МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Е. Н. Крючков

МАТЕМАТИКА

В 2 частях

Часть 1

Практикум
для студентов, обучающихся по специальностям
общего высшего образования
6-05-0812-01 Техническое обеспечение производства
сельскохозяйственной продукции,
6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе

Горки
БГСХА
2023

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К93

Одобрено методической комиссией факультета механизации сельского хозяйства 21.03.2022 (протокол № 7) и Научно-методическим советом БГСХА 28.04.2022 (протокол № 8)

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат технических наук, доцент *Е. Н. Крючков*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. В. Жерело*

Курзенков, С. В.
К93 Математика : практикум: в 2 ч. Ч. 1 / С. В. Курзенков, Е. Н. Крючков. – Горки : БГСХА, 2023. – 147 с.
ISBN 978-985-882-338-2.

Изложены теоретические сведения, необходимые для решения заданий семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине «Математика», приведены разработки практических и домашних работ по дисциплине, а также примеры индивидуальных и модульных работ.

Для студентов, обучающихся по специальностям общего высшего образования 6-05-0812-01 Техническое обеспечение производства сельскохозяйственной продукции, 6-05-0812-03 Технический сервис в агропромышленном комплексе.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-882-338-2 (ч. 1)
ISBN 978-985-882-337-5

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в выработке у обучающихся прочных навыков в решении практических заданий по дисциплине «Математика».

Предлагаемая методическая разработка представляет собой практикум дисциплины «Математика» по темам: «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». В издании собраны краткие теоретические сведения к семинарским занятиям, подборка заданий для аудиторной и домашней работы по ним, тематические индивидуальные задания и типовые примеры модульных заданий.

Данная разработка является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. Н. Высшая математика: учеб.: в 2 т. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Ч. 1. – 544 с.

2. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч.: учеб. пособие / А. П. Рябушко. – 3-е изд. – Минск: Выш. шк., 2007. – Ч. 1. – 336 с.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – Москва: Высш. шк., 1987. – 352 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – Москва: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Занятие 1. Операции над матрицами

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Матрица A^{T}, полученная из данной матрицы заменой каждой ее строки столбом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной* к данной.

Например, транспонированной к $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ является матрица

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сложение и вычитание матриц. Операция сложения и вычитания матриц вводится только для матриц *одинаковой размерности.*

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$

Разностью двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $D_{m\times n} = (d_{ij})$ такая, что $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij};\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$

Умножение матрицы на число. Данная операция определена для матриц *любой размерности.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = \lambda a_{ij};\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$

Например, $-2\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & -16 & -20 \end{pmatrix}.$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $2A + B$.

Решение. 1) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на *матрицу* $B_{n\times p} = \left(b_{ik}\right)$ называется матрица $C_{m\times p} = \left(c_{ik}\right)$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk},$$

где $i = \overline{1,\ m};\ j = \overline{1,\ n};\ k = \overline{1,\ p},$ т. е. элемент i-й строки и k-го столбца результирующей матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Например, для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ произведение AB не определено, так как число столбцов матрицы A равно трем. Оно не совпадает с числом строк матрицы B, равным двум.

При этом определено обратное произведение BA, которое вычисляют следующим образом:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания к аудиторному занятию 1

1. Найдите $A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу X из уравнения

$$4\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите AB, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найдите A^2, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите $EB - 4B + A^2B$.

6. Проверьте, выполняются ли равенства $AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислите $AB + 2C^{\mathrm{T}}$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание к занятию 1

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $A^2 + 2AB - BA + B^{\mathrm{T}}$.

2. Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Покажите, что $AX = BX$, хотя $A \neq B$.

Занятие 2. Вычисление определителей матриц

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие *число* $|A|$ ($\det(A)$), называемое ее **определителем**, по следующим правилам:

– если $n = 1$, т. е. $A = (a_{11})$, то $|A| = a_{11}$;

– если $n = 2$, т. е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Пример 1. Найти определители матриц $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$$

Для того чтобы обобщить методику вычисления определителей квадратных матриц произвольного порядка, вводится понятие минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} *выбранного* элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель n 1-го порядка, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания в ней строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Например, если исходной матрицей является матрица 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ а } M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы называется ее минор, взятый со знаком плюс, если сумма индексов выбранного элемента $i + j$ – четное число, и со знаком минус, если эта сумма нечетная, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, для матрицы 3-го порядка $A_{11} = M_{11}$, $A_{32} = -M_{32}$.

Тогда, если $n \geq 2$, то определитель матрицы n-го порядка можно вычислите на основе разложения его по элементам некоторого ряда, т. е. определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда заданной квадратной матрицы и соответствующих им алгебраических дополнений. При этом схемы разложений определителя по выбранной строке или выбранному столбцу будут выглядеть соответственно:

по k-й строке – $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj};$

по p-му столбцу – $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} A_{ip},$

где a_{kj} и a_{ip} – элементы выбранного ряда;

A_{kj} и A_{ip} – алгебраические дополнения соответствующим элементам выбранного ряда матрицы.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2(-9 + 24) +$

$+1(-15-6) = 2 \cdot 15 - 21 = 9.$

Задания к аудиторному занятию 2

1. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

2. Найдите все миноры и алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix};\ 3)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix};\ 4)\ \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Домашнее задание к занятию 2

Вычислите определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix};\ 2)\ \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix};\ 3)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};\ 4)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 10 & 11 & 9 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Занятие 3. Обратная матрица

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю $|A| \neq 0,$ иначе матрица A *вырожденная*.

Матрица $\tilde{A}$ называется *союзной* к матрице A, если ее элементы получаются по следующей схеме:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Например, для матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ союзной матрицей будет матрица вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A = E,$ где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет ту же размерность, что и матрица A.

Справедливо утверждение: всякая невырожденная матрица A имеет обратную A^{-1}, причем $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$

Пример 1. Найти обратную матрицу к заданной $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$

Решение. Обратная матрица к данной определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Определитель матрицы A равен $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10.$

Союзная матрица для матриц второго порядка имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

В нашем случае алгебраические дополнения для элементов заданной матрицы будут следующими: $A_{11} = -2$; $A_{12} = -4$; $A_{21} = -(-3) = 3$; $A_{22} = 1$.

Из них составим союзную матрицу к заданной $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда обратная матрица будет иметь вид $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная к матрице $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \dfrac{9}{4}$, значит, матрица A имеет обратную.

Пример 3. Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ является обратной к $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем произведение матриц A и B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично находим произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-3+1&3-6+3&3-9+6\\-3+5-2&-3+10-6&-3+15-12\\1-2+1&1-4+3&1-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, матрица A является обратной к матрице B.

Задание к аудиторному занятию 3

Найдите обратную матрицу к данной:

1) $\begin{pmatrix}9&-2\\-6&5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3&-2\\-4&5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}5&-2&1\\-2&1&3\\2&0&-3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}8&0&0\\5&1&4\\3&3&3\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}4&3&-6\\1&0&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}4&1&2\\6&-1&3\\1&-5&1\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}7&4&5\\3&2&2\\0&-1&2\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}2&-2&-1\\5&-1&3\\1&6&0\end{pmatrix}$.

Домашнее задание к занятию 3

Вычислите определители:

1) $\begin{pmatrix}7&-6\\4&-9\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-7&2\\3&-5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2&3&1\\4&-1&5\\1&-2&1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2&-3&7\\10&11&9\\6&-8&5\end{pmatrix}$.

Покажите, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Занятие 4. Решение квадратных систем линейных уравнений матричным способом

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, т. е. *квадратная система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричной форме $Ax = b$.

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, подстановка которых в уравнения системы обращает их в тождества.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения. В случае неопределенной системы каждое ее решение называется *частным решением*. Совокупность всех частных решений системы называется ее *общим решением.*

Решить систему – значит выяснить, совместна она или несовместна, и найти все ее решения.

Основная матрица *A* такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то матрица системы называется *невырожденной.*

Матричный способ решения системы заключается в реализации формулы

$$x = A^{-1}b.$$

Пример 1. Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Система приведена, поэтому, согласно ее заданию, можем выписать:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{3-(-2)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы x:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 7 \\ -2\cdot 0 + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы следующее: $\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Система приведена, поэтому, согласно ее заданию, можем выписать:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы x:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A^{-1}b=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix} (-5)\cdot 0+(-1)\cdot 14+(-1)\cdot 16 \\ (10)\cdot 0+14\cdot 14+(-16)\cdot 16 \\ (-5)\cdot 0+(-19)\cdot 14+11\cdot 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы следующее: (1; 2; 3).

Задание к аудиторному занятию 4

Матричным способом решите системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1-4x_2-5x_3=8, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=9, \\ x_1-2x_2-x_3=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=3, \\ 5x_1+12x_2-2x_3=-1, \\ 4x_1-9x_2-2x_3=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x_1-2x_2+3x_3=8, \\ 4x_1-x_2+6x_3=1, \\ 7x_1+8x_2=-1. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 4

Матричным способом решите системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$

Занятие 5. Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, т. е. *квадратная система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Введем обозначения Δ – определитель матрицы коэффициентов системы, а Δ_i – определители, образуемые из Δ путем замены в нем i-го столбца на столбец свободных членов.

Правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными можно сформулировать так:

– если определитель системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, причем $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}$;

– если определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$) и все $\Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то система имеет бесчисленное множество решений;

– если определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$) и найдется такое k, что $\Delta_k \neq 0$, то система является несовместной, т. е. не имеет ни одного решения.

Пример 1. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$ Так как он не равен нулю, то можем сделать вывод, что система имеет единственное решение, причем $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,\ 2}.$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

Тогда решение системы запишется в виде (1; 2).

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Так как все определители $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то данная система уравнений является неопределенной. Найдем множество решений системы, придавая одной из переменных произвольные значения. Пусть $x \in R$, тогда выражаем переменную y через x, например, из первого уравнения: $-3y = -2x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{3}.$

Итак, множество системы уравнений имеет вид $\left(x;\ \dfrac{2x+1}{3}\right).$

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ -9x - 3y = -1 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 1 = -11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 36 = 33.$$

Так как определитель системы Δ = 0, а вспомогательные определители $\Delta_1 = -11 \neq 0$; $\Delta_2 = 33 \neq 0$, то система уравнений несовместна или не имеет решений (∅)

Пример 4. Найти методом Крамера решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

Значит, система имеет единственное решение (1; 2; 3). Его числовые значения находятся по формулам

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1; \; x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2; \; x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Задание к аудиторному занятию 5

Решите системы уравнений методом Крамера:

1) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+\ \ 4y=1, \\ 9x+12y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+\ \ y+3z=-9, \\ 8x+3y+5z=-13, \\ 2x+5y-\ \ z=-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+\ \ y-\ z=1, \\ 5x+2y+3z=2, \\ 8x+3y+2z=3. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 5

Решите системы уравнений методом Крамера

1) $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x-5y=40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-\ \ y+5z=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+\ 2y+3z-4=0, \\ 2x+\ \ y-\ \ z-3=0, \\ 3x+3y+\ 2z-7=0. \end{cases}$

Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Элементы линейной алгебры»

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Вычислите выражение $\dfrac{(A^2B-4B)^T C}{2}$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & G-3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & G-2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} G \\ 22-N \end{pmatrix}$.

2. Решите систему линейных уравнений $Ax=b$ методом Крамера и матричным способом, если

$$A=\begin{pmatrix} G+1 & 2 & 0 \\ 2 & N & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ G \\ -1 \end{pmatrix}.$$

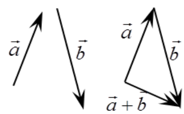
Сравните результаты решения системы.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

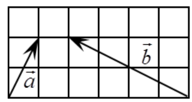
Занятие 1. Характеристики векторов и операции над ними

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

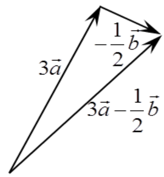
Длина вектора $\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}$.



Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$.



Пример 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $3\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

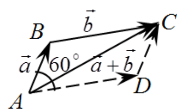


Решение. Пусть заданы векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ в прямоугольной системе координат. Линейные операции над ними выполняются по следующим формулам:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}(x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b); \quad \alpha\vec{a} = (\alpha x_a; \alpha y_a; \alpha z_a).$$

Пример 2. Даны два вектора $\vec{a}(2; -1;\ 4)$ и $\vec{b}(0;\ -1;\ 2)$. Найти координаты и длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a}(4; -2;\ 8)$; $-3\vec{b}(0;\ 3;\ -6)$; $2\vec{a} - 3\vec{b}(4+0;\ -2+3;\ 8-6)$; $2\vec{a} - 3\vec{b}(4;\ 1;\ 2)$; $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$.

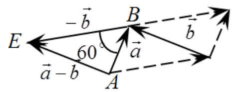


Пример 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Заметим, что $\angle ABC = 120°$. Тогда длину вектора $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ можем найти по теореме косинусов $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\angle ABC)} =$

$$= \sqrt{2^2 + 7^2 - 2\cdot 2\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4+49+14} = \sqrt{67}.$$

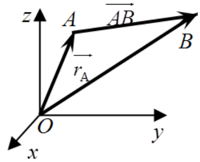
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{AE} = \vec{a}-\vec{b}$. Так как $\angle ABE = 60°$, то длина вектора $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ по теореме косинусов равна



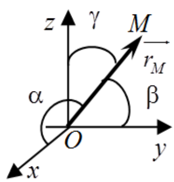
$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\angle ABE)} = \sqrt{4+49-14} = \sqrt{39}.$$

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ *на число* $\lambda \neq 0$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda|\left|\vec{a}\right|$ и коллинеарен вектору $\vec{a}$. Причем векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ сонаправлены в случае $\lambda > 0$ и имеют противоположные направления, если $\lambda < 0$.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ произвольную точку M. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ будем называть *координатами точки М*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M и обозначается $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r_M}$.



Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты начальной точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и конечной точки $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$. Нетрудно заметить, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$. Тогда, согласно введенным для векторов операциям, имеем $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.



Рассмотрим *радиус-вектор точки* $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Пусть $\overrightarrow{r_M}$ образует с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно углы α, β, γ. Направление вектора $\overrightarrow{r_M}$ определяется с помощью направляющих косинусов cos (α), cos (β), cos (γ), которые равны:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|}; \quad \cos(\beta) = \frac{y_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|}; \quad \cos(\gamma) = \frac{z_M}{\left|\overrightarrow{r_M}\right|},$$

где $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

Пример 4. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-3;-4)$, $B(1;-2)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\big(1-(-3);-2-(-4)\big),\ \ \overrightarrow{AB}\big(1+3;\ -2+4\big),\ \ \overrightarrow{AB}\big(4;\ 2\big).$$

Тогда длина вектора будет равна

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ .$$

Пример 5. Найдите направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AM}$, если $A(3;-4;\ 1)$, $M(4;\ 6;\ -3)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}(4-3;\ 6-(-4);\ -3-1);\quad \overrightarrow{AM}(1;\ 10;\ -4).$$

Тогда его длина и направляющие косинусы будут соответственно равны:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{1^2+10^2+(-4)^2} = \sqrt{1+100+16} = \sqrt{117},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{117}};\quad \cos(\beta) = \frac{10}{\sqrt{117}};\quad \cos(\gamma) = \frac{-4}{\sqrt{117}}.$$

Пусть задан ненулевой вектор $\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$. Тогда любой коллинеарный с ним вектор будет отличаться от него на постоянный множитель, т. е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\vec{b}(\lambda x_a;\lambda y_a;\lambda z_a)$. Следовательно, у коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ координаты пропорциональны:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda,$$

причем, если: 1) $\lambda > 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены;
2) $\lambda < 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположные направления;
3) $0 < |\lambda| < 1$, то $\vec{a}$ короче вектора $\vec{b}$ в λ раз;
4) $|\lambda| > 1$, то $\vec{a}$ длиннее вектора $\vec{b}$ в λ раз.

Условием равенства двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является *совпадение их координат*.

Пример 6. Определить, при каких значениях параметров α и β векторы $\vec{a}(-2;\,3;\,\beta)$ и $\vec{b}(\alpha;\,-6;\,2)$ коллинеарны. Как направлены эти векторы и как соотносятся их длины?

Решение. Из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет следовать пропорциональность их соответствующих координат:

$$\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}==\frac{z_a}{z_b}=\lambda.$$

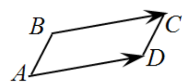
В нашем случае эти пропорции будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2}=\lambda.$$

Вторая пропорция полностью определена, откуда $\lambda=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{-2}{\alpha}=-\frac{1}{2}$, откуда $\alpha=4$. С другой стороны $\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}$, тогда $\beta=-1$.

Так как $\lambda=-0{,}5$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположные направления и вектор $\vec{a}$ в два раза короче вектора $\vec{b}$.

Пример 7. Даны три вершины параллелограмма *ABCD*: *A*(3; –4; 7); *B*(–5; 3; –2); *C*(1; 2; –3). Найти координаты вершины *D*.



Решение. Заметим, что вектор $\overrightarrow{BC}$ равен вектору $\overrightarrow{AD}$, а значит, координаты этих векторов равны. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{BC}(6;\,-1;\,-1)$, $\overrightarrow{AD}(x_D-3;\,y_D+4;\,z_D-7)$. Тогда $x_D-3=6$ или $x_D=9$; $y_D+4=-1$ или $y_D=-5$; $z_D-7=-1$ или $z_D=6$. Таким образом, точка *D* имеет координаты $D(9;\,-5;\,6)$.

Задания к аудиторному занятию 1

1. Постройте радиус-вектор точек: 1) $A(2;-3;1)$; 2) $C(1;0;3)$.

2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте вектор $\frac{1}{4}\vec{a}-3\vec{b}$.

3. Векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ являются медианами треугольника ABC. Выразите через $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ векторы, определяющие стороны данного треугольника: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.

4. Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ и их длину.

5. Определите точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}(3;-1;4)$, если его начало совпадает с точкой $M(1;2;-3)$.

6. Выясните, может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$.

7. Проверьте, коллинеарны ли векторы $\vec{a}(2;\ -1;\ 3)$ и $\vec{b}(-6;\ 3;\ -9)$. Если да, то установите, какой из них длиннее и во сколько раз. Как они направлены – в одну сторону или в противоположные?

8. Проверьте, служат ли четыре точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$, $D(3;\ -5;\ 3)$ вершинами трапеции?

9. Найдите орты векторов: 1) $\vec{a}(6;-2;-3)$; 2) $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$.

10. Даны векторы $\vec{a}(3;\ -2;\ 6)$ и $\vec{b}(-2;\ 1;\ 0)$. Найдите координаты следующих векторов: 1) $\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $3\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2(\vec{a} + \vec{b})$.

Домашнее задание к занятию 1

1. Постройте радиус-вектор точки $B(-1;\ -4;\ 2)$.

2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте следующие векторы:

$$1)\ 2\vec{b} - \vec{a};\quad 2)\ -\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}.$$

3. Даны точки $M(2;3;-5)$ и $N(1;\ 0;\ -3)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, его длину и направляющие косинусы.

4. Даны точки $A(2;-1;3)$, $B(1;0;-2)$, $C(2;\ 4;\ 1)$, $D(1;\ 1;\ 5)$. Найдите: 1) координаты вектора $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$; 2) длину вектора $\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

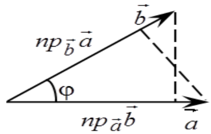
З а н я т и е 2. Скалярное произведение векторов, его свойства и применение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi).$$

Можно заметить, что $|\vec{a}|\cos(\varphi)=np_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos(\varphi)=np_{\vec{a}}\vec{b}$. Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}$.



Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ – переместительный закон;

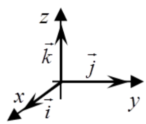
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – распределительный закон;

3) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны ($\vec{a}\|\vec{b}$), то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$;

4) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны ($\vec{a}\perp\vec{b}$), то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (или один из векторов нулевой ($\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$));

5) скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату длины этого вектора $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

В частности, скалярное произведение единичных векторов (ортов) удовлетворяет равенствам:



$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

В координатной форме скалярное произведение векторов

$\vec{a}(x_a;y_a;z_a)$ и $\vec{b}(x_b;y_b;z_b)$ равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$.

Пример 1. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b},$ если $\left|\vec{a}\right| = 2,$ $\left|\vec{b}\right| = 5,$ $(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}.$

Решение. Воспользуемся пятым свойством скалярного произведения векторов:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^{\,2} - 24\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 4 - 24\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot 25} = \sqrt{36 - 120 + 400} = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}\,.$$

Применение скалярного произведения векторов.

1. *Нахождение угла между векторами* $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2} + z_a^{\,2}}\sqrt{x_b^{\,2} + y_b^{\,2} + z_b^{\,2}}}\,.$$

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(2;\,-1;\,3)$, $B(1;\,1;\,1)$ и $C(0;\,0;\,5)$. Найти внутренний угол при вершине C.

Решение. Для нахождения угла C найдем координаты векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB}(1-0;\,1-0;\,1-5) = (1;\,1;\,-4);\quad \overrightarrow{CA}(2-0;\,-1-0;\,3-5) = (2;\,-1;\,-2).$$

Тогда $\cos(\angle C) = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \dfrac{1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} =$

$= \dfrac{2 - 1 + 8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}\cdot 9} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Таким образом, $\angle C = \dfrac{\pi}{4}.$

2. *Нахождение проекции вектора на вектор*. Пусть векторы заданы в координатной форме: $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$. Тогда проекции определяются формулами

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2}};$$

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}}.$$

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

Решение.

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2}} = \frac{2\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{13}{\sqrt{18}} = \frac{13}{3\sqrt{2}}.$$

3. *Проверка векторов на ортогональность.* Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда

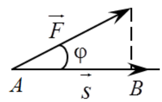
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

Пример 4. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем координаты векторов, определяющих диагонали четырехугольника $\overrightarrow{AC}(-4-1; 1+2; 1-2)$, или $\overrightarrow{AC}(-5; 3; -1)$; $\overrightarrow{BD}(-5-1; -5-4; 3-0)$, или $\overrightarrow{BD}(-6; -9; 3)$. Проверим ортогональность этих векторов:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -5\cdot(-6) + 3\cdot(-9) - 1\cdot 3 = 30 - 27 - 3 = 0\ .$$

Это означает, что диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны.



4. *Нахождение работы постоянной силы.* Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Из курса физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\varphi) = \vec{s}\cdot\vec{F}$.

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора перемещения на вектор силы.

Пример 5. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F}$, если она имеет координаты $\vec{F}=3\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$, а точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;\,4;\,6)$ в положение $B(4;\,2;\,7)$. Под каким углом к $\vec{s}$ направлена сила $\vec{F}$?

Решение. Найдем перемещение материальной точки, т. е. вектор $\vec{s}=\overrightarrow{AB}$. $\vec{s}(4-2;\ 2-4;\ 7-6)$, или $\vec{s}(2;-2;\ 1)$.

Тогда

$$A=\vec{s}\cdot\vec{F}=2\cdot 3+(-2)\cdot 2+1\cdot 4=6 \text{ (ед. работы)}.$$

Угол φ между $\vec{F}$ и $\vec{s}$ найдем по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|}=\frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Задания к аудиторному занятию 2

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что длины этих векторов соответственно равны $\left|\vec{a}\right|=3$ и $\left|\vec{b}\right|=4$, вычислите:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^{\,2}$; 3) $\vec{b}^{\,2}$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(a+2\vec{b})$; 6) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

2. Даны векторы $\vec{a}(4;\,-2;\,-4)$, $\vec{b}(6;\,-3;\,2)$. Вычислите:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$; 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

3. Даны три силы: $\overrightarrow{M}(3;-4;2)$, $\vec{N}(2;3;-5)$ и $\vec{P}(-3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;\,3;\,-7)$ в положение $M_2(4;\,-1;\,-4)$.

4. Определите, при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны.

5. Даны вершины треугольника $A(–1; –2; 4)$, $B(–4; –2; 0)$, $C(3; –2; 1)$. Определите его внутренний угол при вершине B.

6. Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c}(3;-4;12)$. Вычислите $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

7. Даны точки $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ -4)$. Найдите: 1) $(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $np_{\overrightarrow{AD}}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB})$; 3) $(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\,\hat{;}\,\overrightarrow{DA})$.

Домашнее задание к занятию 2

1. Даны точки $A(–1; 3; –7)$, $B(2; –1; 5)$ и $C(0; 1; –5)$. Вычислите:
1) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) координаты вектора $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

2. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{F}(3;-2;-5)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2; –3; 5)$ в положение $B(3; –2; 1)$.

3. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Определите его внутренний угол при вершине C и $np_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$.

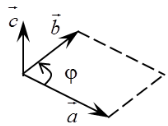
Занятие 3. Векторное произведение двух векторов, его свойства и применение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$, где $0 \le \varphi \le \pi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. численно *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, *как на сторонах*;

2) вектор $\vec{c}$ *ортогонален векторам* $\vec{a}$ и $\vec{b}$;



3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке *образуют правую тройку векторов*, т. е. если смотреть на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с конечной точки вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет осуществляться против часовой стрелки.

Обозначается векторное произведение как $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

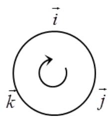
1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$;

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

В частности, векторное произведение единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, образующих прямоугольный базис, определяется по следующей схеме: векторное произведение совпадающих сомножителей равно нулевому вектору; векторное произведение несовпадающих сомножителей равно третьему, не задействованному в произведении орту, взятому с положительным знаком, если направление кратчайшего поворота от первого сомножителя до второго совпадает с направлением часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае.



$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

В координатной форме векторное произведение векторов $\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\vec{b}(x_b;\ y_b;\ z_b)$ равно:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Применение векторного произведения векторов.

1. *Проверка векторов на коллинеарность.* Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и наоборот.

Пример 1. Проверить векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ на коллинеарность.

Решение. Запишем векторы в координатной форме $\vec{a}\,(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}\,(1;\ 2;\ -3)$ и найдем их векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

Так как $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, то эти векторы не коллинеарны.

2. *Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.* Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ модуль этого произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ как на сторонах, т. е.

$$S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{b}\right|\sin(\varphi)=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{matrix}\right\|,$$

а значит, площадь соответствующего треугольника будет равна

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{b}\right|\sin(\varphi)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{matrix}\right\|.$$

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b},\ \ 3\vec{a}+\vec{b},$ если $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\ (\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b})=30°.$

Решение. Площадь параллелограмма определяется по формуле

$$S_{\text{пар}}=\left|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})\right|.$$

Найдем

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times\ (3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8(\vec{b}\times\vec{a}).$$

Тогда

$$S_{\text{пар}} = 8\left|\vec{b}\right|\,\left|\vec{a}\right|\,\sin 30^\circ = 4\ (\text{ед.}^2).$$

Пример 3. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;\,2;\,2)$, $B(4;\,0;\,3)$, $C(0;\,1;\,0)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC}(0-2;\ 1-2;\ 0-2),\ \text{или}\ \overrightarrow{AC}(-2;\ -1;\ -2);$$

$$\overrightarrow{AB}(4-2;\ 0-2;\ 3-2),\ \text{или}\ \overrightarrow{AB}(2;\ -2;\ 1).$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

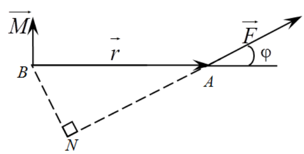
$$= \vec{i}\,(-1-4) - \vec{j}\,(-2+4) + \vec{k}\,(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k},$$

а его модуль равен:

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$$

Следовательно, площадь треугольника равна $S_\Delta = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед.^{2}).

3. *Определение момента силы относительно точки*. Пусть в точке A приложена сила $\vec{F}$ и пусть B – некоторая точка пространства.



Из физики известно, что моментом силы $\vec{F}$ относительно точки B называется вектор $\overrightarrow{M}$, который проходит через точку B и удовлетворяет следующим условиям:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки B, A, N;

2) численно равен произведению силы на плечо:

$$\overrightarrow{M} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{r}\right|\sin(\varphi) = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|\sin(\vec{F}\,\hat{;}\,\overrightarrow{BA});$$

3) образует правую тройку векторов с векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{F}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}.$$

Пример 4. Найти величину момента силы $\vec{F}(1;\ 0;\ 1)$ относительно точки $A(-2;\ 1;\ 3)$, если сила приложена к точке $B(3;\ -1;\ 0)$.

Решение. Определим координаты вектора:

$$\overrightarrow{AB}(3+2;\ -1-1;\ 0-3),\quad \overrightarrow{AB}(5;\ -2;\ -3).$$

Момент $\overrightarrow{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки A найдем как

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M}(-2;\ -8;\ 2).$$

Тогда величина момента силы $\vec{F}$ равна модулю вектора:

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Задания к аудиторному занятию 3

1. Даны векторы: $\vec{a} = 10$, $\vec{b} = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислите $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

2. Даны векторы: $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 26$ и $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 72$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, вычислите: 1) $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\right|$; 2) $\left|(\overrightarrow{3a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})\right|$.

4. Даны векторы: $\vec{a}(3; -1; -2)$ и $\vec{b}(1;\ 2;\ -1)$. Найдите координаты векторных произведений: 1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

5. Сила $\vec{P}(2;-4;5)$ приложена к точке $M_0(4;-2;3)$. Определите момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

6. Даны три силы: $\vec{M}(2;-1;-3)$, $\vec{N}(3;2;-1)$ и $\vec{P}(-4;1;3)$, приложенные к точке $C(-1;4;-2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

7. Даны вершины треугольника: $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислите длины его высот.

Домашнее задание к занятию 3

1. Даны точки: $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ и $C(3;2;1)$. Найдите координаты векторных произведений: 1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=5$, вычислите $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. Даны точки: $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

Занятие 4. Смешанное произведение векторов, его свойства и применение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) в произведении есть коллинеарные векторы;

в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$.

4. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \lambda\vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \mu\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$.

В координатной форме смешанное произведение векторов $\vec{a}\,(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ и $\vec{c}(x_c; y_c; z_c)$ равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Применение смешанного произведения векторов.

1. *Проверка тройки векторов на компланарность.*

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю при условии, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{ векторы } \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Пример 1. Доказать, что точки $A(5;\ 7;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9;\ 4;\ -4)$, $D(1;\ 5;\ 0)$ лежат в одной плоскости.

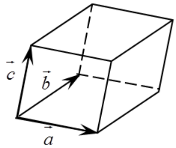
Решение. Если заданные точки лежат в одной плоскости, то соответствующая тройка векторов, выходящих из общего начала, будет компланарна. Проверим, компланарны ли векторы с общим началом в точке A. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(-2;\ -6;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}(4; -3; -2)$, $\overrightarrow{AD}(-4; -2;\ 2)$. Вычислим их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

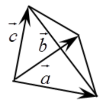
2. *Определение взаимной ориентации тройки векторов в пространстве.* Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве правоориентирована, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, и левоориентирована при $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

3. *Нахождение объемов.* Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах, т. е.



$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \left\| \begin{matrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{matrix} \right\|.$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах, равен одной шестой смешанного произведения этих векторов, взятого по абсолютной величине, т. е.



$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{matrix} \right\|.$$

Пример 2. Найти длину высоты треугольной пирамиды с вершинами $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$, опущенную на грань BCD.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}(-2; -3; -4)$, $\overrightarrow{BD}(1; 4; -3)$, $\overrightarrow{BC}(4; -1; -2)$. Тогда объем пирамиды можно вычислите по формуле

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)\right| = 20(\text{ед.}^3).$$

Из школьного курса математики известно, что $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h.$ Откуда следует, что $h_{\text{В}} = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}\cdot$

Поэтому для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-8-3)-\vec{j}\,(-2+12)+\vec{k}\,(-1-16)=$$

$$=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

Определим модуль векторного произведения векторов:

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}\,.$$

Тогда площадь треугольника BCD равна $S_{\text{осн}}=\sqrt{510}\,/\,2$ (ед.^{2}), а длина искомой высоты – $h_{\text{В}}=\dfrac{3V}{S_{\text{осн}}}=\dfrac{2\cdot 3\cdot 20}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$ (ед.).

Задания к аудиторному занятию 4

1. Даны три вектора: $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Требуется:

1) вычислите смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

2) установите, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;

3) определите, какой является тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (правой или левой);

4) вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Проверьте, лежат ли точки $A(1;\,2;-1)$, $B(0;\,1;\,5)$, $C(-1;\,2;\,1)$, $D(2;\,1;\,3)$ в одной плоскости.

3. Вычислите объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;\,1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;\,1;\,3)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины C.

4. Даны вершины пирамиды: $A(2;\,3;\,1)$, $B(4;\,1;-2)$, $C(6;\,3;\,7)$ и $D(-5;-4;\,8)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины D. Установите, является ли эта пирамида тетраэдром?

Домашнее задание к занятию 4

Проверьте, лежат ли точки $A(2;\ -1;\ 0)$, $B(1;\ 4;\ -1)$, $C(2;\ 3;\ -1)$, $D(4;\ 5;\ 1)$ в одной плоскости. Если не лежат, то определите:

1) какой является тройка векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ – правой или левой;

2) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ как на сторонах;

3) высоту пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ как на сторонах, опущенную из вершины C.

Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Элементы векторной алгебры»

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

Даны координаты точек $A(5G - N;\ 3;\ 2)$, $B(-1;\ N - G;\ 2)$, $C(N - 4G;\ 3;\ 8)$, $D(1;\ 6;\ N - 15)$. Выполните следующие действия.

1. Найдите координаты векторов: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

2. Вычислите:

а) длины сторон треугольника ABC;

б) его внутренние углы;

в) площадь треугольника;

г) высоту треугольника, опущенную из вершины A, если $G = 1$; из вершины B, если $G = 2$; из вершины C, если $G = 3$.

3. Определите работу постоянной силы $\vec{F} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ по прямолинейному перемещению материальной точки D в точку C.

4. Найдите величину момента постоянной силы $\vec{F}$ в точке B системы, при условии, что сила $\vec{F} = 7\vec{i} + 2\vec{k}$ приложена к точке D этой системы.

5. Проверьте, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости. В случае если не лежат в одной плоскости, определите объем пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$, как на сторонах.

3. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К ПЕРВОМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x+2y+z = 1, \\ 2x-3y-2z=-3, \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ методом Крамера и матричным методом.

2. Сила $\vec{F}=4\vec{i}+2\vec{k}$ приложена к вершине $A(6;\ 3;\ -1)$ треугольника ABC. Вычислите работу силы по стороне AB и величину момента силы относительно середины стороны BC, если $B(2;\ 5;\ -4)$, $C(1;\ 3;\ -1)$.

3. Даны координаты точек $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(-1;\ 6;\ 2)$, $C(-1;\ 3;\ 8)$, $D(1;\ 6;\ 1)$. Проверьте, лежат ли точки в одной плоскости, если не лежат, то найдите:

1) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направляющие косинусы;
2) $\angle ACB$;
3) объем пирамиды $ABCD$;
4) величину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из ее точки B.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

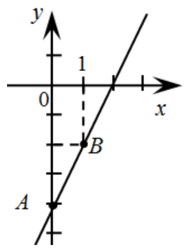
Занятие 1. Прямая на плоскости, основные понятия

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

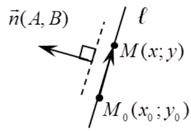
Построение прямой на плоскости. Известно, что прямую на координатной плоскости однозначно определяют две заданные точки.

x	0	1
y	–4	–2

Например. Для построения прямой, заданной уравнением $2x - y - 4 = 0$, достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. В нашем случае такими точками являются точка $A(0;\ -4)$ и точка $B(1;\ -2)$, которые были получены путем выражения для переменной y из уравнения прямой при заданных значениях переменной x, равных 0 и 1. Построим эти точки на координатной плоскости и соединим их прямой линией.



Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору. Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B)$. Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором прямой*.



Из ортогональности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ следует равенство

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору*.

Например. Уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1; -4)$, будет иметь следующий вид:

$$1(x + 3) - 4(y - 5) = 0.$$

Общее уравнение прямой. Пусть прямая задана уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Если в нем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получим

$$Ax + By + C = 0,$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Например, раскроем скобки и приведем подобные в уравнении $(x + 3) - 4(y - 5) = 0$, получим $x + 3 - 4y + 20 = 0$, или общее уравнение прямой примет вид $x - 4y + 23 = 0$.

Частными случаями общего уравнения прямой являются:

$Ax + By = 0$ $(C = 0)$ – прямая проходит через начало координат;

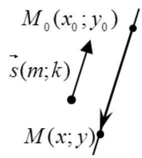
$Ax + C = 0$ $(B = 0)$ – прямая параллельна оси Oy;

$By + C = 0$ $(A = 0)$ – прямая параллельна оси Ox;

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Oy;

$By = 0$ $(A = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Ox.

Каноническое уравнение прямой на плоскости. Пусть искомая прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m; k)$. Ненулевой вектор $\vec{s}$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.



Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ следует равенство

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

Параметрические уравнения прямой. Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ следует, что $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x-x_0=tm,\ y-y_0=tk.$$

В результате получим *параметрические уравнения прямой на плоскости*:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+kt, \end{cases}$$

где $\vec{s}(m;k)$ – направляющий вектор прямой;

$(x_0;y_0)$ – координаты точки, принадлежащей данной прямой.

Пример 1. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3; 5)$ параллельно вектору $\vec{s}(2; 6)$.

Решение. Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k},\quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{6}.$$

Приравняем в каноническом уравнении прямой пропорции к параметру t и выразим из них переменные x и y:

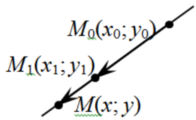
$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{6}=t.$$

Получим параметрические уравнения этой же прямой:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 6t + 5. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M_1(x_1;\, y_1)$.

Выберем на прямой ℓ текущую точку $M(x;\, y)$ и найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\, y - y_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0;\; y_1 - y_0)$. Заметим, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарны, т. е. можем записать



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

Заметим, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0;\, y_1 - y_0)$.

Если $x_1 = x_0$, то уравнение прямой примет вид $x = x_0$. При $y_1 = y_0$ уравнение прямой будет иметь вид $y = y_1$.

Например, составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;\, -3)$ и начало координат.

Решение. Уравнение прямой имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

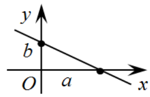
где $x_0 = y_0 = 0$; $x_1 = -2$; $y_1 = -3$.

Тогда получим

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}.$$

Избавимся от знаменателей в левой и правой частях уравнения, используя свойство пропорции. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. В результате общее уравнение прямой примет вид $3x - 2y = 0$.

Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат. Пусть искомая прямая ℓ отсекает от осей координат отрезки: a от оси Ox и b – от оси Oy. Тогда *уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат*, будет иметь вид



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Пример 2. Прямая отсекает от координатных осей равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками, равна 8 см^2.

Решение. Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых от осей координат, имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Так как прямая отсекает равные отрезки, то $a = b$. Это означает, что образованный при этом прямоугольный треугольник будет иметь площадь, равную $a^2 / 2 = 8$. Таким образом, $a = 4$ и уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1.$$

Умножим обе части уравнения на 4 и перенесем все его слагаемые в левую часть. Тогда общее уравнение прямой будет выглядеть следующим образом:

$$x + y - 4 = 0.$$

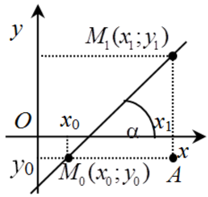
Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом. Пусть искомая прямая ℓ проходит через две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$. При этом она будет задаваться уравнением

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Выразим из данного уравнения числитель правой части: $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ и введем обозначение $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, коэффициент k будем называть *угловым коэффициентом*. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Это уравнение называют *уравнением прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом*.



Допустим, что прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и образует с положительным направлением оси Ox угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0AM_1. Можно заметить, что величина $y_1 - y_0$ определяет величину противолежащего катета к углу α, а $x_1 - x_0$ – величину прилежащего катета. Это означает, что с геометрической точки зрения *угловой коэффициент прямой определяет тангенс угла наклона этой прямой с положительным направлением оси Ox*:

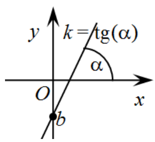
$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}(\alpha).$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Приведем подобные слагаемые в уравнении

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В результате получим

$$y = kx + (y_0 - kx_0).$$



Введем обозначение $b = y_0 - kx_0$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox);

b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример 3. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Решение. Выполним преобразования данного уравнения, приводящие к уравнению прямой в отрезках, отсекаемых ею от осей координат:

$$12x - 5y = 65,\ \frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1,\ \ \frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1.$$

Преобразуем общее уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$12x - 5y - 65 = 0,\ -5y = 65 - 12x,\ \ y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5},\ \ y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Угловой коэффициент данной прямой $k = \frac{12}{5}$.

Задания к аудиторному занятию 1

1. Определите, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$, а какие не лежат на ней. Постройте данную прямую.

2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$ и их абсциссы соответственно равны числам: 4, 0, 2, –2 и –6. Определите ординаты этих точек. Постройте данную прямую.

3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 и Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$ и их ординаты соответственно равны числам: 1, 0, 2, –1, 3. Определите абсциссы этих точек. Постройте данную прямую.

4. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой. Постройте эти прямые.

5. Найдите проекцию точки $P(-6;\ 4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

6. Даны вершины треугольника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$. Составьте уравнения его сторон и медиан.

7. Даны вершины треугольника $M_1(2;-2)$, $M_2(3;-5)$, $M_3(5;\ 7)$. Составьте уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

8. Даны прямые: 1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4) $3x-5y-2=0$. Составьте для них уравнения «в отрезках» и постройте эти прямые.

9. Найдите точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $x+2y-5=0$ и $3x-2y+1=0$ перпендикулярно к прямой $2x+3y+7=0$.

11. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ и составляющую с положительным направлением оси Oy угол $\varphi = 120°$. Постройте эту прямую.

12. Найдите уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = -4$ и составляющей с осью Ox угол $\varphi = 45°$.

13. Составьте уравнение прямой и постройте прямую на чертеже, зная ее угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

1) $k=\frac{2}{3}$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -2$;

4) $k=-\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$.

14. Определите угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых:

1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$;

4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.

15. Вычислите угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки:

а) $M_1(2;-5)$, $M_2(3;2)$; б) $P(-3;1)$, $Q(7;8)$; в) $A(5;-3)$, $B(-1;6)$.

Домашнее задание к занятию 1

1. Определите точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и постройте эту прямую на чертеже.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+9=0$ и параллельно прямой $x+3y=0$. Определите направляющий и нормальный векторы прямой, а также ее угловой коэффициент и угол, образованный ею с положительным направлением оси Ox.

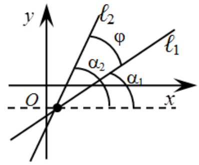
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x+3y-8=0$ и $x-4y+5=0$ и через точку $A(-2;3)$. Определите направляющий и нормальный векторы прямой, ее угловой коэффициент. Сделайте построения.

4. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

5. Найдите проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

Занятие 2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач



Угол между прямыми на плоскости. Рассмотрим две прямые ℓ_1 и ℓ_2 на плоскости.

Углом φ *между прямыми* называется острый из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться по формуле

$$\angle\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 *параллельны*, если $k_1 = k_2$, и *перпендикулярны*, когда $k_1 = -1 / k_2$.

Пример 1. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. Выпишем угловые коэффициенты данных прямых: $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ и найдем угол между ними: $\angle\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}\right| = 1$, или $\angle\varphi = \pi / 4$.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда угол φ между ними будет равен углу между их векторами нормалей:

$$\angle\varphi = \arccos\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

При этом *условие параллельности прямых* ℓ_1 и ℓ_2 вытекает из коллинеарности их нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и может быть записано в следующем виде:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых ℓ_1 и ℓ_2 следует из ортогональности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и определяется следующим равенством:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Пример 2. Вычислить угол между прямыми:

а) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;

б) $y = \frac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$.

Решение: а) в данном случае прямые заданы общими уравнениями. Выпишем координаты векторов нормалей этих прямых: $\vec{n}_1(2;-3)$, $\vec{n}_2(5;-1)$. Воспользуемся расчетной формулой

$$\angle\varphi = \arccos\left(\frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\sqrt{5^2 + (-1)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{10+3}{\sqrt{4+9}\sqrt{25+1}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{13}\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{13}{13\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4};$$

б) в данном случае $k_1 = \frac{3}{4}$. Найдем k_2.

$$8x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow 6y = -8x - 5 \Rightarrow y = -\frac{8}{6}x - \frac{5}{6} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{6}.$$

Тогда

$$k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Следует отметить, что угловые коэффициенты прямых связаны соотношением $k_1 = -1 / k_2$, т. е. прямые перпендикулярны и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Точка пересечения двух прямых. Пусть две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями соответственно: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и требуется найдите точку их пересечения $M_0(x_0; y_0)$. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера. В результате получим

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 3. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Так как $\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{5}$, т. е. $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются. Координаты точки пересечения прямых найдем из системы уравнений:

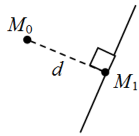
$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + 5y - 12 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 2x + 5y = 12. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 24}{15 + 4} = \frac{19}{19} = 1; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{36 + 2}{15 + 4} = \frac{38}{19} = 2.$$

Точка пересечения имеет координаты $M(1; 2)$.

Расстояние от точки до прямой. Пусть требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой ℓ: $Ax + By + C = 0$.

Предположим, что точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M_0 и M_1 будет определяться формулой $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



Пример 4. Найти расстояние от точки $M_0(2;\ 1)$ до прямой $4x - 3y + 10 = 0$.

Решение. Воспользуемся расчетной формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|8 - 3 + 10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ ед. длины}$$

Задания к аудиторному занятию 2

1. Определите угол φ между двумя прямыми:

а) $5x - y + 7 = 0,\ \ 3x + 2y = 0$; б) $3x - 2y + 7 = 0,\ \ 2x + 3y - 3 = 0$;

в) $x - 2y - 4 = 0,\ \ 2x - 4y + 3 = 0$; г) $3x + 2y - 1 = 0,\ \ 5x - 2y + 3 = 0$.

2. Установите, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

а) $3x - y + 5 = 0,\ \ x + 3y - 1 = 0$; б) $3x - 4y + 1 = 0,\ 4x - 3y + 7 = 0$;

в) $6x - 15y = 0,\ 10x + 4y - 3 = 0$; г) $9x - 12y + 5 = 0,\ 8x + 6y - 1 = 0$.

3. Докажите, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

1) $3x + 5y - 4 = 0,\ 6x + 10y + 7 = 0$; 2) $2x - 4y + 3 = 0,\ \ x - 2y = 0$;

3) $2x - 1 = 0,\ \ x + 3 = 0$; 4) $2x + y - 1 = 0,\ 4x + 2y + 7 = 0$.

4. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определите угловой коэффициент k прямой:

1) параллельной данной прямой;

2) перпендикулярной к данной прямой.

5. Даны вершины треугольника $M(2;\ 1)$, $N(-1;\ -1)$, $P(3;\ 2)$. Составьте уравнения его высот.

6. Вычислите расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $3x - 4y - 10 = 0,\ 6x - 8y + 5 = 0$;

б) $5x - 12y + 26 = 0,\ 5x - 12y - 13 = 0$;

в) $4x - 3y + 15 = 0,\ 8x - 6y + 25 = 0$.

7. Найдите точку M_1, симметричную точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.

8. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; 5)$, $B(2; 0)$, $C(3; 1)$. Составьте уравнения стороны AC, высоты CK и медианы BM. Запишите систему неравенств, определяющую внутренние точки треугольника.

Домашнее задание к занятию 2

1. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$. Определите: 1) уравнения, длины его сторон и их угловые коэффициенты; 2) угол при вершине A в радианах; 3) уравнение медианы AE; 4) уравнение высоты AD и ее длину. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

2. Найдите точку Q, симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x = 3y + 3$.

3. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислите его площадь. Выполните построения.

4. Определите угол φ между прямыми $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$.

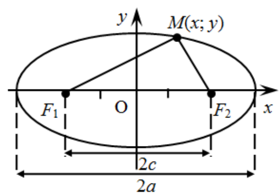
Занятие 3. Эллипс и окружность, их канонические уравнения и построение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Эллипс, его канонические уравнения и построение. Эллипсом называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами эллипса*, есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Канонические уравнения эллипса с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат соответственно на осях Ox и Oy, имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

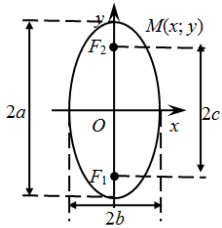


$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

где a – большая полуось эллипса;

$b=\sqrt{a^2-c^2}$ – меньшая полуось эллипса ($a > b$);

c – полуфокусное расстояние ($a > c$).



Построение эллипса производится на основании его характеристик:

1) любая точка эллипса будет иметь на нем симметричные точки относительно осей координат и начала координат. При этом начало координат называют *центром эллипса*;

2) эллипс пересекает оси координат в точках A_1, A_2, B_1 и B_2. Эти точки называются *вершинами эллипса*, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – соответственно *большой и малой осями эллипса*;

3) все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$ (или $y = \pm a$, $x = \pm b$);

4) в рассматриваемом уравнении сумма неотрицательных слагаемых равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться.

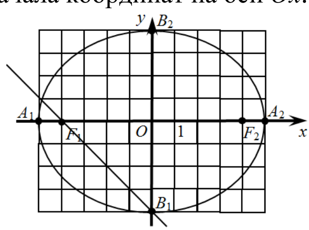
Значит, *эллипс имеет форму овальной замкнутой кривой.*

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Выполните построение.

Решение. Данное уравнение определяет эллипс с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Ox.



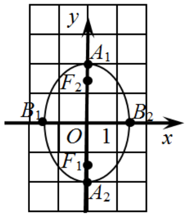
Большая его полуось $a = 5$, а меньшая $b = 4$. Найдем полуфокусное расстояние: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, т. е. $c = 3$, а фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$. Нижняя вершина эллипса будет находиться в точке $B_1(0; -4)$.

Тогда уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, будет иметь вид

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\ \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\ 4x=-3y-12;\ 4x+3y+12=0.$$

Выполним построения.

Пример 2. Построить эллипс с вершиной в начале координат, если известно, что один из его фокусов находится в точке $M(0;\ -\sqrt{2})$, а большая ось равна 4.



Решение. Так как фокус расположен на оси ординат, а его центр совпадает с началом координат, то каноническое уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, причем большая полуось $a = 2$, а полуфокусное расстояние $c=\sqrt{2}$.

Известно, что меньшая полуось определяется как

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}.$$

Тогда каноническое уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Выполним построения.

Окружность, ее канонические уравнения. Окружность – это линия, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром окружности*.

Уравнение окружности с центром в начале координат радиусом R имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Очевидно, что данное уравнение является частным случаем канонического уравнения эллипса, когда его большая и меньшая полуоси равны. Действительно, пусть $a = b = R$, тогда каноническое уравнение эллипса можно запишите в виде

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на R^2, в результате получим $x^2 + y^2 = R^2$ – уравнение окружности. В данном случае говорят, что фокусы эллипса совпадают с вершиной, а сам эллипс вырождается в окружность.

Задания к аудиторному занятию 3

1. Напишите уравнение окружности радиуса R с центром в точке M:

а) $R = 3,\ M(0;\ 0)$; б) $R = 4,\ M(-4; -1)$. Сделайте построения.

2. Определите, какие из точек $M_1(1;\ 3)$; $M_2(8;\ -1)$; $M_3(0;\ 1)$; $M_4(-2;\ 3)$; $M_5(0;\ 1)$; $M_6(-4;\ -4)$ лежат внутри окружности $x^2 + y^2 = 3$?

3. Найдите полуоси и фокусы эллипса и постройте линии:

а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

в) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

д) $10x^2 + 6y^2 = 60$; е) $25x^2 + 4y^2 = 100$;

ж) $4x^2 + 9y^2 = 36$; з) $x^2 + 10y^2 = 10$.

4. Постройте линии:

а) $y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{4 - x^2}$; б) $x = -\sqrt{49 - y^2}$;

в) $x = \dfrac{2}{7}\sqrt{36 - y^2}$; г) $x = \dfrac{1}{5}\sqrt{36 - y^2}$;

д) $y = -\dfrac{1}{4}\sqrt{25 - x^2}$; е) $x = \sqrt{9 - y^2}$.

Домашнее задание к занятию 3

1. Напишите уравнение окружности радиусом $R = 1$ с центром в точке $M(-5;\ 0)$. Постройте линию.

2. Постройте кривые второго порядка:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $5x^2 + 2y^2 = 10$.

3. Постройте линии:

а) $x=-\frac{1}{6}\sqrt{1-y^2}$;　　　　　　　　б) $y=\sqrt{4-x^2}$.

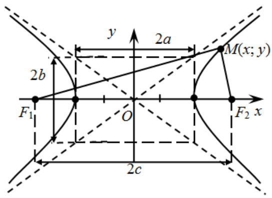
З а н я т и е 4. Гипербола, ее канонические уравнения и построение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

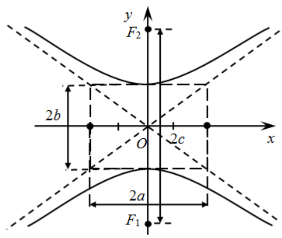
Гиперболой называется линия, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами гиперболы,* есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Канонические уравнения гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат соответственно на осях Ox и Oy, имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$



где a – действительная полуось эллипса;

$b=\sqrt{a^2+c^2}$ – мнимая полуось эллипса;

c – полуфокусное расстояние ($a < c$).

Такие гиперболы называют *сопряженными*.

Построение гиперболы производится на основании ее характеристик:

1) любая точка гиперболы будет иметь на ней симметричные точки относительно осей координат и начала координат. При этом начало координат называют *центром гиперболы*;

2) гипербола пересекает одну из осей координат в точках $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$ (или A_1 $(0; -a)$ и $A_2(0; a)$). Отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется *действительной осью*. Точки пересечения гиперболы с другой осью координат отсутствуют, но на ней присутствуют точки $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$ (или $B_1(-b; 0)$ и $B_2(b; 0)$), которые используются при построении. Отрезок $B_1B_2 = 2b$, соединяющий эти точки, называется *мнимой осью гиперболы.* Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 называют *вершинами гиперболы*;

3) вершины гиперболы A_1, A_2, B_1 и B_2 являются серединами сторон *прямоугольника гиперболы*, которого гипербола касается в точках A_1 и A_2;

4) все точки гиперболы лежат вне прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$ (или $y = \pm a$, $x = \pm b$);

5) при неограниченном удалении одной из переменных от начала координат ветви гиперболы неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника гиперболы. Эти прямые определяются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$ (или $x = \pm\frac{a}{b}y$) и называются *асимптотами гиперболы*;

6) в уравнении гиперболы разность неотрицательных слагаемых равна единице. Следовательно, при увеличении одного слагаемого другое также возрастает.

Значит, *гипербола – это кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей*.

При построении гиперболы целесообразно сначала постройте основной прямоугольник гиперболы и отметить ее вершины. Затем продлить диагонали основного прямоугольника гиперболы на бесконечность, получив при этом ее асимптоты. Расставить точки относительно асимптот, характеризующие неограниченное приближение к ним ветвей гиперболы вдоль действительной оси. Соединить плавной линией эти точки с вершинами гиперболы.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, проходящей через точки $A(-5; 4)$ и $B(1; -1)$. Найти полуоси, фокусы, уравнения асимптот гиперболы. Сделать построения.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Так как точки A и B лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению. В результате подстановки координат точек получаем систему уравнений двух неизвестных a и b:

$$\begin{cases}\dfrac{16}{b^2}-\dfrac{25}{a^2}=1,\\[2mm] \dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}=1.\end{cases}$$

Исключим из системы, например, переменную b. Для этого второе уравнение системы умножим на 16 и вычтем из первого уравнения второе. В результате уравнение примет вид $-\dfrac{9}{a^2}=-15,$ откуда $a^2=\dfrac{3}{5}$.

Подставив a^2 во второе уравнение системы, получим $b^2=\dfrac{3}{8}$.

Таким образом, каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными симметрично относительно начала координат на оси Oy, проходящей через точки $A(-5; 4)$ и $B(1; -1)$, будет иметь вид

$$\frac{y^2}{3/8}-\frac{x^2}{3/5}=1.$$

При этом действительная полуось гиперболы $b=\sqrt{\dfrac{3}{8}}\approx 0{,}612$, а мнимая $a=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\approx 0{,}775$.

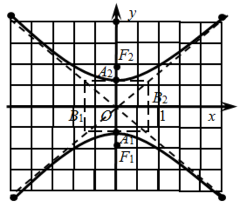
Найдем полуфокусное расстояние

$$c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{39}{40}}\approx 0{,}987.$$

Тогда фокусы гиперболы будут находиться в точках

$$F_1\left(0;-\sqrt{\frac{39}{40}}\right)\text{ и }F_2\left(0;\sqrt{\frac{39}{40}}\right).$$

Уравнения асимптот гиперболы примут вид:



$$y=\sqrt{\frac{5}{8}}x \text{ и } y=-\sqrt{\frac{5}{8}}x.$$

Выполним построения.

Задания к аудиторному занятию 4

1. Найдите полуоси и фокусы гиперболы:

а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1;$ б) $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{9}=1;$

в) $10x^2-6y^2=36;$ г) $-25x^2+4y^2=100;$

д) $4x^2-9y^2=-36;$ е) $-x^2+10y^2=-10.$

Постройте линии.

2. Найдите координаты фокусов эллипса и сделайте построения:

а) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1;$ б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$

в) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{25}=1;$ г) $\frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{16}=1.$

3. Постройте линии:

а) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{6+x^2};$ б) $x=-\sqrt{1+y^2};$

в) $x=3\sqrt{16+y^2};$ г) $x=\frac{1}{5}\sqrt{25+y^2};$

д) $x=-\frac{1}{4}\sqrt{8+y^2};$ е) $x=\frac{7}{18}\sqrt{9+y^2}.$

Домашнее задание к занятию 4

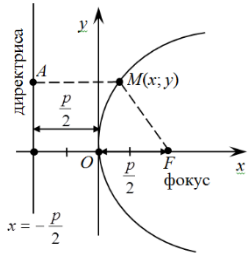
Определите числовые характеристики гиперболы и постройте ее:

а) $x^2-\frac{y^2}{9}=1;$ б) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1;$ в) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1;$ г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1.$

З а н я т и е 5. Парабола, ее канонические уравнения и построение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой, лежащих в той же плоскости.



Ось симметрии параболы, вдоль которой располагаются ее ветви, называется *осью параболы*, а точка пересечения параболы с осью – *вершиной параболы*. Отрезок прямой, соединяющий любую точку параболы с фокусом, называется *фокальным радиусом*.

Каноническое уравнение параболы может быть представлено следующими равенствами:

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вправо вдоль оси Ox;

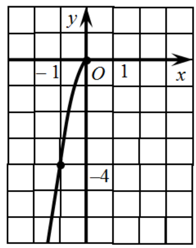
$y^2 = -2px$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными влево вдоль оси Ox;

$x^2 = 2py$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх вдоль оси Oy;

$x^2 = -2py$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вниз вдоль оси Oy.

Пример. Постройте линию, определяемую уравнением

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{-y}\ .$$



Р е ш е н и е. Из уравнения видно, что оно определено только при $x \le 0$ и $y \le 0$, т. е. это уравнение задает лишь фрагмент некоторой кривой, лежащей в третьей четверти координатной плоскости.

Возведем в квадрат левую и правую части уравнения, в результате получим $x^2 = \frac{1}{4}(-y)$ или $y = -4x^2$. Это уравнение параболы с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вниз, вдоль оси Oy.

Проанализировав результаты, делаем вывод, что данное уравнение определяет на плоскости левую ветвь параболы $y = -4x^2$.

Дополнительные сведения о параболе. В общем виде уравнение параболы может быть представлено как:

$y = ax^2 + bx + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси, параллельной Oy;

$x = ay^2 + by + c$ – уравнение параболы с ветвями, расположенными вдоль оси, параллельной Ox.

Параметр a определяет направление ветвей параболы. Так, если $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх вдоль оси Oy, иначе (если $a < 0$) – вниз вдоль этой оси. Для уравнения $x = ay^2 + by + c$ при $a > 0$ ветви параболы направлены вправо, а при $a < 0$ – влево вдоль оси Ox.

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c$ абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_в = –b / 2a$. Аналогично $y_в = –b / 2a$, можно найдите ординату параболы $x = ay^2 + by + c$. Другую координату вершины параболы определяют путем подстановки найденной координаты в правую часть соответствующего равенства.

График параболы характеризуется тремя точками, одна из которых является вершиной, а две другие располагаются на различных ее ветвях. Поэтому для построения графика параболы обычно придерживаются следующей схемы.

Для определенности предположим, что требуется постройте график параболы $x = –2y^2 + 8y + 1$. Для этого выполним следующие действия.

1. Определяем, как располагается парабола (направление ее ветвей). Ветви данной параболы направлены вдоль оси Ox влево.

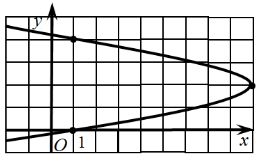
2. Найдем координаты вершины параболы. Ординату вершины параболы определим по формуле

$$y_в = –b / 2a = –8 / (2 \cdot (–2)) = 2.$$

Абсциссу вершины найдем путем подстановки ординаты в уравнение параболы $x_в = –2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 1 = 9$.

Таким образом, вершина параболы будет располагаться в точке с координатами (9; 2).

3. Найдем координаты двух точек, расположенных на разных ветвях параболы.



Данные точки удобно выбрать так, чтобы их ординаты располагались симметрично ординате вершины. В таком случае абсциссы этих точек будут совпадать.

Возьмем в качестве ординат искомых точек $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Тогда абсциссы их будут равны: $x_{1,\,2} = -2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$. Найденные точки будут иметь координаты (1; 0) и (1; 4).

4. Построим параболу.

Задания к аудиторному занятию 5

1. Постройте параболы:

а) $y = \dfrac{x^2}{4}$; б) $x = -\dfrac{y^2}{6}$;

в) $8y = -x^2$; г) $3x = y^2$;

д) $y = 8x^2$; е) $x = -3y^2$;

ж) $y = x^2 + 4x - 5$; з) $x = -y^2 + 8y + 1$;

и) $y = 2x^2 + 6x - 3$; к) $x = y^2 + 5y - 4$;

л) $y = -x^2 + x + 2$; м) $x = y^2 + 3y + 3$.

2. Постройте линии:

а) $y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{x}$; б) $x = -\sqrt{-y}$;

в) $x = 3\sqrt{2y}$; г) $x = \dfrac{1}{5}\sqrt{5y}$;

д) $y = -\dfrac{1}{4}\sqrt{-2x}$; е) $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{9y}$.

Домашнее задание к занятию 5

Постройте линии:

1) $y = -x^2 + 2x - 3$; 2) $x = y^2 + y + 1$; 3) $y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{-x}$; 4) $x = \dfrac{1}{3}\sqrt{5y}$.

Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(N-(15+2G); 3)$, $B(G; (-1)^N 6)$, $C(-1; G-4)$.

Найдите:

1) длины и уравнения сторон треугольника;

2) координаты направляющих и нормальных векторов сторон треугольника и их угловые коэффициенты;

3) $\angle A$ при G – нечетном, $\angle B$ при G – четном;

4) уравнение медианы CE при G – нечетном, AE при G – четном;

5) уравнение и длину высоты BD при G – нечетном, CD при G – четном;

6) точку пересечения найденной высоты и медианы.

Выполните построения.

2. Определите вид кривой второго порядка, ее характеристики и выполните построения $(-1)^N \dfrac{x^2}{N-15}+\dfrac{y^2}{G+14}=1.$

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Занятие 1. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до плоскости

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Простейшей поверхностью является плоскость. Она может быть задана различными способами, различающимися видом уравнения.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;\ B;\ C)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

2. Общее уравнение плоскости.

Уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости*.

В частности:

– если $D = 0$, то имеем $Ax + By + Cz = 0$. Это уравнение определяет в пространстве плоскость, проходящую через начало координат;

– если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет в пространстве плоскость, параллельную оси Oz. При $B = 0$ уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а при $A = 0$ уравнение $By + Cz + D = 0$ – плоскость, параллельную оси Ox соответственно;

– если $C = D = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ соответствует плоскости, проходящей через ось Oz. В аналогичных случаях уравнения $Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ соответствуют плоскостям, проходящим через оси Oy и Ox;

– если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ описывает плоскость, параллельную Oxy. Соответственно уравнения $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ характеризуют плоскости параллельные Oyz и Oxz;

– уравнения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в пространстве определяют плоскости Oyz, Oxz и Oxy соответственно.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -4; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1; -5; 2)$. Записать общее уравнение этой плоскости.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярно данному вектору, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Так как по условию $A = 1$, $B = -5$, $C = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -4$, $z_0 = 1$, то подставим эти значения в уравнение и получим

$$1 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (y + 4) + 2 \cdot (z - 1) = 0,$$

или общее уравнение плоскости будет иметь вид

$$x - 5y + 2z - 24 = 0.$$

3. В пространстве плоскость однозначно определяется тремя точками $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащими на одной прямой. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c. Тогда уравнение такой плоскости можно записать следующим образом:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Данное уравнение называется уравнением плоскости в отрезках на координатных осях. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Пример 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\,3;\,5)$, $B(-1;\,2;\,2)$, $C(2;\,-3;\,7)$. Определить вектор нормали этой плоскости и построить ее.

Решение. Воспользуемся *уравнением плоскости, проходящей через три данные точки*,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

В результате получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -1-1 & 2-3 & 2-5 \\ 2-1 & -3-3 & 7-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}-(y-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-5)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=-20x+y+13z-48,$$

т. е. искомая плоскость определяется уравнением

$$-20x+y+13z-48=0\text{, или } 20x-y-13z+48=0.$$

Таким образом, одним из векторов нормалей для этой плоскости будет являться вектор $\vec{n}(20;\,-1;\,-13)$. Для построения плоскости преобразуем ее уравнение к уравнению в отрезках на осях координат:

$$20x-y-13z+48=0,\;\; 20x-y-13z=-48,\;\text{ или }\; \frac{x}{-48/20}+\frac{y}{48}+\frac{z}{48/13}=1.$$

Данная плоскость отсекает от осей координат следующие отрезки: $a=-\dfrac{48}{20}\approx-2{,}4$ от оси Ox, $b=48$ от оси Oy, $c=\dfrac{48}{13}\approx3{,}69$ от оси Oz.

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Углом между плоскостями будем считать угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$, который определятся по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Если плоскости параллельны, то векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны и их координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Эти равенства являются *условием параллельности двух плоскостей*.

Если же плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Это равенство является *условием перпендикулярности двух плоскостей.*

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(2;\,4;\,-1)$ параллельно плоскости $3x-2y+z-12=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости равен $\vec{n}(3;\,-2;\,1)$. Так как искомая плоскость параллельна заданной, то в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять этот же вектор. Подставим координаты точки A и вектора $\vec{n}$ в уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$$3(x-2)-2(y-4)+(z+1)=0 \text{ или } 3x-2y+z+3=0.$$

Пример 4. Определить угол между плоскостями $2x+y-2z+3=0$ и $x+y-5=0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами и определяется по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Запишем нормальные векторы для данных плоскостей: $\vec{n}_1(2;\,1;\,-2)$, $\vec{n}_2(1;\,1;\,0)$. Подставим координаты этих векторов в формулу для определения косинуса угла между векторами:

$$\cos(\varphi)=\frac{2\cdot1+1\cdot1+(-2)\cdot0}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45°$.

Пример 5. Даны пары плоскостей:

а) $3x-4y+5z-3=0$ и $6x-8y+10z+5=0$;

б) $2x-y+5z-5=0$ и $4x+3y-z+1=0$;

в) $x-3y+z-1=0$ и $2x+4y-3z+2=0$.

Определить, какие из них являются параллельными, а какие – перпендикулярными.

Решение. 1. Запишем нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1(3;\,-4;\,5)$ и $\vec{n}_2(6;\,-8;\,10)$. Так как координаты векторов пропорциональны: $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}=\frac{5}{10}$, то выполняется условие параллельности плоскостей, т. е. плоскости параллельны.

2. Нормальными векторами плоскостей являются следующие векторы: $\vec{n}_1(2;\,-1;\,5)$, $\vec{n}_2(4;\,3;\,-1)$. Скалярное произведение векторов $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2\cdot4+(-1)\cdot3+5\cdot(-1)=0$, что является условием перпендикулярности плоскостей. Следовательно, плоскости перпендикулярны.

3. Плоскости имеют нормальные векторы $\vec{n}_1(1;\,-3;\,1)$ и $\vec{n}_2(2;\,4;\,-3)$. Координаты этих векторов не пропорциональны, т. е. $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{4}\neq\frac{1}{-3}$, и скалярное произведение векторов не равно нулю: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=$ $=1\cdot2+(-3)\cdot4+1\cdot(-3)\neq0$. Следовательно, заданные плоскости не параллельны и не перпендикулярны.

Расстояние d *от точки* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *до плоскости*, которая задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, определяется по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 6. Найти расстояние d от точки $A(4;\ –6;\ 6)$ до плоскости $3x-5y+5z-13=0$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|3\cdot 4-5\cdot(-6)+5\cdot 6-13\right|}{\sqrt{9+25+25}}=\frac{|59|}{\sqrt{59}}=\sqrt{59}.$$

Задания к аудиторному занятию 1

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}(1;-2;3)$.

2. Даны две точки $A(3;-1;2)$ и $B(4;-2;-1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3;-1;4)$.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$ и $C(2;0;2)$.

5. Установите, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости, а какие перпендикулярные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0,\quad 2x-3y+5z+3=0;$

2) $4x+2y-4z+5=0,\quad 2x+y+2z-1=0;$

3) $x-3z+2=0,\quad 2x-6z-7=0;$

4) $3x-y-2z-5=0,\quad x+9y-3z+2=0;$

5) $2x+3y-z-3=0,\quad x-y-z+5=0;$

6) $2x-5y+z=0,\quad x+2z-3=0.$

6. Определите двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\quad x+y\sqrt{2}-z+3=0;$

2) $3y-z=0,\quad 2y+z=0;$

3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$;

4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

7. Укажите, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

8. Укажите, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

2) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly+1=0$;

3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

9. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

10. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось Ox и точку $M_1(4; -1; 2)$;

2) через ось Oy и точку $M_2(1; 4; -3)$;

3) через ось Oz и точку $M_3(3; -4; 7)$.

11. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox;

2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy;

3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz.

12. Найдите точки пересечения плоскости $2x-3y-4z-24=0$ с осями координат.

13. Дано уравнение плоскости $x+2y-3z-6=0$. Напишите для нее уравнение «в отрезках». Постройте эту плоскость.

14. Плоскость проходит через точки $M_1(1; 2; -1)$ и $M_2(-3; 2; 1)$ и отсекает на оси ординат отрезок b = 3. Составьте для этой плоскости уравнение «в отрезках».

15. Вычислите расстояние d от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $M_2(2;\ -1;\ -1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) $M_3(3;-6;7)$, $4x-3z-1=0$.

16. В каждом из следующих случаев вычислите расстояние между параллельными плоскостями:

1) $\begin{array}{l} x-2y-2z-12=0, \\ x-2y-2z-6=0; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 2x-3y+6z-14=0, \\ 4x-6y+12z+21=0; \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 2x-y+2z+9=0, \\ 4x-2y+4z-21=0; \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} 16x+12y-15z+50=0, \\ 16x+12y-15z+25=0. \end{array}$

Домашнее задание к занятию 1

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 4;\ -5)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a_1}(3;\ 1;\ -1)$ и $\overrightarrow{a_2}(1;\ -2;\ 1)$.

2. Плоскость проходит через точку $A(6;\ -10;\ 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составьте для этой плоскости уравнение «в отрезках» и постройте ее.

3. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $A(2;\ -3;\ 3)$ параллельно плоскости Oxy;

2) через точку $B(1;\ -2;\ 4)$ параллельно плоскости Oxz;

3) через точку $C(-5;\ 2;\ -1)$ параллельно плоскости Oyz.

4. Вычислите расстояние d от точки $P(-1;\ 1;\ -2)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; -1; 1)$; $M_2(-2; 1; 3)$; $M_3(4; -5; -2)$.

Занятие 2. Прямая в пространстве. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

1. С любой прямой в пространстве связан ненулевой вектор, который лежит на этой прямой или ей параллелен. Он называется *направляющим вектором прямой* и обозначается $\vec{s}(l;\ m;\ n)$.

По аналогии с уравнением прямой в плоскости *уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *параллельно вектору* $\vec{s}(l;\ m;\ n)$ *в пространстве*, называются *каноническими уравнениями прямой* и представляются в виде

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

2. Рассмотрим данные равенства как пропорции с коэффициентом пропорциональности t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t, \text{ или } \frac{x-x_0}{l}=t, \quad \frac{y-y_0}{m}=t, \quad \frac{z-z_0}{n}=t.$$

Выразим из них текущие координаты точки, принадлежащей заданной прямой. В результате получим *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Пример 1. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;3)$ параллельно вектору $\vec{s}(2;-1;3)$.

Решение. По условию $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, $l=2$, $m=-3$, $n=1$.

Подставим эти величины в канонические и параметрические уравнения прямой. В результате получим:

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2-3t, \\ z=3+t \end{cases}$$

и

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}.$$

3. Рассмотрим случай, когда прямая в пространстве задается двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда по аналогии с уравнением прямой на плоскости *уравнения прямой, проходящей через две точки*, имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример 2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-3;2)$ и $M_2(-1;2;4)$.

Решение. Подставим координаты заданных точек в уравнения прямой, проходящей через две точки $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y-(-3)}{2-(-3)}=\dfrac{z-2}{4-2}$. После преобразования знаменателя получим $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-2}{2}$. Это канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;-3;2)$ с направляющим вектором $\vec{s}(-2;5;2)$.

Тогда параметрическими уравнениями этой прямой будут

$$\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = -3+5t, \\ z = 2+2t. \end{cases}$$

4. Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Такой способ задания прямой в пространстве называется *общими уравнениями прямой*.

Часто на практике требуется от общих перейти к каноническим уравнениям прямой. В этом случае координаты произвольной точки M_0 прямой можно определить из приведенной выше системы, придав одной из ее неизвестных произвольное значение (например, $z = 0$). Так как плоскости не параллельны, а искомая прямая перпендикулярна векторам $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$, то за ее направляющий вектор можно принять векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения произвольной точки прямой примем ее координату $x = 0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3z - 1, \\ 4y - z - 7 = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 3z - 1, \\ 12z - 4 - z - 7 = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 3z - 1, \\ z = 1, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ z = 1, \end{cases} \text{ т. е. } A(0;\ 2;\ 1).$$

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой будут иметь следующий вид:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Пример 4. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Разрешим данную систему относительно x и y. Первое уравнение умножим на (–2):

$$\begin{cases} -4x - 2y + 10z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Сложим со вторым и получим:

$$-x + 6z - 4 = 0$$

или

$$x = 6z - 4.$$

Подставим в первое уравнение:

$$2(6z-4)+y-5z+3=0$$

или

$$y=-7z+5.$$

Полученные равенства разрешим относительно z:

$$z=\frac{x+4}{6}$$

и

$$z=\frac{y-5}{-7}.$$

Тогда можно записать:

$$\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z}{1}.$$

Получены канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух данных плоскостей.

Пусть даны две прямые, заданные уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$ – их направляющие векторы.

Углом между прямыми будем считать угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$, который определяется по формуле

$$\cos(\varphi)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$. Эти соотношения являются *условием параллельности двух прямых*.

Две прямые взаимно перпендикулярны, если их направляющие векторы $\vec{s}_1(l_1;\, m_1;\, n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2;\, m_2;\, n_2)$ ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Это равенство выражает *необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых*.

Пример 5. Даны пары прямых:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{4}$ и $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{-8}$;

б) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ и $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z}{-8}$;

в) $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+4}{1}$ и $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Определить, какие из этих пар прямых являются параллельными, а какие – взаимно перпендикулярными. В случае если прямые не являются параллельными или перпендикулярными, определить угол между ними.

Решение: а) направляющие векторы прямых $\vec{s}_1(2;\, -3;\, 4)$ и $\vec{s}_2(-4;\, 6;\, -8)$. Предположим, что прямые параллельны. Тогда координаты направляющих векторов должны быть пропорциональны. Проверим это: $\dfrac{-4}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{-8}{4} = -2.$ Так как соответствующие координаты направляющих векторов действительно пропорциональны, то делаем вывод, что данные прямые параллельны;

б) направляющими векторами прямых являются $\vec{s}_1(3;\, -2;\, 1)$ и $\vec{s}_2(4;\, 2;\, -8)$. Их скалярное произведение равно нулю: 12 – 4 – 8 = 0. В данном случае выполняется условие перпендикулярности прямых, т. е. прямые взаимно перпендикулярны;

в) координаты направляющих векторов $\vec{s}_1(1;\, 0;\, 1)$ и $\vec{s}_2(2;\, -2;\, 1)$ прямых не пропорциональны и скалярное произведение этих векторов не равно нулю, т. е. прямые не параллельны и не перпендикулярны. Найдем угол между прямыми, который равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos(\varphi) = \frac{1\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45°$.

Задания к аудиторному занятию 2

1. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;\ 0;\ -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}\left(2;\ -2;\ 5\right)$; 2) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

2. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ -1)$. Определите координаты направляющего вектора этой прямой.

3. Даны вершины треугольника $A(1;\ 3;\ -2)$, $B(4;\ 1;\ 0)$, $C(3;\ -3;\ 2)$. Составьте уравнение медианы CM.

4. Найдите острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

5. Докажите:

1) параллельность прямых $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-\ \ z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) перпендикулярность прямых $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

6. Даны точки $A(2;\ 3;\ -4)$, $B(1;\ 0;\ 6)$, $C(-3;\ -1;\ 5)$. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно отрезку BC.

7. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\ -4;\ 1)$ параллельно оси Oz.

8. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;\ 1;\ -4)$ параллельно прямой $x = 2-3t$, $y=-1+t$, $z=5t$.

9. Составьте канонические и параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-\ \ z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+\ \ y+\ \ z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

10. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;\ -4;\ 2)$ параллельно прямой $\begin{cases} 7x+y+z-8=0, \\ 6x+y-2z-7=0. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 2

1. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;\ -1;\ -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}\left(2;\ -2;\ 4\right)$;

2) прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) прямой $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+3, \\ z=5t+2. \end{cases}$

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;\ 3;\ -5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-\ \ y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

3. Найдите угол между прямыми:

1) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+6}{7}=\dfrac{z+2}{8}$ и $\dfrac{x+5}{-8}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+4}{7}$;

2) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

Занятие 3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть задана прямая уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Определяется он по формуле

$$\sin(\varphi)=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор $\vec{s}(l;\, m;\, n)$ прямой и нормальный вектор $\vec{n}(A;\, B;\, C)$ плоскости ортогональны. Следовательно, равенство нулю скалярного произведения этих векторов $Al+Bm+Cn=0$ является *условием параллельности прямой и плоскости.*

Если же прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{s}(l;\, m;\, n)$ и $\vec{n}(A;\, B;\, C)$ коллинеарны и соотношение $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ является *условием перпендикулярности прямой и плоскости*.

Пример 1. Даны прямая и плоскость:

а) $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{-2}$ и $3x-4y+z-3=0$;

б) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{1}$ и $2x+y-4z+1=0$;

в) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z+4}{2}$ и $2x-4y+2z-9=0$.

Определите, какие из заданных пар параллельны или перпендикулярны. В случае если прямая и плоскость не являются параллельными или перпендикулярными, определите угол между ними.

Решение: а) направляющим вектором прямой является вектор $\vec{s}(-6;\, 8;\, -2)$, а нормальным вектором плоскости – вектор $\vec{n}(3;\, -4;\, 1)$. Координаты векторов пропорциональны $\frac{3}{-6}=\frac{-4}{8}=\frac{1}{-2}$. Следовательно, прямая перпендикулярна плоскости;

б) координаты направляющего вектора $\vec{s}(3;\,-2;\,1)$ прямой и нормального вектора $\vec{n}(2;\,1;\,-4)$ плоскости удовлетворяют условию параллельности прямой и плоскости: $2\cdot 3+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 1=0.$ Это означает, что прямая параллельна плоскости;

в) координаты направляющего вектора $\vec{s}(-1;\,-1;\,2)$ прямой и нормального вектора $\vec{n}(2;\,-4;\,2)$ плоскости не удовлетворяют ни условию параллельности, ни условию перпендикулярности прямой и плоскости. Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin(\varphi)=\frac{\left|2\cdot(-1)+(-4)\cdot(-1)+2\cdot 2\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются под углом $\varphi=30°.$

В случае когда требуется найти координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве, выполняют приведенные ниже вычисления.

1. Так как искомая точка принадлежит и плоскости, и прямой, то необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

2. Для этого канонические уравнения прямой преобразуют к параметрическому виду:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt.\end{cases}$$

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

3. Подставим в четвертое уравнение системы правые части первых трех равенств, получим $A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0.$

Выразим из него значение параметра t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

4. В результате подстановки значения параметра в правые части первых трех равенств получим координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве:

$$x = x_0 - l\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn},$$

$$y = y_0 - m\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn},$$

$$z = z_0 - n\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Пример 2. Известно, что прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{2}$ и плоскость $x + 2y - z - 1 = 0$ пересекаются в точке P. Найти координаты этой точки.

Решение. Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим:

$$\frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+4}{2} = t,\ \frac{z-5}{2} = t, \text{ или } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

Полученные выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости и найдем параметр t:

1-й способ: $2+3t+2(-4+2t)-(5+2t)-1=0,\ \ 5t-12=0,\ \ t=\dfrac{12}{5};$

2-й способ: $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}=-\dfrac{1\cdot 2+2\cdot(-4)-1\cdot 5-1}{1\cdot 3+2\cdot 2-1\cdot 2}=\dfrac{12}{5}.$

Найденный параметр t подставим в параметрические уравнения плоскости и найдем координаты пересечения прямой и плоскости:

$$x=2+3\cdot\frac{12}{5}=9\frac{1}{5},\quad y=-4+2\cdot\frac{12}{5}=\frac{4}{5},\quad z=5+2\cdot\frac{12}{5}=9\frac{4}{5}.$$

Таким образом, точка $P(9\frac{1}{5};\ \frac{4}{5};\ 9\frac{4}{5})$ пересечения прямой и плоскости найдена.

Задания к аудиторному занятию 3

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\,-1;\,-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\,-3;\,-5)$ параллельно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

3. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\,-3;\,1)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+4z-5=0$.

4. Вычислите угол между прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-6}{1}$ и плоскостью $4x+2y-2z+5=0$.

5. Определите, при каком значении C прямая $\begin{cases}3x-2y+z+3=0,\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ будет параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$.

6. Определите, при каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ будет перпендикулярна к прямой $x=3+2t,\ y=5-3t,\ z=-2-2t$.

7. Найдите точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}, \quad 2x+3y+z-1=0;$

2) $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}, \quad x-2y+z-15=0;$

3) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$

8. Найдите проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $x=3, y=5t-7, z=t.$

9. Найдите координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(6;\ 1;\ 7)$ на плоскость $2x-y+3z-4=0.$

10. Найдите точку Q, симметричную точке $P(1;\ 3;\ -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0.$

11. Найдите точку N, симметричную точке $M(3; -2;\ 5)$ относительно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+9}{1}=\dfrac{z+2}{3}.$

Домашнее задание к занятию 3

1. Определите, при каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ будет параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0.$

2. Определите, при каких значениях L и C прямая $\dfrac{x-2}{L}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ будет перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0.$

3. Найдите координаты точки P, являющейся проекцией точки $M(3;\ 2;\ 0)$ на прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{-2}.$

4. Найдите проекцию точки $P(5;\ 2;\ -1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0.$

5. Найдите точку Q, симметричную точке $P(2;\ -5;\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;\ 4;\ 6)$ и $M_2(-2;\ -17;\ -8).$

Варианты индивидуальных заданий
для самостоятельной работы студентов по теме
«Аналитическая геометрия в пространстве»

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

Даны точки $A(N – 16; 1; G)$, $B(–G; –5; 1)$, $C(0; N – 20; 0)$, $M(2; 0; –1)$. Требуется найти:

1) уравнение плоскости Q, проходящей через точку C перпендикулярно вектору AB;
2) уравнение плоскости W, проходящей через точки B, C, M;
3) угол между плоскостями Q и W;
4) расстояние от точки M до плоскости Q;
5) канонические уравнения прямой l, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости Q;
6) угол, образованный прямой l с плоскостью W;
7) точку пересечения прямой l с плоскостью Q.

6. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ КО ВТОРОМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ»

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1; –6)$, $B(3; –6)$, С(7; 2). Найдите:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB, BC и их угловые коэффициенты;
3) уравнение медианы AE;
4) уравнение и длину высоты CD.

2. Постройте линию, определяемую уравнением $x=-\frac{2}{7}\sqrt{y^2-7}$.

3. Постройте линию, определяемую уравнением $y = –x^2 – 12x + 4$.

4. Даны точки $A(4; –1; –3)$, $B(2; –3; –2)$, $C(–3; 2; 3)$, $M_0(–2; 6; –5)$. Требуется найти:

1) уравнение плоскости Q, проходящей через точку C перпендикулярно вектору AB;
2) уравнение плоскости W, проходящей через точки B, C, M_0;
3) точку M' симметричную M_0 относительно плоскости Q;
4) расстояние между точкой M_0 и плоскостью Q.

7. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Занятие 1. Функция одной переменной, ее область определения и значения. Исследование функции на четность и нечетность

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x по некоторому правилу f поставлено в соответствие единственное значение y. Переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменную y – *зависимой переменной.* Значение y, соответствующее заданному значению x, называют *значением функции.* Записывают: $y = f(x)$ (читается: игрек равен эф от икс). Буквой f обозначается функциональная зависимость между переменными x и y. Говорят также, что $f(x)$ есть значение функции в точке x.

Все значения независимой переменной x, при которых функция $f(x)$ имеет смысл, образуют *область определения функции* $D(y)$.

Все значения, которые принимает функция $f(x)$ на области ее определения, образуют *область значений функции* $E(y)$.

Например, функция $y = \sin(x)$ определена для любого значения аргумента x, т. е. область определения функции $D(y)$: $x\in(-\infty; \infty)$. При этом значения этой функции размещаются на отрезке от –1 до 1. Говорят, что область значений функции $E(y)$: $y\in[-1; 1]$.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Значение функции при $x = x_0$ называется *частным значением функции* в точке x_0 и обозначается $f(x_0)$.

Пример 1. Вычислить значение функции $y = x^4 - 3x + 1$ при $x = -1$.

Решение. Частное значение данной функции в точке $x = -1$ равно $y = (-1)^4 - 3\cdot(-1) + 1 = 5$.

Пример 2. Вычислить значение функции

$$y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если} \quad x < 0, \\ 5x^2+3, & \text{если} \quad 0 \le x < 3, \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 3 \end{cases}$$ при а) $x = -3$; б) $x = 2$; в) $x = 4$.

Решение: а) так как $x = -3 < 0$, то $y = 2x - 1$. Поэтому частное значение функции $y = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$;

б) $x = 2 \in [0;\ 3)$. Поэтому $y = 5x^2 + 3$ и частное значение функции $y = 5 \cdot 2^2 + 3 = 23$;

в) в данном случае $x = 4 > 3$. Следовательно, $y = 1$.

Можно выделить случаи, когда область определения функции ограничена:

1) если $y = \dfrac{q(x)}{f(x)}$, то $D(y)$ *определяется неравенством* $f(x) \neq 0$;

2) если $y = \sqrt[n]{f(x)}$ (n – четное), то $D(y)$ *определяется неравенством* $f(x) \geq 0$;

3) если $y = \log_a f(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$), то $D(y)$ *определяется неравенством* $f(x) > 0$;

4) если $y = \log_{f(x)} b$ ($b > 0$), то $D(y)$ *определяется системой неравенств* $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1; \end{cases}$

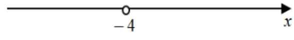
5) если $y = \arcsin(f(x))$, то $D(y)$ *определяется неравенством* $|f(x)| \leq 1$; если $y = \arccos(f(x))$, то $D(y)$ *определяется неравенством* $|f(x)| \leq 1$.

Пример 3. Найти область определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 29}{x + 4}$; б) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4}$; в) $y = \lg\left(\dfrac{x+1}{2x-4}\right)$.

Решение: а) функция $y = \dfrac{x^2 - 3x + 29}{x + 4}$ определена в том случае, если знаменатель $x + 4$ не обращается в 0, т. е. $x + 4 \neq 0$. Решая это неравенство, получим $x \neq -4$.

Этому неравенству удовлетворяют все значения переменной x числовой оси Оx, кроме точки –4.



Поэтому $D(y)$: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; \infty)$;

б) функция $y = \sqrt[6]{x^2 - 4}$ определена в том случае, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x^2 - 4 \geq 0$. Для решения этого неравенства найдем точки пересечения графика функции $y = x^2 - 4$ с осью Ox, для чего приравняем левую и правую части неравенства и получим уравнение $x^2 - 4 = 0$. Решением этого уравнения являются точки $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Тогда, решая исходное неравенство методом парабол, получим $D(y)$: $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$;

в) функция $y = \lg\left(\dfrac{x+1}{2x-4}\right)$ определена только для тех значений переменной x, которые удовлетворяют неравенству $\dfrac{x+1}{2x-4} > 0$, которое можно переписать в виде $\begin{cases}(x+1)(2x-4) > 0, \\ 2x-4 \neq 0.\end{cases}$

Найдем точки пересечения графика функции $y = (x+1)\cdot(2x-4)$ с осью Ox из уравнения $(x+1)\cdot(2x-4) = 0$. Произведение двух сомножителей равно 0, если хотя бы один из них обращается в 0, т. е. уравнение разобьется на два простейших $x+1=0$ или $2x-4=0$, решениями которых являются точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Тогда, применив для исходного неравенства метод интервалов, получим $D(y)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

Пример 4. Найти область определения и область значения функции $y = -x^2 + 6x$.

Решение. Функция $y = -x^2 + 6x$ не ограничена, поэтому ее область определения $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$.

Данная функция на координатной плоскости определяет параболу, ветви которой направлены вниз вдоль оси параллельной оси Oy. На основании этого можно сделать вывод, что ее область значений $E(y)$: $y \in (-\infty; y_в)$. Таким образом задача нахождения $E(y)$ сводится к отысканию ординаты вершины параболы.

Найдем координаты вершины параболы:

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3; \; y_в = -9 + 18 = 9.$$

Значит, $D(y)$: $y \in (-\infty; 9)$.

Четность и нечетность функций. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если:

1) область определения функции $D(y)$ является симметричной относительно начала координат, т. е. любой точке x, кроме 0, в области определения соответствует точка $-x$;

2) для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. Примерами четных функций являются: $y = x^n$ в случае, когда n – целое четное число, $y = \cos(x)$, $y = |x|$, $y = C$ (где $C = \text{const}$).

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

1) область определения функции $D(y)$ является симметричной относительно начала координат, т. е. любой точке x, кроме 0, в области определения соответствует точка $-x$;

2) для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)= -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примерами нечетных функций являются: $y = x^n$ в случае когда n – целое нечетное число, $y = \sin(x)$, $y = \operatorname{tg}(x)$, $y = \operatorname{ctg}(x)$, $y = \operatorname{arctg}(x)$, $y = \arcsin(x)$.

Если хотя бы одно из условий четности или нечетности для рассматриваемой функции не выполняется, ее называют *функцией общего вида*.

Примерами функций общего вида являются $y = ax + b$, $y = \operatorname{arcctg}(x)$, $y = \arccos(x)$.

Пример 5. Исследовать на четность, нечетность следующие функции:

а) $y = x^2 - 3x^4 + \cos(2x) - 29$; б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$; в) $y = \dfrac{x+1}{2x-4}$.

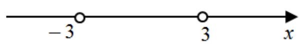
Решение: а) $y = x^2 - 3x^4 + \cos(2x) - 29$.

1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$, т. е. область определения функции симметрична относительно начала координат;

2) $f(-x)= (-x)^2 - 3(-x)^4 + \cos(-2x) - 29 = x^2 - 3x^4 + \cos(2x) - 29 = f(x)$, т. е. функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

1) $D(y)$: $x^2 - 9 \neq 0$. $x^2 - 9 = 0$, $x_{1,\,2} = \pm 3$.

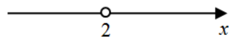


Это означает, что $D(y)$: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, т. е. область определения функции симметрична относительно начала координат;

2) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-9} = \dfrac{-x}{x^2-9} = -\dfrac{x}{x^2-9} = -f(x)$, т. е. функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат;

в) $y = \dfrac{x+1}{2x-4}$.

$D(y)$: $2x-4 \neq 0$ или $x \neq 2$.



Это означает, что $D(y)$: $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ \infty)$, т. е. область определения функции не симметрична относительно начала координат.

Так как первое условие не выполняется, то можно сделать вывод, что исследуемая функция общего вида.

Особенности графиков четной и нечетной функций позволяют сократить процесс их построения. Для построения таких графиков достаточно начертить его в той части области определения, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем продолжить этот график симметрично относительно оси Oy, если функция четная, или симметрично относительно начала координат, если функция нечетная.

Задания к аудиторному занятию 1

1. Укажите функции, которые являются:
а) линейной зависимостью;
б) обратной пропорциональностью;
в) квадратичной зависимостью;
г) кубической зависимостью.

1) $y = \dfrac{4}{x}$;	2) $y = \dfrac{-7}{x}$;
3) $y = x^2$;	4) $y = 2 - 5x^2$;
5) $y = x^3$;	6) $y = x$;
7) $y = -3x + 2$;	8) $y = -5x + 2$;
9) $y + x = 2$;	10) $x - 5y + 6 = 0$.

2. Найдите частные значения функции:

1) $f(x) = \dfrac{3x^2-2}{x+3}$, найдите $f(-1),\ f(0),\ f(1)$;

2) $f(x) = 3^{x+1}$, найдите $f(-1),\ f(0),\ f(2)$;

3) $f(x) = \cos(2x) - \sin(x)$, найдите $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ f(0),\ f(-\pi)$;

4) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4, & \text{если } x<-1, \\ 2, & \text{если } -1\le x<1, \\ 3x+1, & \text{если } x\ge 1, \end{cases}$ найдите $f(-2), f(-1), f(3)$;

5) $f(x)=\begin{cases} 3\sin(2x), & \text{если } x<0, \\ \cos(x)-1, & \text{если } x\ge 0, \end{cases}$ найдите $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), f(0), f(\pi)$;

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2}, & \text{если } x<0, \\ 2x^3, & \text{если } x\ge 0, \end{cases}$ найдите $f(-2), f(0), f(2)$.

3. Найдите область определения функций:

1) $y=\dfrac{15}{2x+8}$;

2) $y=\dfrac{5x+1}{2x+4}$;

3) $y=\dfrac{19}{x^2-9}$;

4) $y=\dfrac{x-3}{x^2-4}$;

5) $y=\sqrt{-2x-1}$;

6) $y=\sqrt{4-8x}$;

7) $y=\ln(2x-4)$;

8) $y=\log_{3-5x}9$;

9) $y=\sqrt{x^2-2x-3}+\dfrac{3x}{x-1}$;

10) $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}+\dfrac{3}{\log_2(x+4)}$.

4. Исследуйте функции на четность, нечетность:

1) $y=3\sin(2x)+4\mathrm{tg}(3x)$;

2) $y=\dfrac{5x+1}{2x+4}$;

3) $y=5x^5-6x+4$;

4) $y=2x^2-4x^4-3x$;

5) $y=\dfrac{19}{x^2-9}$;

6) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2}$;

7) $y=\sqrt{x^2-2}$;

8) $y=\sqrt[3]{x-\sin(x)}$.

Домашнее задание к занятию 1

1. Найдите область определения следующих функций:

1) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x-3}$;

2) $y=\dfrac{\ln(7-x)}{x^2-6x+5}$;

3) $y = \arcsin(7x + 3)$;

4) $y=\sqrt[3]{x-\sin(x)}$.

2. Исследуйте функции на четность, нечетность:

1) $y = \dfrac{\sin^2(3x)}{x^2+3}$; 2) $y = \dfrac{x^3}{x^2-5}$.

Занятие 2. Предел функции в точке, правила его вычисления. Вычисление простейших пределов

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A. Записывается это следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) = A \text{ при } x \to x_0.$$

В определении предела x_0 – предельное значение аргумента функции может быть любым конечным числом, или же обозначать $-\infty$ и $+\infty$.

При вычислении пределов пользуются следующими правилами:

1) предел постоянной величины равен самой величине, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} C = C;$$

2) предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций при условии, что пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$

3) предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов при условии, что эти пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

4) если n – натуральное число, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n;$$

5) постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \to x_0}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x);$$

6) предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Пусть требуется вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Для этого достаточно подставить предельное значение аргумента x_0 в функцию $f(x)$, стоящую под знаком предела. При этом возможны следующие случаи:

1-й случай: под знаком предела образуется число, тогда оно и является значением предела.

Например, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3x-2}{x} = \left(\dfrac{3 \cdot (-3) - 2}{-3}\right) = \left(\dfrac{-11}{-3}\right) = \dfrac{11}{3}.$

2-й случай: под знаком предела образуется число A, деленное на 0, т. е. $\left(\dfrac{A}{0}\right)$, тогда значение предела равно $-\infty$ или $+\infty$ в зависимости от знака числа A (если $A < 0$ равен $-\infty$ и равен $+\infty$, если $A > 0$).

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x-2}{x} = \left(\dfrac{3 \cdot (0) - 2}{0}\right) = \left(\dfrac{-2}{0}\right) = -\infty.$

С другой стороны, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-2}{x-2} = \left(\dfrac{3 \cdot (2) - 2}{2-2}\right) = \left(\dfrac{4}{0}\right) = \infty.$

3-й случай: под знаком предела образуется число A, деленное на $\pm\infty$, т. е. $\left(\dfrac{A}{\pm\infty}\right)$, тогда значение предела равно 0.

Например, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{x^2+7} = \left(\dfrac{-2}{\infty}\right) = 0.$

4-й случай: под знаком предела образуются выражения вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $0\cdot\infty$ и т. д., которые называются неопределенностями. В данном случае, чтобы вычислить предел, необходимо раскрыть неопределенность и, лишь затем, в оставшееся выражение подставить предельное значение аргумента.

Задание к аудиторному занятию 2

Найдите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+6x-3}{4x^2-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{3-4x}\right)^{2x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5-4^x}{3+7^x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\sin(x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}4^{\frac{2x}{x+1}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+2}{x^2-4x+4}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x+2}{x^2+3x-4}$; 12) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^2-3x+1}{2x^3-x^2+x+4}$;

13) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{6x-3^{x-5}}{x^2-25}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6x+2}{4x}\right)^{4x-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5-4^x}{3+7^x}$;

16) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\sin(x)}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}4^{\frac{2x}{x+1}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))^{x+3}$;

19) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{-25}{x^2-36}$; 20) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{6x^3-1}\right)^{4}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-7^x}{3+7^x}$;

22) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{-6}{x+4}\right)^{7}$; 23) $\lim\limits_{x\to -\infty}4^{\frac{2}{7x^5+1}}$; 24) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-6}{x}}$;

25) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-6x+11}$; 26) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{4x+9}$; 27) $\lim\limits_{x\to -\infty}e^{x^5+4}$;

28) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^{3}$; 29) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{x^8}$; 30) $\lim\limits_{x\to -\infty}11^{\frac{x}{6}}$.

Домашнее задание к занятию 2

Найдите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2-3x+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+x-4}{x^2-36}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{3x+2}{8+4x}\right)^{-3x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x+4}{x^2+4}\right)^{x+9}$; 5) $\lim\limits_{x\to -6}2^{\frac{x}{x+5}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right)^{x+9}$;

7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{17}{x^3-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{-1}{7x^3+6}\right)^{8}$; 9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-23}{3+7^x}$.

З а н я т и е 3. Раскрытие неопределенностей $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$ под знаком предела

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** (б. м. в.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** (б. б. в.) в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции по абсолютной величине превосходят любое наперед заданное сколь угодно большое положительное число, т. е. $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Пусть $f(x)$ есть бесконечно большая функция при $x \to x_0$, тогда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой функцией при этом же стремлении аргумента. Если $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

Например, функция $f(x)=x^2$ при $x \to 0$ является бесконечно малой функцией. Тогда функция $\dfrac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ является бесконечно большой. Функция $f(x)=x^4+1$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой. Тогда $\dfrac{1}{x^4+1}$ при $x\to\infty$ будет бесконечно малой функцией.

Раскрытие неопределенностей вида «*бесконечность, деленная на бесконечность*» $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ есть б. б. в. при $x\to\infty$, представляющие собой алгебраическую сумму степенных выражений. В этом случае вычисление $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Для того чтобы раскрыть такую неопределенность выполняют следующие действия:

1) под знаком предела из числителя и знаменателя выносят множители x^n, где n определяет наивысший показатель степени переменной обеих частей дроби;

2) сокращают вынесенные множители;

3) анализируют оставшееся под знаком предела выражение на основания правил вычисления предела и его свойств.

Пример 1. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{7x^2+x^3+9}{-4x^2+5x-1}$ при $x\to\infty$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x^3+9}{-4x^2+5x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Получена неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее раскрытия вынесем из числителя и знаменателя величину x^3 и ее сократим.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+x^3+9}{-4x^2+5x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{7x^2}{x^3}+\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{9}{x^3}\right)}{x^3\left(-\dfrac{4x^2}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}+1+\dfrac{9}{x^3}}{-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty,$$ так как функции $\dfrac{7}{x}$, $\dfrac{9}{x^2}$, $\dfrac{4}{x}$, $\dfrac{3}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-7x^5+x^2}{x^2+7x-6}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-7x^5+x^2}{x^2+7x-6}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Получена неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее раскрытия вынесем из числителя и знаменателя величину x^5 и ее сократим.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-7x^5+x^2}{x^2+7x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\dfrac{8}{x^5}-\dfrac{7x^5}{x^5}+\dfrac{x^2}{x^5}\right)}{x^5\left(\dfrac{x^2}{x^5}+\dfrac{7x}{x^5}-\dfrac{6}{x^5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{8}{x^5}-7+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{6}{x^5}\right)}=\left(\frac{-7}{0}\right)=-\infty,$$ так как функции $\dfrac{1}{x^3}$, $\dfrac{7}{x^4}$, $\dfrac{8}{x^5}$, $\dfrac{6}{x^5}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Получена неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее раскрытия вынесем из числителя и знаменателя величину x^2 и ее сократим.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{-2} = -3,$$ так как функции $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{3}{x}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{11x+9}{8x^2+3x-1}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11x+9}{8x^2+3x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Получена неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее раскрытия вынесем из числителя и знаменателя величину x^2 и ее сократим.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11x+9}{8x^2+3x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{11x}{x^2}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{8x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{11}{x}+\frac{9}{x^2}}{8+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(\frac{0}{8}\right) = 0,$$ так как функции $\frac{11}{x}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{9}{x^2}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$.

Замечание: на основании решения примеров 1–4 можно заметить, что при раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ возможны 3 случая:

1) аргумент с наивысшим показателем степени находится в числителе дроби, тогда предел равен ∞ или $-\infty$ в зависимости от знака коэффициента, стоящего при аргументе с наивысшим показателем степени;

2) аргумент с наивысшим показателем степени находится и в числителе дроби, и в ее знаменателе, тогда предел равен отношению коэффициентов при соответствующих слагаемых числителя и знаменателя дроби;

3) аргумент с наивысшим показателем степени находится в знаменателе дроби, тогда предел равен 0.

Используя это замечание, примеры на раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ можно решать следующим образом.

Пример 5. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+9}{7-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+14}{6-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x^6}{9x-x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x^4}{12x^7+x^2}$.

Решение:

$$\text{а) }\lim_{x\to\infty}\frac{6x+9}{7-5x}=\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{н. ст.: } x^1\\ \text{ч.: } 6\\ \text{зн.: } -5\end{array}\right|=\left(\frac{6}{-5}\right)=-\frac{6}{5};$$

$$\text{б) }\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+14}{6-2x}=\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{н. ст.: } x^4\\ \text{ч.: } 3\\ \text{зн.: } 0\end{array}\right|=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty;$$

$$\text{в) }\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x^6}{9x-x^4}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{н. ст.: } x^6\\ \text{ч.: } -7\\ \text{зн.: } 0\end{array}\right|=\left(\frac{-7}{0}\right)=-\infty;$$

$$\text{г) }\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+7x^4}{12x^7+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{н. ст.: } x^7\\ \text{ч.: } 0\\ \text{зн.: } 12\end{array}\right|=\left(\frac{0}{12}\right)=0.$$

Раскрытие неопределенностей вида «*ноль, деленный на ноль*» $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ есть б. м. в. при $x\to\infty$, представляющие собой алгебраическую сумму степенных выражений. В этом случае вычисление $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того чтобы раскрыть такую неопределенность выполняют следующие действия:

1) под знаком предела в числителе и знаменателе дроби выделяют общий множитель;

2) сокращают его;

3) вычисляют предел, подставляя в оставшееся под знаком предела выражение предельное значение аргумента.

При этом часто используются следующие формулы:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$;

3) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$;

4) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – это корни соответствующего квадратного уравнения.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{x^2-6x+9}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{x^2-6x+9} = \left(\dfrac{9-9}{9-18-9}\right) = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Видим, что образовалась неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Это означает, что в числителе и знаменателе дроби есть общий множитель. Причем этот множитель нам заведомо известен, это множитель (x – 3). Выделим его в числителе и знаменателе: $3x - 9 = 3(x-3)$; $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

После выделения общего множителя в числителе или знаменателе дроби вернемся к вычислению предела

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{x^2-6x+9} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)(x-3)}\lim_{x\to 3}\frac{3}{(x-3)} = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+8x+16}{x^2-16} = \left(\frac{16-32+16}{16-16}\right) = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Видим, что образовалась неопределенность вида «ноль, деленный на ноль». Это означает, что в числителе и знаменателе дроби есть общий множитель. Причем этот множитель нам заведомо известен, это множитель (x + 4). Выделим его в числителе и знаменателе: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$; $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$.

После выделения общего множителя в числителе или знаменателе дроби вернемся к вычислению предела.

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+8x+16}{x^2-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x+4)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to-4}\frac{x+4}{x-4}=\left(\frac{0}{-8}\right)=0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2-8x+1}{6x^2-4x-2}$.

Решение. Подставим в функцию вместо переменной x ее предельное значение:

$$\lim_{x\to1}\frac{7x^2-8x+1}{6x^2-4x-2}=\left(\frac{7-8+1}{6-4-2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Видим, что образовалась неопределенность вида «нуль, деленный на нуль». Это означает, что в числителе и знаменателе дроби есть общий множитель. Причем этот множитель нам заведомо известен, это множитель $(x-1)$. Выделим его в числителе и знаменателе.

$$7x^2-8x+1=0;$$

$$\text{Д}=b^2-4ac=64-4\cdot7\cdot1=36=6^2;$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\text{Д}}}{2a}=\frac{8-6}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7};\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\text{Д}}}{2a}=\frac{8+6}{14}=\frac{14}{14}=1;$$

$$7x^2-8x+1=7(x-\frac{1}{7})(x-1)=(7x-1)(x-1).$$

$$6x^2-4x-2=0;$$

$$\text{Д}=b^2-4ac=16-4\cdot6\cdot(-2)=64=8^2;$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\text{Д}}}{2a}=\frac{4-8}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\text{Д}}}{2a}=\frac{4+8}{12}=\frac{12}{12}=1;$$

$$6x^2-4x-2=6(x-\frac{1}{3})(x-1)=(6x-2)(x-1).$$

После выделения общего множителя в числителе или знаменателе дроби вернемся к вычислению предела

$$\lim_{x\to 1}\frac{7x^2-8x+1}{6x^2-4x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(7x-1)(x-1)}{(6x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{7x-1}{6x-2}=\left(\frac{6}{4}\right)=\frac{3}{2}.$$

В случае когда под знаком предела есть иррациональное выражение (под знаком корня находится переменная x), а подстановка под знак предела предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, для того, чтобы увидеть общий множитель в числителе и знаменателе дроби, приходится эти части дроби умножать на величину сопряженную иррациональной.

Пример 9. Найти предел функции $f(x)=\frac{\sqrt{2x-9}-1}{x-5}$ при $x = 5$.

Решение. Подставим вначале значение $x = 5$ в функцию:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-9}-1}{x-5}=\left(\frac{\sqrt{10-9}-1}{5-5}=\frac{0}{0}\right).$$

Для раскрытия полученной неопределенности числитель и знаменатель функции умножим на выражение $\sqrt{2x-9}+1$, сопряженное числителю, и выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-9}-1)(\sqrt{2x-9}+1)}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-9})^2-1^2}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x-9-1}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)}=\lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2x-9}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2\cdot 5-9}+1}=1.$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$.

Решение. При подстановке в функцию предельного значения $x = 0$ получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}=\left(\frac{\sqrt{2-0}-\sqrt{2+0}}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$

Умножим числитель и знаменатель функции на выражение $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$ и выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x})^2-(\sqrt{2+x})^2}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x-(2+x)}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}=\left(\frac{-2}{\sqrt{2-0}+\sqrt{2+0}}\right)=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание к аудиторному занятию 3

Найдите пределы следующих функций:

а) *раскрытие неопределенностей* вида «*бесконечность, деленная на бесконечность*»:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-3x)^2}{2x^2+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+1}{3x+10}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{5x^2+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+1}{(x-2)^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^3+2x^2+3}{(1-x)^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{5x^3-9x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-5x+6}$;

б) *раскрытие неопределенности вида «нуль, деленый на нуль»*:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-2x-15}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{6x^2-5x-6}{3x^2-x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{4x^2-3x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-3}-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{2-\sqrt{6+x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 17) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Домашнее задание к занятию 3

Найдите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-4x}{2-4x^2+3x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2-4x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$.

Занятие 4. Применение эквивалентных бесконечно малых величин при раскрытии неопределенности $\left(\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$ под знаком предела

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ б. м. в. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Будем говорить, что б. м. в. $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$:

1) *одного и того же порядка*, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\text{const}$;

2) $f(x)$ *более высокого порядка*, чем $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;

3) $f(x)$ *более низкого порядка*, чем $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Бесконечно малые величины $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$ и обозначаются $f(x)\sim g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Основные эквивалентные б. м. в. при $\alpha(x)\to 0$:

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; 4) $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

5) $1-\cos(\alpha(x)) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.

При этом действуют следующие утверждения:

1. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их эквивалентных функций при* $x \to x_0$.

2. *Сумма бесконечно малых функций различного порядка эквивалентна бесконечно малой функции самого низкого порядка*.

Данные утверждения используются при вычислении пределов.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)(1-\cos(4x))}{\operatorname{arctg}^3(5x)}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)(1-\cos(4x))}{\operatorname{arctg}^3(5x)} = \left|\begin{array}{l} \text{при } x\to 0 \text{ (утв. 1)} \\ \arcsin(3x)\sim 3x \\ 1-\cos(4x)\sim \dfrac{(4x)^2}{2} \\ \operatorname{arctg}(5x)\sim 5x \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 8x^2}{(5x)^3} = \frac{24}{125}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+\sin(x)}{5\operatorname{tg}(x)+x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\sin(x)}{5\operatorname{tg}(x)-x^2} = \left|\begin{array}{l} \text{при } x\to 0 \text{ (утв. 2)} \\ 2x^3+\sin(x)\sim\sin(x) \\ 5\operatorname{tg}(x)+x^2 \sim 5\operatorname{tg}(x) \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{5\operatorname{tg}(x)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{при } x\to 0, \text{ (утв. 1)} \\ \sin(x)\sim x \\ 5\operatorname{tg}(x)\sim 5x \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

Задание к аудиторному занятию 4

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)}{\arcsin(2x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\operatorname{tg}(4x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(7x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^4(3x)}{(1-\cos(2x))^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^3(5x)}{\sin(4x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)\cdot\arcsin(4x)}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(5x)}{\arcsin(7x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^6(2x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{\operatorname{tg}(3x)}$.

Домашнее задание к занятию 4

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{\operatorname{tg}^2(2x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin(5x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)\arcsin(3x)}{1-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(3x)}{\arcsin^5(2x)}$.

Занятие 5. Второй замечательный предел, его применение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пределы вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ называются *вторым замечательным пределом*.

Второй замечательный предел характеризуется следующими свойствами:

1) неопределенностью $(1)^\infty$, при подстановке предельного значения аргумента;

2) функция, стоящая под знаком предела, представляет собой степенно-показательное выражение, основание которого представляет сумму единицы и б. м. в., обратной по величине показателю степени.

Применение второго замечательного предела для вычисления предела сводится к преобразованию выражения, стоящего под знаком предела, к виду, описанному в свойстве 2.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3}.$$

Пример 2. Найти предел функции $f(x)=\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$.

Решение. Воспользуемся вторым замечательным пределом в виде формулы $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2-x}{2}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2-x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^{2}-4}{2x^{2}+3x-7}\right)^{4x+7}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^{2}-4}{2x^{2}+3x-7}\right)^{4x+7}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^{2}-4}{2x^{2}+3x-7}-1\right)^{4x+7}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^{2}-4-2x^{2}-3x+7}{2x^{2}+3x-7}\right)^{4x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x+3}{2x^{2}+3x-7}\right)^{4x+7}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3x+3}{2x^2+3x-7}\right)^{\frac{2x^2+3x-7}{-3x+3}}\right)^{\frac{(4x+7)(-3x+3)}{2x^2+3x-7}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

Задание к аудиторному занятию 5

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{5x-2}\right)^{3x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-7}{2x^2+3x-4}\right)^{4x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-4}\right)^{4x^2-x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+7}{x^3+x-4}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Домашнее задание к занятию 5

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{2-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5x-3}{4x^2+x-7}\right)^{3x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{5x-2}\right)^{3x^2+8}$.

Занятие 6. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

При определении непрерывности функции приходится пользоваться понятием односторонних пределов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D = \{x\}$ и пусть $x \to x_0$. Будем рассматривать такие значения x, при которых $x < x_0$. Это означает, что $x \to x_0$, оставаясь все время слева от x_0. Если при этом существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то он называется ***ле-***

вым пределом этой функции в точке x_0 или при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Пусть теперь $x \to x_0$, оставаясь все время справа от x_0, т. е. оставаясь больше x_0. Если при этом существует предел функции $y = f(x)$, то он называется ***правым пределом*** этой функции в точке x_0 или при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Левый и правый пределы называются ***односторонними пределами функции*** в точке. Если односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, то функция имеет тот же предел в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если односторонние пределы функции в точке x_0 существуют, но не равны между собой, то предел функции в этой точке не существует.

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \le 2, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ в точке $x = 2$.

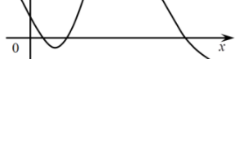
Решение. Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 2$. Если $x \le 2$, то $f(x) = 2 - x$ и $f(2 - 0) = \lim\limits_{x \to 2-0} (2 - x) = 2 - 2 = 0$. Если же $x > 2$, то $f(x) = 2x - 1$ и $f(2 + 0) = \lim\limits_{x \to 2+0} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Так как односторонние пределы не равны между собой, т. е. $0 \ne 3$, то предел данной функции в точке $x = 2$ не существует.

Пример 2. Найти предел функции $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \le 6, \\ x^2 - 27, & \text{если } x > 6 \end{cases}$ в точке $x = 6$.

Решение. Найдем односторонние пределы функции в данной точке. Если $x \le 6$, то $f(x) = 2x - 3$ и $f(6 - 0) = \lim\limits_{x \to 6-0} (2x - 3) = = 2 \cdot 6 - 3 = 9$.

Если $x > 6$, то $f(x) = x^2 - 27$ и $f(6 + 0) = \lim\limits_{x \to 6+0} (6^2 - 27) = = 36 - 27 = 9$.

Так как односторонние пределы в точке $x = 6$ равны между собой, то предел функции в этой точке существует и равен 9.



Интуитивное представление о непрерывной функции обычно связывают с такой функцией, график которой – непрерывная линия.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется разрывной в точке x_0, а точка x_0 – точкой разрыва.

Введем следующие обозначения: $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента; $\Delta y = f(x - x_0) - f(x_0)$ – приращение функции.

Тогда функция $y = f(x)$ будет *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

На практике при исследовании функции на непрерывность удобно пользоваться понятием *одностороннего предела функции в точке*.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и предположим, что ее аргумент x, изменяясь, стремится к x_0, оставаясь слева (справа) от этой точки, т. е. $x \to x_0 - 0$ ($x \to x_0 + 0$). Пусть при этом функция стремится к некоторому числу A, т. е. $f(x) \to A$.

Тогда будем говорить, что существует *левосторонний предел функции в точке* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ (или *правосторонний предел функции в точке* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$).

Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется *непрерывной слева* (*справа*) в точке x_0, если существует левосторонний (или правосторонний) предел функции и он равен $f(x_0)$. Другими словами, $y = f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, и непрерывна справа в точке, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

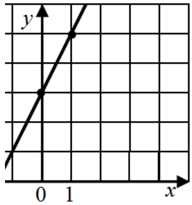
Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$, непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется непрерывной на этом множестве. Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на отрезке требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т. е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т. е. в точке b.

Пример 3. Исследовать непрерывность функций

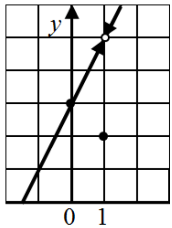
$$f(x) = 2x + 3 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 1$. Построить их графики.



Решение. Исследуем непрерывность функции $f(x) = 2x + 3$ в точке $x_0 = 1$. Для этого найдем $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Вычислим $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = \lim\limits_{x \to 1}(2 \cdot 1 + 3) = 5$. Так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, то функция $f(x)=2x+3$ непрерывна в точке $x_0 = 1$. Этот факт подтверждает график функции $f(x) = 2x + 3$.



Исследуем непрерывность функции

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$ в точке $x_0 = 1$.

Для этого найдем $g(1) = 2$.

Вычислим $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = \lim\limits_{x \to 1}(2 \cdot 1 + 3) = 5$.

Так как $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$, то функция $g(x)$ имеет разрыв в точке $x_0 = 1$. Этот факт подтверждает график функции

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Различают следующие виды точек разрыва:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва первого рода;

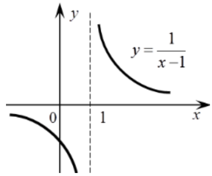
2) если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой неустранимого разрыва первого рода, а модуль разности этих пределов – скачком функции $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $\pm\infty$ или вообще не существует, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Таким образом, при исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения непрерывности функции в точке. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислите односторонние пределы.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\frac{1}{x-1}.$$



Решение. Область определения данной функции $D(f)$: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.
Следовательно, $x_0 = 1$ является точкой разрыва.
Определим характер этого разрыва. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$, то $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию

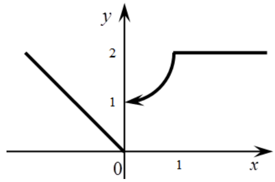
$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{если } 0<x<1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Решение. Так как функции $-x$, $x^2 + 1$ и 2 непрерывны в области задания, то точками разрыва могут быть только точки перехода от одного аналитического выражения к другому. Исследуем функцию на непрерывность в этих точках.

1. Исследуем функцию в точке $x_1 = 1$. Вычислим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$.

Так как односторонние пределы существуют, конечны, но не равны друг другу, то точка является точкой разрыва первого рода. Модуль разности между левым и правым пределом есть скачок. В данном случае скачок равен 1.

2. Исследуем функцию в точке $x_2 = 1$.
Вычислим односторонние пределы:



$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 2=2,\quad f(1)=2.$$

То есть, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$, следовательно, функция $f(x)$ в точке $x_2 = 1$ непрерывна.

Задания к аудиторному занятию 6

1. Докажите непрерывность функции $f(x)=x^3-2x^2+4x+5$ в точках: $x_0 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

2. Исследуйте функции на непрерывность. Классифицируйте точки разрыва графика функции.

1) $f(x)=\begin{cases}5, \text{если } x=3,\\ x^2-2x, \text{ если } x\neq 3;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2, \text{если } x=-4,\\ 3-2x, \text{ если } x\neq -4;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x+2, \text{ если } x\le -1,\\ x^2+1, \text{ если } -1<x\le 1,\\ -x+3, \text{ если } x>1;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\le 0,\\ -x^2, \text{ если } 0<x<1,\\ x, \text{ если } x\ge 1;\end{cases}$

5) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$; 6) $f(x)=3^{\frac{2}{4-x}}$; 7) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$;

8) $f(x)=4^{\frac{2}{5-x}}$; 9) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{2x+3}$;

11) $f(x)=2-\dfrac{x}{5-x}$; 12) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{4}{x+1}}$; 13) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+1}$.

Домашнее задание к занятию 6

Исследуйте функции на непрерывность. Классифицируйте точки разрыва графика функции.

1) $f(x)=\begin{cases}1, \text{если } x=0,\\ x+3, \text{ если } x\neq 0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x+4, \text{ если } x<-2,\\ 2x^2, \text{ если } -2\le x\le 2,\\ 2x+4, \text{ если } x>2;\end{cases}$

3) $f(x)=3+\dfrac{2}{x}$; 4) $f(x)=6^{\frac{2}{x+1}}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-7}{x+2}$.

З а н я т и е 7. Асимптоты графика функции

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to \pm\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такую прямую называют *асимптотой графика*.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, т. е. x_0 является точкой разрыва второго рода.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить точки разрыва функции второго рода.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной (если $k = 0$ – горизонтальной) асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если для функции существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k\,, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

При нахождении наклонных асимптот графика функции возможны следующие случаи:

1) оба предела существуют и не зависят от знака бесконечности, тогда прямая $y = kx + b$ называется двусторонней асимптотой;

2) оба предела существуют, но при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ они различны, тогда имеем две односторонние наклонные асимптоты;

3) если хотя бы один из пределов не существует, то наклонных асимптот нет.

Пример 1. Найти асимптоты линии $y = \dfrac{1}{x}$.

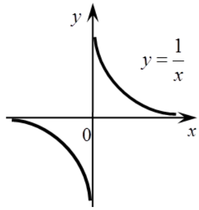
Р е ш е н и е. Область определения данной функции $D(f)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Значит, точка $x_0 = 0$ – точка разрыва. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Следовательно, $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода, а это, в свою очередь, означает, что прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции.

Для нахождения наклонных асимптот вычислим пределы:



$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Значит, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

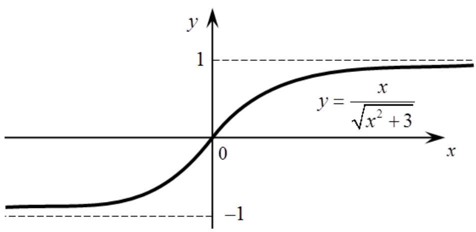
Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, следовательно, вертикальных асимптот нет. Для определения наклонных асимптот находим пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \to -\infty, \\ -1, \text{ если } & x \to \infty. \end{cases}$$

Следовательно, у графика данной функции две односторонние горизонтальные асимптоты $y = 1$, при $x \to -\infty$ и $y = -1$, при $x \to \infty$.



Задание к аудиторному занятию 7

Исследуйте функции на наличие асимптот. Схематично постройте их график.

1) $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x+3}$; 2) $f\left(x\right)=3^{\frac{2}{6-x}}$; 3) $f\left(x\right)=\dfrac{-5}{x+1}$;

4) $f\left(x\right)=2^{\frac{x}{6-x}}$; 5) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left(x-1\right)^2}$; 6) $f\left(x\right)=\dfrac{2x-x^2-2}{x+3}$;

7) $f\left(x\right)=6-\dfrac{7}{4-x}$; 8) $f\left(x\right)=5^{\frac{4}{x+2}}$; 9) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Домашнее задание к занятию 7

Исследуйте функции на наличие асимптот. Схематично постройте их график.

1) $f\left(x\right)=6^{\frac{x}{3-x}}$; 2) $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2}$; 3) $f\left(x\right)=\dfrac{x-3x^2-5}{x+2}$.

Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Введение в математический анализ»

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Найдите область определения функции

$$y=(G-1)(G-4)\sqrt{x^2-N}+(G-2)(G-3)\ln(N-x^2)-\frac{G-15}{x+N}.$$

2. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to G}\dfrac{x^2+x+N}{x^2+2(x-5)-N}$; б) $\lim\limits_{x\to N-20}\dfrac{x^2+(20+G-N)x+G}{Gx^2+[(20-N)G-N]x}$;

в) $\lim\limits_{x\to N}\dfrac{x^2-N^2}{\sqrt{x-N+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^G}{\left(Nx^G-G\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(Gx)\cdot\sin(Nx)}{1-\cos(\dfrac{N-20}{10}x)}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{Gx+N-20}{Gx+N}\right)^{(G-5)x+N}$.

3. Исследуйте функции на непрерывность и наличие асимптот. Укажите вид разрыва. Постройте схематично график функции.

а) $f(x)=(G+3)^{\frac{(-1)^N}{(N-10)-x}}$; б) $f(x)=\dfrac{Gx^2+x-N}{x+(-1)^N(\mathrm{N}-10)}$;

в) $f(x)=\begin{cases}2x-N,\ x\le G-1,\\ 2x^2-N,\ G-1<x<G+1,\\ (-1)^N(N-10)x-3,\ x\ge G+1.\end{cases}$

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие 1. Простейшие случаи дифференцирования функции

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Другими обозначениями производной могут быть $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется *дифференцируемой* в этой точке. Операция ее нахождения называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1) $C'=0$, где (C = const); 2) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

3) $(e^x)'=e^x$; 4) $(a^x)'=a^x\ln a$;

5) $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$; 6) $(\log_a(x))'=\dfrac{1}{x\ln(a)}$;

7) $(\sin(x))' = \cos(x)$; 8) $(\cos(x))' = -\sin(x)$;

9) $(\mathrm{tg}(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$; 10) $(\mathrm{ctg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;

11) $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12) $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале $(a; b)$. Справедливы следующие правила:

1) $(k \cdot u)' = k \cdot u'$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; 4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Пример 1. Найти производные заданных функций:

а) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{3}{x^2} + 4\sqrt{x^3}$; б) $y = 4 \cdot 2^x + 4\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{1}{3}\arcsin x + 5$.

Решение. Используя правила и формулы дифференцирования, получаем:

$$\text{а) } y' = \frac{1}{2}(x^4)' - 3(x^{-2})' + 4(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{1}{2}4x^3 - 3\cdot(-2)x^{-2-1} + 4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 2x^3 +$$

$$+6x^{-3} + 6x^{\frac{1}{2}} = 2x^3 + \frac{6}{x^3} + 6\sqrt{x}.$$

При решении использовались свойства степени:

$$\frac{1}{x^p} = x^{-p},\ \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}};$$

$$\text{б) } y' = 4\cdot(2^x)' + 4(\mathrm{ctg}\,x)' + \frac{1}{3}(\arcsin x)' + (5)' = 4\cdot 2^x \ln 2 + 4\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 0 = 4\cdot 2^x \ln 2 - \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2. Найти производные заданных функций:

а) $y = \sqrt{x}\ln x$; б) $y = \dfrac{\log_2 x}{\cos x}$.

Решение:

а) $y' = (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$;

б) $y' = \dfrac{(\log_2 x)' \cos x - \log_2 x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}\cos x - \log_2 x(-\sin x)}{\cos^2 x} +$

$= \dfrac{\dfrac{\cos x}{x\ln 2} + \log_2 x \sin x}{\cos^2 x}$.

Задание к аудиторному занятию 1

Найдите производные функций:

а) $y = 14x - 3x^2 + 2x^4 + 3$; б) $y = 6x + 9x^2 + 3x^3 - 4$;

в) $y = 15x^3 + \dfrac{1}{4x^3} - 4\sqrt[5]{x^3} - 2$; г) $y = 8x^6 - \dfrac{1}{5x^5} - 3\sqrt[3]{x^2} + 7$;

д) $y = 3x^5 - 2\mathrm{tg}(x) + \mathrm{arctg}(x) - 4$; е) $y = \dfrac{e^x}{3} - 7\cos(x) + 7\arccos(x)$;

ж) $y = (2x^4 + \dfrac{1}{4x^3})2^x$; з) $y = (7x^3 + 9x - 1)\log_5(x)$;

и) $y = \mathrm{ctg}(x)\dfrac{1}{x^2}$; к) $y = \arcsin(x)\sqrt{x}$;

л) $y = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + 3}$; м) $y = \dfrac{8^x}{\cos(x)}$.

Домашнее задание к занятию 1

Найдите производные функций:

а) $y = 15x^3 + \dfrac{1}{4x^3} - 4\sqrt[5]{x^3} - 2$; б) $y = 7e^x - 12\mathrm{ctg}(x) + 9\mathrm{arcctg}(x)$;

в) $y = (4x^3 - \dfrac{3}{\sqrt[5]{x}})\ln(x)$; г) $y = \dfrac{10^x}{\cos(x)}$.

Занятие 2. Производная сложной функции

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u' = u'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u = u(x)$ производную $y'_u = f'(u)$.

Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ является сложной, и ее производная находится по правилу

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Это правило распространяется на сложные функции, которые имеют любое конечное число промежуточных аргументов.

Пример. Найти производные функций:

а) $y = e^{-3x^2}$; б) $y = \sin^3(x)$; в) $y = \sqrt{1-\cos(2x)}$;

г) $y = \mathrm{tg}(3x-1)$; д) $y = (3 - x - 4x^2)^5$.

Решение: а) введем промежуточный аргумент $u = -3x^2$. Тогда $y = e^u$, $u'_x = -6x$, $y'_u = e^u$, $y'_x = y'_u u'_x = e^u(-6x) = -6xe^{-3x^2}$;

б) функцию можно записать в виде $y = (\sin(x))^3$. Введем промежуточный аргумент $u = \sin(x)$, тогда $y = u^3$. По формулам для производной сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x = (u^3)'_u (\sin(x))'_x = 3u^2 \cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x);$$

в) запишем функцию в виде $y = (1-\cos(2x))^{\frac{1}{2}}$. Введем промежуточные аргументы $v = 2x$ и $u = 1-\cos(v)$. Тогда $y = u^{\frac{1}{2}}$. Так как имеем два промежуточных аргумента, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'_u (1-\cos(v))'_v \, (2x)'_x = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\sin(v)\,2 =$$

$$= \sin(2x)(1-\cos(2x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}}.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}}$;

г) $y' = \dfrac{1}{\cos^2(3x-1)}(3x-1)' = \dfrac{3}{\cos^2(3x-1)}$;

д) $y' = 5(3-x-4x^2)^4(3-x-4x^2)' = 5(3-x-4x^2)^4(-1-8x) =$
$= -5(3-x-4x^2)^4(1+8x)$.

Задание к аудиторному занятию 2

Найдите производные сложных функций:

а) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$;

б) $y = \dfrac{e^{-x^2}}{3}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2(x)\right)$;

г) $y = \ln\left(\ln(x)\right)$;

д) $y = 8^{x^3} + \ln(2x)$;

е) $y = \sin^2(x^2-2x+3)$;

ж) $y = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;

з) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+7}\right)$;

и) $y = e^{\frac{5x^2-3}{x^2+7}}$;

к) $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{5-4x^7}$;

л) $y = \sqrt[5]{\left(\dfrac{8+3x}{1-2x}\right)^2}$;

м) $y = \operatorname{ctg}\left(\ln(x^4-5x+6)\right)$.

Домашнее задание к занятию 2

Найдите производные сложных функций:

а) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

б) $y = \cos^3(x^2)$;

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-6x}{3+5x}}$;

г) $y = \sqrt[6]{\dfrac{6x^2-2x+4}{\cos(5x+7)}}$;

д) $y = \sqrt[4]{\sin(3x+9)}$;

е) $y = \ln^3(7x^2-8)$.

З а н я т и е 3. Производная неявной, громоздкой, степенно-показательной и параметрической функций

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Производная неявной функции. Пусть функция y задана в неявном виде, т. е. в виде уравнения $F(x;\ y) = 0$. Для нахождения производной от y по x нужно продифференцировать данное уравнение по x, считая при этом y функцией от x. В итоге производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 1. Найти производную функции y, заданной в неявном виде, т. е. уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Р е ш е н и е. Дифференцируем данное уравнение, считая при этом y функцией от x:

$$(x^3 + y^3 - 3xy)' = 0. \quad (x^3)' + (y^3)' - (3xy)' = 0,$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3(y + xy') = 0, \quad 3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0,$$

$$x^2 - y + y'(y^2 - x) = 0, \quad y'(y^2 - x) = y - x^2, \quad y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Производная громоздкой и степенно-показательной функции. Если требуется найти производную от громоздкой функции, которая представляет собой произведение или частное более чем двух переменных величин, то ее обе части лучше всего вначале прологарифмировать. Такая операция называется *логарифмическим дифференцированием*, а производная от логарифма функции – *логарифмической производной*. С помощью *логарифмического дифференцирования* находятся производные *степенно-показательных функций*, т. е. выражений вида $y = f(x)^{\varphi(x)}$.

Пример 2. Найти производные функций:

а) $y = (x+5)^2 (2x-7)^3 (x-2)$; б) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

в) $y = (\sin(2x))^{x^2+1}$; г) $y = (4-7x)^{\operatorname{arctg}(1+5x)}$.

Р е ш е н и е: а) логарифмируем функцию:

$$\ln(y) = 2\ln(x+5) + 3\ln(2x-7) + \ln(x-2).$$

Найдем производную от обеих частей полученного выражения:

$$(\ln(y))' = \left(2\ln(x+5) + 3\ln(2x-7) + \ln(x-2)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{2x-7}\cdot 2 + \frac{1}{x-2}, \qquad \frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2},$$

$$y' = y\cdot\left(\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2}\right),$$

$$y' = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)\left(\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2}\right);$$

б) запишем функцию в виде

$$y = \left(\frac{x(x^2+2)}{x-4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

и обе части прологарифмируем:

$$\ln(y) = \frac{1}{5}(\ln(x) + \ln\left(x^2+2\right) - \ln(x-4)).$$

Найдем производные от обеих частей выражения:

$$\left(\ln y\right)' = \frac{1}{5}\left(\ln x + \ln\left(x^2+2\right) - \ln(x-4)\right)', \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x - \frac{1}{x-4}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{1}{5}y\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-4}\right), \quad y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-4}\right);$$

в) функция является степенно-показательной. Поэтому перед дифференцированием ее обязательно нужно прологарифмировать:

$$\ln(y) = (x^2+1)\ln(\sin(2x)).$$

Затем продифференцируем обе части полученного выражения:

$$(\ln(y))' = \left((x^2+1)\ln(\sin(2x))\right)',$$

т. е.

$$\frac{y'}{y} = (x^2+1)'\ln(\sin(2x)) + (x^2+1)\left(\ln(\sin(2x))\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + \frac{x^2+1}{\sin(2x)}(\sin(2x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + \frac{x^2+1}{\sin(2x)}\cos(2x)2,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin(2x)) + 2(x^2+1)\mathrm{ctg}(2x),$$

$$y' = (\sin(2x))^{x^2+1}\left(2x\ln(\sin(2x)) + 2(x^2+1)\mathrm{ctg}(2x)\right).$$

г) функция является степенно-показательной. Поэтому перед дифференцированием ее обязательно нужно прологарифмировать:

$$\ln(y) = \mathrm{arctg}(1+5x)\ln(4-7x).$$

Затем дифференцируем обе части полученного выражения:

$$(\ln(y))' = (\mathrm{arctg}(1+5x)\ln(4-7x))',$$

$$\frac{y'}{y} = (\mathrm{arctg}(1+5x))'\ln(4-7x) + \mathrm{arctg}(1+5x)(\ln(4-7x))',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{1+(1+5x)^2}\ln(4-7x) + \mathrm{arctg}(1+5x)\frac{-7}{4-7x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5\ln(4-7x)}{2+10x+25x^2} - \frac{7\mathrm{arctg}(1+5x)}{4-7x}.$$

Тогда

$$y' = y\left(\frac{5\ln(4-7x)}{2+10x+25x^2} - \frac{7\mathrm{arctg}(1+5x)}{4-7x}\right),$$

$$y' = (4+7x)^{\mathrm{arctg}(1+5x)}\left(\frac{5\ln(4-7x)}{2+10x+25x^2} - \frac{7\mathrm{arctg}(1+5x)}{4-7x}\right).$$

Производная параметрической функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ находится по формуле

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 3. Найти производные функций:

а) $\begin{cases} x=\sin(3t+6), \\ y=\cos(3t+6); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=(t^3+9t-4)^7, \\ y=\operatorname{tg}(6t^3+4t). \end{cases}$

Решение:

а) $x'_t=3\cos(3t+6)$; $y'_t=-3\sin(3t+6)$.

Тогда

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-3\sin(3t+6)}{3\cos(3t+6)}=-\operatorname{tg}(3t+6).$$

б) $x'_t=7(t^3+9t-4)^6(3t^2+9)$, $y'_t=\dfrac{18t^2+4}{\cos^2(6t^3+4t)}$.

Тогда

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{18t^2+4}{\cos^2(6t^3+4t)}}{7(t^3+9t-4)^6(3t^2+9)}=$$

$$=\frac{18t^2+4}{7(t^3+9t-4)^6(3t^2+9)\cos^2(6t^3+4t)}.$$

Задания к аудиторному занятию 3

1. Найдите производные функций, заданных неявно:

а) $x^2+5xy+y^2-7=0$; б) $3x^2+4xy-4x-8y=0$;

в) $x^3+3x^2y+3xy+y^2-8=0$; г) $x^2+xy+\sin(y)=0$;

д) $x^2+2xy+y^2+8x+8y+16=0$; е) $e^y-e^{-y}-2xy=0$.

2. Найдите производные степенно-показательных функций:

а) $y=x^x$; б) $y=(2x+1)^{x-3}$;

в) $y=x^{\sin(5x-4)}$; г) $y=\cos(x)^{x^2}$;

д) $y=x^{\ln(6-4x)}$; е) $y=\ln(x)^{x-2}$.

3. С помощью предварительного логарифмирования найдите производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{(4x-5)^5\sqrt[4]{(x+3)^3}}{\sin^2(5x)}$; б) $y=\dfrac{(2x+3)^6\sqrt[6]{(x-4)^5}}{\operatorname{tg}^3(2x)}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt[7]{(3x-1)^5}\cdot(2-3x)^4}{\operatorname{ctg}^4 3x}$; г) $y=\dfrac{\sqrt[6]{(4-5x}(6x-5)^3}{\sin^4(2x)}$;

д) $y=\dfrac{\sqrt[3]{(2x-1)}\sin^4(3x)}{(4-3x)^5}$; е) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(2-3x)^4}(4x-5)^6}{\arcsin^2(2x)}$.

4. Найдите производные параметрических функций:

а) $\begin{cases} x=-2+3t-t^3, \\ y=t+2t^2+t^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y=-\dfrac{2t}{1+t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=\dfrac{(t+1)^2}{4}, \\ y=\dfrac{(t-1)^2}{4}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x=\dfrac{3-2t}{t}, \\ y=2t^3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=t-e^{-t}, \\ y=2t+e^{-2t}. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 3

Найдите производные функций:

а) $yx-\operatorname{ctg}(y)=4$; б) $\cos(y)+\dfrac{x}{y}=-5x^2$;

в) $y=x^{\operatorname{ctg}(x^2-4x)}$; г) $y=(2x-12)^{\ln(x)}$;

д) $y=\dfrac{(2-3x)^6\sqrt[3]{(7x+8)^2}}{\operatorname{ctg}^2(7x)\cdot 5^{-\sin(3x)}}$; е) $y=\dfrac{\sqrt[4]{(9-3x)^5}(1+5x)^2}{\operatorname{arctg}^2(x)6^{\cos(5x)}}$;

ж) $\begin{cases} x=2\cos(3t+1), \\ y=2\sin(3t+1). \end{cases}$ з) $\begin{cases} x=1-\cos^2(2t), \\ y=t\sin^2(2t). \end{cases}$

Занятие 4. Дифференциал функции

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x. Тогда приращение функции можно записать $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции $f'(x)\,\Delta x$. Обозначается дифференциал функции dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\,\Delta x$, а так как $\Delta x = dx$, то $dy = f'(x)\,dx$.

Пример 1. Записать дифференциалы заданных функций:

а) $s = \cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)$; б) $m = \frac{n^2 e^{n^2}}{n^2+1}$;

в) $p = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)\right) - \frac{k}{\sin(k)}$; г) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2u^4}{1-u^8}\right)$.

Решение: а) сначала преобразуем данную функцию

$$s = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos^2(x).$$

и найдем ее производную:

$$s' = \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = \cos(2x) - \sin(x)\cos(x) =$$

$$= \cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Тогда дифференциал функции равен $ds = \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$;

б) найдем производную функции $m = \frac{n^2 e^{n^2}}{n^2+1}$:

$$m' = \frac{(2ne^{n^2} + 2n^3 e^{n^2})(n^2+1) - 2n^3 e^{n^2}}{(n^2+1)^2} = \frac{2n^3 e^{n^2} + 2n^5 e^{n^2} + 2ne^{n^2}}{(n^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2ne^{n^2}(n^4+n^2+1)}{(n^2+1)^2}.$$

Тогда дифференциал функции равен

$$dm = \frac{2ne^{n^2}(n^4+n^2+1)}{(n^2+1)^2}dn;$$

в) найдем производную функции $p = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)\right) - \frac{k}{\sin(k)}$:

$$p' = \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)} - \frac{\sin(k)-k\cos(k)}{\sin^2(k)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{k}{2}\right)\cos\left(\frac{k}{2}\right)} -$$

$$-\frac{\sin(k)-k\cos(k)}{\sin^2(k)} = \frac{\sin(k)-\sin(k)+k\cos(k)}{\sin^2(k)} = \frac{k\cos(k)}{\sin^2(k)}.$$

Тогда дифференциал функции равен

$$dp = \frac{k\cos(k)}{\sin^2(k)}dk;$$

г) найдем производную функции $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2u^4}{1-u^8}\right)$:

$$z' = \frac{1}{\left(1+\frac{4u^8}{(1-u^8)^2}\right)}\frac{8u^3(1-u^8)-(-8u^7)2u^4}{(1-u^8)^2} = \frac{(1-u^8)^2(8u^3-8u^{11}+16u^{11})}{(1+u^8)^2(1-u^8)^2} =$$

$$= \frac{8u^3+8u^{11}}{(1+u^8)^2} = \frac{8u^3(1+u^8)}{(1+u^8)^2} = \frac{8u^3}{1+u^8}.$$

Тогда дифференциал функции равен

$$dz = \frac{8u^3}{1+u^8}du.$$

Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях: в бесконечно малой окрестности точки x_0 будет справедливо следующее приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, т. е. можно записать

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 2. Не используя калькулятор, оценить значение выражения $\sqrt{81,03}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 81$, в которой она легко вычисляется. Рассмотрим Δ-окрестность этой точки:

$$\Delta x = x - x_0 = 81,03 - 81 = 0,03.$$

Вычислим значение этой функции в точке x_0: $f(x_0) = \sqrt{81} = 9$. Определим значение ее производной в этой точке:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ а } f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}.$$

Тогда $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{81+0,03} \approx 9 + \frac{1}{18}\cdot\frac{3}{100} = 9 + \frac{1}{600} = 9\frac{1}{600} = 9,0017.$

Пример 3. Вычислите приближенно cos(59°).

Решение. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 60°$, $\Delta x = 59° - 60° = -1° \approx -0,017$ рад.

$$f(x_0) = \cos(60°) = 0,5,\ f'(x) = -\sin(x),\ f'(x_0) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866.$$

Используем формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx 0,5 - 0,866\cdot(-0,017) = 0,514, \text{ т. е. } \cos(59°) \approx 0,514.$$

Задания к аудиторному занятию 4

1. Вычислите дифференциал заданных функций:

а) $s = 7t - 12t^2 + 16t^4 + 8$;

б) $m = 15n + 9n^3 + 3n^8 - 3$;

в) $z = 15p^5 + \frac{1}{4p^4} - 4\sqrt[8]{p^3} - 2$;

г) $u = \frac{7^d}{3} - 7\sin(d) + 7\operatorname{arctg}(d)$;

д) $l = (2f + \frac{1}{4f^4})\ln(f)$;

е) $r = \arcsin(w)\cos(w)$;

ж) $h = \frac{\operatorname{ctg}(j)}{j^2 + 3j - 4}$;

з) $i = \frac{u^3 - 7u}{\log_3(u)}$;

и) $g = \operatorname{arctg}(v^3 - 4v + 9)$;

к) $n = (4a^3 - 7a^2 + 9a - 3)^5$;

л) $c = \sin(\operatorname{ctg}(2 - 15h^2))$;

м) $x = 2^{\cos(5y-9)}$.

2. Вычислите приближенно заданные величины, используя дифференциал функций:

а) $3,01^3 + 3,01^2$; б) $\sqrt[3]{26,93}$;

в) $\left(4,01\right)^{1,5}$; г) $\ln\left(e+0,3\right)$;

д) $\sin 31$; е) $\lg 1,6$.

Домашнее задание к занятию 4

1. Вычислите дифференциал заданных функций:

а) $z = 7p^{12} + \dfrac{1}{6p^6} - 8\sqrt[3]{p^2} - 13$; б) $u = \dfrac{2^d}{3} - 4\ln(d) + 12\operatorname{arcctg}(d)$;

в) $l = (4f^2 + \dfrac{1}{8f^7}) \cdot \cos(f)$; г) $i = \dfrac{e^u}{\operatorname{tg}(u)}$.

2. Вычислите приближенно заданные величины, используя дифференциал функций:

а) $\sqrt{8,9}$; б) $\sqrt[4]{15,8}$.

Занятие 5. Производные высших порядков. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ в области D имеет конечную производную $y' = f'(x)$, которая, в свою очередь, также является функцией от переменной x в этой же области. Производная y' называется *производной первого порядка*. Если существует производная от производной первого порядка, то она называется *производной второго порядка* или *второй производной* от функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т. д. Производные, начиная со второго порядка и выше (y'', y''', $y^{(4)}$, ..., $y^{(n)}$, ...), называются *производными высших порядков*.

Пример 1. Найти производную четвертого порядка функции $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$.

Решение. $y' = 3x^2 + 10x - 4$; $y'' = 6x + 10$; $y''' = 6$; $y^{(4)} = 0$.

Пример 2. Вычислить значение производной третьего порядка функции $y = \sin(3x)$ при $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Найдем производную третьего порядка:

$$y' = \cos(3x)3 = 3\cos(3x);\quad y'' = 3\cdot(-\sin(3x))3 = -9\sin(3x);$$

$$y''' = -9\cos(3x)3 = -27\cos(3x).$$

Тогда

$$y'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -27\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -27\cos(\pi) = -27\cdot(-1) = 27.$$

Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей. При вычислении предела отношения двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке x_0 может оказаться, что при $x \to x_0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. одновременно являются или бесконечно малыми, или бесконечно большими функциями. Вычисление предела в этом случае называется *раскрытием неопределенности* и может выполняться по *правилу Лопиталя*, суть которого заключается в следующем.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to x_0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Это означает, что в случае неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ *вычисление предела отношения функций можно заменить вычислением предела отношения их производных,* что может оказаться более простым.

Если же и отношение производных приводит к одной из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то и к этому отношению можно применить правило Лопиталя, т. е. исследовать предел отношения производных второго порядка и т. д.

Пример 3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Решение: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=$

$$=\left(\frac{(-1)^3-5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+8}{(-1)^4-2\cdot(-1)^3-16\cdot(-1)+2\cdot(-1)+15}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^3-5x^2+2x+8\right)'}{\left(x^4-2x^3-16x^2+2x+15\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{3\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)+2}{4\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2-32\cdot(-1)+2}=\frac{5}{8};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin(x))'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x^2}=$

$$=\left(\frac{1-\cos(0)}{3\cdot 0^2}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\left(\frac{\sin(0)}{6\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{\cos(0)}{6}=\frac{1}{6};$$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln(x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1}{+\infty}\right)=0.$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$. Тогда нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))$ приводит к неопределенности вида $\infty-\infty$. В этом случае разность $f(x)-\varphi(x)$ можно представить в виде

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)f(x)}}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)f(x)}}.$$

В результате получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которую можно раскрыть с помощью правила Лопиталя.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ функции $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ и $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$ являются бесконечно большими одного и того же знака. Поэтому их разность приводит к неопределенности вида $\infty-\infty$. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}=$$
$$=\left(\frac{1-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty.$ Тогда при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\varphi(x)\right)$ приходим к неопределенности вида $0\cdot\infty.$ Выражение $f(x)\varphi(x)$ преобразуется к виду $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ или $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$, что приводит к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые можно раскрывать с помощью правила Лопиталя.

Задание к аудиторному занятию 5

Вычислите пределы, используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\cdot(1-\cos x)$;

4. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot \operatorname{ctg} x$;

5. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot \ln(x-1)$;

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

Домашнее задание к занятию 5

Вычислите пределы, используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\cdot \operatorname{tg} x$;

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

З а н я т и е 6. Задачи на геометрический и механический смысл производной

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Геометрический смысл производной. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ проведена касательная, то точка M_0 называется *точкой касания*. Исходя из геометрического смысла производной, угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, т. е. $k = f'(x_0)$. Тогда уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ является *уравнением касательной к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью* к кривой. Так как угловые коэффициенты касательной и нормали обратны по величине и противоположны по знаку, то уравнение $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ является *уравнением нормали к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

Пример 1. Найти угол α наклона касательной, проведенной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке касания с абсциссой $x_0 = 1{,}5$.

Р е ш е н и е. Производная функции $y' = 2x - 2$. Тогда значение производной в точке $x_0 = 1{,}5$ равно $f'(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5 - 2 = 1$. Это означает, что $k = \mathrm{tg}(\alpha) = 1$. Следовательно, $\alpha = 45°$.

Пример 2. Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ в точке касания с абсциссой $x_0 = 4$.

Р е ш е н и е. Подставим $x_0 = 4$ в уравнение параболы и найдем $y_0 = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 3$. Следовательно, $M_0(4;\ 3)$ есть точка касания. Производная функции равна $y' = x - 2$. Вычислим значение производной при $x_0 = 4$: $f'(4) = 4 - 2 = 2$. Тогда уравнение $y - 3 = 2(x - 4)$ или $2x - y - 5 = 0$ является уравнением касательной. Уравнением нормали будет $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 4)$ или $x + 2y - 10 = 0$.

Пример 3. Составить уравнение касательной и нормали к линии $\begin{cases} x = \cos(2t), \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$ при $t = \dfrac{\pi}{6}.$

Решение. Производная функции, заданной параметрически, находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y'_x = \frac{3\sin^2(t)\cdot\cos(t)}{-2\sin(2t)} = -\frac{3}{4}\sin(t).$$

При $t = \dfrac{\pi}{6}$ она будет равна $y'_x = -\dfrac{3}{4}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8}.$

Определим координаты точки касания (x_0; y_0):

$$x_0 = \cos 2\cdot\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \; y_0 = \sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}\,.$$

Тогда касательная заданной функции в точке $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}\right)$ определяется уравнением

$$y - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right); \; y = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}; \; y = -\frac{3}{8}x + \frac{5}{16},$$

а уравнение нормали –

$$y - \frac{1}{8} = \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right); \quad y = \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{1}{8}; \quad y = \frac{8}{3}x - \frac{29}{24}.$$

Геометрический смысл производной. Пусть функция $S = S(t)$ определяет перемещение материальной точки от времени ее движения. Тогда первая производная от данной функции $v(t) = S'(t)$ будет определять закон изменения скорости материальной точи, а вторая производная $a(t) = S''(t)$ – закон изменения ее ускорения. В этом выражается механический смысл производной функции одной переменной.

Пример 4. Материальная точка движется по закону $S(t) = (3t + 2)^5$. Найти скорость и ускорение материальной точки в момент времени $t = 3$.

Решение. Определим законы изменения скорости и ускорения материальной точки:

$$v(t) = S'(\text{t}) = ((3 \cdot t + 2)^5)' = 15(3 \cdot t + 2)^4,$$
$$a(t) = S''(t) = (15(3 \cdot t + 2)^4)' = 180(3 \cdot t + 2)^3.$$

Найдем скорость и ускорение материальной точки в момент времени t = 3:

$$v(3) = 15(3 \cdot 3 + 2)^4 = 219615 \text{ (ед. скор.)},$$
$$a(3) = 180(3 \cdot 3 + 2)^3 = 180 \cdot 11^3 = 239580 \text{ (ед. уск.)}.$$

Пример 5. Материальная точка движется по закону

$$S(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t - 7.$$

Определить моменты времени, при которых ускорение материальной точки равно нулю.

Решение. Определим закон изменения ускорения материальной точки:

$$a(t) = S''(t) = ((\frac{1}{12}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t - 7)')' = (\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4)' =$$
$$= t^2 - 6t^2 + 5.$$

Приравняем полученное выражение к нулю и решим уравнение относительно времени t:

$$t^2 - 6t^2 + 5 = 0, \text{Д} = 36 - 20 = 16 = 4^2,$$
$$t_1 = \frac{6-4}{2} = 1; \quad t_1 = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Таким образом, искомыми моментами времени являются t_1 = 1 и t_2 = 5 ед. времени.

Задания к аудиторному занятию 6

1. Составьте уравнения касательной и нормали в точке x_0 к заданной кривой. Выполните построения:

а) $y = x^2 - 4x + 1,\ x_0 = -1;$ б) $y = 2x^2 - 4x + 2,\ x_0 = -2;$

в) $y = x^2 + 6x - 1,\ x_0 = 1;$ г) $y = 2x^2 + 8x - 3,\ x_0 = -1;$

д) $y = x^2 - 6x + 2,\ x_0 = 1;$ е) $y = x^2 - 2x - 4,\ x_0 = -2.$

2. Задан закон $S(t)$ перемещения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0:

а) $S(t) = 3t^4 + 2t^2 - t + 1$, $t_0 = 1$;

б) $S(t) = t^4 + t^2 - 5t + 1$, $t_0 = 2$;

в) $S(t) = 4t^4 - 2t^3 + t^2 - 3$, $t_0 = 1$;

г) $S(t) = 2t^4 - 5t^3 + 11t^2 + 22t - 1$, $t_0 = 2$;

д) $S(t) = 3t^4 - 2t^3 + 7t^2 + t - 1$, $t_0 = 1$;

е) $S(t) = 4t^4 - 8t^3 + 5t^2 + 2t + 3$, $t_0 = 2$.

Домашнее задание к занятию 6

1. Составьте уравнения касательной и нормали в точке x_0 к заданной кривой. Выполните построения:

а) $y = x^2 - 12x + 20,\ x_0 = 3.$ б) $y = -2x^2 - 8x - 6,\ x_0 = -2.$

2. Задан закон $S(t)$ перемещения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0:

а) $S(t) = 5t^4 + t^2 - t + 1$, $t_0 = 1$; б) $S(t) = t^3 + 3t^2 - 5t - 1$, $t_0 = 2$.

Занятие 7. Исследование функции на экстремум и перегиб

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Исследование функции на экстремум. Особую роль в исследовании функции играют такие значения переменной x, которые отделяют интервалы возрастания и убывания функции. В этих точках функция меняет характер своего поведения.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум*, если $y = f(x_0)$ есть наибольшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *минимум*, если $y = f(x_0)$ есть наименьшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а максимум и минимум называются *экстремумами функции*.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются *критическими*.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и всюду в этой окрестности имеет производную, а в точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует. Тогда имеет место *первый достаточный признак экстремума*:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 функция имеет максимум;

2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 функция имеет минимум;

3) если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знак, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

При исследовании функции на экстремум имеет смысл придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;

2) найти производную функции и приравнять ее к нулю;

3) решить полученное уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки;

4) все полученные точки расположить в порядке возрастания и разбить область определения этими точками на частичные интервалы, в каждом из которых производная сохраняет знак;

5) найти знак производной в каждом из частичных интервалов и по знаку производной определить характер изменения функции в этих интервалах: возрастает или убывает;

6) по изменению знака производной при переходе через границы интервалов определить точки экстремума;

7) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 1. Найти экстремум функции $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+1.$

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную, приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение: $y'=x^2-4x,\quad x^2-4x=0,\quad x(x-4)=0,\quad x_1=0,$ $x_2=4.$ Точки $x_1=0$ и $x_2=4$ являются критическими. Разобьем область определения функции критическими точками на частичные интервалы, которые являются интервалами монотонности функции, и по знаку производной определим характер изменения функции в каждом из этих интервалов.

x	$(-\infty;0)$	0	(0; 4)	4	$(4;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	1 max	$\searrow$	$-9\dfrac{2}{3}$ min	$\nearrow$

$$y(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) = 5 > 0; \quad y'(2) = 2^2 - 4\cdot 2 = -4 < 0;$$
$$y'(5) = 5^2 - 4\cdot 5 = 4 > 0.$$

По первому достаточному признаку экстремума в точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = 4$ – минимум. При этом:

$$y_{\max} = \frac{1}{3}\cdot 0^3 - 2\cdot 0^2 + 1 = 1, \quad y_{\min} = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4^2 + 1 = -9\frac{2}{3}.$$

Таким образом, $y = 1$ и $y = -9\frac{2}{3}$ являются экстремумами функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ на экстремум.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = 1$, т. е. $D(y): (-\infty;\, 1) \cup (1;\, +\infty)$. Найдем производную функции

$$y' = \frac{(x^2)'\cdot(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Приравняем ее к нулю и решим уравнение $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0.$ В точках $x = 0$ и $x = 2$ производная обращается в нуль. Таким образом, критическими точками функции являются $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$ Составим таблицу.

x	$(-\infty;\, 0)$	0	$(0;\, 1)$	1	$(1;\, 2)$	2	$(2;\, +\infty)$
y'	+	0	–	|	–	0	+
y	↗	0 max	↘	|	↘	4 min	↗

$$y'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2\cdot(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -3 < 0,$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = -3 < 0, \quad y'(3) = \frac{3^2 - 2\cdot 3}{(3-1)^2} = \frac{3}{4} > 0.$$

По первому достаточному признаку экстремума в точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = 2$ – минимум. При этом максимум функции равен $y_{\max} = \dfrac{0^2}{0-1} = 0$, минимум – $y_{\min} = \dfrac{2^2}{2-1} = 4$.

При исследовании функции на экстремум иногда более удобно использовать производную второго порядка. Пусть в точке x_0 производная функции $y = f(x)$ равна нулю, и в этой точке существует производная второго порядка $f''(x_0)$. Тогда имеет место ***второй достаточный признак (второе достаточное условие) экстремума***:

1) если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция имеет минимум;

2) если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум;

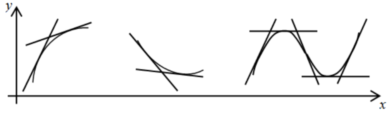
3) если $f''(x_0) = 0$, то для исследования функции на экстремум нужно применять первый достаточный признак.

Пример 3. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ на экстремум.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $D(y): (-\infty; +\infty)$. Найдем производную $y' = 3x^2 - 6x - 9$ и критические точки функции: $3x^2 - 6x - 9 = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Найдем производную второго порядка $y'' = 6x - 6$ и вычислим ее значение в критических точках: $y''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0$ и $y''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$. Таким образом, в точке $x = -1$ функция имеет максимум, а в точке $x = 3$ – минимум.

При этом $y_{\max} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$, а $y_{\min} = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = -25$.

Исследование функции на перегиб. Дуга кривой называется ***выпуклой***, если она целиком лежит ниже касательной, проведенной в любой точке дуги. Дуга кривой называется ***вогнутой***, если она целиком лежит выше касательной, проведенной в любой точке дуги. Точка, которая отделяет выпуклую часть дуги от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.



Пусть функция $y = f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны в интервале $(a;\ b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ в интервале $(a;\ b)$, то график функции в этом интервале будет выпуклым. Если же

$f''(x) > 0$ в интервале (a; b), то график функции в этом интервале будет вогнутым.

Точки, в которых производная второго порядка $f''(x)$ функции $y = f(x)$ равна нулю, называются ***критическими точками второго рода***. Если производная второго порядка $f''(x)$ при переходе через критическую точку второго рода меняет знак, то эта точка является ***точкой перегиба графика функции***. Если же при переходе через эту точку производная второго порядка знак не меняет, то эта точка не является точкой перегиба.

Пример 4. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем производную второго порядка: $y' = 3x^2 - 6x + 2$, $y'' = 6x - 6$. Решим уравнение $6x - 6 = 0$ и найдем критическую точку второго рода $x = 1$. Разобьем область определения функции этой точкой на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как $f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$, то в интервале $(-\infty; 1)$ график функции выпуклый. В интервале $(1; +\infty)$ график функции вогнутый, так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$. При переходе через точку $x = 1$ производная второго порядка меняет знак. Следовательно, $x = 1$ является абсциссой точки перегиба. Тогда $y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1$ есть ордината точки перегиба.

Задания к аудиторному занятию 7

1. Исследуйте функции на экстремум:

а) $y = 3x^2 - 10x + 8$; б) $y = x^3 - 3x$; в) $y = 2x^2 - \ln x$;

г) $y = \dfrac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$; д) $y = -\dfrac{1}{2}x^3 + 6x - 1$; е) $y = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 1}$.

2. Исследуйте на выпуклость и вогнутость графики функций:

а) $y = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{9}{2}x + 2$; б) $y = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2$;

в) $y = x^6 - 6x^5 + 7{,}5x^4 + 3$; г) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

Домашнее задание к занятию 7

Исследуйте функции на экстремум и перегиб:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4;$ б) $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 8}{x + 4}.$

Занятие 8. Полное исследование функции и построение ее графика

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

При полном исследовании функции $y = f(x)$ и построении ее графика целесообразно придерживаться определенной схемы:

1) найти область определения функции;

2) найти точки разрыва функции, если они есть, и интервалы непрерывности;

3) определить вертикальные асимптоты, если они есть;

4) найти наклонные и горизонтальные асимптоты, если они есть;

5) исследовать функцию на четность, нечетность;

6) исследовать функцию на периодичность;

7) исследовать функцию на экстремум;

8) исследовать функцию на перегиб;

9) определить значения функции в дополнительных точках, если это необходимо;

10) построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ и построить ее график.

Решение. 1. $D(f)$: $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$, т.е. $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

2. Функция терпит разрыв при $x = 2$.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = -\infty; \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = +\infty.$$

Значит, при $x = 2$ функция терпит разрыв второго рода.

3. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции.

4. Определим наклонные асимптоты вида $y = kx + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{(x-2)\cdot x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-5}{x-2}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-2} = 3.$$

Следовательно, $y = x + 3$ есть уравнение наклонной асимптоты.

5. Четность и нечетность функции.

Так как область определения функции $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ не симметрична относительно начала координат, то функция является функцией общего вида.

6. Функция непериодическая.

7. Найдем интервалы монотонности и точки экстремума заданной функции.

Определим критические точки функции:

$$y' = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Производная функции равна нулю при $x = 1$ и $x = 3$. Значит, ее критическими точками являются: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Результаты исследования знака производной и выводы сведем в таблицу.

x	(–¥ ; 1)	1	(1; 2)	2	(2; 3)	3	(3; +¥)
$f'(x)$	+	0	–	|	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 max	$\searrow$	|	$\searrow$	7 min	$\nearrow$

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба ее графика.

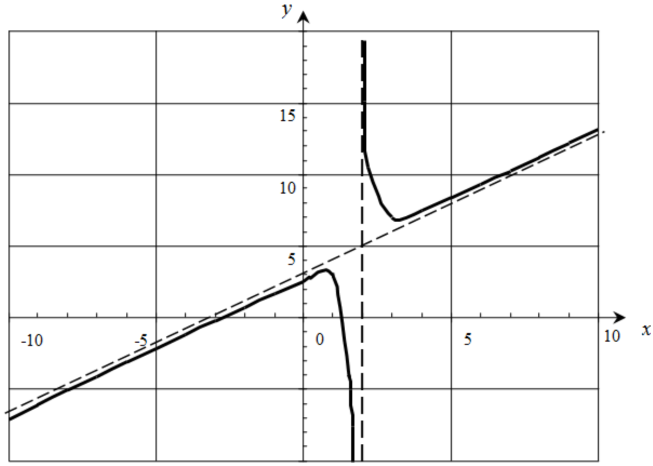
Определим точки, подозрительные на перегиб функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)' = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Видно, что вторая производная не обращается в нуль. Исследуем выпуклость и вогнутость заданной функции на интервалах области определения функции.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	|	$+$
$f(x)$	$\cap$	|	$\cup$

9. В данном случае этот пункт можно пропустить.
10. Построим график функции по результатам исследования.



Задание к аудиторному занятию 8

Проведите полное исследование функций и постройте их графики:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4;$ б) $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 8}{x + 4};$

в) $y = 4x^2 - x^4 - 3;$ г) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x + 2};$

д) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1;$ е) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}.$

Домашнее задание к занятию 8

Проведите полное исследование функций и постройте их графики:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 2;$ б) $y = \dfrac{8x - x^2 - 16}{x - 1}.$

Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Проведите полное исследование функций и постройте их графики:

1. а) $y = -x^4 + 2x^3 - x^2 - 2;$ б) $y = \dfrac{3x - 2x^2}{x - 2};$

2. а) $y = x^4 - 2x^2 + 3;$ б) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 16}{x + 4};$

3. а) $y = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + \dfrac{1}{2};$ б) $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 15}{x + 5};$

4. а) $y = x^4 - 4x + 5;$ б) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 2}{x + 3};$

5. а) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{3}{2}x^2 + 3;$ б) $y = \dfrac{3x - 2x^2 + 3}{x + 1};$

6. а) $y = x^4 - 8x^3 - 7;$ б) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 9}{3 - x};$

7. а) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 5;$ б) $y = \dfrac{4x^2 + 5x - 5}{x + 3};$

8. а) $y = -x^4 + 8x^2 - 7;$ б) $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1};$

9. а) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 4;$ б) $y = \dfrac{2x^2 + x + 6}{x + 6};$

10. а) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + 1;$ б) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x - 3};$

11. а) $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 10;$ б) $y = \dfrac{2x^2 + x - 7}{x + 3};$

12. а) $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 12;$ б) $y = \frac{3x^2 + 2x - 2}{x - 1};$

13. а) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9;$ б) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$

14. а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3;$ б) $y = \frac{x - 2x^2 - 5}{x + 1};$

15. а) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 - 5;$ б) $y = \frac{3x^2 + x - 17}{x + 4};$

16. а) $y = \frac{x^4}{6} - 2x^3 + \frac{8}{3}x^2 - 7;$ б) $y = \frac{-x^2 - 3x + 1}{x - 2};$

17. а) $y = \frac{x^4}{12} - x^3 + \frac{10}{3}x^2 - 7;$ б) $y = \frac{5x^2 + x - 22}{x + 3};$

18. а) $y = x^4 - 8x^2 + 2;$ б) $y = \frac{4x^2 + 6x}{x + 2};$

19. а) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 4;$ б) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2};$

20. а) $y = \frac{x^4}{12} - x^3 + 3x^2 - 9;$ б) $y = \frac{x^2 - 3x - 3}{x + 1};$

21. а) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 12;$ б) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3};$

22. а) $y = x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 25;$ б) $y = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1};$

23. а) $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 1;$ б) $y = \frac{-x^2 + 8x}{x + 1};$

24. а) $y = \frac{x^4}{12} - x^3 + 4;$ б) $y = -\frac{2x^2 + 3x + 13}{x - 1};$

25. а) $y = x^4 - 4x^2 + 5;$ б) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 4}.$

9. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ТРЕТЬЕМУ ТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДУЛЮ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Найдите область определения функций:

а) $y=\sqrt{7x^2+3x-10}$; б) $y=6^{-\frac{2}{5-6x}}$.

2. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{2x^2-x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-16}{x^2-4x+4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+9}\right)^{2x+7}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

3. Найдите производные заданных функций:

а) $y=(x^6-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}})\operatorname{arctg}2x$; б) $y=\dfrac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$;

в) $y=x^{2\sin(x)}$; г) $y=(4^{\sin(3x)}-\cos 2x)^5$;

д) $\begin{cases} x=2t-\sin(2t), \\ y=8\sin^3(t); \end{cases}$ е) $x^3+3x^2y+3x+6y^2=0$.

4. Найдите дифференциал функции $k=3^{\operatorname{tg}(m^4)}$.

5. Найдите $y^{(4)}$, если $y=x^{10}-2x^5+6x^3-9x^2+5x-12$.

6. Запишите уравнение касательной к линии $f(x)=-3x^2+5x-1$, $x_0=-1$.

7. Воспользовавшись правилом Лопиталя, вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^2}{e^{x+1}}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Курзенков Сергей Владимирович
Крючков Евгений Николаевич

МАТЕМАТИКА

В 2 частях

Часть 1

Практикум

Редактор *О. Н. Минакова*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *Н. П. Лаходанова*

Подписано в печать 30.03.2023. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 8,60. Уч.-изд. л. 7,84.
Тираж 60 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.