4.2. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством (работ, выполняемых одной строительной бригадой сельскохозяйственной организации), минимизирующее величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе до момента завершения обслуживания последнего.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.4–4.6.

Т а б л и ц а 4.4. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида *i*	6	4	5	8 + N	7	3	2 + K	10
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида *i* в единицу времени после завершения его обслуживания	4	1	3	5 + K	9	6	2 + N	7

Т а б л и ц а 4.5. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида *i*	20	2 + N	14	8	12	9	7	25	6
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида *i* в единицу времени после завершения его обслуживания	6	3 + K	17	10	5	16	15	12	8

Т а б л и ц а 4.6. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида *i*	4	6	8	12	3	9	20	1 + N	18
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида *i* в единицу времени после завершения его обслуживания	8	14	5	7	3	16	2	4 + K	10

На основе приведенной информации задачи 4.2 необходимо:

1) определить время окончания обслуживания требований вида *i* ($\bar{t}_i$):

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i \,;$$

где $\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания требования вида i;

$\underline{t}_i$ – время начала обслуживания требования вида i;

t_i – продолжительность обслуживания требования вида i;

2) определить время окончания обслуживания последнего требования (T):

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i;$$

3) определить время ожидания требований вида i в системе после их обслуживания:

$$T - \bar{t}_i;$$

4) определить величину средств, связываемых всеми требованиями вида i после завершения их обслуживания:

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \bar{t}_i);$$

5) вычислить отношение $\frac{t_i}{\gamma_i}$ для каждого требования вида i;

6) определить оптимальный порядок обслуживания требований вида i, такой, что (расположив данные требования по убыванию):

$$\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}};$$

7) определить время окончания обслуживания требований вида i, согласно п. 1;

8) определить время окончания обслуживания последнего требования, при оптимальном расписании, согласно п. 2;

9) определить время ожидания требований вида i в системе после их обслуживания, при оптимальном расписании, согласно п. 3;

10) определить величину средств, связываемых всеми требованиями вида i после завершения их обслуживания при оптимальном расписании:

$$\Phi_{2\min} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \overline{t_i});$$

11) рассчитать эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задание 4.3. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством (сельскохозяйственных операций, выполняемых одной сельхозмашиной), минимизирующее величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.7–4.9.

Т а б л и ц а 4.7. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	1	8	4	6 + K	3	7	2	9 + K
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	5	7	3	8	6	1	4	2
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	3	14	7	9 + N	4	10	5	12 + N

Т а б л и ц а 4.8. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	5	1	4	3 + K	8	9	2	6	10
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	2	10	5	8	1	4	7	3	6
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	10	2	16	5 + N	20	14	8	9	12

Т а б л и ц а 4.9. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	15	9	3	24	4	10	16	8	2 + N
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	4	7	2	9	1	5	8	3	6
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	18	15	7	25	9	12	22	10	5 + K

На основе приведенной информации задачи 4.3 необходимо:

1) определить время окончания обслуживания требований вида i при неоптимальном расписании:

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i ,$$

2) рассчитать z_i – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком:

$$z_i = \max\{0; \bar{t}_i - D_i\};$$

3) вычислить величины $\delta_i z_i$ для каждого требования вида i при неоптимальном расписании;

4) вычислить величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований:

$$\Phi_3 = \max_{i \in N} \delta_i z_i;$$

5) определить время окончания обслуживания последнего требования:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i;$$

6) рассчитать z'_i – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком:

$$z'_i = \max\{0, T - D_i\};$$

7) вычислить величины $\delta_i z'_i$ для каждого требования вида i;

8) найти требование, для которого значение $\delta_i z_i'$ будет минимальным. Выбранное требование будет обслуживаться последним. Исключить его из рассмотрения, и расчет, начав с п. 5, продолжать до тех пор, пока не установите оптимальный порядок обслуживания требований;

9) определить время окончания обслуживания требований вида i при оптимальном расписании:

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i;$$

10) рассчитать z_i – задержку в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком при оптимальном расписании (п. 2);

11) вычислить величины $\delta_i z_i$ для каждого требования вида i при оптимальном расписании;

12) вычислить величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований:

$$\Phi_{3\min} = \max_{i \in N} \delta_i z_i;$$

13) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задания для самостоятельной работы

Задание 4.4. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним обслуживающим устройством, минимизирующее суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.10.

Т а б л и ц а 4.10. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	6	2 + K	10	8	4	7	5	3 + N
α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени	12	8 + N	30	4	10	9	20	5 + K

Задание 4.5. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством, минимизирующее величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе до момента завершения обслуживания последнего.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.11.

Т а б л и ц а 4.11. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	9	6	5	3 + N	7	4	2 + K	10
γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания	4	2	8	2 + K	10	7	1 + N	9

Задание 4.6. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований одним устройством, минимизирующее величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований.

Исходная информация.

Исходная информация представлена в табл. 4.12.

Т а б л и ц а 4.12. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
t_i – продолжительность обслуживания требования вида i	2	9	7	6 + K	5	4	8	3 + K
δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени	5	4	2	6	8	3	1	7
D_i – директивный срок обслуживания требования вида i	4	14	9	8 + N	7	10	15	6 + N

4.2. Последовательное обслуживание

Задание 4.7. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований (колбасных полуфабрикатов) двумя устройствами (обжарочной и пароварочной камерами), минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств.

Исходная информация.

Время обслуживания требований представлено в табл. 4.13–4.15.

Таблица 4.13. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Устройство 1	40	80	32 + K	60	20	30	55 + N	25
Устройство 2	22	60	10 + K	42	30	45	12 + N	50

Таблица 4.14. **Исходная информация второй задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	65	80	45	10 + K	35	20	55	40 + N	25
Устройство 2	30	20	35	40 – K	80	65	15	70 – N	45

Таблица 4.15. **Исходная информация третьей задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	30	40	20	52	45	80	24	56	25 + N
Устройство 2	64	82	42	72	38	25	37	60	75 – N

На основе приведенной информации задания 4.7 необходимо:

1) определить простои второго устройства, считая, что обслуживание требований вида i происходит по неоптимальному расписанию (табл. 4.13–4.15);

2) определить суммарный простой второго устройства;

3) изобразить неоптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

4) записать условие задачи в виде матрицы:

$$\left\| t_{ij} \right\|,$$

где t_{ij} – продолжительность обслуживания требования вида i обслуживающим устройством вида j;

5) оптимизировать расписание, применив алгоритм Джонсона, т. е. в матрице $\left\| t_{ij} \right\|$ найти минимальный элемент. Если он стоит в первой строке, соответствующей первому обслуживающему устройству, то данное требование обслуживается первым, если во второй строке, то последним;

6) из рассмотрения исключить выбранное требование и работу продолжить согласно п. 5, пока не определите оптимальный порядок обслуживания требований.

Примечание 1. Если в одной строке имеется несколько одинаковых минимальных величин, то для обслуживания сначала выбирают требования с меньшим номером.

Примечание 2. Если и в первой, и во второй строках есть несколько одинаковых минимальных величин, то для обслуживания сначала выбирают требование с первой строки;

7) определить простои второго устройства, считая, что обслуживание требований вида i происходит по оптимальному расписанию;

8) определить суммарный простой второго устройства;

9) изобразить оптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

10) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований двумя устройствами.

Задание 4.8. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований тремя устройствами (деталей, обрабатываемых на трех станках), минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств.

Исходная информация.

Время обслуживания требований представлено в табл. 4.16–4.18.

Таблица 4.16. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Устройство 1	24	18 + K	16	23	14 + N	22	15	25
Устройство 2	10	14 + K	8	13	12 + N	11	9	16
Устройство 3	32	28 + K	22	24	16 + N	30	18	20

Таблица 4.17. **Исходная информация второй задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	22 + K	12	37	5	24	30	7	23	18
Устройство 2	9 + N	44	20	3	6	21	5	10	8
Устройство 3	15 + K	26	28	16	25	24	19	14	11

Т а б л и ц а 4.18. **Исходная информация третьей задачи**

Устройства	Требования								
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Устройство 1	9	14	7	5 + N	6	15	9	8	16
Устройство 2	5	12	4	3 + K	5	10	8	7	6
Устройство 3	6	17	13	10 + N	8	11	9	12	8

На основе приведенной информации задачи 4.5 необходимо:

1) определить простои второго и третьего устройств, считая, что обслуживание требований вида i происходит по неоптимальному расписанию (табл. 4.13–4.15);

2) определить суммарный простой второго и третьего устройств;

3) изобразить неоптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

4) проверить выполнение условия:

$$\min t_{i1} \geq \max t_{i2} \text{ или } \min t_{i3} \geq \max t_{i2};$$

5) найти суммы:

$$t_{i1} + t_{i2} \text{ и } t_{i2} + t_{i3};$$

6) записать условие задачи в виде матрицы $\left\| t_{ij} \right\|$;

7) осуществить оптимальное упорядочение требований в соответствии с алгоритмом Джонсона (согласно п. 5 и 6, задачи 4.7), где в качестве времени обслуживания требований принимаются соответствующие суммы;

8) определить простои второго и третьего устройств, считая, что обслуживание требований вида i происходит по оптимальному расписанию;

9) определить суммарный простой второго и третьего устройств;

10) изобразить оптимальное расписание обслуживания требований в виде графика Ганта;

11) определить эффект от оптимизации расписания обслуживания требований.

Задания для самостоятельной работы

Задание 4.9. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований двумя устройствами, минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств.

Исходная информация.

Время обслуживания требований представлено в табл. 4.19.

Таблица 4.19. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Устройство 1	30	60	22 + K	50	30	40	55 + N	45
Устройство 2	35	80	16 + K	40	20	35	25 + N	60

Задание 4.10. Требуется составить оптимальное расписание обслуживания требований тремя устройствами, минимизирующее общее время завершения обслуживания всех требований и простои обслуживающих устройств.

Исходная информация.

Время обслуживания требований представлено в табл. 4.20.

Таблица 4.20. **Исходная информация первой задачи**

Устройства	Требования							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Устройство 1	25	15 + K	36	43	24 + N	42	25	45
Устройство 2	15	24 + K	18	33	22 + N	31	19	16
Устройство 3	35	38 + K	22	24	26 + N	30	38	30

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «расписание».
2. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарного штрафа, связанного с ожиданием всех требований в очереди.
3. Перечислите правила решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарной величины средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.
4. Дайте определение понятия «директивный срок обслуживания требования».
5. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации максимального штрафа за задержку в обслуживании требования.

6. Каким способом можно геометрически изобразить оптимальное расписание обслуживания требований?

7. Сформулируйте общую задачу Джонсона.

8. Как определяются простои второго обслуживающего устройства?

9. Как изображается порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами с помощью графика Ганта?

10. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения для системы с двумя обслуживающими устройствами.

11. Как определить простои третьего обслуживающего устройства?

12. Приведите алгоритм обоснования оптимального расписания для системы с тремя обслуживающими устройствами.

13. Каким образом построить график Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами?

5. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания представляет собой научное направление, изучающее системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение определенных услуг, и происходит удовлетворение этих запросов (прил. Н).

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью определения наилучших вариантов управления данными системами.

Эти системы получили название *систем массового обслуживания*, а процессы, возникающие при этом, *называются процессами обслуживания*.

Элементами системы массового обслуживания являются входящий поток заявок, очередь, поток необслуженных (покинувших очередь) заявок, каналы обслуживания, выходящий поток обслуженных заявок.

Обслуживающие устройства системы массового обслуживания (пункты, станции, приборы, устройства, кассовые аппараты, продавцы, телефонные линии связи и т. д.) называются *каналами обслуживания*.

Заявка (*требование*) – это запрос на выполнение каких-либо услуг или удовлетворение определенной потребности.

5.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Задание 5.1. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию торговой организации поступает простейший поток заказов покупателей с интенсивностью $\lambda = 2,5 + 0,1\text{K}$ звонков-заказов в минуту. Длительность оформления заказа в среднем равна $\overline{t}_{\text{об}} = 0,9 - 0,1\text{K}$ мин. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток оформления заказов являются простейшими.

Задание 5.2. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0,8 + 0,2\text{K}$ звонка в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 1,5 + 0,1\text{N}$ мин. Вызов-звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Используя приведенную информацию заданий 5.1 и 5.2, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}};$$

2) вычислить q – относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

3) найти A – абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q;$$

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа:

$$p_{\text{отк}} = 1 - q;$$

5) вычислить $A_{\text{ном}}$ – номинальную пропускную способность системы:

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}};$$

6) найти $\overline{t}_{\text{пр}}$ – среднее время простоя канала:

$$\overline{t}_{\text{пр}} = \frac{1}{\lambda};$$

7) определить p_0 – вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = \frac{\overline{t}_{\text{пр}}}{\overline{t}_{\text{об}} + \overline{t}_{\text{пр}}};$$

8) вычислить p_1 – вероятность того, что канал занят:

а) $p_1 = 1 - p_0$;

б) $p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$;

9) проанализировать работу телефонной линии торговой организации, филиала банка (сравнить фактическую пропускную способность системы массового обслуживания с номинальной пропускной способностью; сравнить вероятности того, что телефонная линия занята и свободна; сравнить среднее время обслуживания и среднее время простоя канала).

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.3. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию фирменного магазина АПК производительностью 0,6 вызова в минуту ($\mu = 0{,}6$) и простейшим потоком обслуживания поступает простейший поток заказов покупателей с интенсивностью 0,7 вызова в минуту ($\lambda = 0{,}7$). Определить важнейшие характеристики рассматриваемой системы.

Задание 5.4. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Одна из консультационных организаций предлагает частным предпринимателям свои услуги по правильному ведению экспортно-импортных операций. В организации постоянно работают 4 консультанта. При этом соблюдается следующее условие: если предприниматель заходит в консультационный отдел, когда все работники заняты, то он сразу уходит в конкурирующую организацию, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в консультационный центр за один час, составляет 6 чел. Среднее время, затрачиваемое консультантом на обслуживание одного предпринимателя, составляет 20 мин.

5.2. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием

Задание 5.5. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В фирменном магазине перерабатывающего предприятия имеется один кассовый аппарат. Магазин посещают покупатели, поток которых имеет интенсивность $\lambda = 0,5 + 0,2\text{K}$ чел. в мин. Среднее время обслуживания одного покупателя равно $\overline{t}_{\text{об}}$ = 5 – 0,1N мин. Наибольшая очередь покупателей к кассе – 6 чел. (m = 6). Если в очереди стоят шесть чел., то очередной покупатель в очередь на обслуживание не становится, а идет за покупками в магазин самообслуживания.

Задание 5.6. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,95 - 0,1\text{K}$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно $\overline{t}_{\text{об}}$ = 1,2 + 0,1N час. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем $(m = 3)$. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Используя приведенную информацию задач 5.5 и 5.6, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}};$$

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку (трафик) на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) вычислить p_0, p_k – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \text{если } \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \text{если } \rho = 1; \end{cases}$$

б) $p_k = p^k \cdot p_0; k = 1, ..., m+1,$

где k – состояние системы;

m – максимальное число мест в очереди;

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании требования:

$$p_{\text{отк}} = \rho^{m+1} \cdot p_0;$$

5) рассчитать q – относительную пропускную способность системы обслуживания:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

6) вычислить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda \cdot q;$$

7) определить $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, \text{ если } \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, \text{ если } \rho = 1; \end{cases}$$

8) рассчитать $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{\lambda(1 - p_{m+1})};$$

9) вычислить $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \overline{T}_{\text{сис}} - \frac{1}{\mu};$$

10) определить $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{\text{оч}};$$

11) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу кассового аппарата фирменного магазина, поста диагностики автомобилей.

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.7. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания, определив:

1) вероятность того, что прибывший автомобиль сразу же попадет в бокс для диагностики;

2) вероятность того, что все места на стоянке автомобилей заняты;

3) среднее время ожидания клиентов до начала обслуживания и среднее время пребывания автовладельца в системе;

4) среднее число автомобилей, находящихся в обслуживающей системе, и длину очереди;

5) среднее число свободных мест на стоянке автомобилей.

Исходная информация.

Пункт технического осмотра сервисной организации имеет один бокс для диагностики импортных автомобилей. Водители прибывают в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 4 машины в час и могут ожидать обслуживания на стоянке рядом с центром техосмотра. Пусть пункт технического осмотра имеет четыре специально оборудованных места для стоянки автомобилей (m = 4). Если все места на стоянке заняты, вновь прибывающие автомобили вынуждены искать другую организацию, занимающуюся диагностикой импортных машин. Время диагностики автомобиля является экспоненциально распределенной случайной величиной и составляет в среднем 10 мин.

Задание 5.8. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Агросервисная организация занимается ремонтом и восстановлением электрических генераторов, которые затем используются в сельскохозяйственных предприятиях. Конечная сборка каждого экземпляра проходит в соответствии с распределением Пуассона (в среднем 9 генераторов в час). После этого электрические генераторы с помощью ленточного конвейера транспортируются в отдел технического контроля для испытаний. На конвейере могут находиться максимум 6 генераторов. Электронный датчик автоматически останавливает конвейер, как только он заполнится. Рабочие сборочного цеха прекращают свою работу до появления свободного места на конвейере. Время проверки электрических генераторов имеет экспоненциальное распределение со средним значением 12 мин.

Необходимо определить вероятность того, что сборочный цех прекратит сборку электрогенераторов в условиях рассматриваемой системе массового обслуживания.

5.3. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничений

Задание 5.9. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В аудиторскую организацию поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью $\lambda = 1{,}4 + 0{,}1N$ заявки в день. Аудиторские проверки (обслуживание заявок) выполняет один независимый бухгалтер. Время обслуживания заявки в среднем равно $\overline{t}_{об}$ = 2,5 + 0,1K дн. Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована.

Задание 5.10. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,9 + 0,05\mathrm{N}$ (автомобиля в час). Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно $\overline{t}_{\text{об}}$ = 1,15 + 0,1K час. Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Используя приведенную информацию задач 5.9 и 5.10, необходимо:

1) рассчитать μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}};$$

2) определить ρ – относительную нагрузку (трафик) на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) вычислить p_0, p_n – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - \rho;$$

$$p_n = (1 - p) \cdot \rho^n;\ n = 1, ..., m + 1;$$

4) найти $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \frac{\rho}{1 - \rho};$$

5) рассчитать $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

а) $\overline{T}_{\text{сис}} = \dfrac{\overline{N}_{\text{сис}}}{\lambda}$;

б) $\overline{T}_{\text{сис}} = \dfrac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)}$;

6) найти $\overline{N}_{\text{оч}}$ – число требований в очереди на обслуживание:

а) $\overline{N}_{\text{оч}} = \overline{N}_{\text{сис}} - \dfrac{\lambda}{\mu}$;

б) $\overline{N}_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^2}{(1 - \rho)}$;

7) определить $\overline{T}_{оч}$ – среднюю продолжительность пребывания требования в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$а)\ \overline{T}_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$б)\ \overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda};$$

8) рассчитать A – абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q,$$

где q – относительная пропускная способность системы, q = 1, так как каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена;

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу аудиторской организации, пункта разгрузки сырья перерабатывающего предприятия.

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.11. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Молочный комбинат открыл несколько торговых точек для продажи продуктов собственного изготовления. Введенный в эксплуатацию фирменный магазин (в соседнем региональном центре) имеет один кассовый аппарат. Установлено, что в течение часа открывшуюся торговую точку посещают 24 чел. Значит, интенсивность входного потока покупателей равна λ = 0,4 + 0,02K чел. в мин., причем поток считается простейшим. Среднее время обслуживания покупателя подчинено экспоненциальному закону и составляет $\overline{t}_{об}$ = 0,5 мин.

Задание 5.12. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Коммерческая организация имеет ларек по сбыту импортных фруктов, где работает один продавец. В результате исследований установлено, что поток покупателей простейший и составляет 0,6 покупателя в мин. Длительность обслуживания подчиняется экспоненциальному закону и равна 2 мин.

Необходимо проанализировать работу ларька в установившемся режиме.

Задание 5.13. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Пункт технического осмотра сервисной организации имеет один бокс для диагностики импортных автомобилей. Водители прибывают в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 4 машины в час и могут ожидать обслуживания на стоянке рядом с центром техосмотра. Время диагностики автомобиля является экспоненциально распределенной случайной величиной и составляет в среднем 10 мин.

5.4. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Задание 5.14. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая организация планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этих целей выделено два телефонных аппарата. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составит: $\lambda = 2 + 0{,}1\text{K}$ заказа в мин. Длительность оформления заказа в среднем равна $\overline{t}_{\text{об}} = 0{,}8 + 0{,}1\text{K}$ мин. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефоны заняты, получает отказ в обслуживании. Поток заказов и поток их оформления являются простейшими.

Задание 5.15. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В компьютерный класс кафедры с выделенными для этих целей тремя ($n = 3$) персональными компьютерами поступают заказы от студентов на вычислительные работы. Поток задач, поступающих в компьютерный класс, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}8 + 0{,}05\text{K}$ задачи в час. Средняя продолжительность обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 1{,}7 + 0{,}1\text{N}$ час. Если работают все три персональных компьютера, то вновь поступающий заказ не принимается, и студент вынужден обратиться в компьютерный класс другой кафедры. Поток заявок на решение задач и потом обслуживания этих заявок являются простейшими.

Используя приведенную информацию заданий 5.14 и 5.15, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}};$$

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) найти p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы, используя формулы Эрланга:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}; k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0; k = 1, \ldots, n;$$

Иногда для упрощения расчетов составляют таблицу (например, табл. 5.1).

Таблица 5.1. **Расчеты для трехканальной системы массового обслуживания с отказами**

Значения случайной величины k (число занятых консультантов)	ρ^k	$k!$	$\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)$	p_k
1				
0				
1				
2				
3				
Итого...	–	–		1,001

Вычисления начинаются с заполнения первых четырех столбцов. Сумма элементов четвертого столбца дает знаменатель выражения для определения p_0. Далее находят элементы пятого столбца, умножая на величину p_0 соответствующие данные четвертого столбца. Коэффициенты пятого столбца суммируют для контроля вычислений. Их сумма должна быть равна единице (с допустимыми в пределах точности расчетов отклонениями).

4) определить $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_n;$$

5) вычислить q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

6) определить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q\ ;$$

7) найти $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \rho(1 - p_{\text{отк}}) = \rho q;$$

8) рассчитать $k_{\text{и}}$ – коэффициент использования каналов:

$$k_{\text{и}} = \frac{\overline{k}}{n};$$

9) определить $k_{\text{п}}$ – коэффициент простоя каналов:

$$k_{\text{п}} = 1 - k_{\text{и}};$$

10) найти $\overline{k_{\text{п}}}$ – среднее число простаивающих каналов:

$$\overline{k_{\text{п}}} = n - \overline{k};$$

11) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу системы массового обслуживания;

12) определить оптимальное число телефонных аппаратов, используемых для приема заказов клиентов, и оптимальное количество персональных компьютеров в классе, используемых для решения задач, в целях сокращения числа необслуженных заявок, поступающих в систему, в 10 раз. Для этого используем формулу $p_{\text{отк}}$ – определения вероятности отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Расчеты заносим в табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2. **Некоторые характеристики системы**

n – количество каналов обслуживания	1	2	…	n
p_0 – вероятность свободного состояния системы				
$p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки				

Практический интерес представляют те задачи, с помощью которых определяются *оптимальные показатели создаваемых систем массового обслуживания* (прил. I).

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.16. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания, т. е. считая все потоки простейшими, необходимо определить основные важнейшие характеристики данной системы массового обслуживания:

1) интенсивность нагрузки системы;
2) вероятность отсутствия требований в системе;
3) вероятность отказа;
4) относительную пропускную способность;
5) абсолютную пропускную способность системы;
6) среднее число занятых каналов;
7) коэффициент использования каналов;
8) коэффициент простоя каналов;
9) среднее число простаивающих каналов.

Исходная информация.

Информационно-справочное бюро оптовой региональной базы имеет трех диспетчеров, отвечающих на звонки о наличии товаров в торговых учреждениях. Телефонные аппараты взаимосвязаны, т. е. если звонок поступает, когда все диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Если же в момент поступления заявки хотя бы один диспетчер свободен, то он переключается на свободный канал, т. е. справка выдается. В среднем за одну минуту в информационно-справочное бюро поступает 4 запроса, время обслуживания каждого требования в среднем составляет 1,5 мин.

Необходимо найти решение с учетом дополнительного условия, что данная система должна удовлетворять не менее 90 % заявок, т. е. $q \geq 0{,}9$, а $p_{\text{отк}} < 0{,}1$.

Примечание. Необходимо рассчитать требуемое количество диспетчеров, рассматривая ограничение:

$$p_{\text{отк}} = \frac{6^n}{n!} \cdot \left(1 + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \ldots + \frac{6^n}{n!}\right)^{-1} < 0{,}1.$$

Задание 5.17. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Специалисты АПК, проходящие стажировку в учебном центре, должны писать дипломную работу с обоснованием инвестиционного проекта на персональном компьютере. В компьютерном классе центра консультирования для выполнения заказов на вычислительные расчеты выделено 3 персональных компьютера. В среднем за каждый час поступает 5 заявок. Среднее время обслуживания каждого работника АПК составляет 30 мин. Если требование на расчеты поступает в момент, когда все 3 оператора компьютерного класса центра консультирования заняты, то слушатель курсов повышения квалификации получает отказ и вынужден обратиться в другой компьютерный класс.

Задание 5.18. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Специализированный магазин овощеводческого тепличного комбината занимается продажей, как собственной продукции, так и закупленной по договорам в соседних странах. С целью быстрой реализации скоропортящихся продуктов предприятие принимает заказы покупателей по телефону, для чего организовало мини-АТС с 6 телефонными аппаратами. Порядок обслуживания – следующий: если заказ поступает, когда все линии заняты, то покупатель получает отказ. При наличии свободной линии происходит оформление заказа. Поток требований, поступающих на станцию, является простейшим со средним числом 3 заказа в мин. Длительность оформления заказа является случайной величиной, при этом средняя продолжительность одного разговора равна 1,2 мин.

Задание 5.19. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Предприятие, занимающееся техобслуживанием тракторов, оборудовало в одном из своих филиалов пункт их технической профилактики. На данном участке первоначально трудилось трое работников, и статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. При этом в среднем в течение смены каждый из механиков успевал провести определенную техническую работу для 10 тракторов. Так как общее число тракторов, находящихся в эксплуатации, велико, то они независимо друг от друга в различное время требуют осмотра и профилактического ремонта. Установлено, что в среднем в течение рабочего дня в пункт обращается 30 чел., причем застав служащих занятыми, трактора уезжают в другую организацию.

Планово-экономическим отделом рассматривается вопрос о целесообразности дополнительного привлечения механиков с установкой соответствующего оборудования в пункт технического осмотра на следующий месяц (25 рабочих дней). Известно, что стоимость простоя обслуживающего канала (т. е. зарплата персоналу, аренда оборудования и т. д.) составляет в день 40 у. д. е. В то же время каждый необслуженный трактор приносит потери в количестве 60 у. д. е.

Дополнительно необходимо определить оптимальное число работников в предстоящий месяц для рассматриваемой системы массового обслуживания, рассчитав функцию потерь ($G_{\text{П}}$) за определенный интервал времени (T) по формуле:

$$G_{\text{п}} = (g_{\text{пк}} \cdot \overline{k}_{\text{п}} + g_{\text{у}} \cdot p_{\text{отк}} \cdot \lambda) \cdot T,$$

где $g_{\text{ПК}}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала;

$g_{\text{у}}$ – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования;

$\overline{k}_{\text{п}}$ – среднее число простаивающих каналов;

$p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа;

λ – интенсивность входящего потока.

5.5. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием

Задание 5.20. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В магазине самообслуживания установлены n = 3 кассовых аппарата. Поток покупателей имеет интенсивность λ = 0,8 + 0,1K чел. в мин. Среднее время обслуживания одного покупателя равно $\overline{t}_{\text{об}}$ = 3 – 0,1K мин. Наибольшая очередь покупателей к кассе – m = 8 чел. Если в очереди стоят восемь человек, то очередной покупатель в очередь на обслуживание не становится, а идет за покупками в соседний коммерческий магазин.

Задание 5.21. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая база по заготовке овощей и картофеля оборудована n = 2 разгрузочно-сортировочными площадками. Прибывающие на разгрузку автомобили могут ожидать своей очереди на площадке, вмещающей не более m = 6 автомобилей. Поток автомобилей имеет интенсивность прибытия λ = 4 + 0,1K автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно $\overline{t}_{об}$ = 0,5 + 0,1K час. Если прибывший с грузом автомобиль застает все места для ожидания занятыми, то он отправляется на другую торговую базу.

Используя приведенную информацию заданий 5.20 и 5.21, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{об}};$$

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) найти p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; k = 1, ..., n;$$

4) определить $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0;$$

5) вычислить q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{отк};$$

6) определить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q;$$

7) найти $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot q;$$

8) рассчитать $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{оч} = p_0 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

9) вычислить $\bar{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{N}_{сис} = \bar{N}_{оч} + \bar{k} \, ;$$

10) найти $\bar{T}_{оч}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{оч}}{A} \, ;$$

11) определить $\bar{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{T}_{сис} = \bar{T}_{оч} + \bar{t}_{об} \, ;$$

12) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу систем.

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.22. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В информационном центре академии работают n = 2 фотографа, каждый из которых делает фотографию сотрудника академии в среднем за 2,5 мин – $\bar{t}_{об}$ = 2,5 + К. По условиям безопасности в помещении информационного центра академии могут находиться одновременно не более m = 5 человек, включая обслуживаемых сотрудников академии. В среднем сотрудники академии приходят каждые λ = 2 + 0,1К мин., и если помещение заполнено, то сотрудник академии не встает в очередь, а уходит. Найти основные характеристики работы информационного центра академии.

Задание 5.23. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Междугородный переговорный центр вуза имеет n = 2 телефонных аппарата. В среднем за день поступает λ = 120 + 0,2К заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров составляет $\overline{t}_{об}$ = 5 + К мин. Длина очереди не должна превышать m = 6 абонентов. Потоки заявок и обслуживаний простейшие.

Необходимо определить характеристики обслуживания переговорного центра:

1) в стационарном режиме отказа,
2) вероятность обслуживания,
3) среднее число занятых каналов,
4) среднее число заявок в очереди,
5) среднее число заявок в системе,
6) абсолютную пропускную способность,
7) относительную пропускную способность,
8) среднее время заявки в очереди,
9) среднее время заявки в системе,
10) среднее время заявки под обслуживанием.

5.6. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения

Задание 5.24. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Ремонтная мастерская сельскохозяйственной организации с тремя рабочими каналами (n = 3) выполняет ремонт сельхозмашин. Поток неисправных сельскохозяйственных машин, прибывающих в мастерскую, пуассоновский и имеет интенсивность λ = 3 – 0,02N сельскохозяйственной машины в сутки. Среднее время ремонта одной сельскохозяйственной машины распределено по показательному закону и равно $\overline{t}_{об} = 1{,}5 - 0{,}1\text{K}$ в сутки. Так как в сельскохозяйственной организации имеется одна ремонтная мастерская, то очередь растет неограниченно.

Задание 5.25. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На элеватор поступают машины с зерном из сельскохозяйственных предприятий района. Элеватор оборудован двумя разгрузочными площадками (n = 2). Поток поступающих автомобилей имеет интенсивность λ = 3 + 0,1N автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно $\bar{t}_{об}$ = 0,8 – 0,1K часа. Так как в районе имеется один элеватор, то очередь растет неограниченно.

Используя приведенную информацию заданий 5.24 и 5.25, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}};$$

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; k = 1, ..., n;$$

4) при $m \to \infty, p_{отк} = 0; q = 1; A = \lambda; \bar{k} = \rho;$

5) рассчитать $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание (длина очереди):

$$\bar{N}_{оч} = \left(\frac{n\rho}{(n-\rho)^2}\right) p_n = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

6) вычислить $\bar{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \rho\,;$$

7) найти $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

8) определить $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}}\,;$$

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу ремонтной мастерской сельскохозяйственной организации, элеватора.

Пример решения аналогичных задач теории массового обслуживания приведен в прил. J и K.

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.26. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания, т. е. определить основные важнейшие характеристики данной системы.

Исходная информация.

В цеху по ремонту аккумуляторов имеется 5 мастеров (n = 5). В среднем в течение рабочего дня поступает в ремонт λ = 10 + 0,1N аккумуляторов. Так как общее число данных приборов очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя, то можно считать, что поток заявок на ремонт аккумуляторов является случайным (пуассоновским). Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности повреждения, квалификации мастера и других причин. Анализ статистической информации показывает, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону, а среднее время, затрачиваемое на ремонт одного аккумулятора в течение семичасового рабочего дня, составляет $\overline{t}_{\text{об}} = 2{,}8$ часа (или 0,4 дня, так как за единицу времени следует принять 1 день).

Задание 5.27. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На складе агромашсервиса работают 4 кладовщика, которые отпускают запасные части и детали для сельскохозяйственных товаропроизводителей. В среднем в течение одного часа поступает 12 заявок (поток покупателей имеет пуассоновское распределение). Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним значением 1,5 часа на одно требование.

Задание 5.28. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Райагросервисная организация имеет участок контроля, который состоит из 5 испытательных стендов. Отремонтированные изделия поступают на контроль с интенсивностью 600 шт. в час. Среднее время, затрачиваемое на контроль одного изделия, равно 18 с. Так как процесс производства в райагросервисной организации непрерывный, то при малом числе стендов на контроле может скопиться неограниченное число изделий. Поэтому данную систему массового обслуживания можно отнести к числу систем с ожиданием (с неограниченным входящим потоком требований), т. е. длина очереди не ограничена. При этом необходимо считать, что входящий поток требований является простейшим, а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону.

5.7. Замкнутая система массового обслуживания

Задание 5.29. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На кафедре академии для обслуживания двенадцати персональных компьютеров выделено два инженера с одинаковой производительностью труда. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0,3 + 0,05N$. Время обслуживания компьютера подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного компьютера одним инженером составляет: $\overline{t}_{об} = 1,20 - 0,02\text{N}$.

Рассматриваются два варианта организации обслуживания персональных компьютеров:

а) создать один компьютерный класс, тогда при отказе компьютера его будет обслуживать один из свободных инженеров ($n = 2$; $N = 12$);

б) создать два компьютерных класса по 6 компьютеров в каждом (n = 1; N = 6).

Задание 5.30. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Для обслуживания парка десяти автомобилей в сельскохозяйственной организации приняты на работу два механика, имеющих одинаковую производительность труда. Поток отказов (неисправностей) одного автомобиля проявляются с интенсивностью λ = 0,2 + 0,02N. Среднее время обслуживания одного автомобиля одним механиком составляет: $\overline{t}_{об} = 2 + 0{,}02\text{N}$ часа.

Возможны следующие варианты организации обслуживания автомобилей:

а) оба механика обслуживают все десять автомобилей, так что при отказе автомобиля его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае n = 2; N = 10;

б) каждый из двух механиков обслуживает пять закрепленных за ним автомобилей. В этом случае n = 1; N = 6.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{об}};$$

2) рассчитать ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) найти p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для двух вариантов ее организации:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k p_0}{k!(N-k)!}, 1 \le k < n, \\ \dfrac{N!\rho^k p_0}{n^{k-n} n!(N-k)!}, n \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

Так как $\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$, то найти p_0;

4) определить $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание (для двух вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \sum_{k=n}^{N} (k-n) p_k;$$

5) найти $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди) для двух вариантов организации системы:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} k p_k;$$

6) рассчитать $\overline{N}_{\text{пр}}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы (для двух вариантов):

$$\overline{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k;$$

7) вычислить a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди (для двух вариантов):

$$a_1 = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{N};$$

8) найти a_2 – коэффициент использования компьютеров (для двух вариантов):

$$a_2 = 1 - \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{N};$$

9) определить a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров (для двух вариантов):

$$a_3 = \frac{\overline{N}_{\text{пр}}}{N};$$

10) рассчитать $\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера (для двух вариантов):

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu};$$

11) расчеты занести в табл. 5.3, проанализировать ее и найти оптимальное решение задачи.

Т а б л и ц а 5.3. **Некоторые вероятностные характеристики системы**

Вероятностные характеристики	Варианты организации системы	
	1	2
a_1 – коэффициент простоя компьютера в очереди		
a_2 – коэффициент использования компьютеров		
a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров		
$\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера		

Практический интерес представляют те задачи, с помощью которых определяются *оптимальные показатели создаваемых систем массового обслуживания* (прил. L).

Задания для самостоятельной работы

Задание 5.31. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания, т. е. определить ее основные важнейшие характеристики.

Исходная информация.

Завод сельскохозяйственного машиностроения закупил за рубежом в один из своих цехов восемь импортных автоматических станков, которые обслуживают два оператора. После того как каждый станок завершает выполнение пакета программ, оператор должен его перенастроить на выполнение нового пакета. Поток поступающих требований на обслуживание станков пуассоновский и составляет 2 автомата в час. Время настройки описывается экспоненциальным распределением, занимая в среднем 12 + 0,2K минут.

Необходимо рассмотреть два варианта организации обслуживания импортных автоматических станков:

а) все импортные автоматические станки при отказе или переналадки одного из них будет обслуживать один из свободных оператора (n = 2 ; N = 8);

б) за каждым оператором закрепить по четыре импортных автоматических станка, тогда n = 1; N = 4.

Задание 5.32. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания, т. е. определить ее основные важнейшие характеристики.

Исходная информация.

В академии для обслуживания персональных компьютеров в количестве 180 шт. и сопутствующих им устройств в отдел технического обеспечения приняты на работу три инженера-системщика с одинаковой производительностью труда. Поток отказов (неисправностей) одного персонального компьютера проявляется с интенсивностью $\lambda = 0{,}02 + 0{,}01N$. Среднее время обслуживания одного персонального компьютера одним инженером в среднем составляет $\overline{t}_{об} = 4 + 0{,}02N$ часа.

Необходимо выбрать наилучший вариант создания бригады по обслуживанию персональных компьютеров, а также определить, нужно ли, и если да, то сколько дополнительно взять на работу инженеров-системщиков.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вопросы можно решить с помощью теории массового обслуживания?
2. Дайте определение понятия «система массового обслуживания».
3. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с отказами.
4. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с ожиданием.
5. Что такое однофазная система массового обслуживания?
6. Что такое многофазная система массового обслуживания?
7. Что такое замкнутая система массового обслуживания?
8. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с отказами.
9. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием.
10. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди.
11. Назовите критерии оптимальности одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания.
12. Перечислите характеристики замкнутой системы массового обслуживания.

6. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты на функционирование системы были бы минимальными (прил. М). Под *организацией поставок* понимается определение объемов поставок и периодичность заказов.

Основными причинами создания производственных запасов служат необходимость обеспечения бесперебойного снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика к потребителю партиями, а также несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Под *запасами* понимают все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления.

Суммарные затраты можно проиллюстрировать графически: по оси абсцисс ($0x$) откладываем уровень запаса, по оси ординат (y) – суммарные затраты (рис. 6.1).

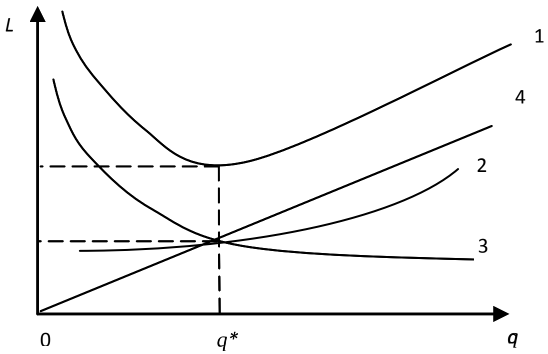


Рис. 6.1. Зависимость суммарных затрат от размера партии поставок:
1 – суммарные затраты; 2 – затраты на приобретение; 3 – затраты на оформление;
4 – затраты на хранение; q^* – оптимальный размер партии заказа

Существует четыре основных вида затрат, которые могут оказать влияние на решение задачи по управлению запасами, т. е. суммарные затраты системы управления запасами состоят из:

1) затрат на приобретение запасов;
2) затрат на организацию заказа;
3) затрат на хранение запасов;
4) потерь от дефицита запаса.

Затраты на приобретение запасов характеризуются стоимостью единицы продукции, которая может быть постоянной или переменной. При этом цена единицы продукции может зависеть от величины партии заказа, что выражается в виде оптовых скидок. Таким образом, затраты, которые не зависят от величины и периодичности заказов, при решении задач не учитываются.

К *затратам на организацию заказа* относят постоянные расходы, связанные с размещением заказов: расходы на разъезды и командировки, почтово-телеграфные расходы, транспортные затраты. При размещении более мелких заказов и, следовательно, более частых эти затраты возрастают по сравнению с размещением более крупных, но менее частых заказов.

Затраты на хранение запаса включают затраты на амортизацию и эксплуатацию складов, на содержание и грузопереработку запаса на складах. Они возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием необходимых ресурсов или продукции, и возможные потери из-за утраты доверия покупателей. Эти потери рассматриваются как уменьшение прибыли за счет простоя мощности и обслуживающего персонала предприятия, переналадки производственного процесса, замены дефицитных материалов другими более дорогими, штрафа за нарушение сроков поставки продукции.

6.1. Модель оптимального размера партии поставки (запуска продукции в производство)

Модель оптимального размера партии поставки (запуска продукции в производство) представлена на рис. 6.2.

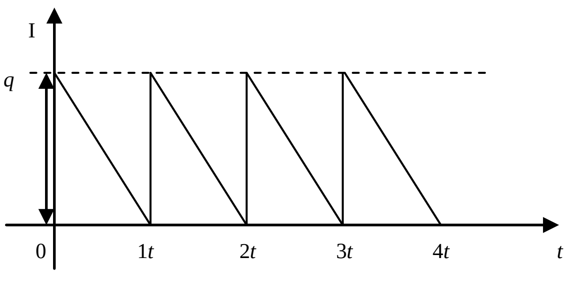


Рис. 6.2. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона

Задание 6.1. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны K = 300 + 2N у. д. е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида v = 1500 + 5N т в год, стоимость 1 т α = 400 + 5K у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют ρ = 1 % от стоимости хранимой продукции.

Задание 6.2. Требуется определить размер партии, при котором затраты на организацию поставок и хранение будут наименьшими.

Исходная информация.

Строительная организация возводит ряд объектов в агропромышленной сфере. Исходя из объема предстоящих работ, потребность в цементе составит v = 4000 – 2N ц в год. Затраты на оформление одной партии цемента в виде административных расходов равны K = 60 + 2N у. д. е. независимо от заказанного количества. Ежегодные затраты на хранение 1 ц цемента (s) необходимо определить, следующую используя информацию: цена покупки 1 ц цемента составляет α = 16 + 0,01K у. д. е., затраты на хранение единицы этого товара, по оценкам экономистов, равны ρ = 25 % в год.

Используя приведенную информацию заданий 6.1 и 6.2, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени:

$$s = \alpha p\ ;$$

2) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии запуска (поставки):

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}\ ;$$

где K – затраты на организацию поставки;

v – интенсивность спроса;

3) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}}\ ;$$

4) рассчитать L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} \, .$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.3. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами.

Исходная информация.

На овощесушильном заводе на одной линии соки нескольких видов разливаются в банки. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют 600 + 0,5K у. д. е., потребность в соках – 1800 + 0,2N условных банок в неделю, стоимость хранения единицы товара в течение недели – 0,6 + 0,01K у. д. е.

Задание 6.4. Определить оптимальный размер заказываемой партии и расчетные характеристики работы системы в оптимальном режиме.

Исходная информация.

На железнодорожную станцию поставляют вагоны с торфобрикетом в количестве 2500 + 0,4N т. В течение суток потребители успевают забрать 600 + 0,2K т топлива. Накладные расходы по доставке партии груза равны 800 – 0,2K у. д. е. Издержки хранения 1 т торфобрикета за сутки составляют 0,3 + 0,01N у. д. е.

6.2. Модель оптимального размера партии поставки

Задание 6.5. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

Исходная информация.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц ($\tau_д$). Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют K = 300 + 2N у. д. е. Потребность в соках составляет v = 1,8 + 0,01N тыс. л в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня равна s = 0,1 + 0,01K у. д. е.

Задание 6.6. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

В начале каждой недели организация райагротехсервиса заказывает электроды для удовлетворения спроса на них со стороны сельскохозяйственных товаропроизводителей в количестве 500 + 2N упаковок. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 10 – 0,01K у. д. е. Затраты по хранению одной упаковки электродов обходятся организации райагротехсервиса в 0,20 + 0,01N у. д. е. в неделю.

Необходимо определить:

а) недельные затраты обслуживающей организации, связанные с существующей стратегией создания запаса;

б) экономичный объем заказа в предположении, что время от момента его размещения до реальной поставки равно нулю;

в) экономию средств, исходя из текущих недельных затрат райагротехсервисной организации и тех, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

Задание 6.7. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

Потребность моторемонтного завода в подшипниках определенного типа составляет в среднем 30 ящиков в месяц. Исходя из заранее подписанных договоренностей, товар доставляется на склад в количестве 40 ящиков. Затраты на поставку одной партии подшипников составляют 20 у. д. е. Среднемесячные издержки хранения одного ящика подшипников равны 0,5 у. д. е.

Требуется определить:

а) период поставки и общие среднемесячные издержки склада, связанные с работой данной системы управления запасами;

б) оптимальный размер заказываемой партии подшипников определенного типа, оптимальный период поставки и среднемесячные затраты склада на доставку и хранение подшипников в оптимальном режиме;

в) величину абсолютного увеличения общих издержек по сравнению с оптимальным режимом и коэффициент относительного увеличения затрат.

Используя приведенную информацию заданий 6.5–6.7, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в месяц;

2) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2, задание 6.1);

3) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3, задание 6.1);

4) рассчитать L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4, задание 6.1);

5) найти $q_д$ – размер партии поставки при действующей системе:

$$q_д = \tau_д \nu ;$$

6) определить $L_д$ – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L_д = \frac{K\nu}{q_д} + \frac{sq_д}{2} ;$$

7) проанализировать результаты решения задачи, сравнить оптимальные параметры системы с действующими (например, прил. N).

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.8. Требуется определить размер партии, при котором затраты на организацию поставок и хранение будут наименьшими.

Исходная информация.

Воспользуемся информацией задания 6.2. Необходимо размер партии, при котором затраты на организацию поставок и хранение будут наименьшими, сравнить с действующей системой заказа партии 120+10*K* ц цемента.

Задание 6.9. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

Торговый отдел райагросервисной организации планирует иметь потребность в подшипниках в количестве 8500 + 2K шт. Годовые затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 1,1 + 0,01N у. д. е. Издержки на транспортировку одной партии этого товара равны 18 – 0,02K у. д. е.

Необходимо:

а) определить оптимальные параметры данной системы управления запасами;

б) сравнить с действующей системой поставки партии подшипников в количестве 900 + 10N шт.

Задание 6.10. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

Частный предприниматель открыл пункт общественного питания на одном из оживленных участков международной автомагистрали. Для удовлетворения месячного спроса в количестве 980 + 2N кг он заказывает свинину у производителей сельскохозяйственной продукции. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 8 + 0,2K у. д. е. Стоимость замораживания и хранения одного килограмма свинины обходится предпринимателю в 1,2 + 0,01N у. д. е. в месяц. Фактически ему поставляют продукцию партиями по 160 + 5K кг свинины в каждой.

Требуется определить:

а) оптимальную стратегию управления запасами для предпринимателя в предположении, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно нулю;

б) затраты пункта общественного питания, связанные с существующей стратегией создания запаса;

в) разность между текущими месячными затратами предпринимателя и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

Задание 6.11. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

На склад областной базы агропромтехснаба поступают аккумуляторы для колесных тракторов, годовая потребность в которых составляет 1200 + 10K шт. Затраты на оформление, т. е. издержки завоза одной партии, этого товара равны 60–0,5N у. д. е. Ежегодные затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 80 – 0,4N у. д. е.

Рассматривая детерминированную модель управления однономенклатурными запасами, необходимо определить:

а) фиксированный размер заказываемой партии аккумуляторов, который минимизирует расходы по завозу и хранению запасных частей;

б) оптимальные параметры системы управления запасами;

в) каким образом изменятся суммарные издержки по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами, если отдел снабжения предложил установить размер одной партии поставки аккумуляторов в количестве 30 + 0,3K шт.

Задание 6.12. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

Станция по агрохимическому обслуживанию сельскохозяйственных организаций имеет годовую потребность в калийных удобрениях, равную 960 + 10K т. Годовые затраты по хранению 1 т данного вида удобрений составляют 45 + 0,3N у. д. е. Затраты на подготовительно-заключительные операции, связанные с каждой поставкой и не зависящие от величины поставляемой партии, равняются 8 – 0,02K у. д. е.

Необходимо:

1) определить оптимальные параметры системы управления запасами;

2) рассчитать коэффициент относительного увеличения затрат, если известна фактическая стратегия доставки партии удобрений в количестве 20 т (имеется 4 специализированные автомашины по перевозке груза грузоподъемностью 5 т каждая).

Задание 6.13. Требуется определить оптимальные параметры системы управления запасами и сравнить с параметрами действующей системы.

Исходная информация.

В рамках межобластного обмена молочными продуктами молочный комбинат одного из регионов поставляет молоко определенной жирности в тетрапакетах торговой организации другого региона. Потребность магазина составляет 800 + 100K пакетов молока долгосрочного хранения в квартал. Продукт доставляется на склад в контейнерных упаковках в количестве 100 шт. Затраты на заказ и оформление поставки одной партии молока составляют 5 + 0,5N у. д. е. Среднеквартальные издержки хранения одного пакета молока равны 0,5–0,01K у. д. е.

Требуется определить:

а) период поставки и общие среднеквартальные издержки склада на заказ и хранение молока;

б) экономичный размер заказываемой партии молока, период поставки и ее количество, а также среднеквартальные издержки склада на оформление и хранение молочного продукта в оптимальном режиме;

в) величину абсолютного увеличения фактических издержек по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами и коэффициент относительного увеличения издержек.

6.3. Модель оптимального размера поставки партии с определением точки заказа

Задание 6.14. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется v = 12 + 0,1N тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа K = 300 – K у. д. е., содержание одной заготовки s = 2 – 0,1N у. д. е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 30$ дней, или 0,082 года.

Задание 6.15. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Потребность станкосборочного цеха в заготовках определенного типа составляет 40 + K тыс.шт. в год. Дефицит заготовок не допускается. Издержки размещения заказа – 50 + 0,1N у. д. е., издержки содержания одной заготовки в год равны 5 – 0,02K у. д. е. Среднее время реализации заказа – 10 дней, или 0,027 года.

Необходимо определить:

а) оптимальную партию поставки;

б) периодичность возобновления поставок;

в) точку размещения заказа;

г) суммарные годовые затраты.

Используя приведенную информацию заданий 6.14 и 6.15, необходимо:

1) используя модель Уилсона, определить q^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2, задание 6.1);

2) вычислить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3, задание 6.1);

3) найти r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta \nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right] q^*,$$

где $\left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right]$ – целая часть числа $\frac{\Theta}{\tau^*}$;

4) рассчитать I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta \nu;$$

5) определить t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{\nu} - \Theta + k\tau^*, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где I – фактический начальный запас;

6) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4, задание 6.1);

7) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.16. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Потребность сборочного цеха завода по производству сельскохозяйственной техники в заготовках определенного типа составляет 30 + N тыс. шт. в год. Издержки размещения заказа равны 50 – 0,2K у. д. е., издержки содержания одной заготовки – 5 + 0,1N у. д. е. в год. Среднее время реализации заказа – 10 дней.

Необходимо определить:

а) оптимальную партию поставки;

б) периодичность возобновления поставок;

в) точку размещения заказа;

г) минимальный первоначальный запас;

д) моменты повторения заказов.

Задание 6.17. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Потребность сборочного цеха завода по производству сельскохозяйственной техники в деталях определенного типа составляет 160000 + 10K шт. в год, причем они расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,3 у. д. е. в сутки, а поставка партии – 9000 + 10N у. д. е. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима.

Необходимо определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок). Найти, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий 4000 деталей. Партии заказываются не все сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен 20 дней.

6.4. Модель оптимального размера партии поставки с учетом дискретности спроса

Модель оптимального размера партии поставки с учетом дискретности спроса (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности) представлена на рис. 6.3.

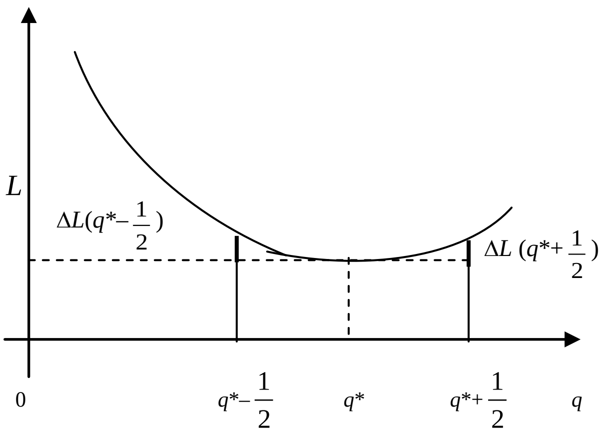


Рис. 6.3. Зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии поставок

Задание 6.18. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Исходная информация.

Завод по выпуску сельскохозяйственной техники поставляет сельскохозяйственным организациям района тракторы. Средняя потребность в них равна v = 4 + 0,1N трактора в месяц. Стоимость организации заказа K = 1000 – 10N у. д. е., издержки содержания одного трактора в месяц s = 200 – 10K у. д. е.

Задание 6.19. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Исходная информация.

Годовая потребность агрохолдинга в сеялках составляет v = 80 + N шт., затраты на хранение одной сеялки − s = 30 – 0,5K у. д. е. в год. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны K = 380 – 5N у. д. е.

Необходимо найти:

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) минимальные затраты, связанные с работой системы.

Используя приведенную информацию заданий 6.18 и 6.19, необходимо:

1) найти $q^*(q_1^*, q_2^*)$ – оптимальный размер партии поставки (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности):

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}\right],$$

где – число в квадратных скобках – наибольшее целое число, не превосходящее q;

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*;$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \le q^* \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}};$$

2) определить $L^*(L_1^*, L_2^*)$ – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L_{(q)} = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq}{2};$$

3) рассчитать $\tau^*(\tau_1^*, \tau_2^*)$ – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu};$$

4) проанализировать результаты решения задачи (например, прил. О).

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.20. Требуется определить оптимальный объем запускаемой в производство партии конфет.

Исходная информация.

Кондитерская фабрика выпускает партиями различные виды тортов. При переходе от выпуска одного вида тортов к другому предприятие несет издержки из-за переналадок, которые составляют 60 + N у. д. е. Интенсивность потребления, т. е. средний объем продаваемых тортов, составляет 5 + K т в декаду. Издержки, связанные с хранением 1 т тортов за данный период, составляют 0,9 + 0,02K у. д. е.

Задание 6.21. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Один из цехов райагропромтехники для восстановления и ремонта валов отбора мощности занимается выпуском различных типов заготовок (партиями) на одном и том же оборудовании. При переходе от производства одного вида заготовок к другому цех несет затраты от переналадок оборудования, которые равны 50 + 0,5K у. д. е. Средняя потребность в заготовках каждого типа составляет 600 + N шт. в год, себестоимость изготовления единицы производимой продукции – 80 – 0,5K у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют 1 % от стоимости складируемой продукции.

Используя приведенную информацию, необходимо найти:

1) издержки содержания единицы продукции за год;

2) оптимальную партию выпуска заготовок;

3) периодичность запуска и среднегодовые издержки работы системы, связанной как с выпуском, так и с содержанием запасов и переналадками.

Примечание: среднегодовые издержки работы системы можно найти по формуле:

$$L^* = \alpha\cdot(v + p\cdot q^*),$$

где α – стоимость (себестоимость) единицы изделия;

v – интенсивность потребления;

p – коэффициент издержек хранения запасов;

q^* – оптимальный размер партии поставки.

Задание 6.22. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Специализированный завод поставляет организации агросервисного обслуживания станки. Средняя потребность в них – 5 + K единицы в квартал. Стоимость организации заказа равна 50 + 0,5N у. д. е., издержки содержания составляют 10 + 0,02K у. д. е. за станко-квартал.

Считая, что оптимальный размер партии станков должен быть целочисленным, необходимо:

а) определить оптимальную партию;

б) найти оптимальный интервал между поставками;

в) рассчитать наименьшие суммарные затраты работы системы.

6.5. Модель оптимального размера партии поставки с конечной интенсивностью поступления заказа (партии товара)

Модель оптимального размера партии поставки с конечной интенсивностью поступления заказа (партии товара) представлена на рис. 6.4.

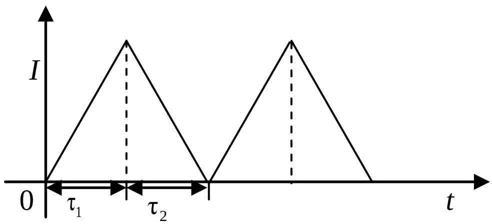


Рис. 6.4. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления партии товара

Задание 6.23. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Консервный завод выпускает партиями 6 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консервов составляет ν = 500 + K + N тыс. тубов в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов, равны K = 200 + 2N у. д. е. Стоимость хранения 1 тыс. тубов консервов на складе s = 30 + K у. д. е. в год. Производительность завода (интенсивность) λ = 2500 + (N + K) тыс. тубов в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 2$ месяца, или 0,164 года.

Задание 6.24. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Мясокомбинат выпускает партиями 8 различных видов колбасных изделий на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид колбасных изделий составляет ν = 1600 + K т в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида колбасных изделий, равны K = 150 + N у. д. е. Стоимость хранения 1 т колбасных изделий на складе s = 80 + 0,5K у. д. е. в год. Производительность мясокомбината (интенсивность) λ = 3500 + (N + K) т колбасных изделий в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Используя приведенную информацию заданий 6.23 и 6.24, необходимо:

1) найти q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать τ_1^* – время производства:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda};$$

3) вычислить τ_2^* – время чистого потребления:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}};$$

4) определить оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\nu}{\lambda}}};$$

5) найти r – точку заказа:

а) $r = \Theta\nu - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right] q^*$, если $\Theta - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$;

б) $r = \Theta(\nu - \lambda) + (\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1) \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\nu} - 1\right) q^*$, если

$\Theta - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$;

6) определить t_k – моменты размещения заказа при $t_0 = 0$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1, 2, \ldots;$$

7) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}};$$

8) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.25. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Открытое акционерное общество «Райагропромтехснаб» выполняет работы по регулированию и ремонту форсунок, расточке и шлифовке коленчатых валов, а также оказывает другие услуги для сельскохозяйственных товаропроизводителей. В ремонтной мастерской общества на некотором станке производятся детали в количестве 1000 + N + K единиц в месяц. Они используются для выпуска продукции на другом станке с производительностью 300 + K единиц в месяц. Оставшиеся детали образуют запас и поступают на специальный склад. Фиксированные издержки по организации производственного цикла, т. е. затраты на производство одной партии изделий, равны 400 + N у. д. е. По оценкам специалистов планово-учетного отдела стоимость выпуска одной детали равна 1,3 – 0,01N у. д. е., а издержки хранения составляют 10 % средней стоимости запасов в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Необходимо определить:

а) каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке;

б) как следует организовывать циклы для производства деталей;

в) если бы можно было снизить фиксированные затраты на производство одной партии деталей до 200 + N у. д. е., какой будет оптимальный размер партии и насколько снизятся издержки системы.

Задание 6.26. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Специализированный цех предприятия по сервисному обслуживанию машинно-тракторного парка организаций сельского хозяйства занимается производством различных видов запасных частей, выпуск которых налажен партиями на одном и том же оборудовании. Спрос (интенсивность потребления) на каждый их вид заранее известен и составляет 260 + N упаковок в месяц. Фиксированные издержки переналадки (связаны с определенной перестройкой оборудования при переходе от выпуска одного вида запасных частей к другому) равны 180 + K у. д. е. Содержание одной упаковки запасных частей на складе обходится агропромтехснабу в 30 + 0,5N у. д. е. в месяц. Мощность производства цеха составляет 800 + K упаковок в месяц. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Требуется определить оптимальный размер партии производства каждого вида запасных частей и среднемесячные издержки, связанные с переналадками и содержанием продукции исходя из того, что дефицит запаса на складе цеха не допускается.

6.6. Модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований представлена на рис. 6.5.

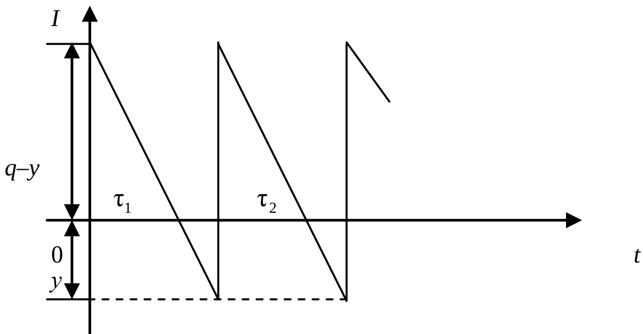


Рис. 6.5. Динамика изменения уровня запаса в модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Задание 6.27. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам сельскохозяйственная организация поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет v = 4000 + 2(K + N) т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукцией s = 50 + K у. д. е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа K = 600 – N у. д. е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют d = 100 + 2K у. д. е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Задание 6.28. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам мясоконсервный комбинат поставляет в торговую сеть консервы для детского питания. Спрос на продукцию составляет v = 500 + 2(K + N) тыс. тубов в год. Стоимость хранения консервов для детского питания с учетом потери, связанные с нереализованной продукцией s = 60 + K у. д. е. за 1 тыс. тубов в год. Издержки размещения заказа K = 860 – 5N у. д. е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии консервов для детского питания в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 тыс. тубов консервов для детского питания в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют d = 80 + K у. д. е. Время реализации заказа (от его получения до поставки консервов для детского питания в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Используя приведенную информацию заданий 6.27 и 6.28, необходимо:

1) вычислить q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

2) рассчитать y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

5) найти τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

6) рассчитать τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

7) определить r – точку заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^*.$$

П р и м е ч а н и е. Точка заказа может принимать отрицательное значение, это означает, что заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$;

8) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

9) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.29. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

База снабжения организации по материально-техническому обеспечению АПК занимается продажей различных товаров для сельскохозяйственных товаропроизводителей. Спрос на такую продукцию, как муфты сцепления, составляет 2200 + N + K единиц и равномерно распределяется в течение года. Закупка товара производится у непосредственного производителя (специализированного завода), а издержки по размещению заказа равны 50 + K у. д. е. Затраты, связанные с хранением данной запасной части, за год равны 6 + 0,02N у. д. е. Сельскохозяйственные организации, по мере необходимости, делают заявку на поставку муфт сцепления. Если на базе снабжения в момент подачи заявки нет данного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере поступления на склад обслуживающей организации. Между организацией по материально-техническому обеспечению АПК и сельскохозяйственными предприятиями заключен договор о том, что за доставку товаров позже необходимого срока уплачивается штраф. Его величина составляет 2 у. д. е. в год за одну муфту сцепления.

Необходимо определить:

а) величину оптимального размера заказа муфт сцепления у специализированного завода;

б) максимальную величину задолженного спроса;

в) максимальную величину наличного запаса;

г) периоды существования запаса и дефицита, а также продолжительность цикла;

д) среднегодовые издержки работы системы.

Задание 6.30. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Коммерческая организация, выступающая в качестве посредника, обязуется продавать райагросервисному предприятию, занимающемуся восстановлением двигателей, коленчатые валы. Согласно заключенному контракту, организация должна ежедневно обеспечивать агросервисное предприятие данными запасными частями в количестве 5 шт. В одном из пунктов контракта записано то, что за просроченный день в поставке коленчатого вала коммерческая организация выплачивает организации штраф в размере 1,5 + 0,02N у. д. е. Издержки размещения заказа (организационные затраты) обходятся организации в 300 – K у. д. е. Специалисты планово-аналитической службы рассчитали, что затраты по хранению одного коленчатого вала составляют 0,10 у. д. е. в день. Руководство коммерческой организации решает закупать коленчатые валы на свой склад партиями по 80 + N шт. в каждой.

Необходимо:

а) рассчитав оптимальный размер партии поставки деталей, внести руководству свои предложения;

б) определить оптимальную продолжительность цикла и соответствующий уровень запасов, который находится на складе в начале каждого периода;

в) найти суммарные издержки при оптимальной политике управления запасами.

6.7. Обобщенная модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Обобщенная модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований показана на рис. 6.6.

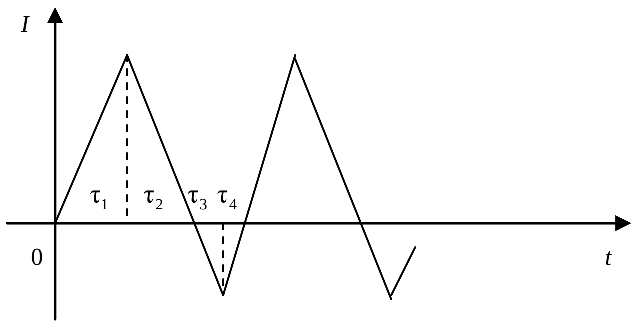


Рис. 6.6. Динамика изменения уровня запаса в обобщенной модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Задание 6.31. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Исходная информация.

Один из цехов перерабатывающего предприятия производит 8 видов полуфабрикатов колбасных изделий. Производительность λ = 50 + N т в сутки. Средний объем потребления каждого вида полуфабрикатов колбасных изделий термического цеха v = 4 + 0,1K т в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида полуфабрикатов к другому и очистке оборудования составляет K = 30 + 2N у. д. е. Стоимость хранения 1 т полуфабрикатов в холодильнике s = 0,06 + 0,01K в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита d = 0,15 + 0,01N у. д. е. в сутки.

Задание 6.32. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Исходная информация.

Фабрика мороженого производит 12 видов мороженого. Производительность составляет λ = 100 + N т в сутки. Средний объем завоза (потребления) каждого вида мороженого в фирменной торговле v = 7 + 0,1K т в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида мороженого к другому и очистке оборудования составляет K = 35 + N у. д. е. Стоимость хранения 1 т мороженого в холодильнике s = 0,2 + 0,02K в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита d = 0,2 + 0,02N у. д. е. в сутки.

Используя приведенную информацию заданий 6.31 и 6.32, необходимо:

1) вычислить q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{v}{\lambda}}};$$

2) рассчитать y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = v\tau_3^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{v}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = \nu\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}};$$

5) найти τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}};$$

6) найти τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

7) найти τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

8) определить τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* + \tau_4^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{d}}};$$

9) найти $\tau_{\text{пр}}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{\text{пр}}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda};$$

10) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

11) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.33. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Одно из предприятий производит для моторемонтного завода системы агроснаба форсунки. Так как завод восстанавливает двигатели для различных марок тракторов, то предприятие выпускает форсунки четырех типов партиями. Производительность линии для производства деталей составляет 2500 + 5N единиц за неделю. Средний объем потребления каждого вида форсунок равен 500 + K шт. за неделю. Стоимость переналадки оборудования при переходе от выпуска одного типа деталей к другому составляет 80 – 0,5K у. д. е., а издержки по хранению одной форсунки – 0,04 + 0,01N у. д. е. в неделю. Неудовлетворенные заявки по поставке форсунок берутся на учет, однако удельные издержки дефицита (снижение объемов продаж, определенная утрата доверия покупателя) равны 0,1 + 0,01N у. д. е. за форсунку в неделю.

Задание 6.34. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

Одно из предприятий производит для холдинга «Гомсельмаш» детали четырех типов партиями. Производительность линии для производства деталей составляет 3000 + 10N единиц за неделю. Средний объем потребления каждого вида деталей равен 800 + 5K шт. за неделю. Стоимость переналадки оборудования при переходе от выпуска одного типа деталей к другому составляет 120 – K у. д. е., а издержки по хранению одной детали – 0,02 + 0,01N у. д. е. в неделю. Неудовлетворенные заявки по поставке деталей берутся на учет, однако удельные издержки дефицита (снижение объемов продаж, определенная утрата доверия покупателя) равны 0,15 + 0,01N у. д. е. за деталь в неделю.

6.8. Многопродуктовая модель размера партии поставки при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов (раздельная оптимизация)

Задание 6.35. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площадь холодильника.

Исходная информация.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (N). Холодильник имеет площадь $f = 500 - 5\text{N}$ м^2. Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. **Характеристики запасов готовой продукции**

Ассортиментные группы продукции	v_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у. д. е.	f_i – расход площади холодильника, м^2/т
1	800 + 5N	6	5 + 0,2K	1
2	2000 – 5N	4	20	3
3	1200	3	10	2
4	1800	5	25	3
5	1700	2	15	2
6	1400	7	30	1

Задание 6.36. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площадь холодильника.

Исходная информация.

В холодильник фабрики мороженого поступает готовая продукция четырех ассортиментных групп (N). Холодильник имеет площадь f = 800 + 2N м^2. Характеристики запасов мороженого приведены в табл. 6.2.

Т а б л и ц а 6.2. **Характеристики запасов мороженого**

Ассортимент-ные группы продукции	v_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у. д. е.	f_i – расход площади холодиль-ника, м^2/т
1	1200 + 5N	3	8 + 0,2K	2
2	1800 – 5N	5	12	3
3	900	2	5	2
4	1400 – 5K	4	10	3

Используя приведенную информацию заданий 6.35 и 6.36, необходимо:

1) определить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

2) проверить, существует ли ограничение на складские площади (площадь холодильника) при максимальном уровне запасов:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \le f,$$

где h – нормировочный множитель, позволяющий учесть время поступления запасов товаров, $0 < h < 1$, чаще всего $0{,}5 \le h \le 1$.

Если h = 1, то запасы всех товаров поступают одновременно и занятая ими площадь максимальная, т. е. вводят ограничение по максимальному уровню запасов.

Если h = 0,5, то запасы поступают в разное время, т. е. вводят ограничение по среднему уровню запаса;

3) определить λ^*, используя следующую формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i\sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i+2\lambda^* hf_i}}=f,$$

где λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, насколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу;

4) найти q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$q_i^*=\sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i+2\lambda hf_i}};$$

5) вычислить $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$L(q^0)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2K_i s_i\nu_i}=\sum_{i=1}^{N} s_i q_i^0;$$

6) рассчитать $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$L(q^*)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2K_i(s_i+2\lambda f_i\nu_i)}=\sum_{i=1}^{N}(s_i+2\lambda^* f_i)q_i^*;$$

7) проанализировать результаты решения задачи, определить эффект от расширения складских площадей (площади холодильника):

$$L(q^*)-L(q^0).$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.37. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

На склад агросервисной организации поступают товары трех групп. Общая площадь склада равна 30 + 0,2N м^2. Данные задачи приведены в табл. 6.3.

Т а б л и ц а 6.3. **Параметры модели управления запасами**

Товары	v_i – интенсивность спроса, шт. в день	K_i – стоимость размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки хранения единицы товара в день, у. д. е.	f_i – необходимая площадь для единицы товара, м^2
1	2	10	0,3	1
2	4	5 + 0,1K	0,1	1
3	4	15 – 0,05N	0,2	1

Для решения задачи необходимо уменьшить λ с шагом 0,1.

Задание 6.38. Требуется определить оптимальные параметры работы системы управления запасами.

Исходная информация.

На склад фирменного магазина сельскохозяйственного предприятия поступают товары пяти групп. Общая площадь склада равна 130 + 0,5N м^2. Данные задачи приведены в табл. 6.4.

Т а б л и ц а 6.4. **Параметры модели управления запасами**

Товары	v_i – интенсивность спроса, ц в день	K_i – стоимость размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки хранения 1 ц товара в день, у. д. е.	f_i – необходимая площадь для 1 ц товара, м^2
1	12	6	0,36	0,15
2	14	5 + 0,1K	0,24	0,18
3	14	8 – 0,05N	0,26	0,16
4	16	7	0,32	0,20
5	10	4	0,25	0,14

Для решения задачи необходимо уменьшить λ с шагом 0,1.

6.9. Многопродуктовая модель размера партии поставки в случае нескольких ограничений

Задание 6.39. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На оптовую базу поступают товары N = 6 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере A = 2500 + 2(N + K) у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает f = 1000 + N + K м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере p = 0,1K % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в месяц, шт.	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	800 + 2N	18	22	1,0	1,4
2	1800	15	12	1,3 + 0,1K	1,2
3	1400	10 – N	18	2,0 – 0,1K	1,5
4	1200 + 2K	30	10 – N	1,2	1,0
5	2000	25 – K	20	1,7	0,9
6	1600	20	25 – K	1,5	1,6

Задание 6.40. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На склад фирменного магазина холдинга поступают товары N = 5 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере A = 1000 + 2(N + K) у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает f = 600 + 0,5(N + K) м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере p = 0,5K % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в месяц, шт.	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	1200 + 2N	12	20	0,9	0,4
2	900 + N	9	10	1,1 + 0,1K	0,2
3	1000 + K	10 – N	15	1,2 – 0,1K	0,5
4	800 + 2K	8	8 – N	0,8	0,6
5	1500	15 – K	18	1,3	0,7

Используя приведенную информацию заданий 6.39 и 6.40, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единице времени:

$$s = \alpha \cdot p;$$

2) определить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – h = 0,5):

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \le f;$$

4) проверить, существует ли ограничение по оборотным средствам (при среднем уровне запаса – h = 0,5):

$$h\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i^0 \le A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить λ^*, введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f \quad \text{при} \quad h = \frac{1}{2};$$

6) найти q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

7) проверить, удовлетворяют ли g_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i q_i^* < A \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

8) если вышеизложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае, необходимо определить λ^*, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2\lambda^* hf_i}} = A \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

9) вычислить q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства, используя формулу п. 5, заданий 6.39 и 6.40;

10) проверить, удовлетворяют ли найденные в п. 6, заданий 6.39 и 6.40 q_i^* требованию ограничения на складские площади;

11) рассчитать $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{N}\sqrt{2K_i(s_i + 2\lambda f_i\nu_i)} = \sum_{i=1}^{N}(s_i + 2\lambda^* f_i)q_i^*;$$

12) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.41. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На склад сельскохозяйственного предприятия поступают деревоматериалы N = 5 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере A = 2000 + 2(N + K) $м^3$ (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под деревоматериалы не превышает f = 800 + N + K $м^2$. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере p = 0,1K % от стоимости хранимых деревоматериалов. Характеристики запасов деревоматериалов приведены в табл. 6.7.

Т а б л и ц а 6.7. **Характеристики запасов деревоматериалов**

Товары	v_i – интенсивность потребления в месяц, м^3	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	1600 + 2N	10	20	1,6	1,6
2	1200	8	16	1,9 + 0,1K	1,4
3	1800	16 – N	22	2,1 – 0,1K	1,7
4	1200 + 2K	18	10 + N	1,5	1,2
5	1700	15 – K	18	1,7	1,3

Задание 6.42. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На склад строительной организации поступают заклепки N = 4 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере A = 800 + 3(N + K) у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под заклепки не превышает f = 60 + 0,5(N + K) м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере p = 0,1K % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.8.

Т а б л и ц а 6.8. **Характеристики запасов заклепок**

Товары	v_i – интенсивность потребления в месяц, шт.	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	600 + 2N	5	6	0,2	0,12
2	400 + N	3	4	0,3 + 0,1K	0,14
3	500 + K	6 – 0,2N	5	0,6 – 0,1K	0,15
4	300 + 2K	4	8–0,2N	0,4	0,16
5	700	7 – 0,1K	3	0,5	0,13

6.10. Многопродуктовая модель размера партии поставки с периодическими проверками при полном совмещении заказов

Задание 6.43. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Предприятие заказывает N = 6 видов товаров с оптовой базы. Складские площади предприятия f = 600 + 3N м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать A = 4000 + 5(N + K) у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки оформления заказа зависят от количества (N) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением:

$$K = 10(1 + \frac{N}{5}) \text{, т. е. } K = g(1 + \gamma N),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемых товаров и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждому товару.

Характеристики запасов товаров приведены в табл. 6.9.

Т а б л и ц а 6.9. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в год, шт.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	120 + 2K	10	2,2	1,3
2	140	8	1,6 – 0,1N	2,6
3	150	14	1,3	2,0 – 0,1K
4	200 – 2N	16 – K	1,8	3,5
5	160	12	0,9	1,5 – 0,1K
6	180	15 – N	1,2 – 0,1N	2,5

Задание 6.44. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Фирменный магазин сельскохозяйственного предприятия заказывает N = 5 видов продукции с овощной базы. Складские площади предприятия f = 200 + 3N м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать A = 1500 + 2(N + K) у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки оформления заказа зависят от количества (N) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением:

$$K = 10(1 + \frac{N}{5}) \text{, т. е. } K = g(1 + \gamma N),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемой овощной продукции и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждой овощной продукции.

Характеристики запасов овощной продукции приведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10. **Характеристики запасов овощной продукции**

Продукция	v_i – интенсивность потребления в год, шт.	α_i – стоимость i-й продукции, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-й продукции в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на ед. продукции, м^2
1	210 + 2 K	8	2,3	2,1
2	180	10	1,9 – 0,1N	2,3 – 0,1K
3	190 – 2N	17 – K	2,0	1,5
4	150	11	1,8	2,5 – 0,1K
5	170	16 – N	1,6 – 0,1N	1,7

Используя приведенную информацию заданий 6.43 и 6.44, необходимо:

1) определить τ^0 – оптимальный период возобновления поставок без учета ограничений:

$$\tau^0 = \sqrt{\frac{2g(1+\gamma N)}{\sum_{i=1}^{N} s_i v_i}};$$

2) вычислить q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \nu_i \tau^0, (i = \overline{1, N});$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i q_i^0 \leq f;$$

4) проверить, существует ли ограничение по оборотным средствам:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i^0 \leq A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить $\overline{\tau}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на складские помещения:

$$\overline{\tau}^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i};$$

6) вычислить $\overline{\overline{\tau}}^*$ – оптимальный период повторения заказов в случае ограничения на оборотные средства:

$$\overline{\overline{\tau}}^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i};$$

7) определить τ^* – оптимальный период повторения заказов в случае обоих ограничений:

$$\tau^* = \min\left\{\frac{f}{\sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i}; \frac{A}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i}\right\} \text{ или } \tau^* = \min(\overline{\tau}^*; \overline{\overline{\tau}}^*);$$

8) рассчитать q_i^* – оптимальный поставочный комплект:

$$q_i^* = \nu_i \tau^*, (i = \overline{1, N});$$

9) определить L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2g(1+\gamma N)\sum_{i=1}^{N} s_i v_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{N} s_i v_i \text{ ;}$$

10) проанализировать результаты решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задание 6.45. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Сельскохозяйственное предприятие заказывает N = 4 вида запчастей для сельскохозяйственной техники с оптовой базы. Складские площади предприятия f = 300 + 2N м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать A = 900 + 3(N + K) у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки оформления заказа зависят от количества (N) одновременно заказываемых запчастей и описываются уравнением:

$$K = 10(1+\frac{N}{5}) \text{, т. е. } K = g(1+\gamma N),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемых запчастей и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждой запчасти.

Характеристики запасов запчастей приведены в табл. 6.11.

Т а б л и ц а 6.11. **Характеристики запасов запчастей**

Запчасти	v_i – интенсивность потребления в год, шт.	α_i – стоимость i-й запчасти, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-й запчасти в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на одну запчасть, м^2
1	80 + 2K	100	20	2,3
2	90	90	26 – N	3,0 – 0,1K
3	100 – 2N	120 – K	18	3,2
4	120	140 – N	22 – N	2,5 – 0,1K

Задание 6.46. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Фирменный магазин сельскохозяйственного предприятия заказывает N = 4 вида колбасной продукции с перерабатывающего цеха. Складские площади предприятия f = 100 + 3N м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать A = 600 + 5(N + K) у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки оформления заказа зависят от количества (N) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением:

$$K = 10(1 + \frac{N}{5}) \text{, т. е. } K = g(1 + \gamma N),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемой колбасной продукции и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждой колбасной продукции.

Характеристики запасов колбасной продукции приведены в табл. 6.12.

Таблица 6.12. **Характеристики запасов колбасной продукции**

Продукция	v_i – интенсивность потребления в год, шт.	α_i – стоимость i-й продукции, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-й продукции в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на ед. продукции, м^2
1	60 + 2K	4	1,2	1,1
2	80	6	1,5 – 0,1N	1,3 – 0,1K
3	100 – 2N	7 – K	1,0	0,9
4	70	8 – N	1,4 – 0,1N	1,5 – 0,1K

Вопросы для самопроверки

1. Что такое организация поставок?
2. Что такое потери от дефицита?
3. Выведите самостоятельно формулу Уилсона.
4. Дайте определение точки заказа.
5. Назовите особенности модели с конечной интенсивностью поступления запаса.

6. Почему максимальный уровень внутрипроизводственного запаса меньше величины партии?

7. Каковы виды моделей планирования дефицита?

8. За счет какого вида затрат происходит снижение общих затрат в случае учета неудовлетворенных требований?

9. Что такое задолженный спрос?

10. Может ли точка заказа в моделях с учетом неудовлетворенных требований быть отрицательной величиной?

11. Постройте графики динамики изменения уровня запаса в однопродуктовой модели без дефицита и с дефицитом при учете неудовлетворенных требований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев, М. Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М.: ИНФРА, 2003. – 444 с.
2. Афанасьев, М. Ю. Прикладные задачи исследования операций: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский, В. М. Матюшонок. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.
3. Бабенышев, С. В. Системный анализ и исследование операций: учеб. пособие / С. В. Бабенышев, Е. Н. Матеров. – Железногорск : ФГБОУ ВО «Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России», 2022. – 122 с.
4. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
5. Болотский, А. В. Исследование операций и методы оптимизации / А. В. Болоский, О. А. Кочеткова. – М.: Лань, 2020. – 116 с.
6. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – М.: Юстиция, 2019. – 192 с.
7. Диксит, А. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни / А. Диксит, Б. Нэлбафф; пер. с англ. Н. Яцюк. – 2-е изд. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016. – 457 с.
8. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев: Выща шк., 1979. – 320 с.
9. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках: учеб. для вузов / А. В. Захаров. – 2-е изд., испр. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. – 302 с.
10. Ильченко, А. Н. Экономико-математические методы: учеб. пособие / А. Н. Ильченко. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 288 с.
11. Исследование операций: электронный учеб.-метод. комплекс / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест: БрГУ, 2022. – 430 с.
12. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 430 с.
13. Каштаева, С. В. Исследование операций : учеб. пособие / С. В. Каштаева. – Пермь: ИПЦ Прокрость, 2020. – 77 с.
14. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности предприятий АПК: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2009. – 264 с.
15. Конюховский, П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.
16. Кораблев, Ю. А. Теория игр: примеры и задачи: учеб. пособие для направления бакалавриата / Ю. А. Кораблев. – М.: КНОРУС, 2020. – 175 с.
17. Косоруков, О. А. Исследование операций: учебник / О. А. Косоруков, А. В. Мищенко; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. Н. П. Тихомирова. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003. – 448 с.
18. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйш. шк., 2008. – 368 с.
19. Костевич, Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений: учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Минск: Новое знание, 2003. – 424 с.

20. Леньков, И. И. Моделирование управленческих решений: практикум / И. И. Леньков; Академия упр. при Президенте Респ. Беларусь. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2020. – 108 с.

21. Ленькова, Р. К. Исследование операций. Методы исследования операций: курс лекций / Р. К. Ленькова. – Горки: БГСХА, 2016. – 48 с.

22. Ловянников, Д. Г. Исследование операций : учеб. пособие / Д. Г. Ловянников, И. Ю. Глазкова. – Ставрополь: Северо-Кавказский Федеральный ун-т (СКФУ), 2017. – 110 с.

23. Мастяева, И. Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / И. Н. Мастяева, Г. Я. Горбовцов, О. Н. Семенихина. – М., 2003. – 113 с.

24. Методы оптимизации. Задачник: учеб. пособие / В. В. Токарев [и др.]. – М.: Юрайт, 2020. – 293 с.

25. Невежин, В. П. Игровые модели для экономических задач: учеб. пособие / В. П. Невежин. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 193 с.

26. Новиков, А. И. Исследование операций в экономике: учеб. / А. И. Новиков. – 3-е изд. – М.: Дашков и К°, 2022. – 352 с.

27. Новицкий, Н. И. Сетевое планирование и управление производством: учеб.-практ. пособие / Н. И. Новицкий. – М.: Новое знание, 2004. – 159 с.

28. Писарук, Н. Н. Исследование операций / Н. Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2015. – 304 с.

29. Сакович, В. А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): справоч. пособие / В. А. Сакович. – Минск: Вышэйш. шк., 1984. – 256 с.

30. Сакович, В. А. Оптимальные решения экономических задач / В. А. Сакович. – Минск: Вышэйш. шк., 1982. – 272 с.

31. Таха, Х. А. Исследование операций / Хемди А. Таха. – 10-е изд. – М.: Вильямс, 2019. – 1056 с.

32. Фролькис, В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов / В. А. Фролькис. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

33. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – 7-е изд. – М.: Дашков и К°, 2019. – 398 с.

34. Шафранская, И. В. Исследование операций: курс лекций / И. В. Шафранская. – Горки, 2011. – 364 с.

35. Шафранская, И. В. Исследование операций: практикум: учеб.-метод. пособие / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2019. – 168 с.

36. Шафранская, И. В. Исследование операций: учеб. пособие / И. В. Шафранская. – Saarbrücken: Lap Lambert Academic, 2016. – 324 с.

37. Шафранская, И. В. Оптимизация экономических систем: курс лекций / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2014. – 153 с.

38. Шикин, Е. В. Исследование операций: учебник / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М.: ТК «Велби», Изд-во «Проспект», 2006. – 280 с.

39. Экономико-математическое моделирование: учебник для студентов вузов / под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004. – 800 с.

40. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.

41. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / Г. О. Читая [и др.]; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск: БГЭУ, 2018. – 511 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П р и л о ж е н и е А

Общие сведения и основные понятия теории игр [14, 92–94]

Моделируя различные процессы в народном хозяйстве, часто встречаются случаи, когда интересы участвующих сторон противоположны. Такие ситуации называют конфликтными. Поэтому при решении задач приходится использовать *математические методы и модели теории игр*.

Возникновение данного направления научных исследований относится к 1944 г., когда вышла в свет монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Известно, что игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике агропромышленного комплекса. Математическая теория игр занимается выработкой рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций (когда сталкиваются интересы конкурирующих сторон). В итоге разрабатываются предложения по наилучшим вариантам поведения, которые обеспечивали бы оптимальный результат. В качестве выигрыша могут выступать эффективность использования дефицитных ресурсов, себестоимость, прибыль и т. д.

Рассмотрим основные категории применяемых моделей. *Игра* – это совокупность мероприятий, состоящая из ряда действий сторон. Участвующие стороны являются *игроками*. *Стратегия* – это свод правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации в зависимости от сложившейся обстановки.

Решение экономико-математических задач требует соблюдения правил игры. Игра состоит из этапов или ходов, заключающихся в выборе игроком одного из предусмотренных правилами вариантов поведения. Выбирая ту или иную стратегию, каждый из игроков стремится удовлетворить свои интересы: первый – обеспечить себе максимально возможный выигрыш, а второй – минимально возможный проигрыш.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько стратегий, то такая стратегия называется смешанной, а ее элементы – чистыми стратегиями. Другими словами, смешанная стратегия есть комбинация чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одного из игроков, выраженный в количественной форме. Оптимальной стратегией будет та, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный выигрыш.

Следовательно, каждая формализованная игра характеризуется:

1) количеством субъектов, которые называются игроками;

2) возможным для каждого из игроков набором действий, называемых стратегиями;

3) функциями выигрыша, отражающими степень удовлетворения интересов каждого из игроков;

4) результатом игры, к которому приводят выбранные игроками стратегии.

Существуют различные виды задач, классифицировать которые можно с учетом следующих признаков. В игре могут сталкиваться интересы двух (игра парная) или нескольких (игра множественная) противников. В зависимости от взаимоотношений участников различаются игры бескоалиционные (некооперативные) и коалиционные (кооперативные). По характеру выигрышей игры делятся на:

а) с нулевой суммой;

б) с ненулевой суммой. В зависимости от количества стратегий игры бывают конечные или бесконечные. По виду функции выигрыша можно выделить матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные игры. По количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода) и многоходовые, которые в свою очередь бывают позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с полной и неполной информацией.

В некоторых игровых задачах в сфере экономики приходится принимать решения в условиях, когда одна сторона не является сознательно действующим противником. В подобных ситуациях, вызванных несознательным противодействием противоположного игрока, принятие оптимальных управленческих рекомендаций основывается на теории статистических решений. Поэтому игры, где в качестве одного игрока выступает природа, называются статистическими.

Графический метод решения задач линейного программирования

При решении задач линейного программирования могут возникать следующие случаи (рис. В1):

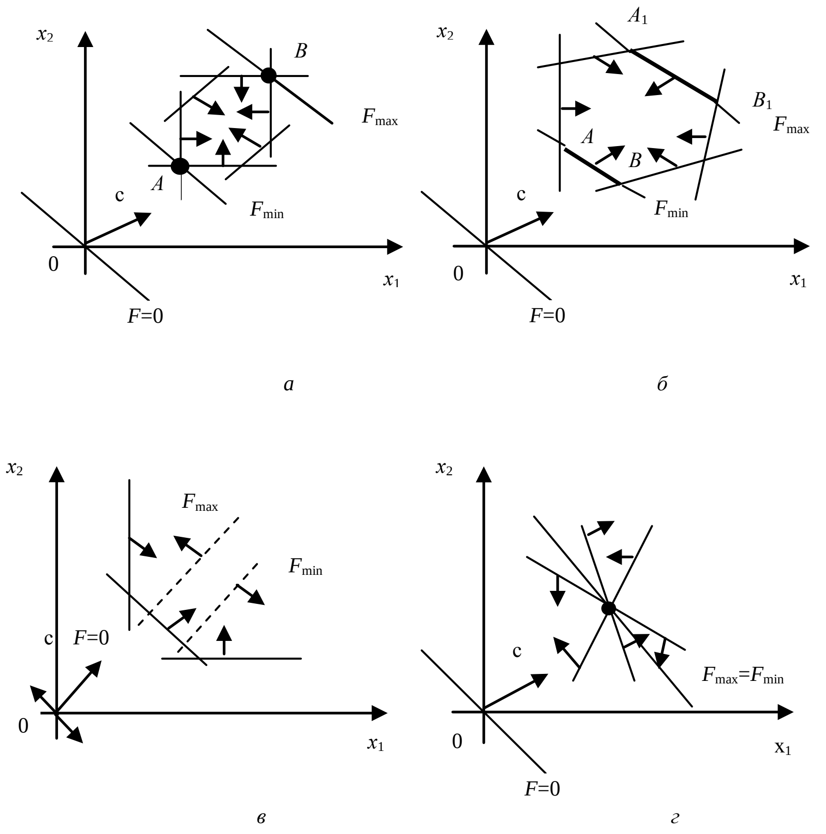
1) оптимальное решение единственно;

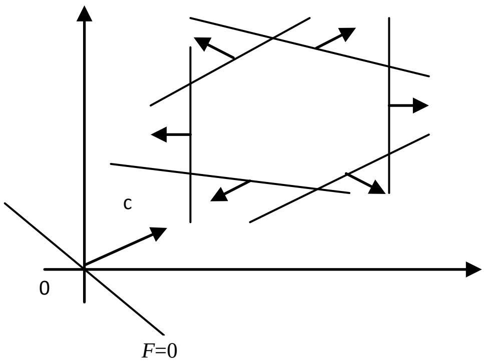
2) оптимальных решений бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону области допустимых решений;

3) целевая функция не ограничена, т. е. сколько бы не перемещали линию уровня, она не может занять разрешающее положение;

4) область допустимых решений состоит из точки, в которой целевая функция одновременно имеет и максимальное, и минимальное значения;

5) задача решений не имеет, так как система ограничений несовместна.





д

Рис. В1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

В общем случае линейный характер целевой функции и выпуклость области допустимых значений позволяют сделать следующий вывод: оптимальному решению соответствует, по крайней мере, одна из вершин многогранника, описывающего область допустимых решений.

Приложение С

Методика обоснования двойственных оценок

Значения двойственных оценок получают в результате решения двойственной экономико-математической задачи, которая составляется на базе прямой задачи.

Прямая двойственной экономико-математическая задача имеет следующий вид:

найти x_j при условии –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_0;$$

$$x_j \ge 0;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j.$$

Двойственная двойственной экономико-математическая задача имеет такой вид:

найти u_i при условии –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \ge c_j, j \in J_0;$$

$$u_i \ge 0;$$

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Индексация:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных).

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида *j*;

u_i – двойственная экономико-математическая оценка ресурса вида *i*.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент строки вида *i* столбца вида *j*;

A_i – наличие ресурсов (строки) вида *i*;

c_j – оценочный коэффициент в столбце (при переменной) вида *j*.

Следовательно, двойственная экономико-математическая задача по отношению к прямой строится по следующей схеме:

а) коэффициенты столбцов прямой задачи являются коэффициентами строк двойственной задачи;

б) знаки ограничений прямой задачи противоположны знакам ограничений двойственной задачи;

в) коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами двойственной задачи;

г) если целевая функция одной из задач максимизируется, то целевая функция другой задачи минимизируется.

П р и л о ж е н и е D

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе LPX.88

Дана следующая экономико-математическая задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800, \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808, \\ x_1 \le 36, \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 \cdot$$

Решим ее по программе LPX.88.

F SOLUTION IS OPTIMAL DATE 02-01-2025 TIME 12:17:05
ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДАТА ВРЕМЯ

MAXIMUM ENTERS: BASIS X: 3 VARIABLES: 4
ПЕРЕМЕННЫЕ
PIVOTS: 3 LEAVES: BASIS S: 1 SLACKS: 4
ИТЕРАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
LAST INV: 0 DELTA 0 RETURN 4520 CONSTRAINTS: 4
КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕНИЯ

BASIS *БАЗИС*	X.2	S.2	X.4	X.1
PRIMAL *ПРЯМАЯ*	24	160	32	36
DUAL *ДВОЙСТВЕННАЯ*	41	0	1.4	25.8

F_1 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2025
PRIMAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННЫЕ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	VALUE/UNIT *ВЛИЯНИЕ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	NET RETURN *ИЗМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ*
X.1	BASIS (*БАЗИС*)	36	50	50	0
X.2	BASIS	24	20	20	0
X.3	NONBASIS (*НЕБАЗИС*)	0	0	6	-6
X.4	BASIS	32	70	70	0
S.1	NONBASIS	0	0	41	-41
S.2	BASIS	160	0	0	0
S.3	NONBASIS	0	0	1.4	-1.4
S.4	NONBASIS	0	0	25.8	-25.8

F_2 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2025
DUAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	USAGE *РАСХОД*	SLACK *ОСТАТОК*
Y.1	BINDING (*ДЕФИЦИТ*)	41	60	60	0
Y.2	NONBINDING (*НЕДИФИЦИТ*)	0	1800	1640	160
Y.3	BINDING	1.4	808	808	0
Y.4	BINDING	25.8	36	36	0

F_3 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2025
OBJECTIVE ROW RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:27
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КРИТЕРИЮ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННАЯ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
X.1	BASIS	36	50	24.2	NONE
X.2	BASIS	24	20	14	45.8
X.3	NONBASIS	0	0	NONE	6
X.4	BASIS	32	70	0	100

F_4 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2025
RIGHT HAND SIDE RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:28
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО РЕСУРСАМ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
Y.1	BINDING	41	60	36	64.77612
Y.2	NONBINDING	0	1800	1640	NONE
Y.3	BINDING	1.4	808	-792	1128
Y.4	BINDING	25.8	36	28.55814	60

F_5 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2025
INVERSE COEFFICIENTS *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:29
ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

	RETURN	X.2	S.2	X.4	X.1
X.1	0	0	0	0	1
X.2	0	1	0	0	-1
X.4	0	.3	0	.02	-.06
S.2	0	-33.5	1	-5	21.5

П р и л о ж е н и е Е

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе Excel «Поиск решения»

Пусть имеем прямую экономико-математическую задачу:

$$1.\ x_1 + x_2 + x_3 \le 60,$$

$$2.\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800,$$

$$3.\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808,$$

$$4.\ x_1 \le 36,$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Для решения экономико-математической задачи на компьютере информацию задачи необходимо представить на рабочем листе Excel в следующем виде (рис. Е1):

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	60
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=6*B3	=26*C3	=2*D3	=25*E4	=СУММ(B5:E5)	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	=12*B3	=15*C3	=25*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+808
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Прибыль, у.д.е.	=50*B3	=20*C3		=70*E4	=B8+C8+E8	=F8
9							

Рис. Е1. Представление информации экономико-математической задачи на рабочем листе Excel

Изначально ячейки, значения которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо установить табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка G8 (прибыль), выполнить команду «Сервис → Поиск решения…». Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. Е2).

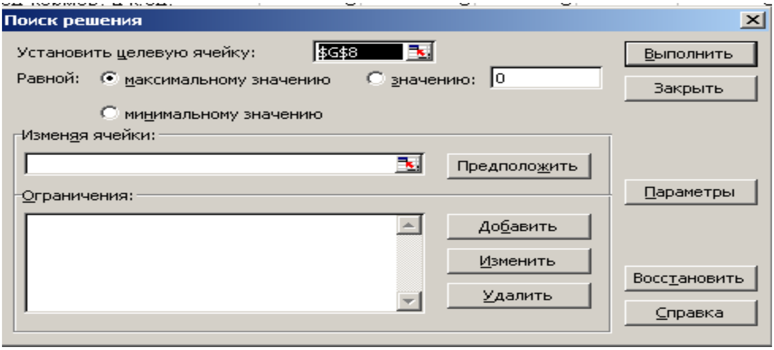


Рис. Е2. Диалоговое окно «Поиск решения»

В поле «Изменяя ячейки»: указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. Е3), щелкнув по кнопке «Добавить».

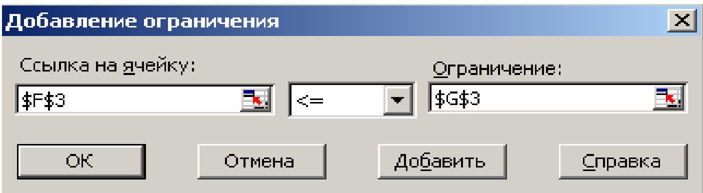


Рис. Е3. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения (табл. Е1):

Т а б л и ц а Е1. **Примеры описания ограничений экономико-математической задачи**

Ограничение	Описание
B3:D3≥0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3≤G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5≤G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
E4≥0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7≤G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выход этих кормов с отрасли растениеводства
B3≤36	Площадь посева зерновых культур не может быть больше 40 % от площади пашни (36 га)

После ввода последнего ограничения, щелкнув по кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. Е4).

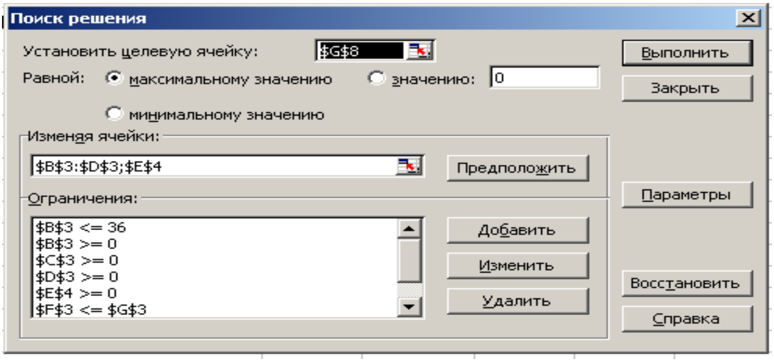


Рис. Е4. Диалоговое окно «Поиск решения»

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение задачи (рис. Е5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	36	24	0		60	60
4	Поголовье, гол.				32		
5	Затраты труда, чел.-дн.	216	624	0	800	1640	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	432	360	0		792	1600
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				1600	1600	
8	Прибыль, у.д.е.	1800	480		2240	4520	4520
9							

Рис. Е5. Результаты решения экономико-математической задачи

Из рис. Е5 видны значения неизвестных величин задачи:

$$x_1 = 36 \qquad y_1 = 0$$
$$x_2 = 24 \qquad y_2 = 160$$
$$x_3 = 0 \qquad y_3 = 0$$
$$x_4 = 32 \qquad y_4 = 0$$
$$F_{\max} = 4520.$$

В диалоговом окне «Результаты поиска решения» (рис. Е6) указывают тип отчета.

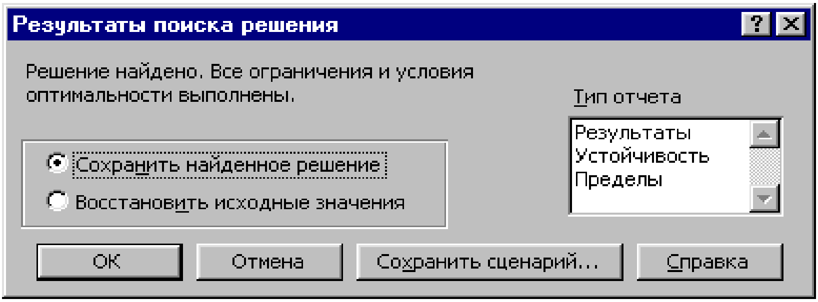


Рис. Е6. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Результаты.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

Устойчивость.

Используется для создания отчета, содержащего сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений (рис. Е7). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Свете5.xls]Лист1
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B3	Площадь, га Зерновые	36	25,8
C3	Площадь, га Картофель	24	0
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	-6
E4	Поголовье, гол.	32	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F3	Итого	60	41
F5	Затраты труда, чел.-дн. Итого	1640	0
F7	Потребность в кормах, ц к.ед. Итого	1600	1,4

Рис. Е7. Отчет по устойчивости

Пределы.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ (рис. Е8). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно верхним пределом называется наибольшее значение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Свете5.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Ячейка	Целевое Имя	Значение
G8	Прибыль, у.д.е. Имеется	4520

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
B3	Площадь, га Зерновые	36	36	4520	36	4520
C3	Площадь, га Картофель	24	24	4520	24	4520
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	0	4520	0	4520
E4	Поголовье, гол.	32	0	2280	32	4520

Рис. Е8. Отчет по пределам

П р и л о ж е н и е F

Метод отсечения

Сущность метода отсечения состоит в том, что сначала экономико-математическая задача решается симплексным методом без условия целочисленности. Если полученные значения переменных не являются целочисленными, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

1) оно должно быть линейным;

2) отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи;

3) не затрагивать ни одного целочисленного решения.

Данное соотношение, или правильное отсечение Гомори, имеет следующий вид:

$$\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j \le 0 \text{ или } \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j \ge \{A_i\}.$$

Таким образом, для решения задач целочисленного линейного программирования *методом Гомори* используется следующий алгоритм:

1. Решают искомую экономико-математическую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все переменные задачи целочисленные, то получаем искомое решение. Если экономико-математическая задача без условия целочисленности не имеет решения, то и целочисленная задача решения не имеет.

2. Если среди оптимальных значений переменных есть нецелые, то выбирают компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы формируют правильное отсечение.

3. В неравенство, формирующее правильное отсечение, вводят дополнительную переменную и, превращая его в равенство, включают в систему ограничений экономико-математической задачи.

4. Полученную расширенную экономико-математическую задачу решают симплексным методом, начиная с пункта 2 до тех пор, пока значения базисных переменных не будут целочисленными.

Приложение G

Метод ветвей и границ

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Решаем искомую экономико-математическую задачу симплексным методом без учета условия целочисленности.

2. Если в полученном симплексном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из них и по ней строим два ограничения.

3. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значения дробной переменной в оптимальном решении, в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной (например: $x_1 = 3{,}5$, первое ограничение будет $x_1 \leq 3$, а второе $x_1 \geq 4$, что исключает промежуток с дробным значением x_1).

4. В каждую из искомых задач добавляем по изложенному выше ограничению, в результате получаем две задачи (подзадачи) линейного программирования и решаем их.

5. Если снова получены оптимальные решения с дробным значением переменной, то, сравнив значения целевых функций задач, выбираем задачу с большим значением целевой функции и с пункта 2 продолжаем до тех пор, пока не получим целочисленные значения переменных.

В результате получаем ветви (рис. G1).

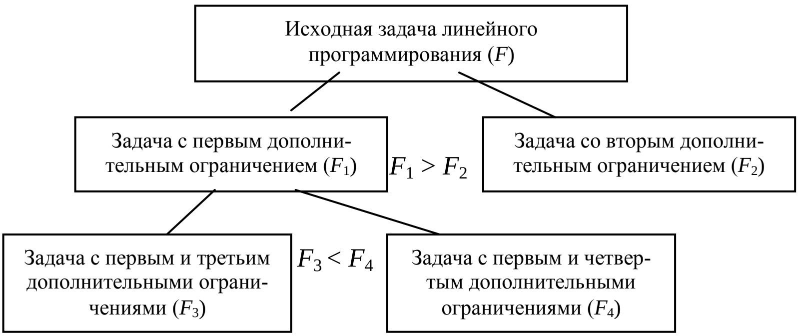


Рис. G1. Алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ

Приложение Н

Модели теории массового обслуживания [14, с. 109–114]

Теория массового обслуживания – новое научное направление, которое возникло в связи с необходимостью анализа процессов образования очередей. Очереди могут образовывать не только люди, но и сельскохозяйственная техника, станки, детали и т. д. Например, машины с овощами на базе, тракторы на станции заправки дизтопливом, автотранспорт с зерном на элеваторе и т. п.

Данная теория разработана в начале XX века. Ее основоположником является датский математик А. К. Эрланг (1878–1929), применивший методы теории вероятностей к решению задач создания и эксплуатации автоматических телефонных станций (АТС). Термин «теория массового обслуживания» введен советским математиком А. Я. Хинчиным (1894–1959), внесшим значительный вклад в ее развитие (следует отметить также таких ученых, как А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко, Н. П. Бусленко, Б. А. Севастьянов, И. Н. Коваленко, Е. С. Вентцель и др.).

Многие экономические задачи связаны с системами массового обслуживания, предназначенными для обслуживания некоторых потоков требований, поступающих в случайные моменты времени. В сфере АПК экономисту приходится решать такого рода задачи:

а) обслуживание покупателей в сфере розничной торговли;

б) транспортное обслуживание;

в) ремонт аппаратуры, машин и механизмов, находящихся в эксплуатации;

г) обработка документов в системе управления и т. д.

Например, в организации фирменной торговли предприятий методы теории массового обслуживания позволяют определить оптимальное количество торговых точек, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другой тип подобных задач изучает работу подразделений снабженческо-сбытовых организаций, и здесь важно установить оптимальное соотношение между числом поступающих требований и количеством обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений: здесь требованием является прибытие транспортных средств под выгрузку, а складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство.

Таким образом, теория массового обслуживания изучает процессы, в которых, с одной стороны, постоянно возникают запросы на выполнение каких-либо работ, а с другой – происходит постоянное удовлетворение этих запросов. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем составляет систему массового обслуживания.

Элементами системы массового обслуживания являются:

– входящий поток требований;

– выходящий поток обслуженных заявок;

– очередь;

– каналы обслуживания.

Их сущность такова:

а) *требование (заявка*) – это каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы или удовлетворение потребности. Например: отпуск товара в магазине; разгрузка машины с грузом; ремонт холодильных установок мясокомбината; контроль готового изделия и т. д. Требования поступают в систему обслуживания из источника. Выполнение работы по удовлетворению поступившего требования называется *обслуживанием*.

Поток требований (заявок) – это последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Если требования поступают через определенные равные промежутки времени, то поток называется регулярным. Однако такие потоки встречаются редко, тогда как в экономической практике они обычно нерегулярные и случайные. Поток требований, поступающих на систему обслуживания, – *входящий*, а покидающих обслуживающую систему, – *выходящий*;

б) *очередь* – это совокупность или скопление требований, ожидающих обслуживания;

в) *каналы обслуживания* – это технические устройства (персонал), выполняющие соответствующие функции или операции (т. е. продавцы, кассиры, мастера по ремонту оборудования, бензоколонки, элеваторные весы, линии по переработке сырья и т. д.).

Время обслуживания – это период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание (от начала до его завершения). Период от момента поступления требования в систему и до начала обслуживания – это *время ожидания обслуживания*. Следовательно, время ожидания обслуживания в совокупности со временем обслуживания составляет *время пребывания требования в системе*.

Максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно, определяет *пропускную способность системы обслуживания*. Если она равна единице – это однолинейная система массового обслуживания, системы с пропускной способностью больше единицы – многолинейные.

Совокупность, в которой последовательно связаны между собой поток требований, очередь и каналы обслуживания, представляет собой *систему массового обслуживания* (рис. Н1).

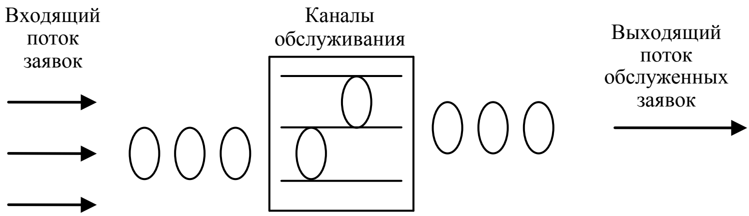


Рис. Н1. Графическое изображение системы массового обслуживания

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы (число каналов, их производительность, характер потока заявок) с показателями эффективности обслуживания.

На основе математических моделей системы массового обслуживания исследуются количественные связи между числом каналов обслуживания, их производительностью, режимом работы, характеристиками входящего потока требований и показателями (критериями) эффективности функционирования систем. Так как применяемых критериев много, то задачи оптимизации в теории массового обслуживания являются многокритериальными.

Например, необходимо исследовать входящий поток требований, процесс обслуживания и определить, при каком числе каналов обслуживания суммарные издержки, обусловленные пребыванием требований в очереди и простоем каналов обслуживания, будут минимальными. В качестве критерия эффективности функционирования системы массового обслуживания может быть принят минимум потерь времени на пребывание в очереди. В этом случае режим функционирования системы массового обслуживания, в частности число каналов обслуживания, выбирается из условия практической достоверности того, что время пребывания требований в очереди не превосходит некоторую заданную величину.

Целью при решении математических задач является выработка рекомендаций по рациональному построению системы массового обслуживания и оптимальной организации их работы. Поэтому для многих систем массового обслуживания важно рассчитать следующие показатели:

– абсолютная пропускная способность;
– относительная пропускная способность;
– коэффициент использования системы массового обслуживания;
– среднее время ожидания заявки в очереди;
– среднее время пребывания заявки в системе массового обслуживания;
– вероятность отказа заявке;
– вероятность того, что будет обслуживание;
– среднее число заявок, находящихся в очереди;
– среднее число заявок, находящихся в системе массового обслуживания и др.

Можно построить множество моделей систем массового обслуживания, варьируя различными операционными характеристиками. При всем многообразии моделей главной целью теории массового обслуживания будет являться исследование различных характеристик случайного состояния систем массового обслуживания. На основе моделей массового обслуживания можно разрабатывать экономические рекомендации по реорганизации систем массового обслуживания для повышения эффективности их работы, а также определять оптимальные показатели вновь создаваемых систем массового обслуживания.

Пример задачи теории массового обслуживания с отказами [14]

Практический интерес представляют те задачи, с помощью которых определяются *оптимальные показатели создаваемых систем массового обслуживания*.

Например. Предприятие, занимающееся автотранспортным обслуживанием, оборудовало в одном из своих филиалов пункт технической профилактики автомобилей. На данном участке первоначально трудилось двое работников, и статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. При этом в среднем в течение смены каждый из механиков успевал провести определенную техническую работу для 10 автомобилей. Так как общее число машин, находящихся в эксплуатации, велико, то они независимо друг от друга в различное время требуют осмотра и профилактического ремонта. Установлено, что в среднем в течение рабочего дня в пункт обращается 20 человек, причем застав служащих занятыми, автотранспортные средства уезжают в другую организацию.

Планово-экономическим отделом рассматривается вопрос о целесообразности дополнительного привлечения механиков с установкой соответствующего оборудования в пункт технического осмотра на следующий месяц (25 рабочих дней). Известно, что стоимость простоя обслуживающего канала (т. е. зарплата персонала, аренда оборудования и т. д.) составляет в день 50 у. д. е. В то же время каждое необслуженное транспортное средство приносит потери в количестве 80 у. д. е. Необходимо определить оптимальное число работников в предстоящий месяц для рассматриваемой системы массового обслуживания.

Изучаемая система является многоканальной системой массового обслуживания с отказами, где имеются следующие параметры: число каналов (n = 2); интенсивность входящего потока (λ = 20); интенсивность потока обслуживания, или производительность канала (μ = 10).

Рассчитаем относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 20:10 = 2.$$

Найдем вероятность того, что система свободна (для n = 2):

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2}\right]^{-1} = 0,2.$$

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, получит отказ, равна:

$$p_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = \frac{2^2}{1 \cdot 2} \cdot 0,2 = 0,4.$$

Рассчитаем по следующим формулам:

– относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,4 = 0,6;$$

– абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q = 20 \cdot 0,6 = 12;$$

– среднее число занятых каналов: $\bar{k} = \rho(1 - p_{\text{отк}}) = \dfrac{A}{\mu} = \rho \cdot q$ = 2 · 0,6 = 1,2;

– среднее число простаивающих каналов: $\bar{k}_n = n - \bar{k}$ = 2 – 1,2 = 0,8.

Для системы массового обслуживания с потерями (отказами) необходимо рассчитать функцию потерь ($G_{П}$) за определенный интервал времени (T) по формуле:

$$G_{\text{п}} = (g_{\text{пк}} \cdot \bar{k}_{\text{п}} + g_{\text{у}} \cdot p_{\text{отк}} \cdot \lambda) \cdot T,$$

где $g_{\text{пк}}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала;

$g_{\text{у}}$ – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования;

$\bar{k}_{\text{п}}$ – среднее число простаивающих каналов;

$p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа;

λ – интенсивность входящего потока.

При фактическом числе обслуживаемых работников функция издержек равна:

$$G_{П} = (30 \cdot 0{,}8 + 50 \cdot 0{,}4 \cdot 20)25 = 10600.$$

Увеличим число механиков и проведем аналогичные расчеты:

– если n = 3, то $G_{П}$ = 6315;
– если n = 4, то $G_{П}$ = 4018;
– если n = 5, то $G_{П}$ = 3231;
– если n = 6, то $G_{П}$ = 3318.

Таким образом, для рассматриваемой системы массового обслуживания оптимальное количество работников составляет 5 человек.

Пример задачи многоканальной системы массового обслуживания с очередью (ее длина не ограничена) [14]

Учебный компьютерный центр для распечатки различных задач, программ, тестов, положений и актов, связанных с информацией о деятельности предприятий АПК, состоит из 6 персональных компьютеров. В среднем в течение рабочего дня от студентов, аспирантов, научных сотрудников поступает 2100 требований в день. Есть все основания полагать, что поток заявок в компьютерный центр является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждая заявка требует различного случайного времени на ее обслуживание, которая зависит от пожелания клиента иметь необходимые данные. Статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону и составляет 36 секунд на одного посетителя. Необходимо определить основные характеристики данной системы массового обслуживания.

Математической моделью этой задачи является многоканальная система массового обслуживания разомкнутого вида с ожиданием (очередью). За единицу времени примем 1 час и рассмотрим параметры имеющейся модели:

– общее число каналов обслуживания $n = 6$;

– интенсивность входящего потока $\lambda = 2100 : 7 = 300$ заявок в час при семичасовой работе в день;

– среднее время обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 36$ секунд, или 36 : 3600 = 0,01 часа;

– интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ заявок в час;}$$

– интенсивность нагрузки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{300}{100} = 3 \cdot$$

В данной задаче $\rho < n$ (3 < 6), значит, предельный режим функционирования существует, а задача имеет решение.

Вероятность того, что в системе нет ни одного требования,

$$p_0 = \left[1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!(1-0,5)}\right]^{-1} = \frac{1}{20,425} = 0,049.$$

Это означает, что в среднем 4,9 % всего времени работы 6 компьютеров одновременно будут свободны.

Среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди), составляет:

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!\,n\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{3^7 \cdot 0,049}{6! \;\cdot\; 6(1-0,5)^2} = 0,1.$$

Среднее число занятых каналов равно:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 3.$$

Среднее число требований, находящихся в системе, равно $\bar{N}_{сис}$:

$$\bar{N}_{сис} = \rho + \bar{N}_{оч} = 3 + 0{,}1 = 3{,}1 \text{ посетителя находится в СМО.}$$

Средняя продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^n \cdot P_0}{n \cdot \mu \cdot n!(1-\frac{\rho}{n})^2} = \frac{3^6 \cdot 0{,}049}{6 \cdot 100 \cdot 6!(1-0{,}5)^2} = 0{,}0003.$$

Средняя продолжительность пребывания требования в системе:

$$\bar{T}_{сис} = \bar{T}_{оч} + \bar{t}_{об} = 0{,}0003 + 0{,}01 = 0{,}0103.$$

Так как число мест в очереди не ограничено, то все требования, поступившие в систему, рано или поздно будут обслужены. Следовательно, $p_{отк} = 0$, относительная пропускная способность системы $q = 1$, абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q = 300 \cdot 1 = 300.$$

Рассчитаем коэффициенты:
– использования каналов ($k_и$),
– простоя каналов ($k_п$),
– среднее число простаивающих каналов ($\bar{k}_п$):

$$k_и = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5;$$

$$k_п = 1 - k_и = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$\bar{k}_п = n - \bar{k} = 6 - 3 = 3.$$

Пример задачи многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием без ограничений на длину очереди и неизвестным числом обслуживающих устройств [14]

Например, задача. На базе райагроснаба производится разгрузка автомобилей, прибывающих с разными товарами от оптовых поставщиков. Автофургоны прибывают в случайные моменты времени. Каждый из них подходит к разгрузке в среднем через 2 часа, т. е. интенсивность поступления товаров от поставщиков примерно одинаковая. Руководство райагроснаба установило 12-часовой режим работы, так что суммарно на разгрузку прибывает поток автомобилей с интенсивностью 6 единиц в день. Обслуживание осуществляется автокарами, которые в среднем за день могут осуществить работу по разгрузке 4 автофургонов. Процесс деятельности базы состоит в том, что прибывший автофургон либо разгружается немедленно любым из свободных автокаров, либо ожидает освобождения одного из них.

Между поставщиками товаров и райагроснабом существует договор, один из пунктов которого требует своевременного обслуживания прибывающих автофургонов. В случае простоя в очереди агросервисная организация должна уплатить штраф в размере 25 у. д. е. за 1 автомобиль в день. Вместе с тем автокары для разгрузки автофургонов данной партии товаров база арендует, а стоимость простоя одного обслуживающего канала (автокара) составляет в день 15 у. д. е. Необходимо определить оптимальное число единиц техники по разгрузке товаров.

Изучаемая система является многоканальной СМО с ожиданием без ограничений на длину очереди и неизвестным числом обслуживающих устройств. При этом известны интенсивность входящего потока ($\lambda = 6$), интенсивность потока обслуживания, или производительность канала ($\mu = 4$). Рассчитаем интенсивность нагрузки системы (ρ). Данный показатель обозначает приведенную плотность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Для того чтобы данная система справлялась с процессом обслуживания всех поступающих автофургонов, должно выполняться условие стационарности:

$$\frac{\rho}{n} < 1 \cdot$$

Следовательно, число каналов обслуживания должно быть не менее двух. Найдем вероятность того, что система свободна (для $n = 2$):

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!(1 - \frac{\rho}{n})}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{1{,}5}{1!} + \ldots + \frac{1{,}5^2}{2!(1 - \frac{1{,}5}{2})}\right]^{-1} = 0{,}143.$$

Далее рассчитаем:

– среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2} = 1{,}931;$$

– среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 1{,}5;$$

– среднее число простаивающих каналов:

$$\overline{k}_{\text{п}} = n - \overline{k} = 2–1{,}5 = 0{,}5.$$

Для СМО с ожиданием (очередью) необходимо рассчитать функцию потерь $G_{\text{п}}$ за определенный интервал времени T по формуле:

$$G_{\text{п}} = (g_{\text{пк}} \cdot \overline{k}_{\text{п}} + g_{\text{ож}} \cdot \overline{N}_{\text{оч}}) \cdot T,$$

где $g_{\text{ПК}}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала;

$\overline{N}_{\text{п}}$ – среднее число простаивающих каналов;

$g_{\text{ож}}$ – стоимость потерь за единицу времени, связанных с ожиданием требования в очереди;

$\overline{N}_{\text{оч}}$ – средняя длина очереди, т. е. среднее количество требований, ожидающих начала обслуживания.

При двух автокарах функция издержек $G_{\text{П}}$ = (25 · 1,93 + 15 · 0,5) ·1 = 55,75. При количестве погрузчиков n = 3, $G_{\text{П}}$ = 28,5 у. д. е., а при n = 4, $G_{\text{П}}$ = 38,5 у. д. е. Таким образом, минимальные суммарные потери данной системы будут при работе трех погрузчиков, количество которых является оптимальным.

Пример задачи замкнутой многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием при ограниченном входящем потоке [14]

Комбинат поставляет группу однородных товаров согласно заключенным договорам потребителям агропромышленного комплекса. Процесс выпуска изделий происходит в цехе, который насчитывает 8 станков. Их обслуживанием заняты 2 мастера. Поток поступающих требований на обслуживание станков составляет в среднем 4 единицы в час. Обслуживание одного автомата занимает у мастера 3 минуты. Необходимо определить важнейшие характеристики СМО.

Математической моделью рассматриваемой задачи является многоканальная СМО с ожиданием (очередью) при ограниченном потоке требований. Общее число не может превзойти число станков. Предполагаем: входящий поток требований на обслуживание станков простейший, время обслуживания подчинено экспоненциальному закону.

Рассмотрим параметры:

– общее число каналов обслуживания: $n = 2$;

– общее число требований: $m = 8$;

– интенсивность входящего потока: $\lambda = 4$;

– среднее время обслуживания: $\overline{t}_{об} = 3$ минуты, или 0,05 часа;

– интенсивность потока обслуживания:

об

Во втором столбце таблицы значения вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{N!\rho^k}{k!(N-k)!} = \frac{8!\ \cdot\ 0,2^k}{k!(8-k)\ !} \quad \text{при } k = 1,2;$$

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{N!\rho^k}{n^{k-n}n!(N-k)!} = \frac{8!\ \cdot\ 0,2^k}{2!(8-k)\ !\ \cdot\ 2^{k-2}} \quad \text{при } k = \overline{3,8}.$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{8} p_k = 1,$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{p_k}{p_0} = \frac{1}{p_0} \cdot \sum_{k=0}^{8} p_k = 4,911.$$

Следовательно, $p_0 = \frac{1}{4,911} = 0,2036,$ это говорит о том, что 2 мастера одновременно свободны 20,36 % рабочего времени.

Умножая величины второй колонки таблицы на найденное значение p_0, получаем третью колонку. Далее найдем:

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \sum_{k=n}^{N} (k-n) p_k = \sum_{k=3}^{8} (k-2) \cdot p_k.$$

Суммируя четвертую колонку таблицы, получаем $\overline{N}_{\text{оч}} = 0,3951.$ Следовательно, в среднем из 8 станков 0,4 станка будет простаивать в ожидании, пока освободится кто-нибудь из мастеров;

– среднее число требований, находящихся в системе:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} k p_k = 1,6637,$$

т. е. в среднем 1,7 станка будет простаивать (во время обслуживания и ожидания этого процесса);

– среднее число простаивающих каналов (свободных от обслуживания):

$$\overline{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = 0,733\ ;$$

– коэффициент простоя требования:

$$a_1 = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{N} = \frac{0,3951}{8} = 0,05 \cdot$$

Значит, каждый станок простаивает в среднем 0,05 части рабочего времени в ожидании, пока мастера освободятся;

– коэффициент простоя обслуживающего канала:

$$a_3 = \frac{\overline{N}_{\text{пр}}}{N} = \frac{0,733}{2} = 0,367,$$

т. е. в среднем каждый мастер простаивает 36,7 % своего рабочего времени.

Приложение М

Основные положения теории управления запасами [14, с. 100–102]

В научных исследованиях экономики особое внимание уделяется такому аспекту повышения эффективности работы предприятий, как грамотное управление имеющимися запасами. Во всех сферах народного хозяйства важно поддерживать их рациональный уровень (сырья, полуфабрикатов, готовых изделий). Основные причины создания оптимального объема запасов для любой организации таковы:

а) необходимо обеспечить непрерывность и бесперебойность процессов производства;

б) существует периодичность выпуска различных видов продукции поставщиками, а также их транспортировка к потребителю партиями;

в) в большинстве объектов происходит несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Затраты на хранение слишком больших запасов уменьшают прибыльность организации; поддержание запасов на слишком низком уровне связано с риском возникновения дефицита и остановкой производства. Для компромиссного решения данной проблемы применяют *математические методы и модели теории управления запасами.*

Как научная дисциплина теория управления запасами начала формироваться в середине 50-х гг. прошлого столетия и в данный момент насчитывает более 300 моделей рассматриваемого класса. Под запасами понимается все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Если рассматривать совокупные запасы на пути технологической цепи «поставщик – потребитель», то их можно разделить на две основные части:

а) производственный запас. Его образует продукция производственно-технического назначения, находящаяся в руках производителей и вступившая или готовая вступить в процесс непосредственного производства;

б) товарный запас. Его образует продукция, которая находится в сфере обращения. Таковы запасы на складах предприятий-изготовителей, запасы в пути, запасы на снабженческо-сбытовых, торговых и иных базах. Уровень и структура их должны быть такими, чтобы: а) удовлетворить спрос каждого покупателя; б) выполнить план товарооборота; в) устранить простои продавцов и складских работников.

Товарные и производственные запасы являются необходимым условием нормальной работы каждой организации, а их текущий уровень может оказаться одним из решающих факторов успешной деятельности предприятия. Существует ряд обстоятельств, по которым запасы, как неизбежные издержки, создаются в минимальном количестве из-за сокращения затрат на их содержание или упущенного дохода, который мог бы быть получен при вложении «омертвленных» в запасе финансовых средств в развитие объекта.

В самом деле, затраты на хранение слишком больших запасов могут свести к минимуму доходность, так как для их финансирования из оборота отвлекаются денежные ресурсы. Размер этих затрат, связанных с «омертвлением» капитала, предположительно равен средней рыночной ставке ссудного процента. Такой процент за инвестированный капитал платит организация, если использует банковский кредит для финансирования запасов. Если же запас финансируется за счет собственных средств, то предприятие несет в таком же объеме потери потенциального дохода, который оно могло бы получить, если бы ссудило вложенные в запас денежные средства под проценты.

В то же время поддержание запасов на слишком низком уровне ведет к проблемам срыва производства, а также выполнения заказов покупателей и клиентов.

Следовательно, важно найти наилучшее соотношение между следующими требованиями:

а) с одной стороны, минимизация общих издержек, связанных с доставкой и хранением запасов;

б) с другой стороны, надежное обеспечение спроса на хранимый запас. Поэтому в общем аспекте задача управления запасами должна отвечать на следующие два вопроса: определение объемов поставок (какое количество запаса заказывать?) и периодичность заказов (когда заказывать?). Совокупность правил, по которым принимаются эти решения, и есть стратегия управления запасами. Ее сущность состоит в определении такой организации поставок, при которой суммарные затраты на доставку, хранение, а также потери (недополученная прибыль), обусловленные дефицитом товаров, были бы минимальные.

При постановке экономико-математической задачи по управлению товарными запасами необходимо учитывать следующие особенности:

1) *величину запаса*. Она определяется в натуральном или стоимостном выражении;

2) *спрос*. Под спросом понимается совокупность требований на товары или потребность в материальных ресурсах для обеспечения непрерывности производственного процесса. Он может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (описанным вероятностным распределением), что приводит к постановке детерминированных и стохастических моделей.

Среди разновидностей детерминированных моделей различают:

а) статические (объем спроса на хранимую продукцию или запас является постоянным во времени);

б) динамические (объем спроса является функцией времени). Кроме того, исходя из характера потребности, возможна реализация таких стохастических моделей управления запасами, в которых спрос за рассматриваемый период либо является непрерывной случайной величиной, либо дискретной, т. е. описывается дискретной плотностью распределения;

3) *порядок пополнения запасов*. Речь идет об интервале времени между моментом размещения заказа и его поставкой. Пополнение запасов осуществляется на основе следующих вариантов:

а) мгновенная, т. е. экстренная поставка;

б) задержка поставок относительно момента подачи требования. В этом случае новые заказы размещаются тогда, когда их уровень опускается до заранее определенного значения, называемого точкой заказа товара;

4) *издержки.* Существуют четыре основных вида затрат, которые оказывают влияние на выбор решения по управлению запасами:

а) на приобретение;

б) на оформление заказа;

в) на хранение запасов;

г) вследствие дефицита (нехватки запасов).

Затраты на приобретение определяются ценой единицы приобретаемой продукции (хранимого запаса). Эта цена может быть постоянной или со скидкой, которая зависит от величины партии (объема заказа).

Затраты на оформление заказа (накладные расходы) представляют собой постоянные издержки на подготовку одного заказа. Считается, что они не зависят от объема заказа и связаны с расходами по содержанию персонала, занимающегося определением потребности, заключением договоров на поставку, непосредственной закупкой необходимых запасов. К этой же группе расходов следует отнести почтово-телеграфные, канцелярские, командировочные затраты, связанные с размещением заказа, а также транспортные расходы, не зависящие от размера партии. Иногда в данную категорию включают издержки по переналадке оборудования перед выпуском очередной партии товара (при условии серийного производства однородной продукции).

Затраты на хранение запасов рассчитываются как сумма издержек на единицу товара за определенный период времени. Они зависят от величины партии поставки (уровня запасов). В основном это расходы по содержанию складских помещений: оплата обслуживающего персонала; аренда, амортизация и содержание зданий, сооружений, оборудования (отопление, освещение, вентиляция для обеспечения нормального режима хранения); расходы по учету и инвентаризации; затраты по недостаче, из-за убыли в процессе хранения и т. д. Общие складские издержки могут составлять порядка 25–50% стоимости хранимых материалов.

Затраты вследствие дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции (возможно из-за несвоевременных поставок). Они включают как потенциальные потери прибыли, так и более субъективную стоимость, связанную с утратой доверия клиентов. Прибыль организации при дефиците может снизиться за счет простоя производственных мощностей и трудовых ресурсов; переналадки производственного процесса; замены дефицитных материалов другими, более дорогими; выпуска продукции в сверхурочное время после ликвидации причины простоя; штрафа за нарушение сроков поставки;

5) *критерий оптимальности*. Он является интегрирующим показателем сформулированной цели управления запасами. В качестве целевой функции в математических моделях чаще всего используется минимум суммарных затрат, связанных с заготовкой и содержанием запасов.

Приложение N

Пример решения детерминированной задачи управления однономенклатурными запасами [14, с. 107–108]

База сельхозхимии имеет годовую потребность в калийных удобрениях, равную 960 т. Годовые затраты по хранению 1 т данного вида удобрений составляют 50 у. д. е. Затраты на подготовительно-заключительные операции, связанные с каждой поставкой и не зависящие от величины поставляемой партии, равняются 10 у. д. е. Необходимо определить оптимальные параметры системы управления запасами.

Необходимо найти фиксированный размер заказываемой партии удобрений, который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание этого ресурса. Модель строится исходя из следующих допущений:

1) уровень запасов снижается равномерно и, когда все запасы исчерпаны, подается заказ на поставку новой партии размером q;

2) спрос является детерминированным, т. е. определенным. Следовательно, предполагаются равномерно поступающие требования;

3) выполнение заказа осуществляется мгновенно. При этом на базе сельхозхимии не происходит систематического накопления или перерасхода запасов;

4) накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине;

5) издержки по хранению единицы запаса являются постоянными.

Найдем оптимальный размер заказываемой партии минеральных удобрений по формуле Уилсона:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot \nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 960}{50}} \approx 20 \text{ т.}$$

Оптимальный интервал между поставками этого ресурса составит:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \frac{20}{960} = 0{,}021 (\text{года}) \approx 8 \text{ дней.}$$

Средний уровень текущего запаса равен:

$$I^* = \frac{q^*}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ т.}$$

Оптимальное число поставок в год:

$$n^* = \frac{\nu}{q^*} = \frac{960}{20} = 48.$$

Среднегодовые затраты по управлению запасами при оптимальных параметрах:

$$L^* = \sqrt{2 \cdot K \cdot s \cdot \nu} = \sqrt{2 \cdot 960 \cdot 50 \cdot 10} \approx 980 \text{ у. д. е.}$$

Так как база сельхозхимии имеет 3 специализированные автомашины по перевозке удобрений, грузоподъемность которых по 5 т, то принято следующее решение: размер одной поставки установить равным 15 т. Тогда годовые издержки при таком состоянии будут равны:

$$L_д = K \cdot \frac{\nu}{q_д} + s \cdot \frac{q_д}{2} = 10 \cdot \frac{960}{15} + 50 \cdot \frac{15}{2} = 1015 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, при отличии размера поставки удобрений (15 т) от оптимального показателя (20 т) величина суммарных издержек системы управления запасами возрастет на 1015 – 980 = 35 у. д. е. по сравнению с минимально возможным значением.

Пример решения детерминированной задачи управления одиономенклатурными запасами (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности) [14, с. 108]

Специализированный магазин райпотребсоюза занимается продажей холодильников. Средняя потребность составляет 3 аппарата в квартал. Стоимость организации заказа равна 40 у. д. е., затраты на хранение 1 холодильника в квартал равны 8 у. д. е. Определить оптимальную партию поставки и среднеквартальные издержки размещения заказов и содержания запасов.

Оптимальный размер партии холодильников должен быть целочисленным и исчисляется по формуле:

$$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot K\cdot v}{s}}\le q^{*}\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot K\cdot v}{s}}.$$

В случае, если $q_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot K\cdot v}{s}}$ и $q_2=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot K\cdot v}{s}}$ будут целыми числами, то оптимальных решений два: $q^{*}=q_1$ и $q^{*}=q_2$.

Находим: $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot K\cdot v}{s}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot 40\cdot 3}{8}}=\frac{11}{2}$.

Так как числа $\frac{11}{2}\pm\frac{1}{2}$ целые, то имеем два оптимальных решения:

$$q_1^{*}=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}=5 \text{ и } q_2^{*}=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}=6.$$

Среднеквартальные издержки будут следующие:

$$L(3)=L(4)=\sqrt{2\cdot K\cdot s\cdot v}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 40\cdot 8}=44 \text{ у. д. е.}$$

Оптимальный интервал возобновления поставок холодильников:

– при q_1^{*} будет равен $\tau_1=\frac{5}{3}$ квартала, или 150 дней,

– при q_2^{*} будет равен $\tau_2=\frac{6}{3}$, т. е. 2 квартала.

СОДЕРЖАНИЕ