МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

В. И. Буць

ИМИТАЦИОННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Курс лекций
для студентов, обучающихся по специальности
1-74 01 01 Экономика и организация производства
в отраслях агропромышленного комплекса

Горки
БГСХА
2024

УДК 519.86:338.436.33(075.8)
ББК 65я73
Б94

*Рекомендовано методической комиссией
экономического факультета 20.02.2023 (протокол № 6)
и Научно-методическим советом БГСХА 28.02.2023 (протокол № 6)*

Автор:
доктор экономических наук, доцент *В. И. Буць*

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор *А. В. Пилипук*;
доктор экономических наук, профессор *А. Г. Ефименко*

Буць, В. И.
Б94 Имитационное и статистическое моделирование : курс лекций / В. И. Буць. – Горки : БГСХА, 2024. – 104 с.
ISBN 978-985-882-444-0.

Изложен курс лекций по учебной дисциплине «Имитационное и статистическое моделирование».

Для студентов, обучающихся по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса.

УДК 519.86:338.436.33(075.8)
ББК 65я73

ISBN 978-985-882-444-0

1. ВВЕДЕНИЕ В ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Предмет, цель и задачи имитационного моделирования

Благодаря интенсивному развитию информатики и компьютерных технологий стало намного проще решать сложные задачи, требующие больших временных и финансовых затрат. Упростить их решение возможно с использованием моделирования [3, с. 186–189].

Одним из наиболее распространенных и удобных способов моделирования сложных систем является имитационное компьютерное моделирование объектов и процессов реального мира. Невозможно сразу моделировать какой-либо процесс, для этого необходимо специальное обучение способам, приемам и технологиям компьютерного имитационного моделирования. Специалист, приступая к решению задачи, должен знать основы динамических процессов, подходы и методы решения сложных процессов и систем, в том числе аналитических и имитационных, а также знать конкретные информационные системы моделирования и используемые в них языки программирования. Моделирование применяется в случаях, когда проведение экспериментов над реальной системой невозможно или нецелесообразно, например из-за высокой стоимости или длительности проведения эксперимента в реальном масштабе времени. Руководствуясь жизненным опытом и научными знаниями, человек строит модели – от бумажных корабликов до картины мира. Чем они богаче и чем точнее мы можем ими оперировать, тем развитей наше сознание, наша «самая важная модель» соответствует реальности и находит способы ее изменения. Моделирование – самое эффективное средство поддержки принятия решений, а по словам Ричарда Докинза – «один из самых интересных способов предсказывать будущее». Теоретические предпосылки этого утверждения формировались на протяжении веков. В основу математического моделирования легли математический анализ, теория вероятностей, численные методы, теория подобия. В XX в. появилась база практического приложения моделей: математическое программирование; теория массового обслуживания; теория алгоритмов; теория систем; кибернетика. Другая, фактологическая, основа моделирования – стремительно растущий потенциал знаний фундаментальных и прикладных наук. В сочетании с современным технологическим прорывом эти основы создают необычайные возможности построения моделей, ограниченные лишь смелостью исследователя. Имитационное моделирование – разработка компьютерных моделей и постановка экспериментов на них. Целью моделирования в конечном счете является принятие обоснованных, целесообразных управленческих решений; подготовка студентов к решению задач, связанных с процессами анализа, прогнозирования, моделирования в рамках профессионально ориентированных информационных систем сферы инноватики.

Задачи, решаемые курсом «Имитационное и статистическое моделирование»:

- сформировать целостное представление о системе экономико-математических моделей и месте имитационных моделей, а также изучить процессы массового обслуживания;
- научить выполнять имитацию инновационного объекта в трех измерениях: материальном, денежном и информационном;
- произвести экономическое прогнозирование и предвидение развития экономических процессов;
- сформировать у студентов навыки, необходимые для выработки управленческих решений.

Компьютерное моделирование в настоящее время становится обязательным этапом в принятии ответственных решений во всех областях деятельности человека в связи с усложнением систем, в которых человек должен действовать и которыми он должен управлять. Знание принципов и возможностей имитационного моделирования, умение создавать и применять модели являются необходимыми требованиями к инженеру, менеджеру, бизнес-аналитику.

Специалист, приступая к решению задачи, должен знать основы динамических процессов, подходы и методы решения сложных процессов и систем, в том числе аналитических и имитационных, а также знать конкретные информационные системы моделирования и используемые в них языки программирования. Среди множества сред аналитического моделирования основными являются Maple, MathCAD, MATLAB + Simulink и др.

При обучении моделированию сложных систем могут быть использованы различные среды и методологии разработки аналитических и имитационных моделей сложных систем: MvStudium, MATLAB, Arena, GPSS, Extend, iThinkAnalyst, ProcessModel и др. [1, 16].

Особое место среди сред разработки компьютерных моделей сложных систем принадлежит многоподходной среде моделирования имитационных моделей AnyLogic. Разные средства спецификации и анализа результатов, имеющиеся в AnyLogic, позволяют строить модели (динамические, дискретно-событийные, агентные), имитирующие практически любой реальный процесс, а также конструировать и многие другие модели, выполнять анализ моделей на компьютере без проведения реальных экспериментов и самостоятельных сложных вычислений. Но для возможности оперировать этой программной средой и получать при моделировании верные результаты пользователь AnyLogic должен овладеть технологией работы в среде, понять ее функциональные особенности [40].

1.2. Основные принципы имитационного моделирования

Имитационное моделирование – это способ исследования поведения вероятностных систем (экономических, технических и т. п.) в условиях, когда не известны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах [9; 10, с. 124–143; 11, с. 235–238].

Метод имитационного моделирования заключается в воспроизведении (имитации) исследуемого процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Одно такое воспроизведение функционирования системы называют реализацией или испытанием. После каждого испытания регистрируют совокупность параметров, характеризующих случайный исход реализации. Метод основан на многократных испытаниях построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения числовых характеристик исследуемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Процесс моделирования функционирования экономической системы сводится к машинной имитации процесса.

Имитационное моделирование не решает оптимизационных задач, а представляет собой технику оценки значений функциональных характеристик моделируемой системы. Результаты исследования имитационной модели представляют собой оценки значений операционных характеристик той системы, поведение которой моделируется. Например, при имитационном моделировании любой системы массового обслуживания практический интерес могут представлять такие характеристики, как средняя продолжительность обслуживания клиента, средняя длина очереди, доля времени простоя системы и др.

Имитационное моделирование является эффективным средством для решения сложных проблем. Имитационное моделирование применяется в различных областях науки, техники, экономики и т. д. С помощью имитационного моделирования можно решать следующие теоретические и практические задачи:

1. Задачи в различных областях естественных наук (математика, физика, химия):

а) вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, вычисление кратных интегралов;

б) вычисление констант (например, числа π);

в) обращение матриц;

г) изучение диффузных процессов.

2. Практические задачи:

а) производственно-технологические задачи, возникающие в процессе создания систем массового обслуживания, систем связи, в сфере управления запасами, при анализе химических процессов;

б) экономические и коммерческие задачи, включая оценки поведения потребителя, определение цен, экономическое прогнозирование деятельности предприятий (организаций);

в) социальные и социально-психометрические задачи, например проблемы динамики народонаселения, влияния экологии на здоровье, эпидемиологических исследований, а также прогнозирование группового поведения;

г) задачи биомедицинских систем, например баланса жидкости в организме человека, размножения клеток крови, деятельности мозга;

д) задачи анализа той или иной военной стратегии и тактики.

Вычисление результатов имитации базируется на случайной выборке, т. е. любой результат, полученный путем имитационного моделирования, подвержен экспериментальным ошибкам, поэтому, как и в любом статистическом эксперименте, должен основываться на результатах статистических проверок.

Статистическое (численное) моделирование является разновидностью имитационного моделирования. Изначально оно появилось в теории случайных процессов и математической статистике как способ вычисления статистических характеристик случайных процессов путем многократного воспроизведения течения процесса с помощью модели этого процесса. Этот подход к исследованию реального процесса был назван методом статистических испытаний (методом Монте-Карло). Модели здесь строятся для явлений и систем объектов, входы и (или) функциональные соотношения между различными компонентами которых содержат элементы случайности или полностью случайных процессов, подчиняющиеся вероятностным законам.

Осуществление решения вероятностной модели реального объекта производится на ЭВМ. Машинная имитация позволяет исследовать модель как в определенные моменты времени, так и в течение продолжительных периодов времени. Для нахождения устойчивых решений (характеристик) при численном статистическом моделировании требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой. Здесь проводится имитация воздействия многочисленных случайных факторов на различные элементы модели. Каждое воздействие на процесс в модели представляется в виде «розыгрыша» случайного явления с помощью процедуры, дающей случайный результат. Множество таких реализаций в ходе одного варианта имитации дает одну реализацию (историю) процесса. Затем вычисляются средние статистические характеристики по многим историям.

Вероятностное моделирование (методы Монте-Карло). Это направление развивается как способ решения математических задач – вычисление интегралов, решение систем линейных уравнений и дифференциальных уравнений.

Вероятностно-имитационное моделирование – применение теории вероятностей и методов Монте-Карло для построения имитационных моделей в молекулярной, статистической, квантовой, нейтронной физике, геофизике, газовой динамике, химической кинетике, в передаче и защите информации, в моделях массового обслуживания, финансовой математике, математической биологии и др.

Статистическое моделирование – применение математической статистики для статистического оценивания и прогнозирования, корреляционно-регрессионного и многомерного статистического анализа, оптимизации систем, определения экстремума функций большого числа переменных и др. в различных отраслях производства и науки.

В экономических и социальных науках чаще всего используется статистическое моделирование. Здесь при разработке модели решаются задачи формализации экспертного знания и различных теоретических концепций, при разработке модели максимально исчерпывающе описываются положения теоретической концепции или результаты экспертного анализа (например, в форме мозгового штурма, социологического экспертного опроса и пр.).

Сама по себе подобная формализация является важным результатом, и моделирование в этом свете может рассматриваться как своеобразный формальный язык и выступать в качестве определенного аналога математики для естественных наук. Результатом применения статистического моделирования является возможность проведения прогноза. Прогнозирование можно считать одним из наиболее ценных приложений имитационного моделирования.

1.3. Основные этапы построения имитационных моделей

Имитационное моделирование является эффективным инструментом для решения сложных проблем. На предварительном этапе построения имитационной модели необходимо исследовать границы и структуру рассматриваемой системы с целью решения конкретных проблем [13].

1. На этом этапе используются методы системного анализа, например, строится граф целей и задач, который имеет иерархическую структуру. На каждом уровне расположены некоторые задачи, которые необходимо решить для достижения целей более высокого уровня. Построение такого графа начинается с верхнего уровня – формулировки конечных целей. Далее формируется уровень задач, которые необходимо решить для достижения этих целей. Постепенно формулируется проблема, для решения которой строится имитационная модель. Этот этап завершается построением концептуальной модели исследуемой системы или процесса. Степень формализации концептуальной модели зависит от сложности системы.

2. Определяются и анализируются критические элементы, компоненты, точки в исследуемой системе или процессе, а также определяются оценки предполагаемых решений. При имитационном моделировании кроме основной модели строится блок упрощенных моделей, предназначенных для предварительного грубого анализа проблемы в целом. Методы упрощения моделей основаны на теории агрегирования, которая позволяет уменьшить число переменных и соотношений. Большую роль при этом играют асимптотические методы, которые позволяют выделить переменные, влияющие на общий ход процесса.

3. Осуществляется прогнозирование и планирование будущего развития исследуемой системы или процесса.

Принятие решений в имитационном моделировании основано на последовательном сжатии множества рассматриваемых вариантов путем отбрасывания неконкурентоспособных или неосуществимых альтернатив. Таким образом, для оценки и прогноза развития исследуемой системы предполагается: построить концептуальную модель; построить математическую модель; разработать математическое обеспечение для расчетов на ЭВМ; провести эксперименты на ЭВМ и определить применимость модели. Известно, модель – это некоторое описание системы или процесса.

В фундаментальных науках модели разрабатываются на основе теоретических законов:

- иконические модели – это масштабированные объекты;

- абстрактные (математические) модели – представляются совокупностью математических соотношений;

- визуальные модели – представляют системы графическим материалом.

Разработка модели существенно упрощается, если:

- известны законы, описывающие функционирование системы;
- может быть разработано графическое представление системы;
- можно управлять входами и выходами системы.

Процесс построения модели можно разбить на этапы.

Этап 1. Предполагается осуществление таких шагов:

- определение цели построения модели;
- определение границ системы;
- определение необходимого уровня детализации процессов, этот уровень должен позволять абстрагироваться от неточно определенных аспектов функционирования реальной системы.

Этап 2. Строится модель, в которую включаются критерии эффективности функционирования системы и оцениваемые альтернативные решения, которые рассматриваются как часть модели.

Этап 3. Необходимо получить оценки для альтернативных решений. Обычно оценки альтернатив требуют внесения изменений в описание системы, а следовательно, перестройки модели. На практике процесс построения модели является итеративным.

Этап 4. Реализация построенной модели. После того как на основе полученных оценок альтернатив выработаны рекомендации, результаты моделирования можно внедрять в практику.

Изложенный общий подход к построению модели полностью можно перенести и на имитационное моделирование.

Процесс последовательной разработки имитационной модели начинается с создания простой модели, которая затем постепенно усложняется в соответствии с требованиями, предъявляемыми решаемой проблемой.

В процессе построения имитационной модели можно выделить следующие этапы:

1. Формулирование проблемы: описание исследуемой проблемы и определение целей исследования.
2. Разработка модели: логико-математическое описание моделируемой системы.
3. Подготовка данных: идентификация, спецификация, сбор данных.

4. Трансляция модели: перевод модели на язык, приемлемый для ЭВМ.

5. Верификация модели: установление правильности программных продуктов для реализации модели на ЭВМ.

6. Валидация: оценка требуемой точности и соответствия имитационной модели реальной системе.

7. Стратегическое и тактическое планирование: определение условий проведения машинного эксперимента с имитационной моделью.

8. Экспериментирование: прогон имитационной модели на ЭВМ для получения требуемой информации.

9. Анализ результатов: изучение результатов имитационного моделирования для подготовки выводов и рекомендаций по решению проблемы.

10. Реализация и документирование: реализация рекомендаций, полученных на основе имитации, составление документации по модели и ее использованию.

Все этапы разработки модели – проекция реального мира в мир моделей, выбор уровня абстракции и выбор языка моделирования – менее стандартизированы, чем процесс использования моделей для решения задач. Моделирование до сих пор больше искусство, чем наука.

После создания модели – а иногда и в процессе разработки – мы начинаем исследовать структуру и понимать поведение системы, проверять, как она ведет себя при определенных условиях, сравнивать различные сценарии и оптимизировать ее. Когда оптимальное решение будет найдено, мы сможем применить его в реальном мире.

В сущности, моделирование является поиском решения задачи в защищенном от риска мире моделей, в котором мы можем ошибаться, отменять операции, возвращаться в прошлое и начинать все сначала.

Моделирование дает предположительную информацию о неком фрагменте реальности. После определенных проверок она может оказаться истинной или ложной и потребовать построения новых моделей.

В науке, наряду с наблюдением, измерением, экспериментом и сравнением, эта процедура выступает как один из общенаучных методов. Однако моделирование можно рассматривать как особый интегрирующий метод. Его эффективность и универсализм возрастают по мере развития информационных технологий. В силу разных причин объект может быть недоступен (слишком мал или велик, далеко расположен, дорог, прекратил существование, например в результате аварии). Исключительная польза моделирования заключается в том, что можно экспериментировать не с самой системой, а с ее аналогом – моделью.

Моделирование – процесс отражения свойств одного объекта (оригинала) в другом объекте (модели). Это могут быть объекты «как есть» в целом и (или) их отдельные сущности – процессы и явления. Явления (например, поведение животного, состояния погоды) рассматриваются как сложные процессы.

1.4. Методологические категории в имитационном моделировании

Основными методологическими категориями теоретических основ моделирования являются понятия «*объект*», «*класс*», «*отношение* (*связь*)», «*система*», «*элемент*», «*структура*».

Определение понятия «*объект*» имеет различное толкование в зависимости от области рассмотрения. Если мы изучаем область имитационного моделирования, то в стратегии объектно-ориентированного подхода объект является первым важным понятием. Объект – это некоторая сущность в виртуальном пространстве, обладающая определенным состоянием и поведением, имеющая заданные значения свойств (атрибутов) и операций над ними.

Следующим важным понятием объектно-ориентированного подхода является «*класс*». Родственные по определенным характеристикам, поведению объекты объединяются в классы. В зависимости от характеристик одни и те же объекты могут быть в различных классах.

В одном из разделов современной математики «Теории категорий» объект используется как термин для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль множеств, групп, топологических пространств и т. п. Здесь также вводится понятие класса объектов и проводится изучение свойств отношений между математическими объектами, не зависящих от внутренней структуры объектов.

Понятие «*отношение*» определяет взаимное положение объектов, связи между объектами в виде иерархических, ассоциативных, алгоритмических, табличных и других структур.

Понятие «*система*» является основополагающим в теории математического моделирования. Существует несколько десятков различных определений понятия «система», используемых в зависимости от контекста, области знаний и целей исследования. Изучением систем занимаются такие научные дисциплины, как *системология*, *кибернетика*, *системный анализ*, *теория систем*, *системная динамика* и др. [19].

Система – 1) целое, созданное из частей и элементов целенаправленной деятельности и обладающее новыми свойствами, отсутствующими у элементов и частей, его образующих; 2) объективная часть мироздания, включающая сходные и совместимые элементы, образующие особое целое, которое взаимодействует с внешней средой; 3) объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов, явлений, сведений, а также знаний о природе, обществе и т. п. Допустимы и многие другие определения. Общим в них является то, что система есть некоторое правильное сочетание наиболее важных, существенных свойств изучаемого объекта. Каждый объект, чтобы его можно было считать системой, должен обладать четырьмя основными свойствами или признаками (целостностью и делимостью, наличием устойчивых связей, организацией и эмерджентностью) [23].

Элемент – это простейшая неделимая часть системы, а ее свойства определяются конкретной задачей. Элемент всегда связан с самой системой. Элемент сложной системы может быть, в свою очередь, сложной системой в другой задаче.

Подсистема – компонент системы – объединение элементов, но по масштабу меньше, чем система в целом.

Система может включать большой перечень элементов, и ее целесообразно разделить на ряд подсистем.

Признаками системы являются множество составляющих ее элементов, единство главной цели для всех элементов, наличие связей между ними, целостность и единство элементов, наличие структуры и иерархичности, относительная самостоятельность и наличие управления этими элементами. Термин «организация» в одном из своих лексических значений означает также систему, но не любую, а в определенной мере упорядоченную, организованную.

Понятие «подсистема» выработано для анализа сложноорганизованных, саморазвивающихся систем, когда между элементами и системой имеются «промежуточные» комплексы, более сложные, чем элементы, но менее сложные, чем сама система. Они объединяют в себе разные части (элементы) системы, в своей совокупности способные к выполнению единой (частной) программы системы. Будучи элементом системы, подсистема, в свою очередь, оказывается системой по отношению к элементам, ее составляющим. Аналогично обстоит дело с отношениями между понятиями «система» и «элемент»: они переходят друг в друга. Иначе говоря, система и элемент относительны. С этой точки зрения вся материя представляется как бесконечная система систем. Системами могут быть системы отношений, детерминаций и т. п. [2].

Наряду с представлением об элементах в понятие о любой системе входит и представление о ее структуре.

Структура – это совокупность устойчивых отношений и связей между элементами. Сюда включается общая организация элементов, их пространственное расположение, связи между этапами развития и т. п.

По своей значимости для системы связи элементов (даже устойчивые) неодинаковы: одни малосущественны, другие существенны, закономерны. Структура прежде всего – это закономерные связи элементов. Среди закономерных наиболее значимы интегрирующие связи (или интегрирующие структуры). Они обусловливают интегрированность сторон объекта. В системе производственных отношений, например, имеются связи трех родов: относящиеся к формам собственности, к обмену деятельностью и к распределению. Все они существенны и закономерны. Но интегрирующую роль в этих отношениях играют отношения собственности (иначе – формы собственности). Интегрирующая структура является ведущей основой системы.

Существует ряд подходов к выделению систем по сложности и масштабу. Например, для систем управления удобно пользоваться классификацией по числу (количеству) элементов [25]:

- малые (10–10^3 элементов);
- сложные (10^4–10^7 элементов);
- ультрасложные (10^8–10^{30} элементов);
- суперсистемы (10^{30}–10^{200} элементов).

Большая система – это всегда совокупность материальных и энергетических ресурсов, средств получения, передачи и обработки информации, людей, которые принимают решение на разных уровнях иерархии. В настоящее время для понятий «сложная система» и «большая система» используют такие определения:

сложная система – упорядоченное множество структурно взаимосвязанных и функционально взаимодействующих *разнотипных систем*, которые объединены структурно в целостный объект функционально разнородными взаимосвязями для достижения заданных целей в определенных условиях;

большая система объединяет *разнотипные сложные системы.*

Тогда определение системы можно записать так: «система – это упорядоченное множество структурно взаимосвязанных и функционально взаимодействующих однотипных элементов любой природы, объединенных в целостный объект, состав и границы которого определяются целями системного исследования».

Характерные особенности больших систем:

- значительное количество элементов;
- взаимосвязь и взаимодействие между элементами;
- иерархичность структуры управления;
- наличие человека в контуре управления и необходимость принятия решений в условиях неопределенности.

Описание динамики системы или ее поведения составляет основу любой имитационной модели. В качестве исходных данных для решения этой задачи используются результаты, полученные на этапе разработки концептуальной модели системы. К ним относятся:

- определение принадлежности моделируемой системы одному из известных классов;
- описание рабочей нагрузки системы;
- выбор уровня детализации представления системы в модели и ее декомпозиция.

Все последующие действия исследователя по созданию модели могут быть отнесены к этапу ее формализации, который в общем случае предполагает:

- выбор метода отображения динамики системы (на основе событий, процессов или транзактов);
- формальное (математическое) описание случайных факторов, подлежащих учету в модели;
- выбор механизма изменения и масштаба модельного времени.

Рассмотрим устоявшиеся понятия в имитационном моделировании: «*процесс*», «*работа*», «*событие*», «*транзакт*».

Работа (*активность*) − это единичное действие системы по обработке (преобразованию) входных данных. В зависимости от природы моделируемой системы под входными данными могут пониматься информационные данные или какие-либо материальные ресурсы.

Под ***процессом*** понимают логически связанный набор работ. Некоторые процессы могут рассматриваться как работы в процессе более высокого уровня. Любой процесс характеризуется совокупностью статических и динамических характеристик.

К статическим характеристикам относятся:

- длительность;
- результат;

- потребляемые ресурсы;
- условия запуска (активизации);
- условия остановки (прерывания).

Статические характеристики процесса не изменяются в ходе его реализации, однако при необходимости любая из них может быть представлена в модели как случайная величина, распределенная по заданному закону.

Динамической характеристикой процесса является его состояние (активен или находится в состоянии ожидания).

Моделирование в терминах процессов проводится в тех случаях, если система оценивается по каким-либо временным показателям либо с точки зрения потребляемых ресурсов.

Например, при оценке производительности вычислительной сети обработка заданий может быть представлена в модели как совокупность соответствующих процессов, использующих ресурсы сети (оперативную память, пространство на жестких дисках, процессорное время, принтеры и т. д.).

Если модель строится с целью изучения причинно-следственных связей, присущих системе, динамику системы целесообразно описывать в терминах событий.

Событие представляет собой мгновенное изменение некоторого элемента системы или состояния системы в целом. Событие характеризуется:

- условиями (или законом) возникновения;
- типом, который определяет порядок обработки (дисциплину обслуживания) данного события;
- нулевой длительностью.

События подразделяют на две категории:

- события следования, которые управляют инициализацией процессов (или отдельных работ внутри процесса);
- события изменения состояний (элементов системы или системы в целом).

Механизм событий используется в качестве основы построения моделей, предназначенных для исследования причинно-следственных связей в системах при отсутствии временных ограничений. К таким задачам можно отнести, например, некоторые задачи по оценке надежности.

Еще один способ имитационного моделирования систем основан на использовании понятия транзакта, или сущности.

Транзакт, или сущность, – это некоторое сообщение (заявка на обслуживание), которое поступает извне на вход системы и подлежит обработке.

В некоторых случаях, например при моделировании автоматизированных систем управления, удобно проследить функционирование системы относительно алгоритма обработки транзакта (сущности). В рамках одной имитационной модели могут рассматриваться транзакты (сущности) нескольких типов. Каждый транзакт (сущность) характеризуется соответствующим алгоритмом обработки и необходимыми для его реализации ресурсами системы. Прохождение транзакта (сущности) по системе можно в некоторых случаях рассматривать как последовательную активизацию процессов, реализующих его обработку (обслуживание заявки).

Чтобы построить качественную компьютерную модель сложной системы, необходимо уметь:

- определенным способом представить в модели динамику (движение) системы. Это может быть описано посредством событий, работ, процессов, транзактов;
- определить способ изменения модельного времени. Здесь выделяют моделирование с постоянным шагом и моделирование по особым состояниям.

В большинстве случаев конечной целью моделирования является оптимизация каких-либо параметров системы.

Виды имитационного эксперимента:

- исследование относительного влияния различных факторов на значения выходных характеристик системы;
- нахождение аналитической зависимости между интересующими исследователя выходными характеристиками и факторами;
- отыскание оптимальных значений параметров системы (так называемый экстремальный эксперимент);
- сравнение альтернатив для принятия решений;
- оптимизация системы для оценки и выработки оптимальной стратегии;
- анализ ситуаций и обучение в различных отраслях через виртуальные имитационные модели игр;
- визуализация и анимация деятельности разрабатываемого объекта.

Вид эксперимента влияет не только на выбор схемы его формализации, но также на построение плана эксперимента и выбор метода обработки его результатов.

С точки зрения организации взаимодействия исследователя с моделью (по способу взаимодействия с пользователем) в ходе эксперимента имитационные модели делятся на автоматические и диалоговые.

Автоматическими называются имитационные модели, взаимодействие пользователя с которыми сводится только к вводу исходной информации и управлению началом и окончанием работы моделей.

Диалоговыми называются имитационные модели, позволяющие исследователю активно управлять ходом моделирования, приостанавливать сеанс моделирования, изменять значения параметров модели, корректировать перечень регистрируемых данных и т. д.

1.5. Методологические подходы в имитационном моделировании

При разработке имитационной модели необходимо выбрать методологический подход, в рамках которого описываются функциональные взаимосвязи моделируемой системы. Этот подход позволяет разработчику четко описать поведение исследуемой системы. Понятие системы можно трактовать, например, таким образом: система – это совокупность элементов, принадлежащих ограниченной части реального мира. Совокупность элементов может рассматриваться как часть более сложной системы, т. е. в качестве подсистемы, а в другом случае может рассматриваться как система. Сфера действия любой системы определяется целью исследования, для достижения которой она выделяется и идентифицируется [15].

Сфера действия любой имитационной модели определяется особенностями той проблемы, для решения которой она разработана. Для определения сферы действия системы надо выявить границы системы и ее структуру. При установлении границ системы выявляются все взаимосвязи между ее элементами. На систему могут воздействовать некоторые внешние факторы. Если они существенно влияют на систему, то систему следует переопределить. Если внешние факторы несущественно воздействуют на систему, то можно расширить определение системы, включив в нее эти факторы; пренебречь ими; трактовать их как входы в систему. Внешние факторы трактуются как входы в систему, если они задаются определенными значениями, таблицами, уравнениями. Например, при разработке модели производственной системы фирмы сбыт продукции рассматривается как вход в систему, если в модель не включаются взаимосвязи, относящиеся к процессу сбыта. Такая модель будет содержать только статистическое описание предшествующих и предполагаемых продаж, используемое в качестве входа, т. е. организация сбыта находится за границей системы. В системной терминологии объекты, находящиеся за границами системы, но оказывающие влияние на нее, формируют окружающую среду этой системы. Таким образом, система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, которые подвергаются воздействию внешней среды. Имитационная модель обычно связана с исследованием реально существующей системы, поведение которой является функцией времени [30].

Существует три типа имитационных моделей.

1. Непрерывные модели. Непрерывные модели используются для систем, поведение которых изменяется непрерывно во времени. Цель имитационного эксперимента – определить реакцию переменной состояния в зависимости от имитационного времени. Модели непрерывных систем определяются в терминах производных функций, так как иногда легче задать выражение для определения скорости изменения переменной состояния, чем это сделать непосредственно для самой переменной состояния, т. е. они описываются дифференциальными уравнениями. Типичным примером непрерывной имитационной модели является изучение динамики народонаселения мира. Непрерывные имитационные модели обычно представляются в виде разностно-дифференциальных уравнений, которые описывают взаимодействие между различными элементами системы.

2. Дискретные модели. В этих моделях описываются системы, поведение которых изменяется лишь в заданные моменты времени. Типичным примером такой модели является очередь, когда задача моделирования состоит в оценивании операционных характеристик системы массового обслуживания, таких, например, как среднее время ожидания или средняя длина очереди. Те моменты времени, когда в системе происходят изменения, определяют события модели, например приход или выбытие клиента. Эти события происходят в дискретные моменты времени, поэтому имеет место процесс с дискретным временем, а соответствующая имитационная модель – дискретная.

3. Комбинированные дискретно-непрерывные модели. В комбинированных моделях независимые переменные могут изменяться как дискретно, так и непрерывно. Исследуемая система в таких ситуациях описывается с помощью элементов и переменных состояния. Поведение системы имитируется путем вычисления значений переменных состояния через небольшие отрезки времени. В комбинированных моделях рассматриваются два типа событий: временные события (события, свершение которых планируется в определенные моменты времени) и события состояния (эти события не планируются, а происходят тогда, когда система достигает определенного состояния). Понятие «событие состояния» аналогично понятию «сканирование активностей», в котором событие также не планируется, а определяется состоянием системы. Возможность возникновения события состояния должна проверяться при каждом продвижении имитационного времени.

Имитационные модели, как правило, строятся для исследования динамических систем. Под *динамической системой* будем понимать любой объект, процесс или явление, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин и задан закон, который описывает изменение начального состояния с течением времени, двигающийся в пространстве и изменяющийся во времени. Динамическими объектами могут быть механические, производственные, физические, химические, биологические объекты, вычислительные процессы и др. [27, 28, 29].

Динамические системы описываются различными способами: дифференциальными уравнениями, дискретными отображениями, марковскими цепями, графическими образами и др. Они классифицируются в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Различают линейные и нелинейные, непрерывные и дискретные операторы, соответственно определяются линейные и нелинейные системы, с *дискретным* временем и с *непрерывным* временем.

В основе методологии *моделирования динамических систем* и построения объектно-ориентированных моделей в технических системах лежит агрегативный подход, который был заложен в 1960–1970-х гг. гениальным советским ученым Н. П. Бусленко. Сложная система представлялась в виде агрегата (черного ящика), имеющего множество входных и выходных сигналов и воздействующих управляющих сигналов. Математически агрегат задается совокупностью множеств T, X, M, Y и случайными операторами H и G, где T – множество моментов времени, X, M, Y – множества входных, управляющих, выходных сигналов агрегата, H и G – операторы переходов и выхода. Этот подход широко используется при исследовании сложных индивидуальных управленческих систем, к которым относятся автоматические системы управления (АСУ). Агрегативные системы позволяют описать широкий круг объектов исследования с отображением системного характера этих сложных объектов, с возможностью расчленения сложной системы на конечное число подсистем, с сохранением связей между ними и взаимодействия частей. В теории автоматического управления основным объектом изучения являются системы управления сложными динамическими (техническими) объектами и их элементами. Математические модели системы автоматического управления и ее элементов представляются в виде уравнений динамики (движения), которые записываются либо в форме дифференциальных, интегральных и разностных уравнений, либо в виде уравнений «вход – выход» (в общем случае матричных уравнений) в пространстве состояний, благодаря которому они нашли широкое применение в инженерной практике. Описание динамических систем и элементов в пространстве состояний позволяет легко перейти к уравнениям для моделирования на ЭВМ, а также провести моделирование систем автоматического управления в виде структурных схем с помощью аппарата передаточных функций и динамических звеньев. Для моделирования динамических систем используются так называемые среды схемотехнического моделирования: VISSIM, SIMULINK+MATLAB, PowerSim, Multisim, LabView, Easy5, MvStudium и др. [2].

Дискретно-событийное моделирование обязано своим рождением Дж. Гордону, который в начале 1960-х гг. спроектировал и реализовал на IBM систему дискретно-событийного программирования GPSS (Global Purpose Simulation System). Основной объект в этой системе – пассивный транзакт (заявка на обслуживание), который может определенным образом представлять собой работников, клиентов, покупателей, детали, сырье, документы, сигналы и т. п. «Перемещаясь» по модели, транзакты становятся в очереди к одноканальным и многоканальным устройствам, захватывают и освобождают эти устройства, расщепляются, уничтожаются и т. д. Таким образом, дискретно-событийную модель можно рассматривать как глобальную схему обслуживания заявок. Аналитические результаты для большого количества частных случаев таких моделей рассматриваются в теории массового обслуживания. Дискретно-событийное моделирование зародилось примерно тогда же, когда появилась системная динамика. В настоящее время существует множество различных программных инструментов для дискретно-событийного моделирования, в том числе и современная версия GPSS.

Дискретно-событийное моделирование предполагает представление моделируемой системы в виде процесса, т. е. последовательности операций, выполняемых с агентами. Модель задается графически в виде диаграммы процесса, блоки которой представляют собой отдельные операции. Как правило, диаграмма процесса начинается с блока «источник», генерирующего агентов. Этот блок передает агентов в последующие блоки диаграммы, задающие операции моделируемого процесса. Завершается диаграмма процесса обычно блоком, уничтожающим этих агентов. Под агентами, называющимися в GPSS транзакциями, а в некоторых других моделирующих программах – заявками, могут пониматься клиенты, пациенты, телефонные звонки, документы, компоненты изделий или сами изделия, поддоны, автомобили, проекты, идеи и т. д. Под ресурсами могут пониматься персонал, врачи, рабочие, оборудование и транспорт. Типовыми операциями дискретно-событийной модели являются задержка (моделирующая выполнение определенной операции, например обработку звонка или детали), обслуживание агента ресурсом, ветвление процесса и т. д. Поскольку агенты конкурируют за обладание ресурсами, необходимыми для выполнения операций, то это может приводить к задержкам, и практически во всех дискретно-событийных моделях присутствуют очереди.

Как время прибытия агентов, так и время их обслуживания обычно являются случайными величинами, и их значения генерируются функциями распределения вероятностей. Поэтому и сами дискретно-событийные модели являются стохастическими, и для получения репрезентативного результата модель должна проработать определенное время, или же нужно выполнить определенное количество прогонов модели.

Контрольные вопросы

1. Предмет курса, основные разделы, их особенности и взаимосвязи. Место курса в системе дисциплин по специальности.
2. История и перспективы развития методов математического моделирования.
3. Актуальность и значимость проблем имитационного и статистического моделирования.
4. Понятие сложной системы и математической модели. Классификация математических моделей.
5. Имитационное моделирование и условия его применения.
6. Способы имитации.
7. Этапы построения имитационной модели.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

2.1. Случайные величины и их числовые характеристики

Случайной называется переменная величина, принимающая различные числовые значения в зависимости от случая. В различных практических задачах используются два вида случайных величин – дискретные и непрерывные [34, 35].

Случайная величина называется дискретной, если значения, которые она может принять, можно пронумеровать, или, иначе говоря, которая может принимать значения, образующие счетные множества. Случайная величина принимает значения в условиях неопределенности (вероятности).

Случайные величины необходимо отличать от детерминированных, которые принимают заранее определенные значения вне зависимости от вероятности.

Вероятность случайной величины $P(X_i)$ можно определить как отношение числа благоприятных исходов m некоего события к общему возможному числу исходов n.

$$P(X_i) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Вероятностным пространством называется тройка (Ω, S, $P(S)$), где:

Ω – некоторое заданное множество, называемое *пространством элементарных исходов*; его элементы называются также *точками*;

S – непустое множество подмножеств Ω, являющееся *σ-алгеброй*, т. е. замкнутым относительно операций суммирования (объединения) счетного числа своих элементов, счетного пересечения и дополнения множеством; предполагается, что Ω (и, следовательно, пустое множество) является элементом S;

$P(S)$ – *вероятностная мера*, т. е. неотрицательная функция множеств из S, такая, что

$$P(\Omega) = 1 \text{ и } P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\,, \qquad (2.2)$$

где A_i – последовательность попарно непересекающихся множеств из S.

Множества A из S называют *событиями*, а величины $P(A)$ – их *вероятностями*.

Вероятность удовлетворяет следующим *условиям*:

$$P(A) \geq 0; \tag{2.3}$$

$$P(\Omega) = 1; \tag{2.4}$$

$$A, B \in S, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B); \tag{2.5}$$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim n \rightarrow \infty \; P(A_n) = 0. \tag{2.6}$$

Функция $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ называется S-измеримой, если множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in S$ для любого вещественного числа x.

Случайной величиной, определенной на $(\mathbf{\Omega}, S, P(S))$, называется произвольная S-измеримая функция $X(\omega)$, принимающая конечные значения.

Для каждой случайной величины $X(\omega)$ однозначно определяется *функция распределения*

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\}(F_X(x) = P(X < x)), \tag{2.7}$$

представляющая собой монотонно неубывающую, неотрицательную, непрерывную слева функцию, такую, что

$$\lim F_X(x) = 0, \lim F_X(x) = 1, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty. \tag{2.8}$$

Если случайная величина может принимать конечное или счетное число значений, то она называется *дискретной*.

Случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если ее функция распределения представляется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \tag{2.9}$$

при этом $f(x) = F^0(x)$ называется *плотностью вероятности*.

Плотность должна удовлетворять свойствам:

$$f(x) > 0; \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.11}$$

Перечислим основные характеристики случайных величин [42]:

- математическое ожидание (характеризует среднее значение);
- дисперсия;
- среднеквадратическое отклонение;
- медиана случайной величины;
- мода случайной величины;
- асимметрия;
- эксцесс.

Математическое ожидание $M(X_i)$ дискретной случайной величины X_i может быть найдено по формуле

$$M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i) X_i, \tag{2.12}$$

где $P(X_i)$ – вероятность значения случайной величины X_i для исхода i;

i – номер исхода;

n – число исходов.

Дисперсия $D(X_i)$ – это математическое ожидание квадрата отклонения дискретной случайной величины X_i от $M(X_i)$. Она определяется по следующей формуле:

$$D(X_i) = M\left[X_i - M(X_i)\right]^2. \tag{2.13}$$

Для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности. Для вычисления дисперсии на практике удобно пользоваться формулой

$$D(X_i) = M\left(X_i^2\right) - (M(X_i))^2. \tag{2.14}$$

Медиана дискретной случайной величины M_e – это такое ее значение, при котором $X_i = M_e$ и M_e разделяет область значений на две части, вероятности попадания в любую из данных областей равновероятны, т. е. выполняются следующие условия:

$$P(X_i < M_e) = P(X_i > M_e); \tag{2.15}$$

$$F(M_e) = 0{,}5. \tag{2.16}$$

Модой $Mo(X_i)$ для дискретной случайной величины называют такое значение, которое наиболее вероятно. Модой для непрерывной случайной величины называют наибольшее значение (точка локального максимума) плотности вероятности.

Одно из наиболее распространенных расположений моды и медианы представлено на графике (рис. 2.1).

Асимметрия $A(X_i)$ характеризует меру сдвига распределения случайной величины в левую или правую часть и находится по формуле

$$A(X_i) = \frac{\mu_3(X_i)}{\sigma(X_i)^3}, \tag{2.17}$$

где $\mu_3(X_i)$ – момент третьего порядка для случайной величины X_i;

$\sigma(X_i)$ – стандартное отклонение случайной величины (здесь возводится в третью степень).

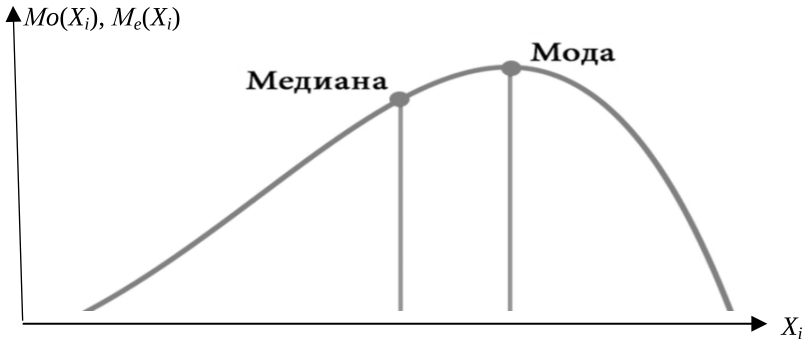


Рис. 2.1. Мода и медиана на графике распределения дискретной случайной величины

Момент третьего порядка для случайной величины X_i рассчитывается с использованием следующей формулы:

$$\mu_3(X_i) = M\left[X_i - M(X_i)\right]^3. \tag{2.18}$$

Стандартное отклонение $\sigma(X_i)$, в свою очередь, определяется как корень квадратный из дисперсии случайной величины X_i:

$$\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)}. \tag{2.19}$$

Асимметрия представлена на графике (рис. 2.2).

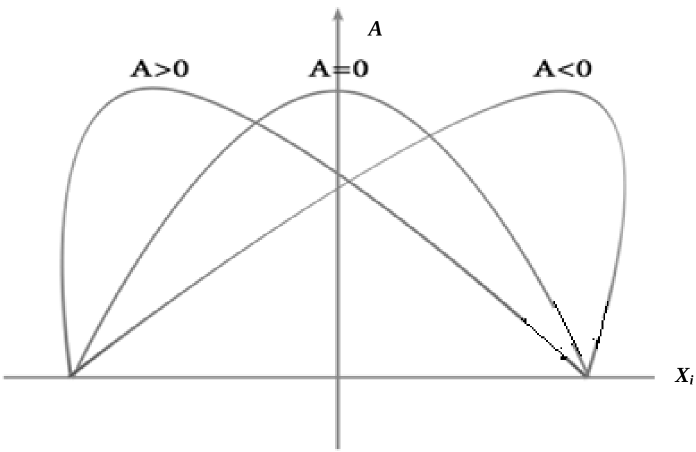


Рис. 2.2. Графики асимметрии случайной величины

По горизонтальной оси графика откладываются значения случайной величины X_i, а по вертикальной – ее асимметрия A.

Показатель эксцесса E_x представляет собой отклонение вершины эмпирического распределения вверх или вниз (крутость) от вершины кривой нормального распределения. Но график распределения может выглядеть сколь угодно крутым в зависимости от силы вариации признака: чем слабее вариация, тем круче кривая распределения при данном масштабе. Не говоря уже о том, что, изменяя масштабы по оси абсцисс и по оси ординат, любое распределение можно искусственно сделать крутым и пологим.

Чтобы показать, в чем состоит эксцесс распределения и правильно его интерпретировать, нужно сравнить ряды с одинаковой силой вариации (одной и той же величиной σ) и разными показателями эксцесса. Чтобы не смешать эксцесс с асимметрией, все сравниваемые ряды должны быть симметричными. Такое сравнение изображено на рис. 2.3.

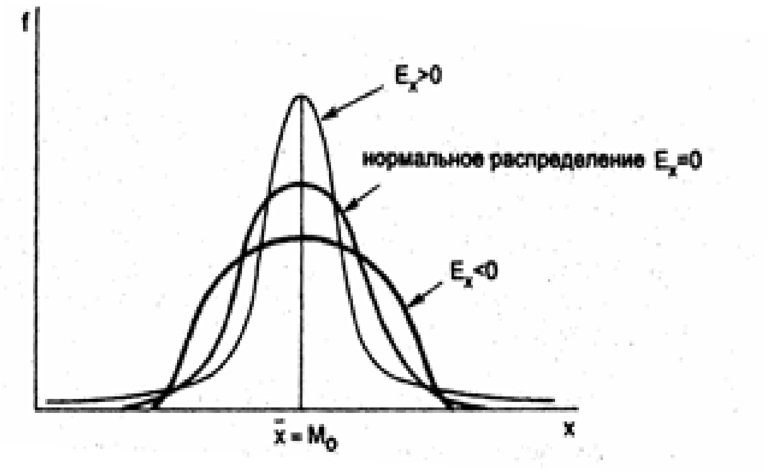


Рис. 2.3. Графики эксцесса случайной величины

Поскольку эксцесс нормального распределения равен 3, показатель эксцесса вычисляется по формуле

$$E_x = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^4}{\sum m} : \sigma\left(X_i\right)^4\right) - 3, \qquad (2.20)$$

где $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^4 = \mu^4$ – момент четвертого порядка для случайной величины X_i;

Σm – сумма частот;

$\sigma(X_i)$ – стандартное отклонение случайной величины (здесь возводится в четвертую степень).

При $E_x > 0$ – высоковершинный эксцесс распределения, $E_x < 0$ – низковершинный эксцесс распределения и при $E_x = 0$ – нормальное распределение.

2.2. Законы распределения случайных величин

Законом распределения случайной величины X_i называется соответствие между значениями случайной величины и вероятностями их реализации. Закон распределения может быть задан таблицей, формулой или графиком.

Дискретная случайная величина X_i имеет биномиальное распределение (или распределена по биномиальному закону), если она принимает значения 0, 1, 2, …, n с вероятностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{2.21}$$

где n – общее число испытаний;

m – число испытаний, в которых событие появилось;

p – вероятность появления события в каждом испытании;

$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по специальным формулам:

$$M(X_i) = np; \tag{2.22}$$

$$D(X_i) = npq. \tag{2.23}$$

Случайная величина X_i называется распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если X_i может принимать значения 0, 1, 2, 3, …, k, … и

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{2.24}$$

где n – число независимых испытаний (оно велико);

k – число появлений события в n испытаниях;

p – вероятность появления события в каждом испытании (она очень мала);

$\lambda = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Геометрическое распределение встречается, когда производится ряд независимых попыток добиться какого-то результата, при каждой попытке результат достигается с вероятностью p. Тогда вероятность того, что потребуется k попыток для достижения результата, равна $q^{k-1}p$, где $q = 1 - p$.

Случайная величина X_i называется распределенной по геометрическому закону, если X_i может принимать значения 0, 1, 2, 3, …, k, … и

$$P(X = k) = q^{k-1}p. \tag{2.25}$$

Вероятности p_k образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p, q^3p, … . По этой причине распределение называется геометрическим.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по геометрическому закону, вычисляются по следующим формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \tag{2.26}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{2.27}$$

Пусть случайная величина X_i принимает значения из некоторого интервала $[a; b]$ и все значения равновозможны. Функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.28}$$

Плотность вероятности задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,\, b], \\ 0, & x \notin [a,\, b]. \end{cases} \tag{2.29}$$

Математическое ожидание равно:

$$M(X_i) = \frac{a+b}{2}. \tag{2.30}$$

Дисперсия

$$D(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{2.31}$$

Нормальное распределение является наиболее важным распределением непрерывных случайных величин. Множество явлений в практической жизни можно описать с помощью модели нормального распределения. Нормальное распределение используется и для решения многих проблем в экономической жизни. По нормальному закону распределяется, например, число дневных продаж в магазине; число работников в некоторой отрасли; объемы выпуска продукции на предприятии и т. д.

Нормальное распределение находит широкое применение и для аппроксимации распределений дискретных случайных величин. Так, например, доходы от определенных видов рискованного бизнеса приблизительно подчиняются нормальному распределению. Нормальное распределение иногда называют «законом ошибок». Например, отклонение в размерах деталей от установленного объясняется многими причинами, каждая из которых влияет на размер детали, отклонение подчиняется нормальному закону распределения. Плотность распределения нормальной случайной величины определяется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.32}$$

где a и σ – параметры нормального распределения.

Математическое ожидание $M(X_i) = a = \overline{X_i}$, а дисперсия $D(X_i) = \sigma^2$.

2.3. Генерация псевдослучайных чисел

Для моделирования случайных процессов в имитационном моделировании необходимы случайные числа. Поскольку при имитационных вычислениях существенное количество операций расходуется для оперирования над случайными числами, то наличие простых и экономных способов формирования последовательности случайных чисел во многом определяет возможность практического использования этого метода [44].

В качестве исходной совокупности случайных чисел, используемых для образования случайных элементов различной природы, необходимо выбрать такую совокупность, которая может быть получена с наименьшими, по возможности, затратами машинного времени и, кроме того, обеспечивает простоту и удобство дальнейших преобразований. Обычно считают, что этим требованиям удовлетворяет совокупность случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0, 1). Исходя из равномерно распределенных случайных чисел, можно конструировать как случайные события, возникающие с любой заданной вероятностью, так и случайные величины, обладающие практически любым законом распределения.

Как правило, в качестве стандартной выбирают непрерывную случайную величину ξ, равномерно распределенную в интервале (0, 1). Заметно реже в качестве стандартной используют дискретную случайную величину η, которая с одинаковой вероятностью может принимать 10 значений (0, 1, ..., 9). Мы будем называть величину ξ *случайным числом*, а величину η – *случайной цифрой*. Иногда η называют *десятичной случайной цифрой*, чтобы отличить ее от двоичной случайной цифры. Чтобы установить связь между ξ и η, разложим число ξ в бесконечную десятичную дробь: $\xi = 0, \eta_1\eta_2...\eta_k...$.

Последняя запись означает, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cdot 10^{-k}. \qquad (2.33)$$

Десятичные цифры $\eta_1, ..., \eta_k, ...$ *случайного числа* ξ *представляют собой независимые случайные цифры. Если* $\eta_1, ..., \eta_k, ...$ *–независимые случайные цифры, то* $\xi = 0, \eta_1\eta_2...\eta_k...$ *определяет случайное число*.

В вычислениях всегда используют числа с конечным количеством десятичных знаков, поэтому вместо случайных чисел ξ употребляют конечные десятичные дроби $\xi_e = 0, \eta_1...\eta_n$.

Пусть есть последовательность чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Является ли она случайной? Есть строгое определение для случайной величины. Случайная величина – это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать. Но оно не помогает ответить на наш вопрос, так как нам не хватает информации для ответа. Теперь скажем, что данные числа получились набором одной из верхних строк клавиатуры. «Конечно, не случайная!» – воскликните вы и тут же назовете следующие число и будете абсолютно правы. Последовательность будет случайной, только если между символами нет зависимости. Например, если бы данные символы появились в результате вытягивания бочонков в лото, то последовательность была бы случайной.

Источники энтропии используются для накопления энтропии с последующим получением из нее начального значения (*initialvalue, seed*), необходимого генераторам случайных чисел (ГСЧ) для формирования случайных чисел. Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ) использует единственное начальное значение, откуда и следует его псевдослучайность, а ГСЧ всегда формирует случайное число, имея в начале высококачественную случайную величину, предоставленную различными источниками энтропии. Энтропия – это мера беспорядка. Информационная энтропия – мера неопределенности или непредсказуемости информации. Можно сказать, что ГСЧ = ГПСЧ + источник энтропии.

В имитационных моделях иногда необходимо получать случайные выборки из одного или нескольких распределений. Наиболее часто применимым на практике методом получения выборок случайных чисел из заданного распределения на цифровом компьютере является генерация одного или нескольких случайных чисел, равномерно распределенных на интервале между 0 и 1, и последующее преобразование этого числа или чисел в новое случайное число, распределенное по желаемому закону. Независимые случайные числа, равномерно распределенные на интервале от 0 до 1, являются, таким образом, основой для генерации выборок всевозможных распределений.

В цифровой имитации существуют по крайней мере три метода получения случайных чисел.

Первым методом является хранение в компьютере таблицы случайных чисел и получение затем из нее данных для имитационного моделирования. Недостаток этого метода заключается в относительно медленной скорости считывания компьютером данных с внешнего устройства ввода и в необходимости хранения большого объема табличных данных.

Предположим, что мы осуществили N независимых опытов, в результате которых получили N случайных цифр $\eta_1\eta_2...\eta_N$. Записав эти цифры (в порядке появления) в таблицу, получим то, что называется таблицей случайных цифр. Способ использования такой таблицы весьма прост. Если в ходе расчета некоторой задачи нам потребуется случайная цифра η, то мы можем взять любую цифру η_s из этой таблицы. Если нам понадобится случайное число ξ, то мы можем взять из таблицы n очередных цифр и считать, что $\xi = 0, \eta_s\eta_{s+1}...\eta_{s+n-1}$. Выбирать цифры из такой таблицы в случайном порядке не обязательно. Их можно выбирать подряд. Но, конечно, можно начинать с любого места, читать в любом направлении, использовать любой заранее заданный алгоритм выбора, не зависящий от конкретных значений цифр таблицы.

Все сказанное выше относится к «идеальной» таблице случайных цифр и не вызывает никаких сомнений. Изготовление хорошей таблицы – весьма сложное дело, ибо в любом реальном опыте всегда возможны ошибки. Проверка «качества» таблицы абсолютно необходима. Для этого существуют тесты для проверки случайных цифр.

В настоящее время таблицы случайных цифр (или более разнообразные таблицы случайных величин) используют главным образом при расчетах вручную; для расчетов на ЭВМ ими практически не пользуются. Достоинства метода:

- проверка однократная;
- воспроизводить числа можно.

Недостатки метода:

- запас чисел ограничен;
- занимает много места в накопителе или медленно вводится;
- нужна внешняя память.

Ограниченность объема существующих таблиц, по-видимому, играет второстепенную роль: можно заготовить таблицу любого объема, если это потребуется.

Вторым методом является использование некоторого физического устройства, например электронной лампы, для генерации случайного шума. Недостаток этого метода заключается в невозможности повторного воспроизведения результатов имитации, а следовательно, невозможности осуществления верификации модели и направленного эксперимента с ее параметрами.

Чаще всего для построения датчика используют «шумящие» радиоэлектронные приборы (диоды, тиратроны, газотропы и др.). Не вдаваясь в технические подробности, рассмотрим один из возможных способов построения датчика, вырабатывающего случайные двоичные цифры α. Нетрудно представить себе счетчик, который подсчитывает количество v флуктуаций напряжения шумящего прибора, превышающих заданный уровень E_0 за фиксированное время Δt (рис. 2.4).

Еще проще устроить счетчик, который выдавал бы число $v(mod\ 2)$, т. е. 0 при четном ν и 1 при нечетном ν. Если вероятности появления 0 и 1 в таком процессе равны между собой, то можно считать, что устройство вырабатывает случайную последовательность двоичных цифр.

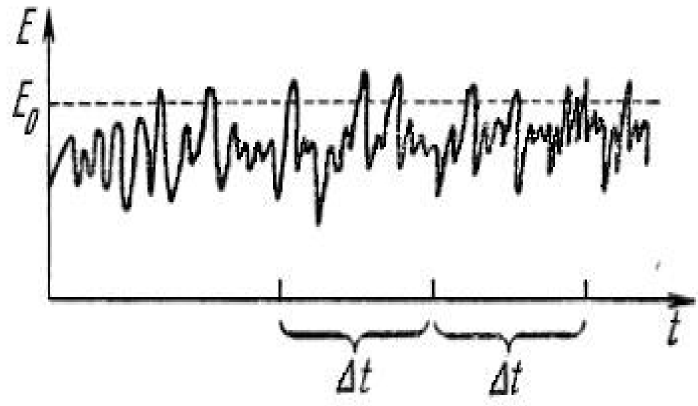


Рис. 2.4. Флуктуации напряжения шумящего прибора

Обычно датчики случайных чисел содержат m генераторов описанного типа, работающих независимо, так что датчиком выдается приближенное случайное число $\xi = 0, \alpha_1 ... \alpha_m$, записанное в форме m-разрядной двоичной дроби. Для случайных чисел отведена специальная ячейка в накопителе, и скорость генерирования их столь велика, что на каждом такте работы ЭВМ в этой ячейке получается новое случайное число.

Достоинства метода:

- запас чисел неограничен;
- сверхбыстрое получение;
- места в накопителе не занимает.

Недостатки метода:

- проверка периодическая;
- воспроизводить числа нельзя;
- требуется специальное устройство.

Третьим методом, которому отдается предпочтение, является применение рекурсивных формул, по которым на основании i-го случайного числа вычисляется $(i + 1)$-е случайное число. Поскольку последовательность чисел вычисляется в уравнении детерминированно, они, естественно, не являются случайными, и их обычно называют псевдослучайными числами.

Пригодность случайных чисел определяется в конечном счете не процессом их получения, а тем, удовлетворяют ли они некоторым принятым тестам. Но в таком случае совершенно безразлично, как эти числа получены, они могут быть даже вычислены по какой-нибудь формуле, лишь бы они удовлетворяли тестам.

Числа ξ_1, ξ_2, ..., ξ_N, которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении некоторых задач, называются *псевдослучайными числами.*

Большинство алгоритмов, используемых на практике для получения псевдослучайных чисел, представляют собой рекуррентные формулы первого порядка:

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n), \tag{2.34}$$

где начальное число ξ_0 задано.

Важной чертой алгоритмов вида является то, что при реализации их на ЭВМ они всегда порождают периодические последовательности.

Достоинства метода:

- проверка однократная;
- воспроизводить числа можно;
- быстрое получение;
- места в накопителе занимает мало;
- внешние устройства не нужны.

Недостаток метода – запас чисел ограничен.

Метод псевдослучайных чисел – самый удобный с практической точки зрения. В дальнейшем для краткости будем называть эти числа случайными, имея в виду, что на самом деле они псевдослучайны. Генераторы псевдослучайных чисел должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Числа равномерно распределены на интервале (0, 1) и независимы, т. е. корреляция между случайными числами последовательности отсутствует.

2. Генерируется достаточное количество неповторяющихся чисел, т. е. период (цикл) генератора довольно длинный.

3. Последовательность случайных чисел воспроизводима. Это предполагает, что различные начальные значения (корни) дают различные последовательности.

4. Генератор должен быть быстродействующим, поскольку для мо-

делирования может потребоваться большое количество чисел.

5. Желательно использование малого объема памяти.

Наилучшим образом удовлетворяет данным требованиям широко распространенный в настоящее время конгруэнтный метод.

Конгруэнтный метод использует следующее рекурсивное уравнение:

$$X_{k+1} = (aX_k + c) \; mod \; m, \tag{2.35}$$

где a (multiplier), c (addend), m (mask) – некоторые целочисленные коэффициенты.

Получаемая последовательность зависит от выбора стартового числа (seed) X_0, и при разных его значениях получаются различные последовательности случайных чисел. Для выбора коэффициентов имеются свойства, позволяющие максимизировать длину периода (максимальная длина равна m), т. е. момент, с которого генератор зациклится. Выбор значений данных констант является предметом постоянных исследований.

Основным алгоритмом предсказания чисел для линейно-конгруэнтного метода является Plumstead's. Предположим, что линейная конгруэнтная генерация зафиксирована в уравнении (2.35) с неизвестными a, c, m и X_0, и никакие их свойства не предполагаются, кроме $m > \max(a, c, X_0)$. Алгоритм найдет соответствие уравнения (2.35) с другим множителем и приращением, но генерирующее ту же последовательность, что и фиксированное соответствие:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \; mod \; m. \tag{2.36}$$

Вывод состоит из двух этапов. Простая реализация конгруэнтного метода на Java представлена на рис. 2.5.

В процессе имитации часто необходимо в одной модели работать с несколькими потоками случайных чисел. Например, раздельные потоки случайных чисел могут быть использованы в системе массового обслуживания для моделирования процессов прибытия и обслуживания заявок. При этом можно генерировать одни и те же последовательности моментов прибытия заявок независимо от порядка их обслуживания и, таким образом, оценивать различные процедуры обслуживания для одной и той же последовательности заявок. Разработчику модели предоставляется возможность выбора различных значений корней генератора случайных чисел для параллельных случайных потоков.

```
public static int a = 45;
public static int c = 21;
public static int m = 67;
public static int seed = 2;

public static int getRand() {
    seed = (a * seed + c) % m;
    return seed;
}

public static void main(String[] args) {
    for(int i=0; i<30; i++)
        System.out.println(getRand());
}
```

Рис. 2.5. Листинг программы генерации псевдослучайных чисел

Комбинирование алгоритмов генерации методом Макларена – Марсальи. Пусть имеется два простейших генератора псевдослучайных последовательностей: $G1$ и $G2$. Генератор $G1$ порождает «элементарную» последовательность над алфавитом мощности N:

$$x_0,\ x_1,\ \ldots \in A(N) = \{0, 1, \ldots, N-1\}, \tag{2.37}$$

а генератор $G2$ – над алфавитом мощности K:

$$y_0, y_1, \ldots \in A(K) = \{0, 1, \ldots, K-1\}. \tag{2.38}$$

Пусть имеется вспомогательная таблица

$$T = \{T(0), T(1), \ldots, T(K-1) \tag{2.39}$$

из K целых чисел (память из K ячеек).

Метод Макларена – Марсальи комбинирования последовательностей $\{xi\}$, $\{yi\}$ для получения выходной псевдослучайной последовательности $\{zk\}$ состоит в следующем. Сначала T-таблица заполняется K первыми членами последовательности $\{xi\}$.

Элементы выходной последовательности вычисляются следующим образом:

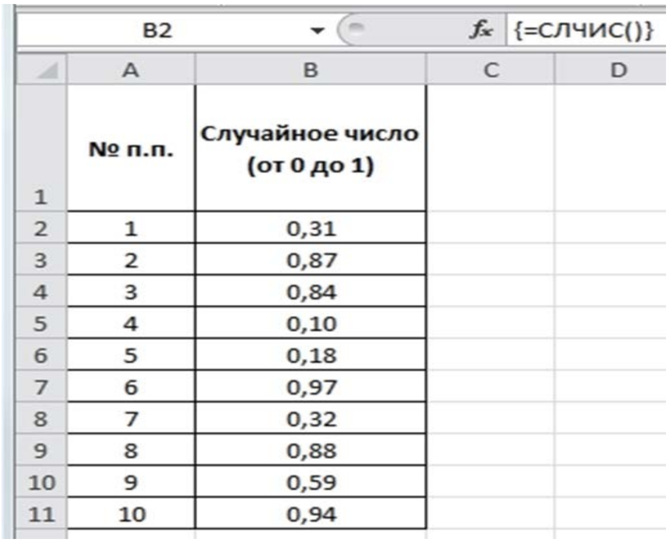
$$z_k = T(y_k),\ T(y_k) = x_{K+k},\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ . \qquad (2.40)$$

Таким образом, генератор $G2$ осуществляет «случайный» выбор из T-таблицы, а также ее «случайное» заполнение «случайными» числами, порождаемыми генератором $G1$.

Метод комбинирования Макларена – Марсальи позволяет ослабить зависимость между членами $\{zk\}$ и увеличить период псевдослучайной последовательности.

2.4. Инструменты имитационного и статистического моделирования

Для получения случайной величины, распределенной по равномерному закону, в библиотеке ***Мастера функций*** табличного процессора Excel в категории ***Математические*** есть специальная функция СЛЧИС(), которая генерирует случайные вещественные числа в диапазоне [0; 1] (рис. 2.6).



B2 | {=СЛЧИС()}

	A	B	C	D
1	№ п.п.	Случайное число (от 0 до 1)		
2	1	0,31		
3	2	0,87		
4	3	0,84		
5	4	0,10		
6	5	0,18		
7	6	0,97		
8	7	0,32		
9	8	0,88		
10	9	0,59		
11	10	0,94		

Рис. 2.6. Пример генерации десяти случайных чисел в диапазоне от 0 до 1

Функция не имеет параметров. Если необходимо сгенерировать случайные числа в другом диапазоне, то для этого нужно использовать формулу

$$=СЛЧИС()*(b-a)+a, \tag{2.41}$$

где a – число, устанавливающее нижнюю границу диапазона;

b – число, устанавливающее верхнюю границу диапазона.

Например, для генерации чисел, распределенных по равномерному закону в диапазоне 10–15, нужно в ячейку рабочего листа ввести формулу

=СЛЧИС()*(15 – 10) + 10.

Для генерации целых случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне между двумя заданными числами, в библиотеке табличного процессора есть специальная функция СЛУЧМЕЖДУ. Функция имеет параметры:

СЛУЧМЕЖДУ(*Нижняя граница*; *Верхняя граница*),

где *Нижняя граница* – число, устанавливающее нижнюю границу диапазона;

Верхняя граница – число, устанавливающее верхнюю границу диапазона.

Применение функций СЛЧИС и СЛУЧМЕЖДУ рассмотрим на примере.

Пример. Требуется создать массив из десяти чисел, распределенных равномерно в диапазоне 50–100.

Решение:

1. Выделим диапазон, включающий десять ячеек рабочего листа, например B2:B11 (рис. 2.7).

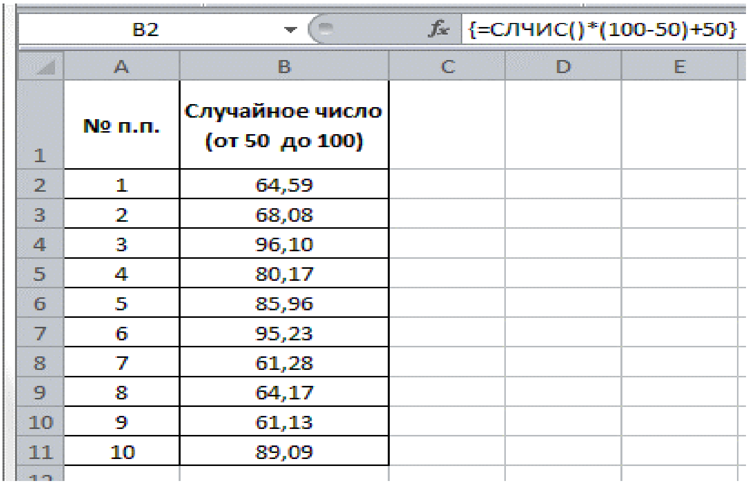
2. На ленте ***Формулы*** в группе ***Библиотека функций*** щелкнем кнопкой мыши на пиктограмме *Вставить функцию*.

3. В открывшемся окне диалога ***Мастер функций*** выберем категорию ***Математические***, в списке функций – СЛЧИС, щелкнем на ОК – появится окно диалога ***Аргументы функции***.

4. Нажмем комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> – в выделенном диапазоне будут помещены числа, распределенные по равномерному закону в диапазоне 0–1 (см. рис. 2.6).

5. Щелкнем кнопкой мыши в строке формул и изменим имеющуюся там формулу, приведя ее к виду =СЛЧИС()*(100 – 50)+50.

6. Нажмем комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> – в выделенном диапазоне будут размещены числа, распределенные по равномерному закону в диапазоне 50–100 (рис. 2.7).



B2 {=СЛЧИС()*(100-50)+50}

	A	B	C	D	E
1	№ п.п.	Случайное число (от 50 до 100)			
2	1	64,59			
3	2	68,08			
4	3	96,10			
5	4	80,17			
6	5	85,96			
7	6	95,23			
8	7	61,28			
9	8	64,17			
10	9	61,13			
11	10	89,09			

Рис. 2.7. Пример генерации десяти случайных чисел в диапазоне от 50 до 100

В табличном процессоре MS Excel для генерации случайных чисел есть специальный инструмент ***Генерация случайных чисел***. Этот инструмент позволяет генерировать числа, распределенные по различным законам. В их число входят:

- *равномерное распределение* – инструмент позволяет генерировать заданное количество случайных чисел (по умолчанию в интервале 0–1);
- *нормальное распределение* – характеризуется средним значением и стандартным отклонением. Инструмент позволяет генерировать заданное количество случайных чисел, по умолчанию используется среднее значение 0 и стандартное отклонение 1;
- *биномиальное распределение* – характеризуется вероятностью успеха для некоторого числа испытаний, например, можно сгенерировать случайные двухальтернативные переменные по числу испытаний, сумма которых будет биномиальной случайной величиной;
- *дискретное распределение* – характеризуется значением и соответствующим ему интервалом вероятности. Величины значений предварительно формируются в диапазоне ячеек в виде столбца, в смежном

столбце правее первого указываются и соответствующие вероятности. Сумма вероятностей должна быть равна единице;

- распределения *Бернулли*, *Пуассона* и *модельное*.

Для включения инструмента ***Генерация случайных чисел*** на ленте ***Данные*** в группе ***Анализ*** нужно выбрать пиктограмму ***Анализ данных*** (Data Analysis), в открывшемся окне диалога ***Анализ данных*** выбрать в списке ***Генерация случайных чисел*** (Random Number Generator) – откроется диалоговое окно ***Генерация случайных чисел*** (Random Number Generator). В настоящее время идет стремительное развитие направления разработки инструментальных средств имитационного моделирования (ИСИМ), целенаправленно поддерживающих те или иные методологии и направления имитационного моделирования сложных систем (ИМСС):

AnyLogic – программное обеспечение для имитационного моделирования сложных систем и процессов, позволяющее поддерживать направление агентного моделирования, дискретно-событийного моделирования и разработки моделей системной динамики (осуществляется российской компанией (англ. XJ Technologies) «Экс Джей Текнолоджис»);

GPSS (англ. General Purpose Simulation System – общецелевая система моделирования) – язык объектно-ориентированного программирования, используемого для имитационного моделирования систем массового обслуживания, различных информационных процессов и разработки имитационных моделей в сети Интернет;

Arena – разрабатываемое компанией Systems Modeling Corporation программное обеспечение для имитационного моделирования, позволяющее создавать подвижные компьютерные модели, используя которые можно адекватно представить очень многие реальные системы;

Plant Simulation – программная среда имитационного моделирования систем и процессов, предназначенная для оптимизации материалопотоков, загрузки ресурсов, логистики и метода управления для всех уровней планирования от целого производства и сети производств до отдельных линий и участков;

SimBioSys: C++ – оболочки агентно-базового эволюционного моделирования в биологических и общественных науках;

система моделирования SWARM и ее расширения MAML (Multi-Agent Modelling Language) для моделирования искусственного мира;

пакеты Ascape (Agent Landscape) и RePast (Recursive Porous Agent Simulation Toolkit), написанные на платформе языка Java для поддержки агентно-базового моделирования;

NetLogo и MIMOSE (Micro- and Multilevel Modelling Software) – информационные системы, предназначенные для создания имитационных моделей и технологий моделирования в общественных науках;

SPSS, Statistica, PilGrim, Z-Tree – системы статистического моделирования для исследования экономических, педагогических и психологических явлений и процессов.

Программными средствами, поддерживающими подход системной динамики (в частности, модель Форрестера), являются: AnyLogic, Arena, SimBioSys, eM-Plant, Tecnomatix Plant Simulation, SimuLab, VenSim, PowerSim, Stella, Ithink, ModelMaker и др. Для построения моделей в них используется графическое представление зависимостей переменных в виде так называемых «stock and flow diagrams». Модели системной динамики хорошо реализуются в среде AnyLogic, так как AnyLogic является инструментом имитационного моделирования нового поколения, который основан на результатах, полученных в теории моделирования и в информационных технологиях за последнее десятилетие. AnyLogic поддерживает разработку и моделирование систем обратной связи (диаграммы потоков и накопителей, правила решений, включая массивы переменных). Итак, с помощью AnyLogic можно: определять потоковые переменные одну за другой; использовать автозаполнение при работе с формулами; создавать копии переменных для лучшей читаемости модели; использовать табличные функции со ступенчатой, линейной, сплайновой интерполяцией; определять поведение функции за пределами допустимой области; определять поддиапазоны и подразмерности; объявлять переменные-массивы с заданной размерностью; задать различные уравнения для различных наборов элементов массива; использовать как специальные инструменты системной динамики, так и возможности языка Java. Для разработки сложных аналитических и имитационных моделей используют среды визуального программирования и моделирования MATLAB, MvStudium, AnyLogic, Arena и др. Программный пакет AnyLogic позволяет анализировать и моделировать системы динамического типа.

Контрольные вопросы

1. Моделирование случайных событий, дискретных и непрерывных случайных величин.
2. Принципы моделирования случайных величин.
3. Датчики случайных чисел и их свойства.

4. Методы построения программных датчиков базовых случайных величин (БСВ): мультипликативный, конгруэнтный (метод вычетов).

5. Метод Макларена – Марсальи.

6. Метод, основанный на свойстве воспроизводимости равномерного закона.

7. Методы, использующие линейные смешанные и нелинейные рекуррентные формулы.

8. Организация и планирование имитационных экспериментов.

9. Вероятностно-статистическое описание результатов моделирования.

10. Универсальные пакеты имитационного моделирования: GPSS, Arena, Extend, AweSim, MicroSaint, MODSIMIII, SIMPLE ++, SLX, TaylorEnterprise и др.

11. Специализированные языки моделирования сложных систем.

12. Имитационное моделирование с помощью GPSS (General Purpose Simulation System).

13. Универсальные математические программы: Maple, Matematika, MATLAB, MathCad и др.

14. Специализированные статистические программы: Statistika, Stadia, Stata, SPSS, EViews и др.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Модель управления запасами

Задача управления запасами – это задача о поддержании баланса производства и сбыта продукции предприятия, минимизирующего расходы предприятия на производство и хранение продукции [20, с. 28–30].

Рассмотрим работу склада, на котором хранятся товарные запасы, расходуемые на снабжение потребителей. Работа реального склада сопровождается множеством отклонений от идеального режима: заказана партия одного объема, а прибыла партия другого объема; по плану партия должна прибыть через две недели, а она пришла через десять дней; при норме разгрузки одни сутки разгрузка партии длилась трое суток и т. д. Учесть все эти отклонения практически невозможно, поэтому при моделировании работы склада обычно делаются следующие предположения:

- скорость расходования запасов со склада – постоянная величина, которую обозначим M (единиц товарных запасов в единицу времени); в соответствии с этим график изменения величины запасов в части расходования является отрезком прямой;

- объем партии пополнения Q есть постоянная величина, так что система управления запасами – это система с фиксированным размером заказа;

- время разгрузки прибывшей партии пополнения запасов мало, будем считать его равным нулю;

- время от принятия решения о пополнении до прихода заказанной партии есть постоянная величина Δt, так что можно считать, что заказанная партия приходит как бы мгновенно: если нужно, чтобы она пришла точно в определенный момент, то ее следует заказать в момент времени на Δt ранее;

- на складе не происходит систематического накопления или перерасхода запасов. Если через T обозначить время между двумя последовательными поставками, то обязательно выполнение равенства $Q = MT$. Из сказанного выше следует, что работа склада происходит одинаковыми циклами длительностью T и за время цикла величина запаса изменяется от максимального уровня S до минимального уровня s;

- наконец, будем считать обязательным выполнение требования, чтобы отсутствие запасов на складе было недопустимым, т. е. выполняется неравенство $s > 0$. С точки зрения уменьшения издержек склада на хранение отсюда вытекает, что $s = 0$ и, следовательно, $S = Q$. Окончательно график идеальной работы склада в форме зависимости величины запасов y от времени t будет иметь следующий вид (рис. 3.1).

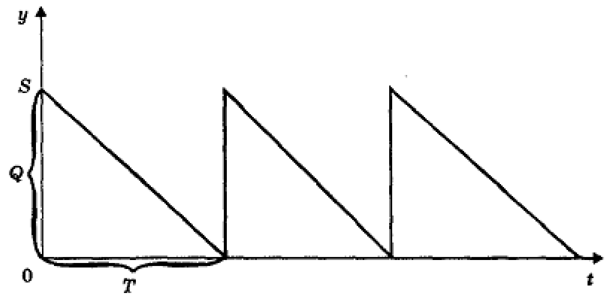


Рис. 3.1. Модель управления запасами

Эффективность работы склада оценивается по его затратам на пополнение запасов и их хранение. Расходы, не зависящие от объема партии, называют накладными. Сюда входят почтово-телеграфные расходы, командировочные, некоторая часть транспортных расходов и др. Накладные расходы будем обозначать через K. Издержки хранения запасов будем считать пропорциональными величине хранящихся запасов и времени их хранения. Издержки на хранение одной единицы запасов в течение одной единицы времени называются величиной удельных издержек хранения; мы их будем обозначать через h.

При изменяющейся величине хранящихся запасов издержки хранения за некоторое время T получают путем умножения величины h на T и на среднее значение величины запасов в течение этого времени T. Таким образом, затраты склада за время T при размере партии пополнения Q в случае идеального режима работы склада, представленного на рис. 3.1, равны:

$$Z_T(Q) = K + hTQ / 2. \tag{3.1}$$

После деления этой функции на постоянную величину T с учетом равенства $Q = MT$ получим выражение для величины затрат на пополнение и хранение запасов, приходящихся на единицу времени:

$$Z_1(Q) = \frac{Z_T(Q)}{T} = \frac{K}{T} + \frac{hQ}{2} = \frac{KM}{Q} + \frac{hQ}{2}. \tag{3.2}$$

Это и будет целевой функцией, минимизация которой позволит указать оптимальный режим работы склада. Найдем объем заказываемой партии Q, при котором минимизируется функция средних затрат склада за единицу времени, т. е. функция $Z_1(Q)$. На практике Q часто принимают дискретные значения, в частности из-за использования транспортных средств определенной грузоподъемности; в этом случае оптимальное значение Q находят перебором допустимых значений Q. Мы будем считать, что ограничений на принимаемые значения Q нет, тогда задачу на минимум функции $Z_1(Q)$ (легко показать, что она является выпуклой, см. рис. 3.1) можно решить методами дифференциального исчисления:

$$\frac{dZ_1}{dQ} = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0, \tag{3.3}$$

откуда находим точку минимума $Q_{\text{опт}}$:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}. \tag{3.4}$$

Эта формула называется формулой Уилсона (по имени английского ученого-экономиста, получившего ее в 20-х гг. прошлого столетия).

Оптимальный размер партии, рассчитываемый по формуле Уилсона, обладает характеристическим свойством: размер партии Q оптимален тогда и только тогда, когда издержки хранения за время цикла T равны накладным расходам K. Действительно, если

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}, \tag{3.5}$$

то издержки хранения за цикл равны:

$$h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = h\frac{2KM}{2Mh} = K. \tag{3.6}$$

Если же издержки хранения за цикл равны накладным расходам, т. е.

$$h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = K, \tag{3.7}$$

то

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}. \tag{3.8}$$

Проиллюстрируем характеристическое свойство оптимального размера партии графически (рис. 3.2).

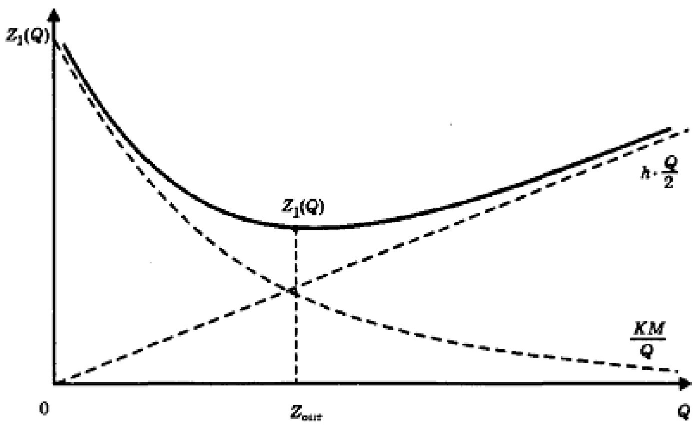


Рис. 3.2. График издержек на хранение

На рис. 3.2 видно, что минимальное значение функции $Z_1(Q)$ достигается при том значении Q, при котором равны значения двух других функций, ее составляющих. Используя формулу Уилсона, в сделанных ранее предположениях об идеальной работе склада можно получить ряд расчетных характеристик работы склада в оптимальном режиме:

- оптимальный средний уровень запаса

$$\bar{Q}_{\text{опт}} = \frac{Q_{\text{опт}}}{2} = \sqrt{\frac{KM}{2h}}; \tag{3.9}$$

- оптимальная периодичность пополнения запасов

$$T_{\text{опт}} = \frac{Q_{\text{опт}}}{M} = \sqrt{\frac{2K}{Mh}}; \tag{3.10}$$

- оптимальные средние издержки хранения запасов в единицу времени

$$\bar{H}_1 = \bar{Q}_{\text{опт}} h = \sqrt{\frac{KMh}{2}}. \tag{3.11}$$

3.2. Имитационные модели систем массового обслуживания

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы – систем массового обслуживания (СМО) [36].

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые называются каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяют на одноканальные и многоканальные.

Заявки поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок также продолжается какое-то случайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что система оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды система работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т. п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок [38].

Системы массового обслуживания делят на два основных типа: СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

Одним из методов расчета показателей эффективности СМО является метод имитационного моделирования. Практическое использование компьютерного имитационного моделирования предполагает построение соответствующей математической модели, учитывающей факторы неопределенности, динамические характеристики и весь комплекс взаимосвязей между элементами изучаемой системы. Имитационное моделирование работы системы начинается с некоторого конкретного начального состояния. Вследствие реализации различных событий случайного характера модель системы переходит в последующие моменты времени в другие свои возможные состояния. Этот эволюционный процесс продолжается до конечного момента планового периода, т. е. до конечного момента моделирования.

Рассмотрим четырехканальную систему массового обслуживания ($n = 3$) с максимальной длиной очереди, равной четырем ($m = 2$). В СМО поступает простейший поток заявок со средней интенсивностью $\lambda = 4$ и показательным законом распределения времени между поступлением заявок. Поток обслуживаемых в системе заявок является простейшим со средней интенсивностью $\mu = 1$ и показательным законом распределения временем обслуживания.

Для имитации СМО воспользуемся одним из методов статистического моделирования – имитационным моделированием. Будем использовать пошаговый подход. Суть этого подхода заключается в том, что состояния системы рассматриваются в последующие моменты времени, шаг между которыми является достаточно малым, чтобы за его время произошло не более одного события.

Выберем шаг по времени (dt). Он должен быть много меньше среднего времени поступления заявки (T_1) и среднего времени ее обслуживания (T_2), т. е.

$$dt = T_1 T_2, \tag{3.12}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{l} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \tag{3.13}$$

$$T_2 = \frac{1}{m} = \frac{1}{1} = 1. \tag{3.14}$$

Исходя из условия (3.12) определим шаг по времени:

$$dt = 0{,}0001.$$

Время поступления заявки в СМО и время ее обслуживания являются случайными величинами. Поэтому при имитационном моделировании СМО их вычисление производится с помощью случайных чисел.

Алгоритм метода имитационного моделирования можно сформулировать следующим образом. Время работы СМО (T) разбивается на шаги по времени dt, на каждом из них выполняется ряд действий. Вначале определяются состояния системы (занятость каналов, длина очереди), затем с помощью функции *sob* (Delfi7) определяется, поступила ли на данном шаге заявка или нет.

Если поступила и при этом имеются свободные каналы, то с помощью функции *tok* генерируем время обработки заявки и ставим ее на обслуживание. Если все каналы заняты, а длина очереди меньше 4, то помещаем заявку в очередь, если же длина очереди равна 4, то заявке будет отказано в обслуживании.

В случае, когда на данном шаге заявка не поступала, а канал обслуживания освободился, проверяем, есть ли очередь. Если есть, то из очереди заявку ставим на обслуживание в свободный канал. После проделанных операций время обслуживания для занятых каналов уменьшаем на величину шага dt. По истечении времени T, т. е. после моделирования работы СМО, вычисляются показатели эффективности работы системы и результаты выводятся на экран.

Анализ сложных систем на базе сетей Петри можно выполнять посредством имитационного моделирования СМО, представленных моделями сетей Петри [17, с. 12–19].

Сетью Петри называется совокупность множеств $\{P, T, I, O\}$, где:

P – конечное множество, элементы которого называются позициями;

T – конечное множество, элементы которого называются переходами, $T \cap \emptyset$;

I – множество входных функций, $I : T \rightarrow P$;

O – множество выходных функций, $O : T \rightarrow P$.

При этом задают входные потоки заявок и определяют соответствующую реакцию системы. Выходные параметры СМО рассчитывают путем обработки накопленного при моделировании статистического материала. Возможен и другой подход к использованию сетей Петри для анализа объектов, исследуемых на системном уровне. Он не связан с имитацией процессов и основан на исследовании таких свойств сетей Петри, как ограниченность, безопасность, сохраняемость, достижимость, живость.

Сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, состоящий из вершин двух типов – позиций и переходов, соединенных между собой дугами. Вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно. В позициях могут размещаться метки (маркеры), способные перемещаться по сети. Событием называют срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции [33].

3.3. Показатели эффективности системы массового обслуживания

Характеристикой работы системы массового обслуживания служат показатели эффективности обслуживающей системы. В различных задачах исследования систем массового обслуживания в качестве основных выступают разные показатели эффективности. В качестве показателей эффективности СМО используются:

- абсолютная пропускная способность системы (A), т. е. среднее число заявок m, обслуживаемых в единицу времени t;
- относительная пропускная способность (Q), т. е. средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой;
- вероятность отказа обслуживания заявки ($P_{отк}$);
- среднее число (k) занятых каналов n;
- среднее число заявок в СМО ($L_{сист}$);
- среднее время пребывания заявки в системе ($T_с$);
- среднее число заявок в очереди ($L_{оч}$);
- среднее время пребывания заявки в очереди ($T_о$);

- среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- среднее время ожидания обслуживания;
- вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение, и т. п.

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе $T_{\text{сист}}$ (очереди $T_{\text{оч}}$) равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ (очереди $L_{\text{оч}}$), деленному на интенсивность потока заявок λ, т. е.

$$T_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}; \tag{3.15}$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}. \tag{3.16}$$

Формулы (3.15) и (3.16) называются формулами Литтла. Они вытекают из того, что в предельном стационарном режиме среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее, т. е. оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность λ. Закон Литтла (Little's law) – это закон, согласно которому чем больше задач в системе выполняется одновременно, тем более медленной будет скорость выполнения каждой из них. Формулы для вычисления показателей эффективности приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. **Показатели эффективности СМО**

Показатели	Одноканальная СМО с ограниченной очередью	Многоканальная СМО с ограниченной очередью
Финальные вероятности $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Интенсивность нагрузки (согласованность входного и выходного потоков) ρ	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ $p_1 = \rho p_0$ $p_2 = p^2 p_0, \ldots$ $p_k = \rho^k p_0$	$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^n}{nn!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]$ $p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}$ $p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!}$ $(r = 1, \ldots, m)$

Показатели	Одноканальная СМО с ограниченной очередью	Многоканальная СМО с ограниченной очередью
Вероятность отказа $P_{отк}$	$P_{отк} = P_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$
Абсолютная пропускная способность A	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_0)$	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0)$
Относительная пропускная способность Q	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$
Среднее число заявок в очереди $L_{оч}$	$L_{оч} = \rho^2 \frac{[1-\rho^m(m+1-m\rho]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1-\left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)(\frac{\rho}{n})^m\right]}{nn!(1\frac{\rho}{n})^2}$
Среднее число заявок под обслуживанием $L_{об}$	$L_{об} = 1 - p_0$	$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0\right)$
Среднее число заявок в системе $L_{сист}$	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об}$	$L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}$

Показатели эффективности СМО зависят от вида систем (см. табл. 3.1). Для систем с отказами в качестве показателя эффективности используется абсолютная и относительная пропускная способность. Абсолютная пропускная способность – среднее число обслуженных в единицу времени заявок. Относительная пропускная способность – средняя доля обслуженных заявок, определяемая отношением среднего числа обслуженных заявок к общему числу поступивших заявок в единицу времени. Кроме того, в качестве показателя эффективности применяют среднее число занятых каналов, среднее время простоя одного канала или всей системы в целом.

Если система без отказов, то используют другие показатели эффективности:

- для систем с неограниченным ожиданием – характеристики ожидания (среднее число заявок в очереди или системе, среднее время ожидания, среднее время выполнения заявки);

- для систем с ограниченным временем ожидания применяют как абсолютную, так и относительную пропускную способность и характеристики ожидания.

3.4. Классификация систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания делятся на классы по ряду признаков. По числу каналов СМО подразделяют на одноканальные (когда имеется один канал обслуживания) и многоканальные, точнее n-канальные (когда количество каналов $n \geq 2$). Здесь и далее будем полагать, что каждый канал одновременно может обслуживать только одну заявку и, если не оговорено специально, каждая находящаяся под обслуживанием заявка обслуживается только одним каналом. Многоканальные СМО могут состоять либо из однородных каналов, либо из разнородных, отличающихся длительностью обслуживания одной заявки. Практически время обслуживания каналом одной заявки $T_{об}$ является непрерывной случайной величиной. Однако при условии абсолютной однородности поступающих заявок и каналов время обслуживания может быть и величиной постоянной ($T_{об}$ = const).

По дисциплине обслуживания СМО подразделяют на три класса:

1. СМО с отказами, в которых заявка, поступившая на вход СМО в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО (пропадает). Чтобы эта заявка все же была обслужена, она должна снова поступить на вход СМО и рассматриваться при этом как заявка, поступившая впервые. Примером СМО с отказами может служить работа АТС: если набранный телефонный номер (заявка, поступившая на вход) занят, то заявка получает отказ, и чтобы дозвониться по этому номеру, следует его набрать еще раз (заявка поступает на вход как новая).

2. СМО с ожиданием (неограниченным ожиданием или очередью). В таких системах заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Каждая заявка, поступившая на вход, в конце концов будет обслужена. Такие СМО часто встречаются в торговле, в сфере бытового и медицинского обслуживания, на предприятиях (например, обслуживание станков бригадой наладчиков).

3. СМО смешанного типа (с ограниченным ожиданием). Это такие системы, в которых на пребывание заявки в очереди накладываются некоторые ограничения.

Эти ограничения могут накладываться на длину очереди, т. е. максимально возможное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. В качестве примера такой системы можно привести мастерскую по ремонту автомобилей, имеющую ограниченную по размерам стоянку для неисправных машин, ожидающих ремонта, или таможенный пункт.

Ограничения ожидания могут касаться времени пребывания заявки в очереди, по истечении которого она выходит из очереди и покидает систему, либо касаться общего времени пребывания заявки в СМО (т. е. суммарного времени пребывания заявки в очереди и под обслуживанием).

Смешанные СМО могут быть следующих видов:

а) с ограниченной длиной очереди (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней). Так, примером такой системы выступает магазин по продаже овощей, поступающих из теплиц агроторговых предприятий (требования – транспорт с грузом);

б) с ограниченным временем ожидания (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней). Так, примером такой системы может быть магазин, столовая с нетерпеливыми покупателями и посетителями;

в) с ограничением на общее время пребывания требований в системе;

г) с ограничением на длину очереди и время пребывания в очереди (здесь требование покидает систему, если оно застало все каналы занятыми и очередь максимально допустимой длины, а также если оно постояло в очереди в среднем дольше некоторой величины);

д) с ограничением на длину очереди и время пребывания требований в системе.

Одной из форм классификации систем массового обслуживания является кодовая (символьная) классификация Д. Кендалла. При этой классификации характеристику системы записывают в виде трех, четырех или пяти символов, например A B S, где A – тип распределения входящего потока требований, B – тип распределения времени обслуживания, S – число каналов обслуживания.

Для экспоненциального распределения принимают символ M, для любого (произвольного) распределения – символ G. Запись G / M / 3 означает, что входящий поток требований пуассоновский (простейший), время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, в системе имеется три канала обслуживания.

Четвертый символ указывает допустимую длину очереди, а пятый – порядок отбора (приоритета) требований.

Следующим признаком классификации является дисциплина обслуживания, т. е. правило отбора требований, поступающих в каналы обслуживания. Другими словами, это способ занятия канала обслуживания, или способ выбора требования из очереди. По этому признаку СМО делятся на два вида:

а) системы без приоритета;

б) системы с приоритетом.

Системы массового обслуживания без приоритета могут быть:

а) с упорядоченным обслуживанием. Наиболее распространенным является выбор требований в порядке их поступления в очередь: первым пришел – первым обслуживаешься, т. е. FIFO – от английского First-In-First-Out. Например, система по приемке зерна на элеваторе. Иногда требования поступают в каналы обслуживания в соответствии с правилом: последним пришел – первым обслуживаешься, т. е. LIFO – от английского Last-In-First-Out. Например, система, состоящая из двух стадий обработки деталей для колесного трактора. В ней детали, прошедшие первый этап обработки, складываются в контейнер, и первой на второй этап обработки поступает верхняя деталь, т. е. последняя из поступивших;

б) с неупорядоченным обслуживанием. В такой системе действует случайный выбор требований на обслуживание, что часто встречается в производственной практике.

СМО с приоритетом обусловливают различный подход при отборе в канал обслуживания и могут быть:

1) с абсолютным приоритетом. Суть такой системы заключается в том, что обслуживание требования немедленно прерывается при поступлении требования с более высоким приоритетом. Так, если в системе ремонта станков отдельные из них выполняют особо срочные заказы к посевной кампании, то при случайных отказах данные станки должны ремонтироваться в первую очередь;

2) с относительным приоритетом. Ее суть заключается в том, что начатое обслуживание требования с низким приоритетом не прекращается в момент поступления требования с более высоким приоритетом, а обязательно завершается. При этом требование с более высоким приоритетом, поступившее в систему, имеет право только на лучшее место в очереди. Примером такой системы является стоматологическое отделение в поликлинике учебно-опытного хозяйства, где работники, являющиеся пациентами с острой зубной болью, обслуживаются вне очереди. К такой системе относятся и кассовые аппараты магазина АПК, обслуживающие вне очереди тружеников сельского хозяйства, пользующихся определенными льготами.

Существуют также многофазные СМО, в которых процесс обслуживания выполняется последовательно, т. е. через ряд этапов. Поступающее в систему требование вначале обслуживается в первой фазе, затем переходит во вторую и т. д. Примерами таких систем являются:

1) технологические потоки сборки различных изделий, когда узлы передаются из цеха в цех, проходя последовательные фазы обслуживания;

2) универсам, в котором обслуживание покупателей разделено на следующие этапы: сдача вещей, выбор корзин, выбор товара в различных отделах, расчет в кассах, получение сумок.

Таким образом, при всем многообразии рассматриваемых моделей главной целью теории массового обслуживания будет являться исследование различных характеристик случайного состояния СМО. На основе моделей массового обслуживания можно разрабатывать экономические рекомендации по реорганизации СМО для повышения эффективности их работы, а также определять оптимальные показатели вновь создаваемых систем массового обслуживания.

Методы и модели, применяющиеся в теории СМО, можно условно разделить на аналитические и имитационные. Рассмотрим аналитические методы, которые позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования.

3.5. Поток событий и требований

Изучение СМО начинается с анализа входящего потока требований. Входящий поток требований представляет собой совокупность требований, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Входящий поток требований изучается с целью установления закономерностей этого потока и дальнейшего улучшения качества обслуживания.

В большинстве случаев входящий поток неуправляем и зависит от ряда случайных факторов. Число требований, поступающих в единицу времени, – случайная величина. Случайной величиной является также интервал времени между соседними поступающими требованиями. Однако среднее количество требований, поступивших в единицу времени, и средний интервал времени между соседними поступающими требованиями предполагаются заданными.

Среднее число требований, поступающих в систему обслуживания за единицу времени, называется интенсивностью поступления требований и определяется следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{T}, \qquad (3.17)$$

где T – среднее значение интервала между поступлением очередных требований.

Для многих реальных процессов поток требований достаточно хорошо описывается законом распределения Пуассона. Такой поток называется простейшим.

Простейший поток обладает важными свойствами:

1) свойством стационарности, которое выражает неизменность вероятностного режима потока по времени. Это значит, что число требований, поступающих в систему в равные промежутки времени, в среднем должно быть постоянным. Например, число вагонов, поступающих под погрузку, в среднем в сутки должно быть одинаковым для различных периодов времени, например в начале и в конце декады;

2) отсутствия последействия, которое обусловливает взаимную независимость поступления того или иного числа требований на обслуживание в непересекающиеся промежутки времени. Это значит, что число требований, поступающих в данный отрезок времени, не зависит от числа требований, обслуженных в предыдущем промежутке времени. Например, число автомобилей, прибывших за материалами в десятый день месяца, не зависит от числа автомобилей, обслуженных в четвертый или любой другой предыдущий день данного месяца;

3) свойством ординарности, которое выражает практическую невозможность одновременного поступления двух или более требований (вероятность такого события неизмеримо мала по отношению к рассматриваемому промежутку времени, когда последний устремляют к нулю).

При простейшем потоке требований распределение требований, поступающих в систему, подчиняется закону распределения Пуассона: вероятность $P_k(t)$ того, что в обслуживающую систему за время t поступит именно k требований:

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \qquad (3.18)$$

где λ – среднее число требований, поступивших на обслуживание в единицу времени.

На практике условия простейшего потока не всегда строго выполняются. Часто имеет место нестационарность процесса (в различные часы дня и различные дни месяца поток требований может меняться, он может быть интенсивнее утром или в последние дни месяца). Существует также наличие последействия, когда количество требований на отпуск товаров в конце месяца зависит от их удовлетворения в начале месяца. Наблюдается и явление неоднородности, когда несколько клиентов одновременно прибывают на склад за материалами. Однако в целом пуассоновский закон распределения с достаточно высоким приближением отражает многие процессы массового обслуживания. Почему такое предположение в ряде важных случаев оказывается верным, дает ответ общая теорема А. Я. Хинчина, которая представляет исключительную теоретическую и практическую ценность. Эта теорема имеет место в случае, когда входящий поток можно представить в виде суммы большого числа независимых потоков, ни один из которых не является сравнимым по интенсивности со всем суммарным потоком. Приведем нестрогую формулировку этой теоремы: если входящий поток представляет собой сумму большого числа независимых между собой стационарных и ординарных потоков, каждый из которых вносит малый вклад в общую сумму, то при одном дополнительном условии аналитического характера (которое обычно выполняется на практике) поток близок к простейшему.

Применение этой теоремы на практике можно продемонстрировать на следующем примере: поток судов дальнего плавания в данный грузовой порт, связанный со многими портами мира, можно считать близким к простейшему. Это дает нам право считать поток прибытия судов в порт распределенным согласно процессу Пуассона.

Кроме того, наличие пуассоновского потока требований можно определить статистической обработкой данных о поступлении требований на обслуживание. Одним из признаков закона распределения Пуассона является равенство математического ожидания случайной величины и дисперсии этой же величины, т. е.

$$a = \sigma^2. \tag{3.19}$$

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является *время обслуживания*.

Время обслуживания одного требования ($t_{обс}$) – случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит как от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров, поступающих в систему, требований (например, различной грузоподъемности транспортных средств, поступающих под погрузку или выгрузку).

Случайная величина $t_{обс}$ полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний.

На практике чаще всего принимают гипотезу о показательном законе распределения времени обслуживания.

Показательный закон распределения времени обслуживания имеет место тогда, когда плотность распределения резко убывает с возрастанием времени t. Например, когда основная масса требований обслуживается быстро, а продолжительное обслуживание встречается редко. Наличие показательного закона распределения времени обслуживания устанавливается на основе статистических наблюдений.

При показательном законе распределения времени обслуживания вероятность $P_{t\,обс}$ события, что время обслуживания продлится не более чем t, равна:

$$P_{t\,обс}(t) = 1 - e^{-vt}, \tag{3.20}$$

где v – интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения

$$v = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}, \tag{3.21}$$

где $\bar{t}_{обс}$ – среднее время обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Следует заметить, что если закон распределения времени обслуживания показательный, то при наличии нескольких обслуживающих устройств одинаковой мощности закон распределения времени обслуживания несколькими устройствами будет также показательным:

$$P_{t_{обс}}(t) = 1 - e^{-nvt}. \tag{3.22}$$

3.6. Теоретические основы и методы анализа одноканальных и многоканальных систем массового обслуживания

СМО с отказами. В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

A – абсолютную пропускную способность СМО, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q – относительную пропускную способность, т. е. среднюю долю пришедших заявок, обслуженных системой (или вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена);

$P_{отк}$ – вероятность отказа – вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной;

k – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

1. Одноканальная система с отказами (μ – интенсивность потока обслуживания).

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \tag{3.23}$$

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \tag{3.24}$$

$$A = \lambda Q. \tag{3.25}$$

2. Многоканальная система с отказами (задача Эрланга).

Эта задача возникла из нужд телефонии и была решена в 1909 г. датским инженером-математиком А. К. Эрлангом. Задача ставится так: имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Обозначим λ_{ij} − интенсивность потока событий, переводящих систему из состояния S_i в состояние S_j (рис. 3.3).

$$S_0 \xleftrightarrow{\lambda_{01} \rightarrow \leftarrow \lambda_{10}} S_1 \ldots\ldots S_{n-1} \xleftrightarrow{\lambda_{n-1,n} \rightarrow \leftarrow \lambda_{n,n-1}} S_n$$

Рис. 3.3. Схема потока событий в многоканальной системе массового обслуживания

Для S_0

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1. \tag{3.26}$$

Следовательно,

$$\lambda_{12} p_{12} = \lambda_{21} p_2 \tag{3.27}$$

и

$$\lambda_{k-1,\,k}\, p_{k-1} = \lambda_{k,\,k-1}\, p_k. \tag{3.28}$$

Кроме того,

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1. \qquad (3.29)$$

Решим систему:

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0;\ p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0;$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0; \qquad (3.30)$$

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,\,k\ldots}\ \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,\,k-1\ldots}\ \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

Таким образом, все вероятности состояний p_0, p_1, …, p_n выражены через p_0. Введем параметр $\alpha = \lambda / \mu$. λ – среднее число требований, поступающих за единицу времени, $1 / \mu$ – среднее время обслуживания одним каналом одного требования, тогда $\alpha = \lambda / \mu$ – среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования. $\alpha / n < 1$ означает, что число обслуживающих каналов больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы обслужить все поступившие требования.

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0. \qquad (3.31)$$

Абсолютная пропускная способность получается умножением интенсивности заявок на относительную пропускную способность:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0\right). \qquad (3.32)$$

Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0\right). \qquad (3.33)$$

Среднее время ожидания начала обслуживания в системе

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{P_n}{\mu(n - \alpha)}. \qquad (3.34)$$

Среднее число свободных от обслуживания каналов

$$\overline{N}_0 = n - \overline{k}. \qquad (3.35)$$

Коэффициент простоя каналов

$$K_{\text{пр}} = \frac{\overline{N}_0}{n}. \qquad (3.36)$$

Коэффициент загрузки каналов

$$K_{\text{з}} = \frac{\overline{k}}{n}. \qquad (3.37)$$

Содержание каждого канала в единицу времени обходится в какую-то сумму. Вместе с тем каждая обслуженная заявка приносит какой-то доход. Умножая этот доход на среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, мы получим средний доход от СМО в единицу времени.

Естественно, при увеличении числа каналов этот доход растет, но растут и расходы, связанные с содержанием каналов. Что перевесит – увеличение доходов или расходов? Это зависит от условий операции, т. е. от платы за обслуживание заявки и от стоимости содержания канала. Зная эти величины, можно найти оптимальное число каналов, наиболее экономически эффективное.

СМО с ожиданием (с очередью).

Одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

Часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; кассир, выдающий зарплату, и т. д.). Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием.

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Предположим, что поток обслуживаний также простейший с интенсивностью μ. Это означает, что непрерывно занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени.

Заявка, поступившая в СМО в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Интенсивность нагрузки канала

$$\alpha = \lambda / \mu. \qquad (3.38)$$

Далее предполагаем, что в системе имеется ограничение на длину очереди, что в очереди могут находиться максимум m ($m \geq 1$) заявок. Поэтому заявка, пришедшая на вход СМО в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, получает отказ и покидает систему необслуженной.

Основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием:

$$P_0 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+2}}; \tag{3.39}$$

$$P_{\text{отк}} = P_{m+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}}, \text{ если } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+2}, \text{ если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.40}$$

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, совпадает со средней долей не получивших отказ заявок, поскольку заявка, попавшая в очередь, будет обслужена.

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+2}}, \text{ если } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{m+2}, \text{ если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.41}$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q. \tag{3.42}$$

Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ определяется как математическое ожидание случайной величины – числа заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2(1-\alpha^m(m+1-\alpha m))}{(1-\alpha)(1-\alpha^{m+2})}, \text{ если } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2m(m+2)}, \text{ если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.43}$$

Важной характеристикой СМО с ожиданием является среднее время ожидания заявки в очереди $T_{\text{оч}}$, которое определяется по формуле Литтла:

$$\overline{T_{\text{оч}}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}, \tag{3.44}$$

т. е. среднее время ожидания заявки в очереди равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность λ входящего потока заявок.

Одноканальная СМО с неограниченным ожиданием. Если $\lambda > \mu(\alpha > 1)$, т. е. среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени, больше среднего числа обслуживаемых заявок за то же время при непрерывно работающем канале, то очевидно, что очередь неограниченно растет. В этом случае предельный режим не устанавливается и предельных вероятностей состояний не существует (они равны нулю).

В случае $\lambda = \mu(\alpha = 1)$ при условии, что входящий поток заявок и поток обслуживаний регулярные (заявки поступают через равные интервалы времени, и время обслуживания одной заявки является постоянным, равным интервалу времени между поступлениями заявок), очереди не будет и канал будет обслуживать заявки непрерывно.

Но если входящий поток или поток обслуживаний становится случайным, очередь начинает расти до бесконечности.

Поэтому далее при рассмотрении указанных систем будем предполагать, что $\lambda < \mu$, т. е. $\alpha < 1$. При этом условии с течением времени устанавливается предельный режим, и предельные вероятности состояний существуют.

При отсутствии ограничений на очередь каждая заявка, поступившая в СМО, будет обслужена. Поэтому вероятность отказа равна нулю ($P_{\text{отк}} = 0$).

Следовательно, вероятность того, что поступившая заявка будет принята в систему, так же как и относительная пропускная способность, равна единице:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1. \tag{3.45}$$

Тогда для абсолютной пропускной способности A (и интенсивности выходящего потока) будем иметь:

$$A = \lambda Q = \lambda, \tag{3.46}$$

т. е. интенсивности входящего и выходящего потоков совпадают.

Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}. \tag{3.47}$$

Среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла равно:

$$\overline{T_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\mu(1-\alpha)}. \qquad (3.48)$$

Среднее время пребывания заявки в СМО складывается из среднего времени заявки в очереди и среднего времени обслуживания заявки:

$$\overline{T_{СМО}} = \overline{T_{оч}} + \overline{T_{об}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}. \qquad (3.49)$$

Модель СМО может быть представлена в виде блок-схемы, которая представляет собой набор фигур с характерным описанием блоков, соединенных между собой линиями. Вид каждого блока стандартен.

Понятие транзакта. Конфигурация блок-схемы GPSS-модели отражает направления, по которым происходит движение перемещающихся элементов. Каждый такой элемент называется транзактом. Транзакт – динамический (движущийся) элемент GPSS-модели (например, покупатель, автомобиль на мойке, заявка на складе). Работа GPSS-модели заключается в перемещении транзактов от блоков к блокам [25].

Основные операторы языка GPSS. Оператор – это специальное имя (обозначение) для определенного действия (операции) над операндами (данными). В табл. 3.2 приведен перечень наиболее часто используемых операторов.

Таблица 3.2. **Перечень наиболее часто используемых операторов**

Оператор	Описание	
GENERATE	*A, B, C, D, E, F, G, H*	Сгенерировать требование
QUEUE	*A, B*	Увеличить содержимое очереди
DEPART	*A, B*	Уменьшить содержимое очереди
SEIZE	*A*	Занять канал обслуживания
RELEASE	*A*	Освободить канал обслуживания
ENTER	*A, B*	Увеличить вместимость накопителя
LEAVE	*A, B*	Уменьшить вместимость накопителя
ADVANCE	*A, B*	Задержать перемещение требования
ASSIGN	*A, B*	Модифицировать параметр требования
PREEMPT	*АДС, 0, E*	Отстранить требование от обслуживания
RETURN	*A*	Вернуть канал обслуживания *A*
BUFFER		Идти в хвост цепи текущих событий
GATE	*A, B*	Переместить в зависимости от состояния

Оператор	Описание	
GATHER	*A*	Подождать родственные требования
LINK	*A, B, C*	Ввести в цепь пользователя
UNLINK	*A, B, C, D, E, F, G*	Вывести из цепи пользователя
<Имя>STORAGE	*A*	Определить вместимость накопителя
MARK	*A*	Создать временную метку
MATCH	*A*	Подождать другое требование
SELECT	*A, B, C, D, E, F, G*	Выбрать элемент

Таким образом, имитационная модель одноканальной разомкнутой СМО в программной среде GPSS World имеет вид:

GENERATE 8,2; Генерирование требования в интервале [6–10] ед. времени
QUEUE 1; Вход требования в очередь под номером 1
SEIZE 1; Определение занятости устройства под номером 1
DEPART 1; Выход требования из очереди под номером 1
ADVANCE 7,1; Обслуживание требования в интервале [6–8] ед. времени
RELEASE 1; Освобождение устройства обслуживания под номером 1
TERMINATE 1; Выход требования из системы
START 200;

Дана двухфазная одноканальная разомкнутая СМО с обслуживающими устройствами S1, S2 и бесконечными очередями следующего вида (рис. 3.4).

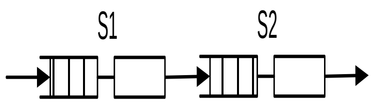


Рис. 3.4. Схема имитационной модели
в среде GPSS World

Окно имитационной модели в среде GPSS World показано на рис. 3.5.

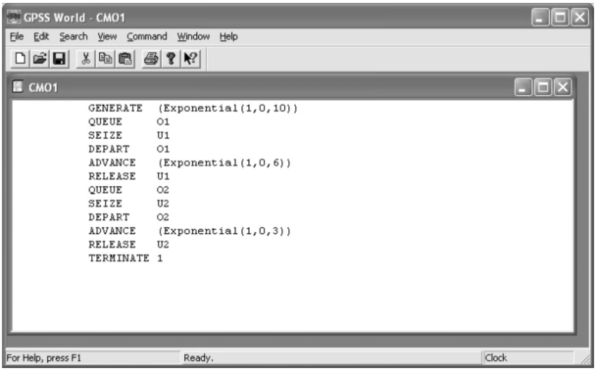


Рис. 3.5. Окно имитационной модели GPSS World

В модели имеется управляющая команда **START**, поэтому для запуска моделирования после транслирования необходимо выбрать **Command/Start** и в появившемся окне указать количество прогонов модели.

Параметры итогового отчета:

START TIME (начальное время) – 0.000;

END TIME (время окончания) – 99490.412;

BLOCKS (число блоков) – 12;

FACILITIES (число устройств обслуживания) – 2;

STORAGES (число накопителей) – 0.

Результаты моделирования для каналов обслуживания (FACILITY) U1 и U2:

ENTRIES (число входов) – 10000;

UTIL. (коэффициент использования) – 0.605 и 0.307 соответственно;

AVE. TIME (среднее время обслуживания) – 6.017 и 3.055 соответственно.

Результаты функционирования очередей O1 и O2:

MAX (максимальное длина очереди) – 13 и 7 соответственно;

CONT. (текущее содержание) – 0;

ENTRY (число входов) – 10000;

ENTRY(0) (число входов без ожидания в очереди) – 3867 и 6917 соответственно;

AVE.CONT. (средняя длина очереди) – 0.946 и 0.137 соответственно;

AVE.TIME (среднее время пребывания заявки в очереди) – 9.412 и 1.368 соответственно.

С помощью имитационного моделирования на GPSS возможно построение моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками показателей эффективности СМО, описывающими с той или другой точки зрения ее способность справляться с потоком заявок. В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться, например, среднее число заявок, обслуженных СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее время обслуживания и т. д.

Контрольные вопросы

1. Особенности экономических систем (СМО, управление запасами).
2. Выявление эффектов воздействия факторов.
3. Факторные планы.
4. Построение оптимальных планов экспериментов.
5. Имитационное моделирование с помощью GPSS (General Purpose Simulation System).
6. Понятие сети Петри. Моделирование сложных систем.

4. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

4.1. История метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло можно определить как метод моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределений. Определение метода можно сделать более общим, говоря не о случайных величинах, а о случайных функциях.

Идея моделирования случайных явлений известна давно и, по мнению некоторых авторов, восходит ко временам Древнего Вавилона и Ветхого Завета. Что же касается использования такого рода явлений для целей приближенных вычислений, то первой работой в этой области принято считать работу Холла 1873 г. о вычислении числа π с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу. Существует также ряд более поздних работ, в которых до появления электронных вычислительных машин (ЭВМ) использовались, по существу, идеи метода Монте-Карло. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную – очень трудоемкий процесс. Поэтому идеи эти не получили заметного развития вплоть до 1944 г., когда в связи с работами по созданию атомной бомбы Дж. фон Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, в которой этот вопрос систематически излагался, принадлежит Метрополису и Уламу. В Советском Союзе первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955–1956 гг. (Чавчанидзе, Шрейдер).

В настоящее время имеется более двух тысяч работ, в которых исследуются теоретические основы метода или рассматривается его применение к конкретным задачам. Метод Монте-Карло используется для решения прикладных задач из большого числа областей науки и техники.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, в которой традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий круг задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, в которых все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной математики (например, развитие методов численного интегрирования) и при решении многих задач успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

Наиболее сложными этапами решения той или иной задачи на ЭВМ в настоящее время следует считать математическое описание исследуемого явления, необходимые упрощения задачи, выбор подходящего численного метода, исследование его погрешности и запись алгоритма. В тех случаях, когда имеется теоретико-вероятностное описание задачи, использование метода Монте-Карло может существенно упростить упомянутые промежуточные этапы. Во многих случаях полезно и для детерминированных задач строить вероятностную модель (рандомизировать исходную задачу) с тем, чтобы далее использовать метод Монте-Карло.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка. Термин «метод Монте-Карло» равнозначен термину «метод статистических испытаний», также принятому в отечественной литературе. В зарубежной литературе обычно говорят о методах Монте-Карло, имея в виду то обстоятельство, что подлежащие вычислению величины могут быть оценены, исходя из различных вероятностных моделей (например, случайные величины с различными законами распределения могут иметь одинаковое среднее значение). Часто, когда речь идет об изучении некоторых реальных явлений, моделирование связанных с ними случайных величин процессов называют имитацией (simulation).

4.2. Сущность метода Монте-Карло

Важнейший прием построения методов Монте-Карло – сведение задачи к расчету математических ожиданий. Пусть требуется найти значение m некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно m: $M[X] = m$. Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) N возможных значений x_i случайной величины X, находят их среднее арифметическое:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \qquad (4.1)$$

Так как последовательность одинаково распределенных случайных величин, у которых существуют математические ожидания, подчиняется закону больших чисел, то при $N \to \infty$ среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к математическому ожиданию. Таким образом, при больших N величина $\bar{x} \approx m$.

В методе Монте-Карло данные вырабатываются искусственно путем использования некоторого генератора случайных чисел в сочетании с функцией распределения вероятностей для исследуемого процесса. Таким генератором может быть таблица, колесо рулетки, под-программа ЭВМ или какой-либо другой источник равномерно распределенных случайных чисел. Подлежащее разыгрыванию распределение вероятностей может быть основано на эмпирических данных, извлекаемых из ранее сформированных записей, или на результатах последнего эксперимента либо может представлять собой известное теоретическое распределение.

Таким образом, для применения метода Монте-Карло необходимо уметь разыгрывать случайную величину.

Приведем так называемые правила для разыгрывания случайных величин.

Введем обозначения: R – непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 1); $r_i(i = 1, 2, ...)$ – случайные числа (возможные значения R).

Правило 1. Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную законом распределения (табл. 4.1), надо разбить интервал (0, 1) оси Or на n частичных интервалов; выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_i.

Таблица 4.1. **Закон распределения**

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Если r_i попало в частичный интервал, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Правило 2 (метод обратных функций). Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число x_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение $F(x_i) = r_i$.

Правило 3. Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее плотность вероятности $f(x)$, надо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i, \tag{4.2}$$

или уравнение

$$\int_{a}^{x_i} f(x)dx = r_i, \tag{4.3}$$

где a – наименьшее конечное возможное значение X.

Для оценки величины m смоделируем такую случайную величину X, что ее математическое ожидание $M[X] = m$. Выберем N независимых реализаций x_1, …, x_N случайной величины X и вычислим среднее арифметическое по формуле (4.1). Предположим дополнительно, что случайная величина X имеет конечную дисперсию:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2. \tag{4.4}$$

По центральной предельной теореме

$$P\left\{\left|\overline{X} - m\right| < t_\beta \sqrt{\frac{D[X]}{N}}\right\} \approx 2\Phi\left(t_\beta\right) = \beta. \tag{4.5}$$

Величина

$$\varepsilon = t_\beta \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \tag{4.6}$$

называется *верхней границей ошибки с коэффициентом доверия* β.

Из формулы (4.6) видно, что для того чтобы уменьшить ошибку в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N в 100 раз.

Задаваясь значениями ε и β при известном $\sigma = \sqrt{D[X]}$, можно определить необходимое число испытаний N, обеспечивающих точность ε с надежностью β:

$$N = \frac{\sigma^2 t_\beta^2}{\varepsilon^2}. \tag{4.7}$$

Однако при решении конкретных задач обычно величина σ оказывается неизвестной. Поэтому определение приближенного значения σ требует дополнительных рассмотрений. В процессе вычисления можно поступить так. Назначается ориентировочно предварительное число испытаний $N = N_0$. Затем по результатам N_0 испытаний определяется приближенное значение дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} x_i^2 - \left(\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} x_i\right)^2. \tag{4.8}$$

Располагая S^2, можно найти приближенное значение N:

$$N = \frac{S^2 t_\beta^2}{\varepsilon^2}. \quad (4.9)$$

Если окажется, что $N > N_0$, необходимо провести дополнительные испытания.

4.3. Применение метода Монте-Карло в численном анализе

Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач, который основан на использовании генератора случайных чисел. Генератор случайных чисел в методе Монте-Карло используется для моделирования случайных опытов (бросание монеты, игрального кубика, точки на плоскую фигуру) и случайных потоков (потоки писем, посылок, посетителей) [6, с. 3–11].

Рассмотрим суть метода Монте-Карло на примере задачи определения площади некоторой плоской фигуры. Это приложение метода называют геометрическим методом Монте-Карло.

Пример. Пусть имеется плоская фигура, которая находится внутри прямоугольника с известной площадью S_0. Засыплем мысленно прямоугольник тончайшим слоем песка. Если посчитать общее число n песчинок и число k тех песчинок, которые попали на фигуру, то приближенно площадь фигуры можно рассчитать по формуле

$$S = \frac{k}{nS_0}. \quad (4.10)$$

Метод Монте-Карло состоит в воспроизведении на компьютере опыта случайного разбрасывания n песчинок с использованием генератора случайных чисел и с подсчетом числа k песчинок, которые попали на фигуру.

Метод Монте-Карло является способом оценки влияния неопределенности оценки параметров системы в широком диапазоне ситуаций. Метод обычно используют для оценки диапазона изменения результатов и относительной частоты значений в этом диапазоне для количественных величин, таких как стоимость, продолжительность, производительность, спрос и др. Моделирование методом Монте-Карло может быть использовано для двух различных целей:

- трансформирования неопределенности для обычных аналитических моделей;

- расчета вероятностей, если аналитические методы не могут быть использованы.

Метод Монте-Карло может быть применен для оценки неопределенности финансовых прогнозов, результатов инвестиционных проектов, при прогнозировании стоимости и графика выполнения проекта, нарушений бизнес-процесса и замены персонала.

Данный метод применяют в ситуациях, когда результаты не могут быть получены аналитическими методами или существует высокая неопределенность входных или выходных данных.

4.4. Понятие вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент – метод изучения устройств или физических процессов с помощью математического моделирования. Он предполагает, что вслед за построением математической модели проводится ее численное исследование, позволяющее «проиграть» поведение исследуемого объекта в различных условиях или в различных модификациях [32].

Численное исследование модели дает возможность определять разнообразные характеристики процессов, оптимизировать конструкции или режимы функционирования проектируемых устройств. Более того, случается, что в ходе вычислительного эксперимента исследователь неожиданно открывает новые процессы и свойства, о которых ему ранее ничего не было известно.

Вычислительный эксперимент занимает промежуточное положение между натурным экспериментом и аналитическим исследованием.

Натурный (физический) эксперимент при надлежащей постановке может дать исчерпывающие и надежные результаты. И все же во многих случаях предпочтение отдается вычислительному эксперименту.

Дело в том, что в вычислительном эксперименте в роли опытной установки выступает не конкретное физическое устройство, а программа. Ее построение и последующие модификации, как правило, требуют существенно меньших затрат, чем подобные манипуляции над реальным объектом.

Кроме того, в опытной установке нередко просто невозможно бывает воссоздать некоторые критические режимы или экстремальные условия. Поэтому математическое моделирование может оказаться практически единственно возможным способом исследования.

При аналитическом подходе так же, как и в вычислительном эксперименте, строится математическая модель. Но исследуется эта модель исключительно посредством аналитических выкладок, без привлечения каких-либо численных методов. Если аналитических выкладок оказывается достаточно, то данный подход приводит к строгому точному решению.

Однако на практике, как это ни парадоксально, аналитическому подходу обычно отводится роль инструмента для получения (сравнительно быстрого) грубых оценок. Объясняется это тем, что аналитическими выкладками удается ограничиться только для несложных, сильно упрощенных моделей реальных процессов. Получаемое тут строгое аналитическое решение на самом деле в силу исходного огрубления модели оказывается весьма далеким от совершенства. Напротив, численные методы, применяемые в вычислительном эксперименте, дают возможность изучать более сложные модели, достаточно полно и точно отражающие исследуемые процессы.

Отмеченные достоинства вычислительного эксперимента вывели его в число основных методов исследования таких крупных физических и инженерно-технических проблем, как задачи ядерной энергетики, освоения космического пространства и др. Программные комплексы, обслуживающие вычислительный эксперимент, объемны и сложны, в их создание вовлечен многочисленный отряд программистов. Поэтому особую актуальность приобретает изучение возникающих здесь конфигурационных построений, которые, как будет видно из дальнейшего изложения, постоянно находятся в центре внимания участников такого рода разработок.

Цикл вычислительного эксперимента. В цикле вычислительного эксперимента можно выделить следующие этапы (рис. 4.1).

Рис. 4.1. Цикл вычислительного (имитационного) эксперимента

Этап 1. Построение математической модели (составление уравнений, описывающих исследуемое явление).

Этап 2. Выбор численных методов расчета (построение дискретной модели, аппроксимирующей исходную математическую задачу, построение разностной схемы, разработка вычислительного алгоритма и т. д.).

Этап 3. Создание программы, реализующей вычислительный алгоритм.

Этап 4. Проведение расчетов и обработка полученной информации.

Этап 5. Анализ результатов расчетов, сравнение (если это возможно) с натурным экспериментом.

4.5. Применение метода Монте-Карло к приближенному вычислению интегралов

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{4.11}$$

Введем в рассмотрение случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x) = 1 / (b - a)$. Тогда математическое ожидание

$$M[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx\,. \tag{4.12}$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x)dx = (b - a)M[\varphi(x)]\,. \tag{4.13}$$

Заменив математическое ожидание $M[\phi(x)]$ его оценкой – выборочной средней, получим оценку интеграла

$$I_1^* = (b - a)\frac{\sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i)}{N}, \tag{4.14}$$

где x_i – возможные значения случайной величины X;

N – число испытаний.

Так как случайная величина распределена равномерно в интервале (a, b) с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \tag{4.15}$$

то возможные значения x_i разыгрываются по формуле

$$\frac{1}{b-a}\int_a^{x_i} dx = r_i\,. \tag{4.16}$$

Отсюда $x_i = a + (b - a)r_i$, где r_i – случайное число.

Дисперсия усредняемой функции $\varphi(X)$ равна:

$$\sigma^2 = \int_a^b \varphi^2(x)f(x)dx - (M[\varphi(X)])^2. \tag{4.17}$$

Если точное значение дисперсии вычислить трудно или невозможно, то находят выборочную дисперсию (при $N > 30$):

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{N}\right)^2 \tag{4.18}$$

или исправленную дисперсию (при $N < 30$):

$$S = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{N} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N u_i\right)^2}{N}\right), \tag{4.19}$$

где $u_i = \varphi(x_i)$.

Эти формулы для вычисления дисперсии применяют и при других способах интегрирования, когда усредняемая функция не совпадает с подынтегральной функцией.

4.6. Методы понижения дисперсии при вычислении интегралов: выделение главной части, метод существенной выборки, метод расслоения выборки

Количество испытаний, необходимое для вычисления интеграла с заданной точностью, зависит от дисперсии случайной величины. Существуют различные приемы преобразования задачи, позволяющие уменьшить дисперсию и, следовательно, время вычислений. Если часть задачи можно решить аналитически, то, используя это частичное решение, обычно удается использовать метод Монте-Карло для решения всей задачи с меньшей дисперсией.

Выделение главной части. Если главную часть задачи можно вычислить аналитически, то, как правило, выгодно решать методом Монте-Карло не всю задачу, а рассчитывать только «поправку» − разницу между всей задачей и главной частью. Уменьшение дисперсии при этом может оказаться очень значительным.

Пусть требуется вычислить интеграл функции $\varphi(x)$. Введем в рассмотрение случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{b-a}. \tag{4.20}$$

Допустим, что найдена такая функция $g(x)$, которая мало отличается от $\varphi(x)$ и интеграл от которой можно вычислить, не прибегая к методу Монте-Карло. Тогда математическое ожидание функции

$$F(X) = (b-a)[\varphi(X) - g(X)] + \int_a^b g(x)dx \tag{4.21}$$

равно искомому интегралу I.

Действительно, учитывая, что величина X распределена в интервале интегрирования (a, b) равномерно с плотностью $\frac{1}{b-a}$, получим:

$$\begin{gathered} M[F(X)] = (b-a)\int_a^b [\varphi\,(X) - g(X)]\frac{1}{b-a}dx + \\ + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = I. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Таким образом, в качестве оценки математического ожидания $M[F(X)]$, а следовательно, и интеграла I, можно принять среднее арифметическое N значений функции $F(X)$:

$$I_4^* = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}[\varphi(x_i) - g(x_i)] + \int_a^b g(x)dx, \tag{4.23}$$

где x_i – возможные значения X, которые разыгрывают по формуле $x_i = (b-a)r_i$.

Метод существенной выборки. Этот метод предполагает, что большинство точек выбирается в той части области интегрирования Q, которая дает наибольший вклад в интеграл, что достигается специальным выбором вспомогательной плотности $f(p_r)$. Метод существенной выборки аналогичен по идее одноименному методу при моделировании случайных величин методом отбора. В обоих случаях надо удачно выбрать вспомогательную плотность. При моделировании такой выбор обеспечивает высокую эффективность отбора на втором шаге алгоритма. При вычислении интегралов удачный выбор вспомогательной плотности минимизирует дисперсию осредняемой случайной величины.

Пусть случайная величина Y определяется значениями $Z = f(z_b, ..., z_n)$ в области Q и плотностью $h(x)$. Кроме того, известно распределение $p(x)$. Тогда в силу равенства

$$a = \int_\Omega \left(\frac{f(x)p(x)}{h(x)}\right) h(x)dx \qquad (4.24)$$

несмещенной оценкой параметра a будет величина

$$\widehat{Z} = \frac{f(Y)p(Y)}{h(Y)}. \qquad (4.25)$$

Множитель $p(Y) / h(Y)$ называется *весом*, а данный метод – *методом взвешенного моделирования* или *методом значимой* (*существенной*) *выборки.* Случайная величина Y может не иметь определенного физического смысла: ее роль состоит в обеспечении нужных статистических свойств оценки. Если искомый показатель является вероятностью некоторого события, то при проведении моделирования используется следующая формула для расчета a:

$$a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_a(z)\frac{p(x)}{h(x)}, \qquad (4.26)$$

где вектор z имеет распределение с плотностью $h(x)$.

Дисперсия оценок, получаемых методом взвешенного моделирования, определяется как

$$D = \int_\Omega (\frac{f^2(x)p^2(x)}{h^{2(x)}dx} - a^2. \qquad (4.27)$$

Минимум дисперсии достигается при выборе плотности $h(x)$ в виде

$$h(x) = \frac{|f(x)|p(x)}{\int_\Omega |f(y)|p(y)dy}. \qquad (4.28)$$

В общем случае вычисление знаменателя является задачей, ради которой и используется ускоренное моделирование. Кроме того, при натурных испытаниях аналитическое представление D неизвестно (см. формулу (4.27)). Поэтому будем использовать приближенные методы определения плотности, близкой к оптимальной.

Таким образом, для вычисления вероятностного показателя a необходимо заданное число N раз генерировать случайный вектор z в соответствии с распределением $h(x)$ и каждый раз осуществлять расчет весового коэффициента. Основной смысл введения новой функции заключается в том, что сбои в устройствах генерируются с большей интенсивностью, а помехи – с большей вероятностью, так чтобы увеличить количество реализаций интересующих нас редких событий.

Метод расслоения выборки. Допустим, что мы умеем аналитически вычислить интегралы по некоторой части области G. Тогда, выгодно представить интеграл в виде суммы интегралов по областям B и $G–B$, и методом Монте-Карло вычислить только интеграл по области $G–B$. Чем область B больше, тем заметнее будет понижение дисперсии.

Если аналитически взять интеграл по некоторым из переменных, а по остальным переменным использовать тот же метод Монте-Карло, то дисперсия уменьшится. Правда, нередко бывает, что после интегрирования по некоторым из переменных получаются более сложные формулы счета и, несмотря на уменьшение дисперсии, трудоемкость расчетов возрастает.

Несмотря на то, что асимптотика убывания остатка для метода Монте-Карло не зависит от размерности интеграла, ее порядок дает достаточно медленную сходимость. Так, для увеличения точности интегрирования на один порядок необходимо увеличить количество вычислений подынтегральной функции f на два порядка, что далеко не всегда приемлемо. Существует целый спектр методов понижения дисперсии, каждый из которых ставит своей целью ускорить убывание остатка. Одним из наиболее известных таких методов является расслоение (расслоенная выборка, stratified sampling).

Рассмотрим разбиение U_s на d непересекающихся областей V_1, ..., V_d, покрывающих весь гиперкуб U_s. Для каждой из этих областей проведем стандартное интегрирование методом Монте-Карло с использованием n_1, ..., n_d точек соответственно, так что общее количество точек по-прежнему равно n: $n_1 + ... + n_d = n$. Обозначим точки, принадлежащие V_j, x_{j1}, ..., x_{jnj}, и тогда общая оценка интеграла I будет выглядеть следующим образом:

$$S_n^{strat} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_s(V_j)}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} f(x_{ji}). \tag{4.29}$$

В этом случае дисперсия оценки из σ_f^2/n превращается в

$$Var(S_n^{strat}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_s^2(V_j)}{n_j} \sigma_{f,\,V_j}^2, \tag{4.30}$$

где

$$\sigma_{f,\,V_j}^2 = \frac{1}{\lambda_s(V_j)} \int_{V_j} f^2(x)dx - \frac{1}{\lambda_s^2(V_j)} (\int_{V_j} f(x)dx)^2. \tag{4.31}$$

Степень уменьшения получившейся дисперсии зависит от разбиения и количества точек $n_1, ..., n_d$ в каждом из $V_1, ..., V_d$.

4.7. Решение дифференциальных, интегральных и линейных алгебраических уравнений методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло для решений систем дифференциальных, интегральных и линейных алгебраических уравнений рекомендуется использовать в том случае, если их порядок достаточно велик. С помощью метода Монте-Карло вычисляется одна компонента вектора решения или скалярное произведение вектора решения и произвольного вектора. Алгоритмы Монте-Карло позволяют получать итерационное решение системы линейных уравнений при условиях более слабых, чем условия обычного метода Монте-Карло [14].

Особенность построения случайного вектора заключается в том, что математическое ожидание очередной итерации совпадает с итерацией Зейделя. Рассмотрим метод, применимый к решению системы линейных алгебраических уравнений общего вида:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \tag{4.32}$$

где $i = 1, \ldots, n$ – количество уравнений вида i с известными величинами b_i и коэффициентами при переменных a_{ij};

j – число переменных x_j вида j, $j = 1, \ldots, m$.

Решение системы равносильно минимизации квадратичной формы $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i \right)^2, \tag{4.33}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторые положительные константы.

Учитывая квадратичную форму, определим n-мерный эллипсоид:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le C. \tag{4.34}$$

Пусть V – вектор решения системы уравнений, тогда очевидно, что вектор $\bar{x}$ является центром симметрии эллипсоида. Это означает, что каждая из гиперплоскостей, проходящая через центр эллипсоида, делит его объем пополам. По этой причине решение системы сводится к нахождению таких значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что объемы частей эллипсоида, лежащих в полупространствах, совпадают и равняются половине объема эллипсоида.

Метод Монте-Карло для интегральных уравнений и для больших систем линейных алгебраических уравнений достаточно подробно описан в литературе. Иным образом дело обстоит с задачами Коши для больших систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с тем даже некоторые классы линейных систем представляют собой значительный интерес для приложения. В качестве примера можно привести задачи массового обслуживания, которые могут описываться системами с очень большим, или даже бесконечным, числом уравнений. В простейшем случае пуассоновских систем легко получить результат при $t \to \infty$, а для переходного режима записать решение в аналитической форме. Для многих задач удобно использовать прямое имитационное моделирование. Во всех случаях, однако, есть задачи, для которых перечисленные методы очень трудоемки и практически неприменимы. Так, для переходного режима уже в простейшем случае решение выражается бесконечными рядами значений бесцелевых функций, а имитационное моделирование в задачах вычисления малых вероятностей может оказаться непомерно трудоемким.

Этих соображений достаточно, чтобы рассмотреть отличные от имитационных методы Монте-Карло для решения систем

$$d / dtY(t) = A(t)Y(t) + F(t),\ Y(0) = Y^0; \tag{4.35}$$

$$A(t) = \left\|a_{ij}(t)\right\|_{ij=1}^{n},\ Y(t) = \left\|y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\right\|^{T},\ F(t) = \left\|f_1(t), \ldots, f_n(t)\right\|^{T} \tag{4.36}$$

для значений t из промежутка $[0, T]$.

Элементы матрицы $A(t)$ и вектора $\widetilde{F}(t)$ будем предполагать ограниченными функциями t на вещественной оси. Отсюда следует выполнение условий Липшица для правой части и, следовательно, существование и единственность решения на любом конечном промежутке $[0, T]$.

Тогда систему уравнений можем переписать в форме

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t F(t)dt + \int_0^t A(t)Y(t)dt \qquad (4.37)$$

или

$$Y(t) = \int_0^T A(\theta)E(t-\theta)Y(\theta)d\theta + \widetilde{F}(t), \qquad (4.38)$$

где

$$\widetilde{F}_t = Y_0 + \int_0^t F(t)dt, \qquad (4.39)$$

$$aE(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ 1, \text{ если } x \ge 0 \end{cases}, \quad t \in [0, T]. \qquad (4.40)$$

По аналогии можно выбрать цепь Маркова, удовлетворяющую условиям согласования:

$$\begin{gathered} p^0(i, t) > 0, \text{ если } h_i(t) = 06; \\ g(i, t) > 0, \text{ если } f_j(t) = 06; \\ p(i, t; j, \theta) > 0, \text{ если } a_{ij}(\theta) = 06. \end{gathered} \qquad (4.41)$$

Метод Монте-Карло находит широкое применение в практике решения вычислительных задач, в том числе при решении интегральных уравнений. В то же время не все возможности данного метода используются полностью. Так, при решении интегральных уравнений преимущественно используется вариант этого метода, основанный на суммировании резольвенты и использовании цепей Маркова. Это обстоятельство значительно сужает класс решаемых задач, так как требуется ограничение нормы интегрального оператора единицей.

Контрольные вопросы

1. Общая схема метода Монте-Карло.
2. Вычисление определенного интеграла методом Монте-Карло.
3. Методы понижения дисперсии при вычислении интегралов.
4. Решение интегральных и линейных алгебраических уравнений методом Монте-Карло.

5. ИМИТАЦИОННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Модели общего экономического равновесия

Рассмотрим общую модель экономики с производством и частной собственностью, берущую свое начало от Вальраса и получившую развитие в более поздних исследованиях [31].

Экономическая структура общества предполагается состоящей из двух секторов: производственного сектора и сектора потребления. Сектор потребления можно представить как совокупность всех индивидуумов, составляющих общество, а также учреждений, не участвующих непосредственно в производстве. Производственный сектор состоит из отдельных отраслей, выступающих в качестве производителей. Один и тот же объект может фигурировать и как производитель, и как потребитель [43].

Товары также имеют двоякий характер. Одна группа товаров, которые мы будем называть продуктами производства, характеризуется тем, что каждый из них может быть произведен в производственном секторе: металл, машины, электроэнергия и т. д. Другая группа товаров, называемая первичными факторами, состоит из таких товаров, которые производственным сектором не выпускаются: труд, земля и т. п.

Первичные факторы являются собственностью потребителей, которые их продают с целью приобретения продуктов производства.

Потребитель, находясь в рамках бюджетных ограничений, старается получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента товаров.

Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных продуктов и затрат на приобретение первичных факторов и других продуктов на осуществление производства.

Итак, мы предполагаем, что каждый из участников экономики максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях, причем и целевая функция, и ограничения зависят от цен на товары и первичные факторы в нашей системе. Более того, предполагается, что каждый участник экономики пассивно приемлет существующую систему цен, не пытаясь на нее влиять (что, вообще говоря, не выполняется при наличии, например, монополий).

Цены на продукты и первичные факторы называются равновесными, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый продукт и фактор не превосходит его предложения.

Основной вопрос в общей модели экономики – существуют ли равновесные цены – ждал своего решения более полувека, и ответ на него был получен лишь в последние 40 лет. Ниже мы изложим на формальном языке модель Вальраса и рассмотрим две ее разновидности при различных ограничениях на составные компоненты модели. Первая из них, предложенная Касселем, близка к модели, рассмотренной Вальдом. Вторая, наиболее известная в настоящее время, – это модель Эрроу – Дебре. Для них мы докажем существование равновесия.

Для описания экономической деятельности участников экономики определяется пространство товаров $R^n = (x_1, ..., x_n) \mid x_i > 0$, в котором по i-й оси откладывается количество i-го из имеющихся товаров (предполагается, что для каждого товара выбрана некоторая единица измерения его количества). Элементы пространства товаров называются потребительскими наборами.

Далее, для каждого потребителя мы рассматриваем множество $X_i \subset \mathbb{R}_+^n$ всех потребительских наборов, доступных данному потребителю и пригодных для него. Это множество X_i мы называем множеством потребления или потребительским множеством. На потребительском множестве мы определяем функцию полезности, выражающую предпочтение потребителя одного потребительского набора перед другим: чем больше значение функции полезности, тем выше предпочтение потребителя данного потребительского набора. Кроме того, у каждого потребителя предполагается некоторый доход, выражающийся в наличии у потребителя капитала $K_i(p)$, зависящего, вообще говоря, от сложившейся системы цен. Мы будем предполагать, что функция дохода складывается из двух компонент: от продажи потребителем начального запаса товаров b_i, стоимость которого равна pb (при ценах p), и некоторого дохода $I_i(p)$, возникающего, например, в результате участия потребителя в доходах производственного сектора.

Таким образом, имеем:

$$K_i(p) = pb_i + I_i(p). \qquad (5.1)$$

По потребительскому множеству $X_i \subset \mathbb{R}_+^n$, функции полезности $u_i(x)$ и функции дохода $K_i(p)$ строится многозначное отображение, называемое функцией спроса $\Phi_i(p)$, следующим образом. Обозначим через $B_i(p)$ бюджетное множество $\{x \in X_i \mid pxK_i(p)\}$, т. е. множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p.

Тогда

$$\Phi_i(P) = \left\{ x \in B_i(p) \,\middle|\, u_i(x) = \max_{x' \in B_i(p)} u_i(x') \right\}. \qquad (5.2)$$

Иными словами, $\Phi(p)$ – это подмножество потребительского множества X, состоящее из всех товарных наборов, которые наиболее подходят потребителю при заданных бюджетных ограничениях.

Итак, будем считать, что в нашей модели имеется l потребителей, причем i-й потребитель характеризуется:

- своим потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$;

- функцией дохода $K_i(p) = pb_i + I_i(p)$, зависящей от системы цен $p \in R^n$ на имеющиеся товары и складывающейся из доходов от продажи начального запаса товаров b_i и дохода $I_i(p)$ от участия в доходах производственного сектора;

- функцией полезности $u_i(p)$: $X \to -R$.

Рассмотрим теперь структуру производства. Прежде всего, каждое производство характеризуется своим технологическим множеством $Y_i \subset R^n$, т. е. множеством тех товаров, которые оно может произвести, за вычетом потребляемых при этом товаров (множеством производственных планов). Далее, построим по множеству Y многозначное отображение, называемое функцией предложения $\Psi(p)$, из пространства цен в пространство товаров:

$$\Psi_i(p) = \left\{ y \in Y \,\middle|\, py = \max_{y' \in Y} py' \right\}. \qquad (5.3)$$

Равновесие – это набор (p^*, x^*_i, y_j^*), *где* $p^* \notin \mathbb{R}^n_+$ *– положительный вектор равновесных цен,* $x^*_i \in X_i$ *– потребительский набор i-го потребителя,* $y_j^* \in Y_j$ *– некоторый технологический вектор j-го производителя, с условиями:*

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*); \qquad (5.4)$$

$$y_j^* \in \Psi_j(p^*); \qquad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \text{ – \textit{спрос не превышает предложение;}} \qquad (5.6)$$

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle = \left\langle p^*, \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle \text{ – \textit{закон Вальраса.}} \qquad (5.7)$$

Если посмотреть на определение функции предложения $\Psi_i(p) = \{y \in Y py = \max_{y' \in Y} py'\}$, то можно заметить, что эта функция линейна и одинакова для всех производителей.

Рассмотрим $Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ – совокупное технологическое множество. Элементом такого множества является $y = \sum_{j=1}^{m} y_j$, $y_j \in Y_j$. Тогда если заменить всех производителей одним, то модель не поменяется.

Обозначим $\Psi_0(p) = \sum_{j=1}^{m} \Psi_j(p)$ – совокупное предложение производственного сектора.

$$\Psi'_0(p) = \left\{ y \in Y \middle| py = \max_{y' \in Y} py' \right\}. \tag{5.8}$$

5.2. Модель Клейна

После Второй мировой войны Лоуренс Клейн и Артур Голдберг разработали эконометрическую модель США, ставшую образцом для последующих моделей вплоть до настоящего времени. Модель состоит из 20 уравнений, 15 из которых отражают экономическое поведение и носят стохастический характер, а 5 – это тождества [26, с. 56–63].

Клейн сформулировал следующие направления, в которых необходимо было развить кейнсианскую модель, чтобы она адекватно отражала функционирование экономической системы:

- в модель следует явным образом включить общественный (государственный) сектор, решения в котором в значительной мере принимаются экзогенно;
- следует включить в модель внешнюю торговлю (экспорт и импорт);
- модели необходимо придать динамический характер;
- модель должна стать более дезагрегированной, в ней следует выделить по крайней мере 10 производственных секторов.

Идеи Клейна, прекрасно работавшие в 50-е и 60-е гг. прошлого века, дали сбой в 1970-е гг. Как известно, в этот период сошлось несколько факторов: окончание послевоенного цикла экономического развития, когда экономика росла с самыми высокими в наблюдаемой истории темпами; эмбарго на поставку нефти в США и Западную Европу, объявленное арабскими нефтедобывающими странами в ответ на поддержку Израиля в войне Судного дня. Возникла комбинация стагнации и высокой инфляции, которую назвали стагфляцией.

Модель Клейна и другие модели, развивавшие идеи, заложенные в ней, не смогли спрогнозировать изменения в экономике, вызванные внешними шоками и изменениями в экономической политике государств.

В 1976 г. Роберт Лукас опубликовал статью «Эконометрическая оценка политики: критика», в которой вступил в полемику с Л. Клейном и его последователями.

Критика Лукаса сводилась к тому, что, во-первых, параметры, описывающие экономическую систему и считающиеся неизменными, могут меняться даже в течение коротких промежутков времени. Во-вторых, модели не учитывают возможных реакций экономических агентов на такие изменения. И, в-третьих, модели не учитывают ожидания экономических агентов изменения параметров системы.

Следующее утверждение Лукаса можно считать центральным моментом его концепции: «Очевидно, что способ, которым, как можно ожидать, осуществиться эта последняя модификация (изменение параметров системы), решающим образом зависит от способа, которым осуществляется политика». А именно, реакция агентов экономики на меры экономической политики зависит от того, насколько эта политика прозрачна, заранее анонсирована и разъяснена обществу и насколько общество имеет основания доверять обещаниям правительства. «Разработчики политики, если они хотят прогнозировать реакцию граждан, должны связывать эту реакцию со степенью доверия граждан к проводимой политике». Непрозрачная, неразъясненная или не вызывающая доверия политика правительства ведет к непредсказуемым изменениям в реакции агентов экономики и, следовательно, делает невозможным прогнозирование, основанное на эконометрических моделях.

Современное экономическое моделирование и прогнозирование продвинулось далеко вперед и использует все более совершенный математический аппарат. В модели уже научились включать ожидания экономических агентов. И, в принципе, современные прогнозы являются довольно точными. Правда, такие шоки, как пандемия и карантинные ограничения, они предвидеть еще не могут.

Рассмотрим задачу прогнозирования региональной экономики на основе функции инвестиций: построения имитационной модели Клейна. В качестве результативной переменной, характеризующей развитие экономики региона, принят валовой региональный продукт (ВРП). При этом к факторным переменным можно отнести достаточно большое количество статистических показателей, которые прямо или косвенно оказывают влияние на итоговый результативный показатель (ВРП). Спектр таких факторов очень широк, поэтому при выборе факторных переменных целесообразно использовать существующие методики выбора, сбора необходимой информации и методы ее обработки. Предварительно определен набор подобных факторов с опорой на методологии официальной статистики и региональной экономики. В числе показателей, одновременно изменяющихся во времени, как в модели Л. Р. Клейна, использованы такие показатели региональной экономики, как инвестиции в основной капитал, фактическое потребление домашних хозяйств, стоимость основных производственных фондов, расходы на общегосударственные нужды, оплата труда наемных работников, уровень инфляции и т. д. Другими словами, выбор модели Л. Р. Клейна в качестве инструмента анализа региональной экономики позволяет одновременно следить за изменением сразу нескольких основных показателей, характеризующих экономику региона.

На основе таких показателей, рассчитанных за последние несколько лет с использованием эконометрического подхода, можно дать более адекватную оценку состоянию и развитию экономики региона. Для этого из большинства предложенных показателей с помощью корреляционного анализа следует выделить только те, которые имеют наиболее тесную связь и оказывают сильное влияние на такой результативный показатель, как валовой региональный продукт.

При построении системы одновременных уравнений, характеризующей связь валового регионального продукта с совокупностью основных региональных показателей, могут быть использованы аналитические данные государственной статистики и пакет прикладных программ статистического анализа *Statistica*.

На первом этапе нами проводится содержательный анализ факторов, включаемых в модель, для того чтобы оценить их влияние на такой ключевой показатель, как валовой региональный продукт. Предварительный отбор факторных (объясняющих) признаков производится с учетом экономической сущности результативного показателя. На основе рекомендаций для отбора факторов при включении их в модель проводится отсев тех из них, которые не отвечают необходимым требованиям.

В качестве управляющих переменных модели приняты следующие переменные:

W_{2t} – среднемесячная заработная плата работников в органах местного самоуправления на t-м отрезке времени, руб.;

G_t – расходы на общегосударственные вопросы на t-м отрезке времени, млн. руб.;

TX_Proizv_t – другие чистые налоги на производство на t-м отрезке времени, млн. руб.

В качестве эндогенных переменных модели были взяты следующие переменные:

C_t – фактическое потребление домашних хозяйств на t-м отрезке времени, млн. руб.;

I_t – инвестиции в основной капитал на t-м отрезке времени, млн. руб.;

W_1Naem_t – оплата труда наемных работников на t-м отрезке времени, млн. руб.;

Y_t – валовой региональный продукт (в основных текущих ценах), млн. руб.;

K_t – наличие основных фондов на конец года по полной учетной стоимости по полному кругу организаций, млн. руб.;

$П_t$ – валовая прибыль экономики и валовые смешанные доходы на t-м отрезке времени, млн. руб.

К экзогенным переменным модели относятся: W_{2t}, G_t, K_{t-1}, TX_Proizv_t, Y_{t-1}, C_{t-1}, $П_{t-1}$, W_1Naem_{t-1}.

$$C_t = a_1 + a_2W_{2t} + a_3K_t + a_4C_{t-1} + a_5Y_t + a_6TX\_Proizv_t + \mu_1 t; \tag{5.9}$$

$$I_t = b_1 + b_2П_t + b_3Y_t + b_4K_t + \mu_2 t; \tag{5.10}$$

$$Y_t = d_1 + d_2C_t + d_3I_t + d_4K_t + d_5TX\_Proizv_t + d_6Y_{t-1} + \mu_4 t; \tag{5.11}$$

$$W_1Naem_t = c_1 + c_2Y_t + c_3П_{t-1} + c_4W_1Naem_{t-1} + c_5G_t + \mu_3 t; \tag{5.12}$$

$$K_t = e_1 + e_2I_t + e_3K_{t-1} + \mu_5 t; \tag{5.13}$$

$$П_t = Y_t - TX\_Proizv_t - W_1Naem_t. \tag{5.14}$$

Пользуясь необходимым условием идентифицируемости, получим, что все шесть уравнений структурной формы модели являются сверхидентифицируемыми. Поэтому коэффициенты уравнений структурной формы модели могут быть оценены двухшаговым методом наименьших квадратов.

5.3. Модели экономических циклов неоклассического и кейнсианского типов

Важным фактором экономической динамики является цикличность, которая выражается в периодическом прерывании экономического роста спадом, в неравномерности функционирования различных элементов национальной экономики, смене революционных и эволюционных стадий ее развития [4].

История развития экономики показывает ее нелинейное, циклическое развитие. Циклические колебания необходимо отличать от тренда, выражающего долговременную тенденцию экономического развития и определяемого фундаментальными структурными параметрами экономической системы. Циклическая компонента представляет собой отклонение от тренда под воздействием различных макроэкономических шоков (импульсов). Для выделения тренда и отклонений фактических результатов от тренда проводится декомпозиция временного ряда, содержащего значения реального ВВП. Стандартные приемы декомпозиции излагаются в курсе эконометрики и имитационного моделирования.

Природа цикличного развития экономики является дискуссионной. Принято выделять экзогенные шоки, механизм возникновения и распространения которых более или менее ясен, и эндогенные шоки, в происхождении и распространении которых определенных ясностей нет. Все шоки подразделяются на три группы:

1) шоки в совокупном спросе, выражающие изменения в инвестиционных и потребительских расходах (неокейнсианская теория) и изменения в предложении денег (новая классическая теория);

2) шоки совокупного предложения, связанные с технологическими сдвигами, открытиями новых источников сырья, изменениями номинальной заработной платы и мировых цен на сырье, природными катаклизмами (теории реального бизнес-цикла);

3) политические шоки, являющиеся результатом решений политических институтов, которые воздействуют на совокупный спрос и совокупное предложение (теория политических бизнес-циклов).

Направление и степень изменения показателей, характеризующих экономическую динамику, называется экономической конъюнктурой, а промежуток времени между двумя одинаковыми состояниями экономической конъюнктуры – деловым циклом. Циклы характеризуются длительностью, фазами, повторяемостью и однонаправленностью.

Исходя из критерия длительности, т. е. интервала времени между двумя одинаковыми состояниями экономики, принято выделять следующие циклы:

- аграрные циклы (до одного года);
- циклы товарно-материальных запасов Д. Китчина (2–4 года);
- деловые циклы К. Жюгляра (7–10 лет);
- строительные (инвестиционные) циклы С. Кузнеца (15–25 лет);
- длительные конъюнктурные циклы Н. Кондратьева (50–60 лет);
- формационные циклы М. Эванса (110 лет);
- политические циклы Дж. Модельского (90–120 лет);
- вековые волны Ф. Броделя (100–150 лет);
- цивилизационные циклы Дж. Форрестера (200 лет);
- циклы эпохи Э. Тоффлера (1000–2000 лет).

Динамическая модель Кейнса рассматривает валовой внутренний продукт (ВВП) как эндогенную переменную, которая изменяется со временем. ВВП состоит из четырех частей: потребления C; валовых отдельных внутренних инвестиций I; государственных расходов на закупку товаров и услуг G; чистого экспорта E. В этой модели экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равняется нулю, а государственные расходы распределяются на потребление и накопление:

$$Y = C + I. \tag{5.15}$$

Предполагается, что спрос на инвестиционные товары постоянный, а спрос на потребительские товары в следующем году является линейной функцией от ВВП текущего года:

$$C^D_{t+1} = \overline{C} + cY_t, \tag{5.16}$$

где $\overline{C}$ – минимальный объем фонда потребления;

c – нижняя граница фонда непроизводственного потребления или предельная склонность к потреблению, $0 < c < 1$.

В динамической модели Кейнса запланированный выпуск товаров конечного использования приравнивают к прогнозируемому спросу на них:

$$Y_{t+1} = \overline{c} + cY_t + I. \tag{5.17}$$

Эту модель можно применять лишь для анализа и краткосрочного прогнозирования поведения экономики. Она непригодна для долгосрочного прогнозирования, поскольку не отображает процесса воспроизведения, в частности, в ней не учтено убытие фондов из-за их физического и морального износа.

Основной идеей *неоклассического направления* является оптимальность рыночной системы, рассматриваемой как совершенный саморегулирующийся механизм, позволяющий наилучшим образом использовать все факторы производства не только отдельному субъекту экономики, но и экономике в целом.

Американцы Чарльз Кобб и Пол Дуглас в 1920-е гг. разработали многофакторную модель экономического роста, получившую название производственной функции или модели Кобба – Дугласа. Она показывает, что объем совокупного продукта при данном уровне технологий зависит от двух факторов: капитала и трудовых ресурсов:

$$Y = F(K, L), \tag{5.18}$$

где Y – объем совокупного продукта;

K – капитал;

L – трудовые ресурсы.

В последующем производственная функция была усовершенствована. В частности, при ее расчете предлагалось учитывать фактор времени, поскольку уровень технологий постоянно повышается. Впервые расчет производственной функции с учетом фактора времени осуществил Ян Тинберген. В результате производственная функция приняла следующий вид:

$$Y(t) = A(t)F\left(K^{\alpha}(t), L^{\beta}(t), N^{t}(t)\right), \tag{5.19}$$

где $Y(t)$ – объем производства за период времени t;

$A(t)$ – коэффициент, отражающий развитие научно-технического прогресса за период времени t;

$K^{\alpha}(t), L^{\beta}(t), N^{t}(t)$ – затраты соответственно капитала, труда, природных ресурсов за период времени t;

α, β, t – коэффициенты эластичности производства соответственно по капиталу, труду, природным ресурсам. Они показывают, как возрастает объем производства, вызванный приростом на 1 % соответствующих факторов экономического роста.

Простая *односекторная модель экономической динамики Роберта Солоу* показывает, что научно-технический прогресс является ведущим элементом экономического роста. Данная модель была разработана Р. Солоу в 1950-е гг. Исследование роли НТП имело большое значение, так как привлекло всеобщее внимание к нематериальным факторам экономического роста. По мере того как в развитых странах наука и образование становились одним из приоритетов направлений долгосрочной государственной политики, затраты на НИОКР включались в производственную функцию. Какой-либо прирост ВВП, не обусловленный краткосрочными изменениями затрат труда или капитала, в экономической теории принято относить к *«остатку Солоу»*. По расчетам экономистов, на этот остаток приходится 50 % прироста ВВП в развитых странах, который является результатом действия такого экзогенного фактора, как НТП.

Р. Солоу в своей модели рассматривает равновесный экономический рост, который характеризуется равномерным увеличением эндогенных макроэкономических параметров. Вместе с тем разработанная им модель позволяет проанализировать и оптимальный равновесный рост, для которого характерен максимально возможный уровень потребления. Норма накопления капитала, обеспечивающая равновесный экономический рост с максимальным уровнем потребления, называется *оптимальной нормой* или *золотой нормой накопления капитала.* Норма накопления определяется согласно золотому правилу накопления Э. Фелпса.

Содержание *золотого правила Э. Фелпса* состоит в том, что каждое поколение должно сберегать для будущих поколений такую долю дохода, которую оно получило от предыдущих, т. е. ставка процента должна быть равна темпу роста населения.

В послевоенный период наблюдалась эволюция неоклассических теорий экономического роста. К выводу, что решающим фактором экономического роста является НТП, пришел не только Р. Солоу, но и другие ученые. В частности, американский экономист Э. Денисон разработал классификацию факторов экономического роста, включающую 23 позиции. Он сделал вывод о том, что экономический рост в современных условиях определяется не столько количеством затраченных факторов производства, сколько ростом их качества, и прежде всего повышением качества рабочей силы.

Одной из важнейших моделей экономического роста является модель межотраслевого баланса В. Леонтьева. Использование метода «затраты – выпуск» межотраслевого баланса позволяет не только изучить взаимозависимость между различными отраслями экономики, проявляющуюся во взаимовлиянии цен, объемов производства, капиталовложений и доходов, но и осуществить прогнозирование развития экономики страны. Например, задавшись ростом одного или группы продуктов, можно определить масштабы роста остальных отраслей экономики страны, а тем самым и темпы экономического роста, его отраслевую структуру.

5.4. Модель Самуэльсона – Хикса (модель аппликатора и акселератора)

В различных направлениях проводятся теоретические исследования в области экономической динамики. Все динамические макромодели, как аналитические, так и допускающие лишь количественные исследования, можно условно разделить на две группы. К первой относятся модели экономического роста, ко второй – модели экономического цикла или, в более широком смысле, экономических колебаний [2].

Изучением экономических циклов занимались такие выдающиеся экономисты, как Самуэльсон Пол (труды по проблемам моделирования экономического цикла, экономико-математическим методам измерения полезности и др.), лауреат Нобелевской премии (1970), Джон Хикс (труды в области моделирования экономического роста, теории спроса, цен), лауреат Нобелевской премии (1972).

Мультипликатор – это коэффициент, выражающий соотношение между приростом дохода и вызывающим этот прирост увеличением объема инвестиций. Он показывает зависимость прироста национального дохода от прироста инвестиций. Мультипликатор увеличивается в том случае, когда потребители склонны использовать прирост их доходов для наращивания потребления. Напротив, он уменьшается, если усиливается склонность потребителей к накапливанию сбережений.

Рост частных инвестиций будет вызывать увеличение дохода, а сокращение инвестиций – его уменьшение, потому что инвестиции – это часть чистого национального продукта; если стоимость одной части возрастает, то мы должны предположить рост стоимости целого. Инвестируемые капиталовложения – как любые капиталовложения из независимых расходов государства или семьи – это капиталовложения повышенной мощности, выполняющие двойную полезную работу.

Математически мультипликатор в наиболее общем виде выглядит следующим образом:

$$k\Delta I = \Delta Y, \tag{5.20}$$

где k – коэффициент мультипликации;

ΔI – изменение инвестиций;

ΔY – изменение дохода.

Сущность *принципа акселерации* заключается в следующем: возросший доход, полученный в результате возрастания первоначальных инвестиций, вызывает рост спроса на потребительские товары. Отрасли, производящие потребительские товары, начинают расширяться, а это, в свою очередь, приводит к росту спроса на товары производственного назначения, т. е. на средства производства. Причем изменения в спросе на потребительские товары вызывают гораздо более резкие изменения в спросе на товары производственного назначения. Это связано со специфическими особенностями воспроизводства основного капитала. Последний требует единовременных крупных затрат, которые возмещаются постепенно в течение длительного периода. Поэтому в случае необходимости расширения существующих или строительства новых предприятий затраты на создание нового основного капитала превосходят стоимость выпускаемой продукции. Отсюда следует, что принцип акселерации показывает, как в силу цепной зависимости между отраслями изменения в спросе на потребительские товары вызывают более сильные изменения в производстве средств производства, или капитальных товаров.

Математически принцип акселерации в наиболее общей форме выглядит следующим образом:

$$I = \eta(Y_t - Y_{t-1}), \tag{5.21}$$

где I – индуцированные инвестиции;

Y_t – доход в период t;

Y_{t-1} – доход в предшествующий ему период;

η – коэффициент акселерации.

Математически принцип мультипликатора-акселератора можно записать в виде:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \tag{5.22}$$

где Y_t – национальный доход;

C_t – объем потребления;

I_t – индуцированные чистые инвестиции в частном секторе;

G_t – автономные инвестиции (государственные расходы);

t – индексы дискретного периода времени.

Кроме того, считаются выполненными соотношения:

$$C_t = kY_{t-1}; \tag{5.23}$$

$$I_t = \eta(C_t - C_{t-1}); \tag{5.24}$$

$$G_t = \text{const}, \tag{5.25}$$

где k – коэффициент мультипликации;

η – коэффициент акселерации.

Запаздывание, равное одному периоду, одновременно присутствует в процессах мультипликации и акселерации, которые описываются вышеприведенными линейными зависимостями.

Эффект мультипликатора-акселератора показывает механизм самоподдерживающихся циклических колебаний экономической системы.

Рост инвестиций на определенную величину может увеличить национальный доход на многократно большую величину вследствие эффекта мультипликатора. Возросший доход, в свою очередь, вызовет в будущем опережающий рост инвестиций вследствие действия акселератора. Эти производные инвестиции, являясь элементом совокупного спроса, порождают очередной мультипликационный эффект, который снова увеличит доход, побуждая тем самым предпринимателей к новым инвестициям. Но не будем забывать, что как и эффект мультипликатора может действовать «в обратную сторону», так и эффект акселератора-мультипликатора может вызывать многократно большее снижение инвестиций, нежели изменение дохода (реального ВВП).

Таким образом, взаимодействие мультипликатора и акселератора порождает непрерывный и прогрессирующий рост выпуска продукции или дохода.

5.5. Имитационные модели в агропромышленном производстве

На экономические и производственные итоги деятельности предприятия или организации агропромышленного производства оказывает влияние большое количество различных факторов, в связи с чем переработка возрастающего объема информации, оперативное решение производственных задач, планирование селекционных мероприятий не могут быть реализованы без использования средств современной вычислительной техники и соответствующих программ [7, с. 18–23; 8, с. 206–210; 18, с. 100–112].

Для совершенствования организации агропромышленного производства большое значение имеет выбор наиболее рационального оборота и структуры стада крупного рогатого скота. От того, какова структура стада, непосредственно зависят темпы расширенного воспроизводства на фермах, объем производимой и реализуемой продукции, себестоимость продукции, уровень прибыли и рентабельности хозяйства. Ввиду того, что структуру стада определяет множество факторов, возникает многовариантная задача, решение которой можно осуществить путем использования методов математического программирования. Процессы, происходящие в молочном животноводстве, носят линейный характер, поэтому оптимальное решение задач по планированию достигается с использованием имитационных моделей [22].

Модель стада имитирует реальные процессы и адаптируется к биологическим, селекционным, технологическим и хозяйственным условиям разведения животных. При разработке моделей были приняты исходные положения:

- цикличность изменений и временной шаг модели – 1 месяц;
- в стаде выделено три возрастные группы коров – первого, второго и третьего отелов и старше;
- внутри групп животные подразделяются по фазам репродуктивного цикла (нестельные коровы с 1-го по j-й месяц лактации, стельные коровы с 1-го по 9-й месяц лактации, сухостойные коровы);
- исходное состояние стада фиксируется в виде начального фазового «портрета» на момент начала разработки модели;
- фазовые переводы и выбытия (кроме селекционного брака) осуществляются в модели по коэффициентам, являющимся функциями номера лактации и номера месяца от начала фазы (от 0 до 1);
- селекционная выбраковка производится с учетом вынужденной браковки, ввода первотелок в стадо, выбытие животных – из числа нестельных коров;
- плодотворное осеменение – на 3-м месяце после отела, средняя продолжительность лактации – 10 месяцев;
- рост продуктивности – при условии полноценного кормления, структура рационов изменяется по фазам лактации и с учетом физиологического состояния коров.

С использованием алгоритмов, учитывающих взаимосвязи переменных факторов, определяющих структуру стада, оценены различные варианты его ремонта в зависимости от планируемого уровня продуктивности. Моделирование разных темпов увеличения среднего надоя на фуражную корову (+1…+3 %) при разных уровнях общей браковки животных (20–30 %), включая селекционные причины (20–40 %), позволило определить нормативы превосходства первотелок, вводимых в стадо, над выбракованными коровами. Уровень надоя вводимых первотелок в результате модельных расчетов находится в определенном соотношении с продуктивностью выбракованных коров. Меняется он в зависимости от величины планируемого увеличения продуктивности стада и структуры выбраковки коров.

Путем имитации условий комплектования племенных и товарных стад – моделированием их селекционной структуры по размеру племядра, нормативу браковки, количеству и уровню продуктивности вводимых в стадо первотелок – могут быть разработаны оптимальные варианты ремонта стад (модели стада), ориентированные на достижение максимального увеличения надоя за поколение и средний уровень годового от 5000 до 8500 кг молока от коровы.

Для товарных стад при планируемом надое 7000 кг селекционная структура модельного стада следующая: выход телят – 83 %, удельный вес племядра – 75 %, ввод первотелок в стадо – 27 % с последующей браковкой 9 и 18 % коров второго отела и старше, фенотипический тренд по надою – на уровне 150 кг.

Принципы моделирования оптимальной структуры молочных стад универсальны и могут быть применены при решении аналогичных задач в хозяйствах, занимающихся разведением молочного скота. Использование таких моделей позволит автоматизировать планирование оборота стада, прогнозировать уровень потенциальной продуктивности, научно обосновать селекционно-технологические варианты его оптимальной структуры [37, 39].

На размещение и специализацию отраслей сельского хозяйства оказывают влияние природные и социально-экономические факторы, при этом преобладающей является первая группа факторов. Для возделывания сельскохозяйственных культур необходимы определенные природные условия. Продолжительность вегетационного периода, требовательность к теплу, свету и качеству почв у сельскохозяйственных культур различны, в связи с этим неодинаковы границы их распространения.

Природные факторы характеризуются показателями качества почв и метеорологических условий. Природное плодородие почв меняется очень медленно, следовательно, это свойство является сравнительно устойчивым и не влияет существенно на изменение величины урожайности [21, с. 70–78].

Для прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур предлагается методика, в которой урожайность определяется с учетом влияния комплекса природно-климатических и социально-экономических условий [12].

Исходная информация – данные по однотипным хозяйствам и основным климатическим показателям заданного региона за ряд лет. Исследуемые хозяйства относятся к специализированным хозяйствам растениеводческого направления.

При моделировании используются следующие основные показатели природно-климатических условий и урожайности:

X_1 – среднее количество осадков за год, мм;

X_2 – сумма осадков за год с температурой выше 10 °С, мм;

X_3 – средняя годовая температура воздуха, °С;

X_4 – сумма активных температур, °С;

X_5 – суммарная солнечная радиация, ккал/см^2;

X_6 – средняя годовая относительная влажность воздуха, %;

X_7 – продолжительность безморозного периода, дней;

X_8 – средняя высота снежного покрова за зиму, см;

X_9 – плотность снежного покрова, г/см^3;

X_{10} – средняя урожайность сельскохозяйственной культуры на 1 га посевной площади, ц.

Наличие множества исходных признаков, характеризующих комплекс природно-климатических условий, заставляет отбирать из них те, влияние которых на урожайность наиболее значимо. Такой выбор может быть обеспечен методами снижения размерности признакового пространства, к которым относятся методы факторного анализа.

Сложившиеся климатические условия являются случайными величинами и определяют уровень урожайности растениеводческой продукции. Однако связь между X_{10} (урожайность на 1 га) и показателями природно-климатических условий не детерминирована.

Схема основных блоков симультативной модели прогнозирования урожайности представлена на рис. 5.1.

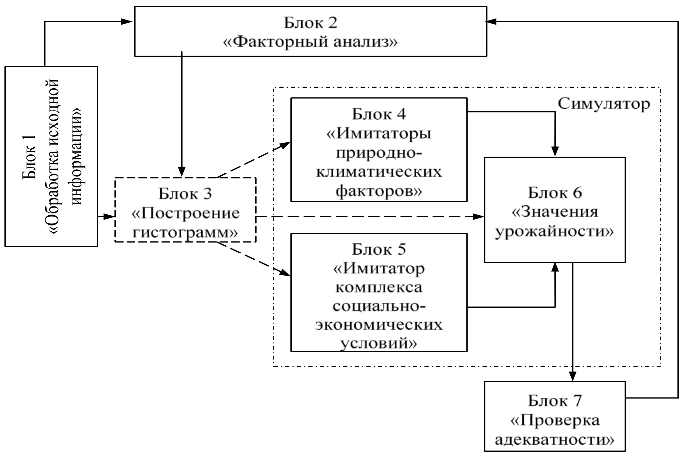


Рис. 5.1. Упрощенная структура симультативной модели

В блоке 1 данной схемы производится обработка исходной статистической информации для построения необходимых гистограмм. Для проведения факторного анализа в данном блоке осуществляется переход по используемым показателям природно-климатических условий (X_1–X_9) к стандартизированным значениям.

В блоке 2 представленной схемы происходит определение наиболее существенных природно-климатических факторов с использованием метода главных компонент.

Построение гистограмм выделенных природно-климатических факторов и комплекса социально-экономических условий производится в блоке 3. В случае необходимости строятся также вспомогательные гистограммы для урожайности. Создание имитаторов на основе гистограмм и стандартных датчиков псевдослучайных чисел, равномерно распределенных между нулем и единицей, осуществляется в блоках 4 и 5. Техника построения имитаторов ясна из дальнейшего рассмотрения. В блоке 6 на основе построенных имитаторов формируются алгоритмы имитации и вычисляются значения урожайности. Для достижения требуемой точности и надежности имитационного моделирования урожайности выбор количества имитационных экспериментов (симуляций) осуществляется с использованием статистических методов, основанных на построении доверительного интервала для математического ожидания урожайности [24, с. 99–106].

В блоке 7 проводится проверка адекватности построенной симультативной модели моделируемому экономическому объекту путем сравнения значения урожайности, полученного на основе модельных вычислений, с фактическим значением данного показателя по исследуемому сельскохозяйственному предприятию. Если отклонение расчетного значения от фактического существенно, производится новый отбор факторов и осуществляется построение нового симулятора [40].

Контрольные вопросы

1. Особенности экономических систем.
2. Модели общего экономического равновесия.
3. Модель Клейна.
4. Модели экономических циклов неоклассического и кейнсианского типов.
5. Модель Самуэльсона – Хикса (модель аппликатора и акселератора).
6. Особенности функционирования аграрного сектора и применение методов имитационного и статистического моделирования.
7. Статистическое исследование зависимостей.
8. Применение методов многомерного статистического анализа.
9. Статистический анализ динамических закономерностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альсова, О. К. Имитационное моделирование систем в среде ExtendSim : учеб. пособие для акад. бакалавриата / О. К. Альсова. – 2-е изд. – Москва : Юрайт, 2018. – 115 с.

2. Антипов, В. И. Макроэкономическая имитационная модель развития экономики США / В. И. Антипов, Н. А. Митин, А. М. Шашев. – Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2021. – 47 с.

3. Арашев, М. Развитие компьютерных технологий и их влияние на экономику / М. Арашев // Вестн. науки. – 2023. – № 2 (59). – С. 186–189.

4. Букина, И. С. Теоретические основы эконометрического моделирования российской экономики. Инвестиционная функция : доклад / И. С. Букина, В. Е. Маневич. – Москва : Ин-т экономики РАН, 2014. – 106 с.

5. Буць, В. И. Современные технологии управления ресурсосбережением / В. И. Буць // Информ. технологии в управлении и экономике. – 2022. – № 3 (28). – С. 80–88.

6. Буць, В. И. Сценарное прогнозирование инвестиционной привлекательности административного района в контексте ресурсосберегающего развития / В. И. Буць // Проблемы экономики. – 2022. – № 1 (34). – С. 3–11.

7. Буць, В. И. Интеллектуальная система определения направления диверсификации частной аграрной организации / В. И. Буць // Информационные технологии в образовании и аграрном производстве : материалы III Междунар. науч.-практ. конф. – Брянск : БГАУ, 2020. – С. 18–23.

8. Буць, В. И. Алгоритм компьютерной программы управления логистическими рисками сельскохозяйственной организации / В. И. Буць // Организационно-правовые аспекты инновационного развития агробизнеса : междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. с.-х. акад., Западнопомор. технол. ун-т в Щецине ; редкол.: А. С. Чечеткин [и др.]. – Щецин – Горки, 2019. – Вып. 16. – С. 206–210.

9. Веремчук, Н. С. Элементы имитационного моделирования : учеб.-метод. пособие / Н. С. Веремчук ; Сиб. гос. автомобил.-дорож. ун-т. – Омск : Изд-во СибАДИ, 2021. – 152 с.

10. Воронов, А. С. Возможности трансформации механизмов управления пространственным развитием инновационных систем регионов Уральского федерального округа / А. С. Воронов, М. С. Арбатский, С. С. Сергеев // Гос. упр. Электрон. вестн. – 2023. – № 95. – С. 124–143.

11. Гараев, Г. Роль высшей математики в финансовом анализе / Г. Гараев // Вестн. науки. – 2023. – № 2 (59). – С. 235–238.

12. Голубев, С. В. Формирование механизма управления производственным риском в сельском хозяйстве с использованием информационных технологий : монография / С. В. Голубев, Г. Л. Юсупова ; Ульян. гос. с.-х. акад. им. П. А. Столыпина. – Ульяновск : [б. и.], 2013. – 258 с.

13. Емельянов, А. А. Имитационное моделирование экономических процессов [Текст] : учеб. пособие / А. А. Емельянов, Е. А. Власова, Р. В. Дума ; под. ред. А. А. Емельянова. – Москва : Финансы и статистика, 2004. – 365 с.

14. Ермаков, С. М. О методе Монте-Карло для решения больших систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. М. Ермаков, М. Г. Смиловицкий // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2021. – Т. 8 (66), вып. 1. – С. 37–48.

15. Иванов, С. А. Теория систем и системный анализ / С. А. Иванов. – Санкт-Петербург : С.-Петерб. ун-т технологий управления и экономики, 2021. – 88 с.

16. Имитационное моделирование в системе структурного и имитационного моделирования «ITHINK» / И. М. Якимов [и др.] // Вестн. технол. ун-та. – 2019. – Т. 22, № 2. – С. 159–164.

17. Исраилова, С. Т. Основные аспекты имитационного моделирования бизнес-процессов предприятия с помощью сетей Петри и агентного моделирования / С. Т. Исраилова, А. А. Муханова, А. А. Исмаилова // Новости науки Казахстана. – 2021. – № 1 (148). – С. 12–19.

18. Какора, М. И. Методы оценки рисков перерабатывающих организаций АПК / М. И. Какора, Е. В. Волкова, И. И. Пантелеева // Проблемы экономики : сб. науч. тр. / Белорус. гос. с.-х. акад. – Горки : БГСХА, 2020. – № 2 (31). – С. 100–112.

19. Каталевский, Д. Ю. Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении : учеб. пособие / Д. Ю. Каталевский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2015. – 496 с.

20. Кокиц, Е. В. Выбор оптимальной системы транспортировки продукции на основании использования экономико-математической модели / Е. В. Кокиц // Вестн. Белорус. гос. с.-х. акад. – 2016. – № 4. – С. 28–30.

21. Комкова, С. С. Информационная система для автоматизации исследований агрохимических показателей почвы / С. С. Комкова, Е. В. Косолапова, В. В. Косолапов // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – № 1. – С. 70–78.

22. Константинов, С. А. Материальное стимулирование экономической эффективности производства в молочном скотоводстве : монография / С. А. Константинов, П. В. Гуща. – Горки : БГСХА, 2015. – 247 с.

23. Корнев, Г. Н. Анализ экономических систем: принципы, теория, практика: на примере сельскохозяйственного производства : монография / Г. Н. Корнев, В. Б. Яковлев. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 223 с.

24. Краковский, Ю. М. Моделирование показателей эффективности производства сельхозпродукции с использованием метода Монте-Карло / Ю. М. Краковский, А. С. Гуляев // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – № 1. – С. 99–106.

25. Кудрявцев, Е. М. GPSSWorld. Основы имитационного моделирования различных систем / Е. М. Кудрявцев. – Москва : ДМК Пресс, 2022. – 320 с.

26. Кузьмин, П. И. Анализ и оценка развития экономики региона с использованием аналога модели Л. Р. Клейна / П. И. Кузьмин, А. Г. Зиновьев // Экономика. Профессия. Бизнес. – 2020. – № 2. – С. 56–63.

27. Лычкина, Н. Н. Имитационное моделирование экономических процессов [Текст] : учеб. пособие / Н. Н. Лычкина. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 253 с.

28. Методы и модели поддержки принятия решений при управлении инновационными проектами в производственно-экономических системах : монография / Л. Р. Черняховская [и др.]. – Москва : Изд. дом Акад. естествознания, 2021. – 229 с.

29. Мицель, А. А. Математическое и имитационное моделирование экономических процессов / А. А. Мицель. – Томск : Изд-во ТГУ, 2016. – 193 с.

30. Новрузова, Г. С. Системный подход, моделирование и имитационное моделирование как основа образовательных технологий / Г. С. Новрузова // Ист. и соц.-обр. мысль. – 2020. – Т. 12. – № 3. – С. 120–131.

31. Новыш, Б. В. Имитационное моделирование в экономике и управлении : практикум для магистрантов / Б. В. Новыш, Д. В. Шаститко. – Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2020. – 112 с.

32. Основы создания нейро-цифровых экосистем. Гибридный вычислительный интеллект : монография / А. А. Федоров [и др.] ; Балт. федер. ун-т им. И. Канта. – 3-е изд., доп. – Калининград : Изд-во Балт. федер. ун-та им. И. Канта, 2021. – 241 с.

33. Проститенко, О. В. Моделирование дискретных систем на основе сетей Петри : учеб. пособие / О. В. Проститенко, В. И. Халимон, А. Ю. Рогов. – Санкт-Петербург : СПбГТИ (ТУ), 2017. – 69 с.

34. Рахманов, Д. О. Агентное моделирование – парадигма имитационного моделирования: преимущества, инструменты и применение / Д. О. Рахманов, А. М. Хакдодов // Управление информационными ресурсами : материалы XVIII Междунар. науч.-практ. конф. – Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2022. – С. 317–319.

35. Рыбалев, А. Н. Имитационное моделирование АСУ ТП / А. Н. Рыбалев. – Благовещенск : Амур. гос. ун-т, 2019. – 408 с.

36. Рыжиков, Ю. И. Имитационное моделирование. Авторская имитация систем и сетей с очередями : учеб. пособие / Ю. И. Рыжиков. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 108 с.

37. Соляник, С. В. Цифровая методология выявления этологических и экономико-зоогигиенических закономерностей в научно-производственных опытах / С. В. Соляник, В. В. Соляник, А. Н. Соляник // Зоотехническая наука Беларуси : сб. науч. тр. / Науч.-практ. центр НАН Беларуси по животноводству. – Жодино, 2020. – Т. 55, ч. 2 : Технология кормов и кормления, продуктивность. Технология производства, зоогигиена, содержание. – С. 335–346.

38. Тазюков, Н. И. Использование имитационного моделирования в логистике и моделировании цепей поставок / Н. И. Тазюков, А. О. Семыкин, Т. А. Суетина // Приоритетные направления инновационной деятельности в промышленности : сб. науч. ст. двенадцатой междунар. науч. конф., Казань, 30–31 дек. 2020 г. – Казань : ООО «Конверт», 2020. – Ч. 2. – С. 15–17.

39. Устюжанин, В. А. Моделирование биотехнических систем : учеб. пособие / В. А. Устюжанин, И. В. Яковлева. – Старый Оскол : ТНТ, 2014. – 215 с.

40. Фялковский, Е. Е. Использование имитационного моделирования для решения задач реинжиниринга бизнес-процессов в среде моделирования ANYLOGIC / Е. Е. Фялковский // Прикладная математика и фундаментальная информатика. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 67–75.

41. Худякова, Е. В. Имитационное моделирование процессов и систем в АПК : учебник / Е. В. Худякова, А. А. Липатов. – Москва : ИКЦ «Колос-с», 2021. – 256 с.

42. Шаталова, А. Ю. Имитационное моделирование задачи нечёткого линейного программирования с α-уровневым методом λ-продолжения / А. Ю. Шаталова, К. А. Лебедев // Евразийский Союз Ученых (ЕСУ). – 2018. – № 12 (57). – С. 58–61.

43. Якимов, А. И. Имитационное моделирование производственных систем / А. И. Якимов, Е. А. Якимов, Е. М. Борчик. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – 195 с.

44. Янковская, Л. К. Имитационное моделирование : практикум / Л. К. Янковская ; Кубан. гос. ун-т. – Краснодар : КубГУ, 2021. – 107 с.

СОДЕРЖАНИЕ