

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

И. В. Шафранская, Е. В. Гончарова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие

*для студентов, обучающихся по специальности
общего высшего образования*

6-05-0412-04 Маркетинг (1-26 02 03 Маркетинг)

Горки

Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия

2025

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050 я73

Ш30

*Рекомендовано методической комиссией
факультета бизнеса и права
28.02.2024 (протокол № 6)
и Научно-методическим советом
Белорусской государственной сельскохозяйственной академии
28.02.2024 (протокол № 6)*

Авторы:

кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*;
старший преподаватель *Е. В. Гончарова*

Рецензенты:

доктор экономических наук, профессор *А. Г. Ефименко*;
кандидат экономических наук, доцент *В. В. Чабаткуль*

Шафранская, И. В.

Ш30 Экономико-математические методы и модели : пособие /
И. В. Шафранская, Е. В. Гончарова. – Горки : Белорус. гос. с.-х.
акад., 2025. – 152 с.
ISBN 978-985-882-677-2.

Приведены информация и методики по изучению и выполнению основных разделов курса, которые на основе экономико-математических методов и моделей помогают обосновать и принять оптимальные управленческие решения по вопросам в сфере снабжения, производства и сбыта.

Для студентов, обучающихся по специальности общего высшего образования 6-05-0412-04 Маркетинг (1-26 02 03 Маркетинг).

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050 я73

ISBN 978-985-882-677-2

© Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия, 2025

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях важное значение имеет обучение студентов основам экономико-математических методов и моделей и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, связанных с планированием использования земельных, материальных, трудовых и денежных ресурсов; определение нормативных экономических показателей; обоснование ассортимента, объемов и каналов товародвижения продукции сельскохозяйственных, перерабатывающих, торговых предприятий с целью наиболее полного удовлетворения потребностей покупателей, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на предприятиях АПК.

Изучение дисциплины «Экономико-математические методы и модели» предполагает получение углубленных знаний студентами в области количественных методов оценки и прогноза развития экономических явлений и процессов, выбора оптимальной программы функционирования процессов и систем, а также обеспечивает воспитание будущих специалистов в маркетинговой деятельности, хорошо понимающих сущность системного подхода при анализе и прогнозировании развития экономических объектов различных уровней и способных использовать экономико-математические модели.

Задания ориентированы на учет реальных производственных ситуаций и учитывают современные достижения в развитии экономико-математических методов и моделей.

В начале каждой темы дан краткий конспект теоретического материала. Порядок размещения практического материала предполагает переход от простых к более сложным задачам.

Порядок выполнения заданий предусматривает индивидуальную работу каждого студента. Содержание индивидуального задания формирует студент. Чтобы получить исходные данные заданий, необходимо в формулы, имеющиеся в задании, подставить значение N , равное последней цифре шифра зачетной книжки, и K , равное 1, если фамилия студента начинается с букв А, Б, В, Г; 2 – Д, Е, Ж, З, И, Н; 3 – К, Л, М, П; 4 – Р, С, Т, О; 5 – У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я.

Т е м а 1. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

В экономике отдельные стороны функционирования некоторого экономического объекта можно описать количественно, т. е. в виде уравнений или неравенств. Наиболее распространено использование для этих целей задач линейной оптимизации.

Линейная оптимизация – это раздел оптимизации, включающий теорию и методы отыскания экстремума линейных функций многих переменных при линейных ограничениях, налагаемых на эти переменные.

В общем виде задача линейной оптимизации может быть сформулирована, как задача нахождения наибольшего значения линейной функции:

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$F_{\max (\min)} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n,$$

где x_i – неизвестные (искомые) величины;

c_j, a_{ij}, b_i – заданные действительные числа;

c_j – коэффициенты целевой строки;

b_i — свободные члены;

a_{ij} – технико-экономические коэффициенты ограничений задачи;

j – номер столбца (переменной);

i – номер строки (ограничения).

Поскольку речь идет о реальных объектах, то переменные должны быть неотрицательные: $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

Эквивалентная запись задачи с использованием знака суммирования выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, \geq, = \} b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$F_{\max (\min)} = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Функция $F_{\max (\min)}$ называется целевой функцией (ЦФ) и является математическим выражением критерия оптимальности.

Критерий оптимальности (критерий оптимизации) – это показатель решения задачи, по значению которого оценивается оптимальность найденного решения, т. е. максимальное удовлетворение поставленным требованиям. Например, при оптимизации программы работы торгового объекта в качестве критерия оптимальности можно использовать прибыль от реализации.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется **целевая функция**, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Другими словами, целевая функция – это математическое выражение критерия оптимальности. Например, если критерий оптимальности – прибыль от реализации, то математически запись целевой функции может иметь несколько вариантов:

$$F_{\max} = x_i - y_i,$$

где x_i , y_i – соответственно выручка от реализации продукции и себестоимость реализуемой продукции, а формула их расчета заранее задается в ограничениях задачи;

$$F_{\max} = \sum_{i \in I_1} ((c_i - s_i) \cdot \tilde{x}_i),$$

где c_i , s_i – соответственно цена реализации и себестоимость единицы реализуемой продукции;

$\tilde{x}_i$ – объем реализации продукции;

i , I_1 – номер и множество видов реализованной продукции.

Вид целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации, т. е. задача сводится к нахождению экстремума (минимума или максимума) целевой функции.

Решение задачи (план) называется **допустимым (опорным)**, если выполняются все ограничения задачи.

Допустимый план **будет оптимальным**, если достигается экстремальное значение целевой функции.

Классическим методом решения задачи линейного программирования стал симплексный метод, получивший также в литературе название метода последовательного улучшения плана.

Симплексный метод – это вычислительная процедура, основанная на принципе улучшения решений, т. е. переход от одного опорного решения к другому, для которого значение целевой функции экстремально (стремится к минимуму или максимуму). Эти операции (итерации) фиксируют в симплексных таблицах.

Само название метод получил от термина «симплекс» – это выпуклый многоугольник в n -мерном пространстве с $n + 1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости. Симплекс выделен в отдельный класс потому, что в n -мерном пространстве n точек всегда лежит в одной гиперплоскости. В конечном итоге он представляет собой простейший многоугольник, содержащий некоторый объем n -мерного пространства.

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений и совпадает, по крайней мере, с одним из допустимых базисных решений системы ограничений. Суть решения любой задачи линейного программирования: перебрать конечное число допустимых базисных решений системы ограничений и выбрать среди них то, на котором целевая функция принимает оптимальное решение. Геометрически это соответствует перебору всех угловых точек многогранника решений. Такой перебор в конце концов приведет к оптимальному решению.

Число перебираемых допустимых базисных решений можно сократить, если проводить перебор не беспорядочно, а с учетом изменений линейной функции, т. е. добиваясь того, чтобы каждое следующее решение было «лучше» (или, по крайней мере, «не хуже»), чем предыдущее, по значениям линейной функции (увеличение ее при отыскании максимума $F \rightarrow \max$, уменьшение – при отыскании минимума $F \rightarrow \min$).

Такой перебор позволяет сократить число шагов при отыскании оптимума. Поясним это на графическом примере.

Пусть область допустимых решений изображается многоугольником $ABCDEFGH$ (рис. 1.1).

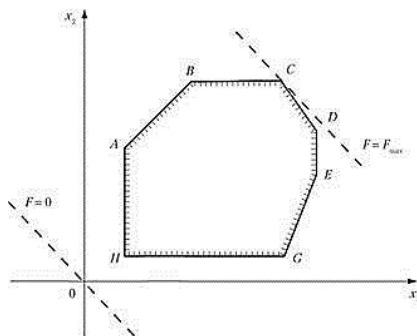


Рис. 1.1.1. Многоугольник (симплекс)

Предположим, что его угловая точка A соответствует исходному допустимому базисному решению. При беспорядочном переборе пришлось бы испытать семь допустимых базисных решений, соответствующих семи угловым точкам многоугольника. Однако из чертежа видно, что после вершины A выгодно перейти к соседней вершине B , а затем к оптимальной точке C .

Вместо семи перебрали только три вершины, последовательно улучшая линейную функцию.

Идея последовательного улучшения решения легла в основу симплексного метода.

Итак, геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений (называемой первоначальной) к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (по крайней мере не худшее) значение (по отношению к цели задачи), до тех пор пока не будет найдено оптимальное решение – вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцигом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским ученым Л. В. Канторовичем.

Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решить и вручную.

Для использования симплексного метода задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду, т. е. система ограничений должна быть представлена в виде уравнений.

Алгоритм конкретной вычислительной реализации симплексного метода рассмотрим на примере.

Этапы решения задач симплексным методом.

1. Составление начального плана (исходного решения).

1.1. Вводим переменные и составляем ограничения задачи.

1.2. Переносим все неизвестные величины в левую часть ограничений, известные – в правую. Выполняем действия с подобными. Приводим все ограничения к виду « $\leq$ ». Для этого ограничения типа « $\geq$ » умножаем на -1 .

1.3. Превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные y_i , где i – номер ограничения. Дополнительных переменных вводим столько, сколько ограничений. С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид « $\leq$ », или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения имеют вид « $\geq$ ».

1.4. Заносим информацию в первую симплексную таблицу, при этом коэффициенты целевой строки записываем с противоположным знаком.

Исходное решение симплексной задачи – допущение, что все переменные $x_j = 0$ и их первоначально относим к небазисным. Получим, что $y_1 = b_1$, $y_2 = -b_2$, $y_m = b_m$, $0 = b_3$, $F = 0$.

Чертим симплексную таблицу № 1, в которой число столбцов и строк на две единицы больше количества небазисных переменных x (n) и ограничений m (табл. 1.1).

Т а б л и ц а 1.1. Симплексная таблица № 1

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	...	x_n
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
y_2	$-b_2$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	$-a_{2n}$
0	b_3	a_{31}	a_{32}	...	a_{3n}
...	...	...	...	...	...
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$

2. Поиск опорного (допустимого) плана (решения).

Поиск опорного решения начинаем с допущения, что искомые переменные равны нулю, т. е. $x_j = 0$. Тогда, подставив эти значения в уравнения системы, получим значение дополнительных переменных y_i , равное свободным членам задачи. Признаком наличия опорного (допустимого) решения будут положительные свободные члены. При наличии хотя бы одного отрицательного свободного члена опорное решение будет отсутствовать.

Итак, в табл. 1.1 опорного решения нет, так как есть отрицательный свободный член и число 0 приравнено к действительному числу.

Решение начинаем с переброса нуля из базисных переменных в небазисные. В нулевой строке ищем коэффициент, который покажет, какая из небазисных переменных поменяется местами с базисной переменной. Для этого делим столбец свободных членов на соответствующие коэффициенты вектор-столбца небазисной переменной. Если от деления на коэффициент, стоящий в 0-строке, получим наименьшее положительное частное, то этот коэффициент разрешающий.

$$\text{Допустим } \frac{b_3}{a_{31}} > \frac{b_1}{a_{11}}; \text{ продолжаем} \quad \frac{b_3}{a_{32}} > \frac{b_m}{a_{m2}}; \frac{b_3}{a_{3n}} < \frac{b_1}{a_{1n}}, \frac{b_2}{a_{2n}},$$

$$\frac{b_m}{a_{mn}}. \text{ Значит } a_{3n} - \text{разрешающий элемент, который показывает, что}$$

базисное значение 0 и небазисная переменная x_n должны поменяться местами. Замена переменных предполагает поиск нового базиса и требует проведения вычислений. Чтобы записать правило, введем обозначение: a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j . Тогда a_{rk} – разрешающий коэффициент, где $r \in i, k \in j$.

Новый коэффициент вместо разрешающего равен:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}}.$$

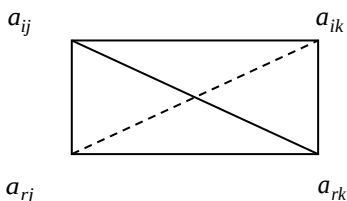
Новые коэффициенты разрешающей строки:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, (k \neq j).$$

Новые коэффициенты разрешающего столбца:

$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}}, (i \neq r).$$

Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента, определяем по правилу прямоугольника: от произведения коэффициентов главной диагонали (образуют искомый элемент и разрешающий элемент) вычитаем произведение коэффициентов побочной диагонали и делим на разрешающий элемент:



$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}; (r \neq i, k \neq j).$$

Результаты заносим в симплексную таблицу № 2 (табл. 1.2).

Т а б л и ц а 1.2. Симплексная таблица № 2

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	...	0
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	$-a_{1n}$
y_2	$-b_2$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	a_{2n}
x_n	b_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}
...	...	...	...	...	...
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	$-a_{mn}$
F	F_1	$-c_1$	$-c_2$	...	c_n

После этого вычеркиваем нулевой столбец. Это означает, что при дальнейшем решении экстремум функции будем искать на ребре или плоскости многогранника решений, которое определено третьим уравнением.

Опорного решения нет (имеется отрицательный свободный член).

Берем за основу любую строку с отрицательным свободным членом. В ней находим отрицательные коэффициенты. Делим столбец

свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца небазисной переменной. Если от деления на выбранный нами отрицательный элемент получили наименьшее положительное частное, то он будет разрешающим коэффициентом.

$$\text{Допустим } \frac{-b_2'}{-a_{21}'} > \frac{b_1'}{a_{11}'}; \frac{-b_2'}{-a_{22}'} < \frac{b_1'}{a_{12}'}, \frac{b_3'}{a_{32}'}, \frac{b_m'}{a_{m2}'}.$$

Значит $-a_{22}'$ – разрешающий коэффициент. Далее строим новую симплексную таблицу № 3 (табл. 1.3), в которой после выполнения всех расчетов имеется опорное решение.

3. Поиск оптимального решения. Его признаком являются положительные коэффициенты целевой функции (c_j) при решении на максимум и отрицательные при решении на минимум. Если в F строке при решении на максимум имеется несколько отрицательных коэффициентов, то в качестве разрешающего берем столбец с наибольшим по модулю отрицательным значением, а при решении на минимум берем столбец с наибольшим положительным значением F строки.

Допустим, $|-c_2| > |-c_1|$, значит y_2 – разрешающий столбец. Разрешающий элемент получим от деления столбца свободных членов на коэффициенты разрешающего столбца и поиска наименьшего положительного частного.

Т а б л и ц а 1.3. Симплексная таблица № 3

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	y_2
y_1	b_1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$
x_2	b_2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$
x_m	b_m	$\bar{a}_{m1}$	$\bar{a}_{m2}$
...	...	...	...
y_m	b_m	$\bar{a}_{m1}$	$\bar{a}_{m2}$
F	F_1	$-c_1$	$-c_2$

Допустим $\bar{a}_{32}$ – разрешающий коэффициент. Проводим вычисления. Если в следующей таблице коэффициенты целевой строки положительные, решение является оптимальным.

Примечание.

1. Если в F -строке имеется хотя бы один 0, то это означает, что возможно бесчисленное число решений, т. е. экстремум достигнут на ребре или полупространстве.

2. При поиске опорного решения может получиться, что столбцу отрицательных свободных членов соответствуют в каком-либо столбце небазисных переменных отрицательные коэффициенты. В этом случае в качестве разрешающего можно взять коэффициент, от деления на который получим наибольшее положительное частное. В результате за один шаг получим опорное решение.

Пример. Агрокомбинат планирует выпуск трех новых видов сыров. Предприятие располагает следующими ресурсами: 1560 чел.-ч, 1700 кВт/ч и 1580 у. д. е. Установлены минимальные объемы производства: сыр № 1 – 45 ц, № 2 – 35 ц и № 3 – 120 ц за период. Расход ресурсов и эффективность производства различных видов сыров по ассортименту в расчете на 1 ц даны в табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1.4. Экономические параметры производства сыров

Показатели	Номенклатура сыров		
	№ 1	№ 2	№ 3
Расход трудовых ресурсов, чел.-ч	2	3	4
Расход электроэнергии, кВт/ч	1	4	5
Привлечение денежных кредитов, у. д. е.	3	4	2
Прибыль от реализации, у. д. е.	8	7	4

Найти оптимальное решение задачи, проанализировав полученную программу выпуска новых видов сыров с целью получения максимальной прибыли.

Решение.

1-й этап. Составление начального плана (исходного решения).

1.1. Вводим неизвестные и составляем ограничения:

Неизвестные:

x_1 – объем производства сыра № 1, ц;

x_2 – объем производства сыра № 2, ц;

x_3 – объем производства сыра № 3, ц.

Ограничения экономико-математической задачи:

1) по минимальному объему производства сыра № 1, ц:

$$x_1 \geq 45;$$

2) по минимальному объему производства сыра № 2, ц:

$$x_2 \geq 35;$$

3) по минимальному объему производства сыра № 3, ц:

$$x_3 \geq 120;$$

4) по использованию трудовых ресурсов, чел.-ч:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

5) по использованию электроэнергии, кВт/ч:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

6) по освоению кредитных средств, у. д. е.:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

Целевая функция – максимум прибыли:

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

1.2. Переносим все неизвестные величины в левую часть ограничений, известные – в правую. Выполняем действия с подобными. (В данном примере этого делать не нужно).

Приводим все ограничения к виду « $\leq$ ».

1–3 ограничения умножаем на (-1) и меняем знак ограничения на противоположный. Все остальные ограничения оставляем без изменений.

$$1) -x_1 \leq -45;$$

$$2) -x_2 \leq -35;$$

$$3) -x_3 \leq -120;$$

$$4) 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

$$5) x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

$$6) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

1.3. Превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные y_i , где i – номер ограничения.

Напоминаем, что с экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид « $\leq$ », или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения имеют вид « $\geq$ ».

$$1) -x_1 + y_1 = -45;$$

$$2) -x_2 + y_2 = -35;$$

$$3) -x_3 + y_3 = -120;$$

$$4) 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_4 = 1560;$$

$$5) x_1 + 4x_2 + 5x_3 + y_5 = 1700;$$

$$6) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_6 = 1580.$$

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

1.4. Информацию заносим в первую симплексную таблицу (табл. 1.5).

Т а б л и ц а 1.5. Первая симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	-45	-1	0	0
y_2	-35	0	-1	0
y_3	-120	0	0	-1
y_4	1560	2	3	4
y_5	1700	1	4	5
y_6	1580	3	4	2
$F_{\max}$	0	-8	-7	-4

Примечание. Коэффициенты целевой строки в первую симплексную таблицу заносим с противоположным знаком.

2-й этап. Поиск опорного (допустимого) решения.

Напоминаем, что решение будет опорным (допустимым), если среди базисных переменных будут отсутствовать нули и все значения свободных членов будут положительными.

Так как в первой симплексной таблице (табл. 1.5) среди свободных членов есть отрицательные, следовательно, опорного решения нет.

Для поиска опорного решения применяем следующую методику:

1) в столбце свободных членов находим отрицательный (если их несколько, берем любой). Например: -45;

2) в строке выбранного отрицательного свободного члена находим отрицательный коэффициент (если их несколько, берем любой). Здесь он равен -1;

3) путем деления коэффициентов столбца свободных членов на коэффициенты столбца с выбранным отрицательным элементом находим положительные значения, среди которых выбираем наименьшее. Оно и покажет, где будет разрешающий коэффициент:

$$\min \left(\frac{-45}{-1}; \frac{1560}{2}; \frac{1700}{1}; \frac{1580}{3} \right) = \min (45; 780; 1700; 527) = 45.$$

Разрешающий коэффициент -1 показывает, какая из небазисных переменных заменит базисную, т. е. x_1 и y_1 меняются местами.

Далее находим значения новых элементов для второй симплексной таблицы (табл. 1.6).

Новый элемент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий элемент. В нашем случае единицу делим на -1 .

Новые элементы разрешающей строки находим делением старых на разрешающий элемент:

$$\frac{-45}{-1} = 45; \quad \frac{0}{-1} = 0; \quad \frac{0}{-1} = 0.$$

Новые элементы разрешающего столбца находим делением старых на разрешающий элемент, но с противоположным знаком:

$$\frac{0}{-(-1)} = 0; \quad \frac{2}{-(-1)} = 2; \quad \frac{1}{-(-1)} = 1; \quad \frac{1}{-(-1)} = 1; \quad \frac{3}{-(-1)} = 3; \quad \frac{-8}{-(-1)} = -8.$$

Все остальные элементы находим по правилу прямоугольника: от произведения элементов главной диагонали (содержит разрешающий) отнимаем произведение элементов побочной диагонали и полученный результат делим на разрешающий элемент:

$$\begin{aligned} \frac{(-1) \cdot (-35) - (-45) \cdot 0}{-1} &= -35; \quad \frac{(-1) \cdot (-120) - (-45) \cdot 0}{-1} = -120; \\ \frac{(-1) \cdot 1560 - (-45) \cdot 2}{-1} &= 1470; \quad \frac{(-1) \cdot 1700 - (-45) \cdot 1}{-1} = 1655; \\ \frac{(-1) \cdot 1580 - (-45) \cdot 3}{-1} &= 1445; \quad \frac{(-1) \cdot 0 - (-45) \cdot (-8)}{-1} = 360; \\ \frac{(-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0}{-1} &= -1; \quad \frac{(-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0}{-1} = 0; \quad \frac{(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0}{-1} = 3. \end{aligned}$$

Примечание. Если произведение элементов побочной диагонали равно нулю, значение искомого элемента остается без изменений.

Все остальные элементы также находим по правилу прямоугольника.

Результаты расчетов записываем во вторую симплексную таблицу (табл. 1.6).

Т а б л и ц а 1.6. Вторая симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	x_2	x_3
x_1	45	-1	0	0
y_2	-35	0	-1	0
y_3	-120	0	0	-1
y_4	1470	2	3	4
y_5	1655	1	4	5
y_6	1445	3	4	2
$F_{\max}$	360	-8	-7	-4

Во второй симплексной таблице (табл. 1.6) опорное решение не найдено, так как среди свободных членов есть отрицательные значения. Следовательно, среди отрицательных свободных членов выбираем любой. Например (-35), в этой строке берем отрицательный элемент (-1). Находим наименьшее частное от деления свободных членов на коэффициенты столбца с выбранным отрицательным элементом:

$$\min \left(\frac{-35}{-1}; \frac{1470}{3}; \frac{1655}{4}; \frac{1445}{4} \right) = \min (35; 490; 414; 361) = 35.$$

Итак, разрешающий коэффициент -1 показывает, какая из небазисных переменных (x_2) заменит базисную (y_2).

Далее находим значения новых элементов для третьей симплексной таблицы (табл. 1.7) по ранее рассмотренным правилам.

Т а б л и ц а 1.7. Третья симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	y_2	x_3
x_1	45	-1	0	0
x_2	35	0	-1	0
y_3	-120	0	0	-1
y_4	1365	2	3	4
y_5	1515	1	4	5
y_6	1305	3	4	2
$F_{\max}$	605	-8	-7	-4

В третьей симплексной таблице (табл. 1.7) нет опорного решения, следовательно, снова определяем разрешающий элемент и рассчитываем элементы четвертой симплексной таблицы (табл. 1.8).

Т а б л и ц а 1.8. Четвертая симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	y_2	y_3
x_1	45	-1	0	0
x_2	35	0	-1	0
x_3	120	0	0	-1
y_4	885	2	3	4
y_5	915	1	4	5
y_6	1065	3	4	2
$F_{\max}$	1085	-8	-7	-4

В четвертой симплексной таблице (табл. 1.8) все свободные члены положительные, следовательно, опорное решение найдено.

3-й этап. Поиск оптимального решения.

При решении на максимум оптимальным будет решение, если все коэффициенты целевой функции являются положительными, или при решении на минимум – отрицательными.

Итак, в четвертой симплексной таблице (табл. 1.8) нет оптимального решения, так как при решении на максимум все коэффициенты целевой строки должны быть положительными, а в таблице присутствуют отрицательные.

В качестве разрешающего берем столбец с наибольшим по модулю отрицательным значением (при решении на минимум берем столбец с наибольшим положительным значением F -строки):

$$\max \{-8; -7; -4\} = -8.$$

После этого делим столбец свободных членов на элементы разрешающего столбца и там, где наименьшее положительное значение, будет разрешающий элемент:

$$\min \left(\frac{885}{2}; \frac{915}{1}; \frac{1065}{3} \right) = \min (442; 915; 355) = 355.$$

Значит, разрешающий элемент равен 3, следовательно, в пятой симплексной таблице меняем местами небазисную переменную y_1 на базисную y_6 (табл. 1.9).

Согласно ранее приведенным правилам находим элементы новой таблицы.

Т а б л и ц а 1.9. Пятая симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_2	y_3
x_1	400	0,3	1,3	0,7
x_2	35	0	-1	0
x_3	120	0	0	-1
y_4	175	-0,7	-0,7	2,7
y_5	560	-0,3	2,7	4,3
y_1	355	0,3	1,3	0,7
$F_{\max}$	3925	2,7	3,7	1,3

В пятой симплексной таблице (табл. 1.9) все коэффициенты целевой строки положительные ($F_{\max}$), следовательно, оптимальное решение получено.

Значения базисных переменных равны свободным членам, а небазисных – нулю:

$$x_1 = 400; x_2 = 35; x_3 = 120; y_1 = 355;$$

$$y_2 = 0; y_3 = 0; y_4 = 175; y_5 = 560; y_6 = 0.$$

Чтобы исключить вероятность ошибок при расчетах, необходимо провести проверку, для этого значения переменных необходимо подставить в равенства:

$$1) -x_1 + y_1 = -45; -400 + 355 = -45;$$

$$2) -x_2 + y_2 = -35; -35 + 0 = -35;$$

$$3) -x_3 + y_3 = -120; -120 + 0 = -120;$$

$$4) 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_4 = 1560; 2 \cdot 400 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 120 + 175 = 1560;$$

$$5) x_1 + 4x_2 + 5x_3 + y_5 = 1700; 400 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 120 + 560 = 1700;$$

$$6) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_6 = 1580; 3 \cdot 400 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 120 + 0 = 1580.$$

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 8 \cdot 400 + 7 \cdot 35 + 4 \cdot 120 = 3925.$$

Полученное оптимальное решение предусматривает производство сыров: № 1 – 400 ц, № 2 – 35 ц, № 3 – 120 ц ($x_1 = 400; x_2 = 35; x_3 = 120$). Производство сыров № 2 и № 3 запланировано на минимальном уровне ($y_2 = 0; y_3 = 0$), а превышение минимального объема производства по сыру № 1 составит 355 ц ($y_1 = 355$).

Полностью будут освоены кредитные средства ($y_6 = 0$), но будут недоиспользованы трудовые ресурсы на 175 чел.-ч и электроэнергия – на 560 кВт/ч ($y_4 = 175; y_5 = 560$). Реализация предлагаемой программы обеспечит получение максимальной прибыли на сумму 3925 у. д. е. ($F_{\max} = 3925$).

Задачи для решения

Задача 1. Решить экономико-математическую задачу симплексным методом.

$$\begin{aligned} 1) & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15; \\ 2) & 10x_1 + 13x_2 + 12x_3 \leq 300; \\ 3) & 400x_1 \geq 2500. \\ F_{\max} &= 0,1x_1 + 0,4x_2 + 0,35x_3. \end{aligned}$$

Задача 2. Получить оптимальное решение симплексным методом.

$$\begin{aligned} 1) & -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leq 4; \\ 2) & x_3 \leq 20; \\ 3) & x_1 + x_2 \leq 50; \\ 4) & -x_1 - 3x_2 + x_4 \geq 20. \\ F_{\min} &= 20x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Задача 3. Получить оптимальное решение симплексным методом.

$$\begin{aligned} 1) & 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 100; \\ 2) & x_2 + x_3 \leq 10; \\ 3) & -x_1 + x_4 \geq 10; \\ 4) & x_4 \leq 20. \\ F_{\min} &= 8x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Задача 4. На основании данных четвертой симплексной таблицы (табл. 1.10) рассчитать новые элементы и составить следующую пятую симплексную таблицу.

Т а б л и ц а 1.10. Четвертая симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены	НБП			
		y_5	y_1	x_3	y_4
x_2	30	1	1	1	0
y_2	250	-20	-25	-23	5
y_3	300	-40	10	-30	<10>*
x_4	100	0	0	0	-1
x_1	20	-1	0	0	0
$F_{\max}$	7500	150	150	150	-30

*Разрешающий элемент.

Задача 5. Найти оптимальный план производства двух видов продукции (x_1 и x_2 , табл. 1.11).

Т а б л и ц а 1.11. Экономические показатели производства продукции

Вид продукции	Норма расхода ресурса на единицу прибыли		Прибыль на единицу изделия
	A	B	
1	7	10	$9 + 5N$
2	22	6	$5 + 2N$
Объем ресурса	22	38	

Задача 6. Фермерское хозяйство возделывает зерновые культуры, однолетние травы, кукурузу на силос и содержит поголовье коров. В наличии имеется 1000 га пашни, 17000 чел.-дн. трудовых ресурсов. На основе коммерческих связей закуплены корма общим объемом 6000 ц к. ед. Экономические показатели расхода ресурсов и выход продукции даны в табл. 1.12.

Т а б л и ц а 1.12. Параметры фермерского хозяйства

Показатели	Приходится на 1 га (гол.)				
	Пашня, га	Трудовые ресурсы, чел.-дн.	Выход кормов, ц к. ед.	Расход кормов, ц к. ед.	Прибыль, у. д. е.
Зерновые	1	5	10	—	90
Однолетние травы	1	2,5	15	—	—
Кукуруза на силос	1	5	30	—	—
Коровы	—	60	—	80	500

Найти оптимальное сочетание отраслей фермерского хозяйства при имеющихся ресурсах с целью получения максимальной прибыли.

Задача 7. Найти оптимальное распределение кредитов с максимизацией общей прибыли по процентам, получаемой филиалами головного банка от торгово-посреднических структур.

Исходная информация.

1. Пять филиалов банка осуществляют кредитование четырех торгово-посреднических структур с различными сроками возмещения получаемых денежных средств. Торгово-посреднические структуры № 2 и № 3 не берут кредиты в филиале головного банка № 5.

2. Выделение кредитных средств филиалами головного банка (у. д. е.): № 1 – $(1300 + 3N)$; № 2 – $(1200 + 5N)$; № 3 – $(1000 + 6N)$; № 4 – $(1600 - 5N)$; № 5 – $(1400 - 8N)$.

3. Потребность в финансах каждой торгово-посреднической структуры (у. д. е.): I – $(1100 + 10N)$; II – $(800 + 6N)$; III – $(1800 + 6N)$; IV – $(1500 - 2N)$.

4. Процентные ставки в зависимости от сроков возмещения кредита (из расчета на 100 у. д. е.) даны в табл. 1.13.

Т а б л и ц а 1.13. **Размер процентных ставок**

Филиалы головного банка	Торгово-посреднические структуры			
	I	II	III	IV
1	20	18	12	15
2	14	16	19	–
3	12	21	19	–
4	15	20	18	14
5	17	19	16	15

Требуется:

- 1) составить расширенную экономико-математическую задачу: ввести переменные, составить ограничения и целевую функцию;
- 2) найти опорное решение;
- 3) найти оптимальное решение;
- 4) проанализировать полученное решение.

Задача 8. Ассоциация фермерских хозяйств возделывает зерновые культуры, однолетние травы, кукурузу на силос и содержит поголовье коров высокопродуктивной породы. В наличии имеется 1000 га пашни, 17 000 чел.-дн. трудовых ресурсов. На основе коммерческих связей закуплены корма общим объемом 6000 ц к. ед. Экономические показатели расхода ресурсов и выход продукции даны в табл. 1.14.

Т а б л и ц а 1.14. **Параметры ассоциации хозяйств**

Показатели	Приходится на 1 га (гол.)				
	Пашня, га	Трудовые ресурсы, чел.-дн.	Выход кормов, ц к. ед.	Расход кормов, ц к. ед.	Прибыль, у. д. е.
Зерновые	1	5	10	–	$90 + 100K$
Однолетние травы	1	2,5	15	–	–
Кукуруза на силос	1	5	30	–	–
Коровы	–	30	–	60	$480 - 50K$

Найти оптимальное сочетание отраслей фермерской ассоциации при имеющихся ресурсах с целью получения максимальной прибыли.

Задача 9. Агрокомбинат планирует выпуск четырех новых видов сыров. Предприятие располагает следующими ресурсами: 20 000 – 10К чел.-ч, 52 000 кВт/ч и 4000 у. д. е. Закупаемое оборудование позволяет производить сыр № 3 в количестве до 130 ц, а сыр № 4 – не ниже 100 ц за период. Расход ресурсов и эффективность производства различных видов сыров по ассортименту в расчете на 1 ц даны в табл. 1.15.

Т а б л и ц а 1.15. Экономические параметры производства сыров

Показатели	Номенклатура сыров			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
1	2	3	4	5
Расход трудовых ресурсов, чел.-ч	15	15	18	23
Расход электроэнергии, кВт/ч	140 – К	230	190	170 – К
Привлечение денежных кредитов, у. д. е.	10	12	8	11
Прибыль от реализации, у. д. е.	1,5	1,6 + 0,1К	1,3	1,4

Найти оптимальное решение задачи, проанализировав полученную программу выпуска новых видов сыров с целью получения максимальной прибыли.

Вопросы по теме

1. Назначение симплексного метода.
2. Перечислите этапы решения задач симплексным методом.
3. Экономический смысл дополнительной переменной u_i .
4. Что является признаком опорного решения.
5. Алгоритм нахождения разрешающего элемента, если опорное решение не найдено.
6. Чему равен новый элемент вместо разрешающего?
7. Чему равны новые коэффициенты разрешающей строки?
8. Чему равны новые коэффициенты разрешающего столбца?
9. Алгоритм расчета новых элементов по правилу прямоугольника.
10. Что обозначает нахождение разрешающего элемента?
11. Что является признаком оптимального решения?
12. Алгоритм нахождения разрешающего элемента при поиске оптимального решения.

Т е м а 2. КОРРЕКТИРОВКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вследствие того, что экономические объекты отличаются динамичностью, их информация изменяется: изменяются ресурсы, технология, а значит, и окупаемость ресурсов. В связи с этим полученное ранее оптимальное решение может потребовать корректировки, т. е. увеличить или уменьшить размеры отрасли, ввести новые или исключить ранее выгодные отрасли, которые становятся убыточными. Чтобы не решать задачи вновь, можно произвести корректировку оптимального решения. Для этого используем информацию последней симплексной таблицы (табл. 2.1). В ней на основе коэффициентов пропорциональности можем произвести все необходимые изменения. При этом коэффициентами пропорциональности называют коэффициенты симплекс-таблицы начиная со второй, которая количественно выражает взаимосвязи переменных между собой и с ресурсами.

Т а б л и ц а 2.1. Последняя симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены, B_i	Небазисные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	800	2	-0,066	0,66	0,026
x_2	200	-1	0,066	0,34	-0,026
y_3	2000	-300	-50	-100	-4,4
x_4	420	0,56	-0,017	-0,85	0,032
F	780 000	200	26,7	136	9,3

Корректировку оптимального решения осуществляем по формуле

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_1} a_{ij} \Delta x_j (\Delta y_i),$$

где $x_j^k(y_i^k)$ – значения основных (дополнительных) переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – значения основных (дополнительных) переменных до корректировки;

j – номер столбца, участвующего в корректировке;

J_1 – множество столбцов, участвующих в корректировке, т. е. по которым производится данная корректировка;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности (вектор-столбца, участвующего в корректировке);

$\Delta x_j (\Delta y_i)$ – величина корректировки по основной или дополнительной переменной.

Корректировка может производиться по небазисным и базисным переменным, а среди них – по основным и дополнительным переменным.

1. Корректировка по небазисным основным переменным.

Корректировка по основным небазисным переменным (т. е. переменные, не вошедшие в план, в нашем случае это – x_3). При изменении цен или технологий не вошедшие в план (т. е. невыгодные) отрасли могут стать выгодными и их следует ввести в базис. Введение предполагает изменение размеров других отраслей, использования ресурсов и экономических резервов.

Методика корректировки оптимального решения следующая.

1. Из числа небазисных основных переменных берем те, по которым намечалось наибольшее возрастание эффекта или наиболее существенное изменение в технологии.

2. Находим максимальную величину корректировки

$$\max \Delta x_j = \min \frac{A_i}{a_{ij}},$$

где $\max \Delta x_j$ – минимальное положительное частное от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем значению Δx_j величину, не превышающую максимальную допустимую.

4. По общей формуле находим новое решение.

В нашем примере среди небазисных одна основная переменная x_3 (площадь посева картофеля).

$$\max \Delta x_3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{800}{0,66} = 1200 \\ \frac{200}{0,34} = 600 \end{array} \right\} = 600.$$

Допустим, что наши возможности, исходя из наличия семян, или потребности рынка, или новых договорных поставок, составляют Δx_3 , что должно быть равно 100.

Тогда новое решение составит

$$\begin{aligned}\Delta x_3 &= x_3 = 100; \\ x_1^k &= 800 - 0,66 \cdot 100 = 734; \\ x_2^k &= 200 - 0,34 \cdot 100 = 166; \\ y_3^k &= 2000 - (-100) \cdot 100 = 12\,000; \\ x_4^k &= 420 - (-0,86) \cdot 100 = 506. \\ F^k &= 780\,000 - 136 \cdot 100 = 766\,400.\end{aligned}$$

Если проверить по ограничениям, то получится, что объем ресурсов используется полностью, но введение в план площади картофеля 100 га приводит к уменьшению целевой функции (прибыли, что не выгодно с экономической точки зрения).

II. Корректировка по небазисным дополнительным переменным.

А. Ресурсы уменьшаются, если $\Delta y_i = y_i > 0$.

Например, имеем ограничение по использованию пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 1000.$$

$\sum x_1, x_2, x_3$ была максимальной и равна 1000, при этом $y_1 = 0$.

Если y_1 возрастал, то величина справа и слева уменьшалась, т. е. ресурс уменьшался.

Методика корректировки следующая.

1. Выбираем дополнительную переменную, которая стоит в ограничении по использованию того ресурса, который уменьшился или должен уменьшиться.

2. Максимальная величина определяется так же, как и в предыдущем случае.

3. Δy_i придаем значение в рамках возможного, которое определяет величину уменьшения ресурса.

4. Новое решение определяют по основной формуле корректировки.

Допустим, например, что создается фермерское хозяйство, площадью 150 га, т. е. $\Delta y_1 = y_1 = 150$. Тогда в кооперативе с площадью пашни 1000 га происходит уменьшение ресурса.

Б. Ресурсы увеличиваются, если $\Delta y_i = y_i \leq 0$.

Методика корректировки следующая.

1. Находим ресурс, по которому возможно увеличение.
2. Находим максимальную величину корректировки

$$\max \Delta y_i = \min \left| -\frac{A_i}{a_{ij}} \right|.$$

Она равна минимальному по модулю отрицательному частному от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем значению Δy_i величину корректировки со знаком «–» меньшую по модулю, чем максимально возможная.

4. На основе основной формулы корректировки осуществляем корректировку.

Допустим, что в предприятии может возрасти площадь пашни, т. е. $y_1 < 0$:

$$\frac{200}{-1} = -200; \quad \frac{2000}{-300} = -6,6; \quad \max \Delta y_i = -6,6.$$

Допустим, что фермерское хозяйство взяло у предприятия в аренду 5 га пашни: тогда $\Delta y_1 = -5$.

Значения остальных переменных получаем по изложенной выше методике.

III. Корректировка по базисным переменным.

Необходимость корректировки по базисным переменным может диктоваться тем, что ранее отработанные технологии изменяются или изменяются подходы к развитию отдельных отраслей.

Например, ранее Республика Беларусь ориентировалась на то, чтобы площадь зерновых не превышала 50 % и часть зерна при этом закупали.

Потребность в валюте вынуждает увеличить долю кормов от сенокосов и пастбищ для увеличения производства кормов, а освободившуюся часть пашни (до 10 %) использовать для производства зерна. Случай другой – экологическая безопасность. Технология очистки отходов животноводческих комплексов несовершенна. Поэтому актуальна проблема строительства не крупных, а средних животноводческих комплексов. Этому способствует и то обстоятельство, что животноводство надо развивать на собственных кормах.

Изложенное подчеркивает, что после получения решения может

потребоваться увеличение площади зерновых или уменьшение поголовья животных.

1. Выбираем небазисные переменные, которые будут участвовать в корректировке. Выбираем основные переменные в случае, если корректировка не должна предположить уменьшение какого-то ресурса.

2. По данным общей формулы корректировки находим, какой должна быть величина $\Delta x_j(\Delta y_i)$, с тем, чтобы базисная переменная $x_j^k(y_i^k)$ приняла новое значение

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - a_{ij}\Delta x_j(\Delta y_i), \quad j = 1.$$

Задаем значение $x_j^k(y_i^k)$ и определяем величину $\Delta x_j(\Delta y_i)$

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}}.$$

3. Находим максимальную величину корректировки по небазисной переменной, взятой для корректировки

$$\max \Delta x'_j(\Delta y'_i) = \min \frac{A_i}{a_{ij}};$$

а) если получится, что $\Delta x'_j(\Delta y'_i) > \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможная величина превышает требуемую, то в этом случае корректировку осуществляем, используя только один столбец;

б) если это требование не соблюдается, т. е. $\Delta x'_j(\Delta y'_i) < \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможное значение меньше требуемой величины, то в корректировке участвует не менее двух вектор-столбцов дополнительных переменных.

При этом на первом этапе $\Delta x_j(\Delta y_i)$ принимаем в размере

$$\Delta x'_j(\Delta y'_i), \text{ т. е. } \Delta x_j(\Delta y_i) = \Delta x'_j(\Delta y'_i).$$

Например, корректировку необходимо провести, чтобы $x_j^k = x_j = 700$. Используя небазисную переменную x_k , можем осуществлять корректировку, после которой x_j может принять значение 650, $x_j = 650$.

На следующем этапе берем новую небазисную переменную, за счет которой обеспечим приращение x_j на 50 единиц.

Задача 1. В связи с изменившимися производственными условиями внести корректировку в оптимальное решение экономической задачи.

Исходная информация. Используя алгоритм симплексного метода, получим оптимальное решение задачи – сочетание отраслей фермерского хозяйства при максимуме прибыли. Значения последней симплексной таблицы следующие (табл. 2.2).

Т а б л и ц а 2.2. Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_5	y_6	x_3	y_1
y_4	10	–1	0	1	1
y_2	50	–20	–20	–5	–10
x_4	30	0	1	0	0
y_3	600	10	–50	–5	10
x_1	20	–1	0	1	1
x_2	20	0	1	0	0
$F_{\max}$	63 000	800	1300	200	200

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) перечислить базисные и небазисные переменные, по которым необходима корректировка оптимального решения;

2) определить желаемую величину корректировки.

При корректировке по базисным переменным она равна:

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}},$$

где $\Delta x_j(\Delta y_i)$ – соответственно величина корректировки основной и дополнительной переменных, $\Delta x_j > 0$, $\Delta y_i > 0$, $\Delta y_i < 0$;

a_{ij} – коэффициент пропорциональности, стоящий в строке i в столбце j ;

$x_j(y_i)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных до корректировки;

$x_j^k(y_i^k)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных после корректировки;

3) рассчитать предельную величину корректировки по каждой из базисных и небазисных переменных:

а) $\max \Delta x_j = \min(+)\frac{A_i}{a_{ij}}$, где A_i – коэффициент свободных членов;

б) $\max \Delta y_i = \min(+)\frac{A_i}{a_{ij}}$, где $\Delta y_i > 0$;

в) $\max \Delta y_i = \min\left|(-)\frac{A_i}{a_{ij}}\right|$, где $\Delta y_i < 0$;

4) если желаемая величина корректировки по модулю не превышает предельную величину корректировки, то провести корректировку решения по формуле

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_0} a_{ij} \Delta x_j(\Delta y_i),$$

где j – номер столбца небазисной переменной, участвующей в корректировке;

J_0 – множество столбцов небазисных переменных, участвующих в корректировке;

5) найти скорректированное решение при условии, что в фермерском хозяйстве планируется посев многолетних трав; ресурсы пашни и кормовых единиц увеличиваются или уменьшаются;

6) найти новое решение при условии, что произойдут изменения в размерах отраслей (площадей посева зерновых, картофеля, поголовья коров), трудовые ресурсы будут полностью использоваться.

Задача 2. Провести корректировку оптимального решения (табл. 2.3):

- по основной небазисной переменной: $\Delta x_3 = 450$; $\Delta x_3 = 180$;
- по дополнительным небазисным переменным: $\Delta y_1 = -3$; $\Delta y_1 = 50$;
- по базисным переменным: $x_4^k = 350$, $y_3^k = 2000$.

Т а б л и ц а 2.3. Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	850	2	-0,06	0,7	0,06
x_2	300	-1	0,07	0,43	-0,02
y_3	2200	-190	-40	-100	-4
x_4	720	0,7	-0,01	-0,9	0,03
F	975 000	150	270	108	105

Задача 3. Провести корректировку оптимального решения (табл. 2.4):

- по основной небазисной переменной: $\Delta x_1 = 5$; $\Delta x_2 = 2000$;
- по дополнительным небазисным переменным: $\Delta y_2 = -10$;
 $\Delta y_3 = 15$;
- по базисным переменным: $x_4^k = 600$; $y_1^k = 700$.

Т а б л и ц а 2.4. Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_3	y_2	x_1	x_2
x_3	240	1	1	1	0
y_4	800	-0,5	-0,2	100	2
y_1	1500	-1	250	10	50
x_4	650	10	-12	3	-3
$F_{\min}$	540 000	-25	-2	-36	-8

Задача 4. Провести корректировку оптимального решения (табл. 2.5):

- по основной небазисной переменной: $\Delta x_3 = 650$; $\Delta x_3 = 100$;
- по дополнительным небазисным переменным: $\Delta y_1 = -5$;
 $\Delta y_1 = 100$;
- по базисным переменным: $x_4 = 350$, $x_4 = 500$; $y_3 = 2500$.

Т а б л и ц а 2.5. Последняя симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены, B_i	Небазисные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	850	2	-0,057	0,66	0,06
x_2	200	-1	0,066	0,43	-0,02
y_3	2100	-290	-50	-100	-4,4
x_4	620	0,65	-0,017	-0,85	0,03
F	875 000	150	268	106	103

Задача 5. Провести корректировку оптимального решения (табл. 2.6):

- по основной небазисной переменной: $\Delta x_1 = 5$; $\Delta x_2 = 1000$;
- по дополнительным небазисным переменным: $\Delta y_2 = -15$; $\Delta y_3 = 18$;
- по базисным переменным: $x_3 = 50$, $x_4 = 650$; $y_1 = 800$.

Т а б л и ц а 2.6. Последняя симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены, B_i	Небазисные			
		y_3	y_2	x_1	x_2
x_3	240	1	1	1	0
y_4	800	-0,5	-0,2	100	2
y_1	1000	-1	250	10	50
x_4	560	10	-12	3	-3
$F_{\min}$	452 000	-25	-2	-36	-8

Задача 6. Провести корректировку оптимального решения (табл. 2.7):

- по основной небазисной переменной: $\Delta x_4 = 750$; $\Delta x_3 = 100$; $\Delta x_5 = 50$;
- по дополнительным небазисным переменным, если использование ресурсов возрастает: $\Delta y_1 = -1500$; $\Delta y_4 = -100$; $\Delta y_5 = -45$;
- по дополнительным небазисным переменным, если использование ресурсов уменьшается: $\Delta y_1 = 2500$; $\Delta y_4 = 450$; $\Delta y_5 = 25$;
- по базисным переменным: $x_1^k = 9000$; $x_2^k = 350$; $x_6^k = 1500$; $y_3^k = 1300$, $y_2^k = 25\,000$.

Т а б л и ц а 2.7. Последняя симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные члены, B_i	Небазисные					
		y_1	x_4	y_4	x_3	y_5	x_5
y_3	1200	0,2	0,3	-0,5	0,2	0,6	-0,8
x_2	500	-1	-1	1	2	2,5	1
y_2	20 000	8	5	-10	-5	8	-4
x_1	8600	-2	4	2,5	4	5	2,5
x_6	1700	-1	-1	-2	0	0	0
y_6	3500	0,5	5	10	2	15	-2
$F_{\max}$	982 256	100	120	250	10	245	100

Вопросы по теме

1. Перечислите возможные причины проведения корректировки оптимального решения. Приведите конкретные примеры.
2. Приведите последовательность действий при корректировке оптимального решения по небазисным переменным.
3. Приведите основную формулу корректировки базисных переменных. Поясните условные обозначения.
4. В чем различие корректировки оптимального решения в случаях увеличения и уменьшения использования ресурсов?
5. Методика корректировки оптимального решения по базисным переменным.
6. Приведите формулу расчета требуемой величины корректировки.
7. В каких случаях проведение корректировки невозможно?

Т е м а 3. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

В процессе получения конечной продукции в производстве используются многие ресурсы. При этом расход одних и тех же ресурсов для получения продукции в разных организациях может быть неодинаковым. Все это происходит из-за разных почвенно-климатических условий, неодинаковых форм собственности, форм организации труда, несовпадения применяемых технологий. В результате при наличии одинакового количества ресурсов предприятия имеют разную прибыль, уровень рентабельности и т. д.

Поэтому необходимо определить ценность (оценку) каждого ресурса для конкретного предприятия с целью повышения эффективности их использования и определения последовательности их приобретения (освоения). Эти задачи можно решить, зная двойственные или объективно обусловленные оценки, получаемые при решении двойственной задачи.

Двойственные оценки показывают влияние отдельных ресурсов в формировании конечного продукта конкретного предприятия в данных экономических условиях. Двойственные оценки также могут служить *мерой дефицитности* ресурсов. *Дефицитный ресурс* – ресурс, который используется полностью по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а ресурс *избыточный* используется не полностью, имеет нулевую оценку.

Нулевая оценка избыточных ресурсов не означает отсутствия хозяйственной ценности таких ресурсов, а указывает всего лишь на их неполное и нерациональное использование. В изменившихся условиях избыточный ресурс может стать недостаточным.

Двойственные оценки получают в результате решения двойственной задачи (ДЗ), которую составляют на основании прямой задачи (ПЗ). Пусть имеем ПЗ. Приведем ограничения прямой задачи к единому виду типа « $\leq$ »:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq A_1; \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq A_2; \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &\geq A_3;\end{aligned}$$

или после преобразования

$$\begin{aligned}-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n &\leq -A_3; \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq A_m. \\F_{\max} &= \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots + \lambda_nx_n.\end{aligned}$$

Введем двойственные оценки по количеству ограничений прямой задачи: u_1 означает, на сколько единиц изменится функция, если использование первого ресурса изменится на 1; u_2 — аналогично, и по всем ограничениям типа « $\leq$ »; u_3 показывает, на сколько единиц возрастет функция, если объем ограничения или использование ресурса уменьшится на единицу. Итак, величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена на единицу.

Двойственная оценка имеет такую же единицу измерения, что и целевая функция прямой задачи.

Двойственная задача составляется по следующему правилу:

- 1) коэффициентами строк двойственной задачи будут являться коэффициенты столбцов прямой задачи, т. е. матрица коэффициентов ДЗ является транспонированной матрицей коэффициентов ПЗ;
- 2) знаки ограничений и целевая функция двойственной задачи противоположны знакам ограничений и целевой функции прямой задачи;
- 3) свободными членами двойственной задачи будут коэффициенты целевой функции прямой задачи;
- 4) коэффициентами целевой функции двойственной задачи будут являться свободные члены прямой задачи.

Примечание. Если в прямой задаче есть ограничения со знаком «=», то при составлении двойственной задачи знак ограничения выбирается исходя из условия двойственной задачи, т. е. если целевая функция двойственной задачи минимизируется, то знак ограничения будет «≥», если целевая функция максимизируется, то знак будет «≤».

Таким образом, имеем двойственную задачу:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 - a_{31}u_3 + \dots + a_{m1}u_m &\geq \lambda_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 - a_{32}u_3 + \dots + a_{m2}u_m &\geq \lambda_2; \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 - a_{3n}u_3 + \dots + a_{mn}u_m &\geq \lambda_n. \\ F_{\min} &= A_1u_1 + A_2u_2 + \dots + A_nu_n. \end{aligned}$$

Сформулируем задачу в общем виде:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных);

a_{ij} – коэффициент строки i столбца j ;

A_i – наличие ресурсов строки i ;

λ_j – оценочный коэффициент в столбце j .

Прямая задача имеет вид: найти x_j при условии

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \leq A_i; i \in I_0; F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j.$$

Двойственная задача имеет вид: найти u_i при условии

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \leq \lambda_j; j \in J_0; F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Основные теоремы двойственности носят следующий характер:

1) если в прямой задаче $F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j$, то в двойственной задаче $F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i$;

2) если двойственная оценка > 0 , то производственный ресурс, для которого она рассчитана, используется полностью, т. е. $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i$;

3) если двойственная оценка ресурса $= 0$, то производственный ресурс недоиспользуется, т. е. $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i$.

Итак, так как одинаковые ресурсы в каждом предприятии играют разную роль, их двойственные оценки для разных предприятий не совпадают.

Для составления двойственной задачи и нахождения двойственных оценок используем условие прямой задачи, решение которой было рассмотрено в предыдущей теме.

Условия прямой задачи:

1) по минимальному объему производства сыра № 1, ц:

$$x_1 \geq 45;$$

2) по минимальному объему производства сыра № 2, ц:

$$x_2 \geq 35;$$

3) по минимальному объему производства сыра № 3, ц:

$$x_3 \geq 120;$$

4) по использованию трудовых ресурсов, чел.-ч:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

5) по использованию электроэнергии, кВт/ч:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

6) по освоению кредитных средств, у. д. е.:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

Целевая функция – максимум прибыли:

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

Приводим все ограничения к одному знаку:

$$1) -x_1 \leq -45;$$

$$2) -x_2 \leq -35;$$

$$3) -x_3 \leq -120;$$

$$4) 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

$$5) x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

$$6) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

Вводим двойственные оценки:

u_1 – оценка производства 1 ц сыра № 1 (показывает, насколько увеличится прибыль, если объем производства сыра № 1 увеличить на 1 ц);

u_2, u_3 – оценка производства 1 ц сыра № 2 и № 3;

u_4 – оценка трудовых ресурсов (показывает, насколько увеличится прибыль, если ресурсы труда возрастут на 1 чел.-дн.);

1. Значение целевой функции двойственной задачи соответствует значению целевой функции прямой задачи, т. е. $F_{\min} = F_{\max} = 3925$.

2. Дополнительные небазисные переменные двойственной задачи соответствуют основным переменным прямой задачи и их значения берутся в строке целевой функции со знаком «+»:

$$y^{\text{ДЗ НБ}} = x^{\text{ПЗ БП}} = +\lambda_j^{\text{ДЗ}};$$

$$y_1^{\text{ДЗ НБ}} = x_1^{\text{ПЗ БП}} = 400; \quad y_2^{\text{ДЗ НБ}} = x_2^{\text{ПЗ БП}} = 35;$$

$$y_3^{\text{ДЗ НБ}} = x_3^{\text{ПЗ БП}} = 120.$$

3. Двойственные оценки, стоящие в небазисных переменных двойственной задачи, равны дополнительным переменным прямой задачи и читаются в строке целевой функции со знаком «+»:

$$u^{\text{ДЗ НБ}} = y^{\text{ПЗ БП}} = +\lambda_j^{\text{ДЗ}};$$

$$u_2^{\text{ДЗ БП}} = y_2^{\text{ПЗ НБ}} = 340;$$

$$u_4^{\text{ДЗ НБ}} = y_4^{\text{ПЗ БП}} = 175;$$

$$u_5^{\text{ДЗ НБ}} = y_5^{\text{ПЗ БП}} = 560;$$

$$u_1^{\text{ДЗ НБ}} = y_1^{\text{ПЗ БП}} = 355.$$

4. Базисные переменные двойственной задачи соответствуют небазисным переменным прямой задачи, значения которых равны нулю (рис. 3.2).

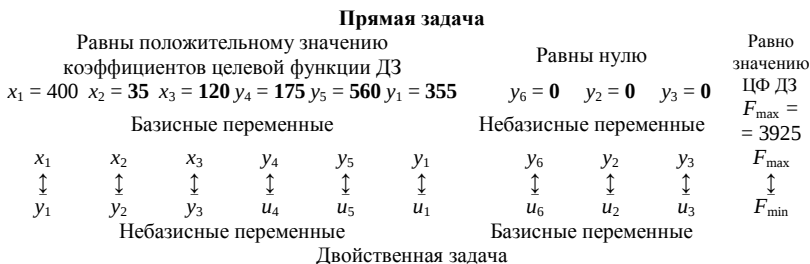


Рис. 3.2. Схема нахождения решения *прямой задачи* по последней итерации двойственной задачи

Также по последней таблице прямой задачи можно определить результат решения двойственной задачи (табл. 3.2, рис. 3.3).

Т а б л и ц а 3.2. **Оптимальное решение прямой задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_2	y_3
x_1	400	0,3	1,3	0,7
x_2	35	0	-1	0
x_3	120	0	0	-1
y_4	175	-0,7	-0,7	2,7
y_5	560	-0,3	2,7	4,3
y_1	355	0,3	1,3	0,7
$F_{\max}$	3925	2,7	3,7	1,3

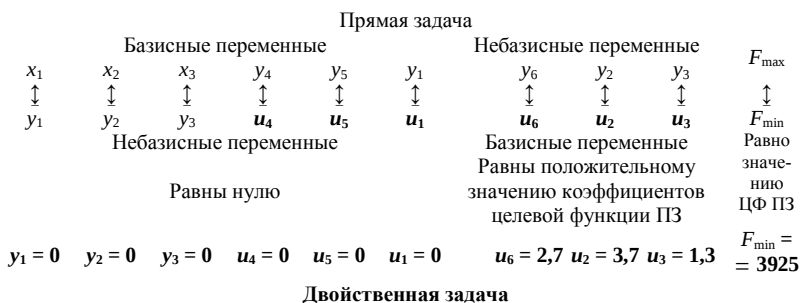


Рис. 3.3. Схема нахождения решения двойственной задачи по последней итерации прямой задачи

Итак, расчет двойственных оценок для ресурсов и продуктов по каждому предприятию позволяет провести детальный экономический анализ:

- во-первых, оценки позволяют соизмерять разнокачественные затраты и результаты, с их помощью можно оценивать последовательность проведения различных мероприятий с учетом их влияния на критерий оптимальности;

- во-вторых, двойственные оценки позволяют определить нормы заменяемости между ресурсами и продуктами, но так как замена одного ресурса другим возможна в определенных границах, то речь идет об относительной заменяемости с учетом влияния на конечный результат;

- в-третьих, оценки дают возможность расположить продукты по степени их эффективности.

Задачи для решения

Задача 1. На основании условий прямой задачи составить двойственную задачу:

1) $2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 100$;

2) $x_2 + x_3 \leq 10$;

3) $-x_1 + x_4 \geq 10$;

4) $x_4 \leq 20$.

$F_{\min} = 8x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$.

Задача 2. На основании условий прямой задачи составить двойственную задачу:

1) $2,5x_1 + 3,8x_2 + 1,9x_4 - 6,9x_5 \geq 158\,000$;

2) $3,6x_1 + 2,9x_3 + 2x_4 + 5,8x_5 \leq 250\,840$;

3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3000$;

4) $x_3 + x_5 \leq 14\,500$;

5) $x_1 + x_2 \geq 800$;

6) $37x_1 + 39x_2 + 42x_4 \geq 14\,000$.

$F_{\min} = 120x_1 + 240x_2 + 135x_3 + 114x_4 + 127x_5$.

Задача 3. По информации последней симплексной таблицы двойственной задачи (табл. 3.3) записать решение прямой задачи.

Т а б л и ц а 3.3. Оптимальное решение двойственной задачи

Базисные переменные	Свободный член	Небазисные переменные			
		u_2	u_4	u_3	u_1
u_1	740	0	1	1	1
y_2	125	1	0,5	0,5	-1
u_5	362	-1	-1	0	0
y_3	570	2,5	5,4	6,7	1,2
u_4	129	0	1	0	0
$F_{\max}$	248 100	115	212	135	450

Задача 4. По информации последней симплексной таблицы прямой задачи (табл. 3.4) записать решение двойственной задачи.

Т а б л и ц а 3.4. Оптимальное решение прямой задачи

Базисные переменные	Свободный член	Небазисные переменные			
		x_4	y_1	y_4	x_2
x_3	354	0,5	0,8	0,9	1
x_1	1270	2,5	5,4	6,7	1,2
y_5	8	1	0,5	0,5	-1
y_2	9154	0	-1	0	0
y_3	1000	0	1	0	0
$F_{\min}$	368 000	-25	-50	-23	-50

Вопросы по теме

1. Почему при наличии одинакового количества ресурсов предприятия получают разные результаты?
2. Для чего рассчитываются двойственные оценки?
3. Почему дефицитный ресурс имеет положительную двойственную оценку, а избыточный – нулевую?
4. Перечислите правила составления двойственной задачи.
5. Что означает двойственная оценка, введенная по ограничениям прямой задачи типа « $\leq$ » и « $\geq$ »?
6. Какую единицу измерения имеют двойственные оценки?
7. Почему одинаковые ресурсы в каждом предприятии имеют разные двойственные оценки?
8. В чем заключается экономический анализ значений двойственных оценок?
9. Как найти решение двойственной задачи по последней таблице (итерации) прямой задачи?
10. Как найти решение прямой задачи по последней таблице (итерации) двойственной задачи?

Т е м а 4. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

Сетевой график – это график типа сети, в котором фиксируется комплекс работ (операций) и событий, отражая их технологическую последовательность и взаимосвязь в процессе достижения цели.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

- 1) в сетевом графике не должно быть тупиков, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);
- 2) в сетевом графике не должно быть и событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;
- 3) не должно быть двух событий, связанных двумя или большим количеством работ;
- 4) в сети не должно быть контуров, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;
- 5) не должно быть петель, т. е. начало выполнения работы является и условием ее окончания.

Оптимизация проекта по ресурсам.

Задача 1. Необходимо распределить трудовые ресурсы во времени, т. е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имею-

щимися трудовыми ресурсами выполнить комплекс проектных работ в минимальный срок.

Исходная информация.

1. В распоряжении руководителя проектных работ имеется $30 + 0,2K$ человек.

2. На перерабатывающем комбинате необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 4.1).

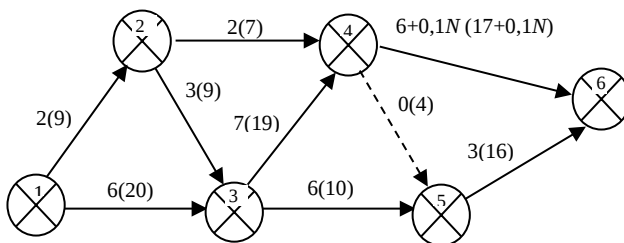


Рис. 4.1. Сетевой график выполнения комплекса проектных работ

3. Над дугами графика приведены продолжительность выполнения работ (t_{ij}) и в скобках – интенсивность потребления ресурса, т. е. необходимое для выполнения работы (i, j) число исполнителей в единице времени (v_{ij}).

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать ранний срок свершения событий:

а) $t_{p(1)} = 0$;

б) $t_{p(j)} = t_{p(i)} + t_{ij}$, где $t_{p(j)}$ – ранний срок свершения события j (последующего события) (рис. 4.2);

t_{ij} – продолжительность работы (i, j);

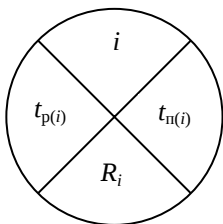


Рис. 4.2. Временные параметры событий:

i – номер события;

$t_{p(i)}$ – ранний срок свершения события i ;

$t_{n(i)}$ – поздний срок свершения события i ;

R_i – резерв времени события i

в) если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i , то ранний срок свершения события j определяется как максимальная сумма ранних сроков свершения событий i и продолжительность работ, входящих в событие j (рис. 4.3):

$$t_{p(j)} = \max_{(i,j) \in U_j^+} \{t_{p(i)} + t_{ij}\}, (j = \overline{2, n});$$

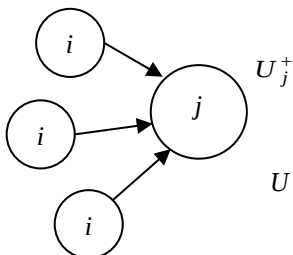


Рис. 4.3. Фрагмент сетевого графика:

U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие j

2) определить продолжительность критического пути ($t_{кр}$):

$$t_{кр} = t_{n(n)};$$

3) на сетевом графике рассчитать поздний срок свершения событий:

а) $t_{n(n)} = t_{кр}$, где $t_{кр}$ – продолжительность критического пути;

б) $t_{n(i)} = t_{n(j)} - t_{ij}$, где $t_{n(j)}$ – поздний срок свершения события j (предшествующего события);

в) если нескольким событиям j предшествует свершение одного события i , то поздний срок свершения события i определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий j и продолжительности работ, выходящих из события i (рис. 4.4):

$$t_{n(i)} = \min_{(i,j) \in U_i^-} \{t_{n(j)} - t_{ij}\}, (i = \overline{1, n-1});$$

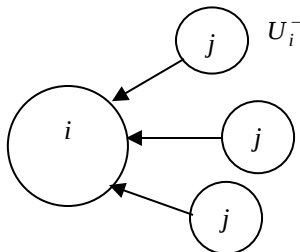


Рис. 4.4. Фрагмент сетевого графика:

U_i^- – множество всех работ, выходящих из события i

4) на сетевом графике рассчитать резерв времени событий:

$$R_i = t_{п(i)} - t_{р(i)};$$

5) рассчитать временные параметры работ (табл. 4.1):

Т а б л и ц а 4.1. Временные параметры работ

Условные обозначения работ (i, j)	Продолжительность работы, t_{ij}	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени работы		
		начало работы, $t_{р.н(i,j)}$	окончание работы, $t_{р.о(i,j)}$	начало работы, $t_{п.н(i,j)}$	окончание работы, $t_{п.о(i,j)}$	полный $R_{п(i,j)}$	свободный $R_{с(i,j)}$	независимый $R_{н(i,j)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...

а) ранний срок начала работы (i, j) : $t_{р.н(i,j)} = t_{р(i)}$;

б) ранний срок окончания работы (i, j) : $t_{р.о(i,j)} = t_{р.н(i,j)} + t_{ij}$;

в) поздний срок окончания работы (i, j) : $t_{п.о(i,j)} = t_{п(j)}$;

г) поздний срок начала работы (i, j) : $t_{п.н(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{ij}$;

д) полный резерв времени работы (i, j) :

$$1. R_{п(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{р.н(ij)} - t_{i,j};$$

$$2. R_{п(i,j)} = t_{п(j)} - t_{р(i)} - t_{i,j};$$

$$3. R_{п(i,j)} = t_{п.о(i,j)} - t_{р.о(ij)};$$

е) свободный резерв времени работы (i, j) :

$$1. R_{с(i,j)} = t_{р(j)} - t_{р(i)} - t_{ij};$$

$$2. R_{с(i,j)} = R_{п(i,j)} - R_{(j)};$$

ж) независимый резерв времени работы (i, j) :

$$1. R_{н(i,j)} = t_{р(j)} - t_{п(i)} - t_{ij};$$

$$2. R_{н(i,j)} = R_{п(i,j)} - R_{(i)} - R_{(j)};$$

б) построить сетевой график в календарной шкале времени по ранним срокам начала и окончания работ (т. е. график Ганта), спроецировать на оси времени (ot) начало и окончание каждой работы, выделив промежутки;

7) построить эпюру интенсивности потребления ресурса (без учета ограничения), просуммировать в промежутках оси времени интенсивность потребления ресурсов.

Если для каждого промежутка суммарная интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то распределение ресурсов считается удовлетворительным;

8) в противном случае оптимизировать использование ресурсов:

а) все работы, сумма интенсивности использования ресурсов которых не превышает запасов ресурса, оставляем в первоначальном положении;

б) если после прибавления интенсивности использования ресурса какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше их запасов, то эту работу сдвигают вправо на величину рассматриваемого промежутка;

в) если суммарное потребление ресурсов больше их запасов, а необходимо выполнить несколько работ, то устанавливают очередность их выполнения:

1. В первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке.

2. Затем те работы, которые имеют наименьший полный резерв времени $R_{n(i,j)}$.

3. Если полные резервы времени для некоторых работ равны, то выполняют сначала ту работу, для которой характерна наименьшая интенсивность использования ресурсов.

4. Если интенсивность использования ресурсов равна, то работы из промежутка выбирают в произвольном порядке.

5. Включение новых работ для выполнения в конкретный промежуток происходит тогда, когда для этого имеются ресурсы, в противном случае работу или работы сдвигают вправо на промежуток;

9) с учетом вышеизложенных корректировок построить новый график Ганта и эпюру интенсивности потребления ресурса. Если интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то задача решена. В противном случае оптимизацию графика повторяем с п. 8;

10) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его.

Оптимизация проекта по времени (вариант 1).

Задача 2. Необходимо минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал $20 + 0,5K$ дней.

Исходная информация.

1. На предприятии необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 4.5).

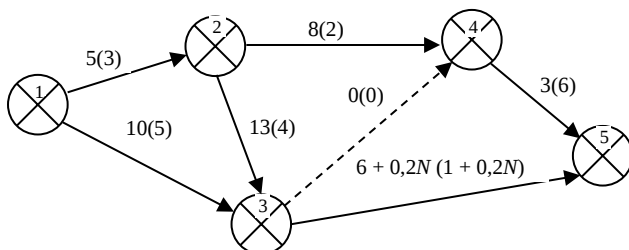


Рис. 4.5. Сетевой график выполнения комплекса работ

2. Для каждой работы над дугами приведены продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $K_{12} = 0,4$; $K_{13} = 0,6$; $K_{23} = 0,2$; $K_{24} = 0,3$; $K_{35} = 0,1$; $K_{45} = 0,5$.

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;

2) ввести переменные задачи, обозначающие величину дополнительных вложений в работы, время начала и окончания работ;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум суммарных затрат дополнительных вложений:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j) \in \vec{e}} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1,j}^H = 0, (1, j) \in \bar{e}.$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{n-1,n}^0 \leq t_0, (i, n) \in \bar{e}.$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^0 - t_{ij}^H \geq d_{ij}, (i, j) \in \bar{e}.$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^0 - t_{ij}^H = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \bar{e}.$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^H \geq t_{ij}^0, i, j, r \in E.$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^H, t_{ij}^0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \bar{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события работы;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\bar{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу ij , позволяющая сократить время ее выполнения;

t_{ij}^H – время начала работы ij ;

t_{ij}^0 – время окончания работы ij .

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij ;

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных вложений в работу ij ;

t_{ij} – продолжительность выполнения работы ij ;

4) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Оптимизация проекта по времени (вариант 2).

Задача 3. Необходимо минимизировать срок выполнения проекта за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения плановых работ на новый календарный год имеет следующий вид (рис. 4.6).

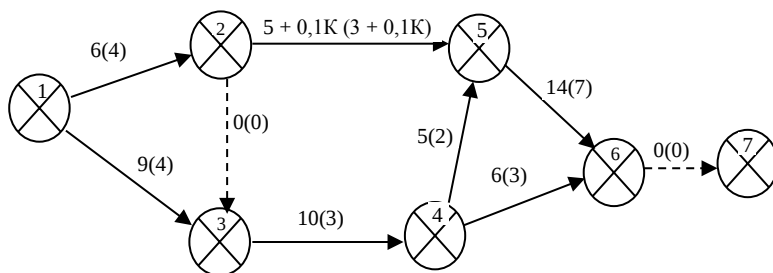


Рис. 4.6. Сетевой график выполнения плановых работ

2. Для каждой работы над дугами приведены продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $K_{12} = 0,3$; $K_{13} = 0,9$; $K_{25} = 0,1$; $K_{34} = 0,4$; $K_{45} = 0,2$; $K_{46} = 0,7$; $K_{56} = 0,8$.

4. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере $35 + 0,2N$ у. д. е.

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;

2) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи, согласно условным обозначениям вышеизложенной задачи 2;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальный срок выполнения проекта:

$$F_{\min} = t_{n-1,n}^0 \cdot \prod_{(i,n) \in \vec{e}}$$

При условиях:

1. По использованию дополнительных вложений:

$$\sum_{(i,j) \in \vec{e}} x_{ij} \leq B.$$

2. По времени начала работ проекта:

$$t_{1,j}^H = 0, (1, j) \in \vec{e}.$$

3. По продолжительности работ:

$$t_{ij}^0 - t_{ij}^H \geq d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

4. По сокращению времени продолжительности работ:

$$t_{ij}^0 - t_{ij}^H = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e}.$$

5. По последовательности выполнения работ:

$$t_{jr}^H \geq t_{ij}^0, i, j, r \in E.$$

6. Неотрицательность переменных:

$$t_{ij}^H, t_{ij}^0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Условные обозначения те же, как и для вышеизложенной модели задачи 2.

В известные величины добавляют: B – количество дополнительных вложений, выделяемых для сокращения продолжительности работ;

4) решить экономико-математическую задачу на персональном компьютере;

- 5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;
- 6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;
- 7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Оптимизация проекта по стоимости.

Задача 4. Необходимо минимизировать стоимость проектных работ при условии выполнения проекта не более чем за $25 + 0,2N$ дней.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ проекта имеет следующий вид (рис. 4.7).

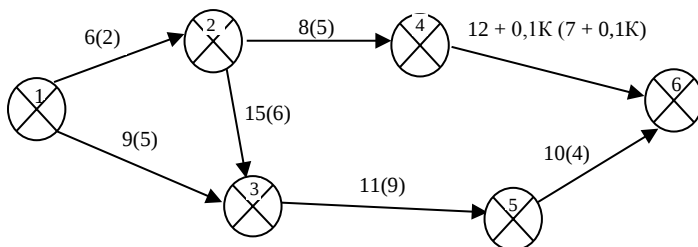


Рис. 4.7. Сетевой график выполнения работ проекта

2. Для каждой работы над дугами приведены нормальная (t_{ij}) (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij} и в скобках минимальная продолжительность работ d_{ij} (т. е. срочный режим выполнения работ).

3. Затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Так, срочному режиму выполнения работ (d_{ij}) соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij} , а наибольшей продолжительности работ (D_{ij}) – наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 4.2).

На основе приведенной информации необходимо:

- 1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;
- 2) рассчитать коэффициент дополнительных затрат для каждой работы, который показывает, на сколько увеличится стоимость работы (i, j) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени:

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}};$$

- 3) рассчитать минимальную и максимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j) \in \bar{e}} c_{ij};$$

$$F_{\max} = \sum_{(i,j) \in \bar{e}} C_{ij};$$

4) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

Т а б л и ц а 4.2. Параметры сетевого графика

Параметры	Работы						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 6)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	2	5	6	5	9	7 + 0,1K	4
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	60	40	90	60	40	80 + 0,2N	70
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	6	9	15	8	11	12 + 0,1K	10
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	20	15	30	35	25	50 + 0,2N	40
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат							

5) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j) \in \bar{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^0 - t_{ij}^H - d_{ij})].$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта – $t_{1,j}^H = 0, (1, j) \in \bar{e}$.
2. По времени завершения проекта – $t_{n-1,n}^0 \leq t_0, (i, n) \in \bar{e}$.
3. По предельной продолжительности работ – $d_{ij} \leq t_{ij}^0 - t_{ij}^H \leq D_{ij}, (i, j) \in \bar{e}$.

4. По последовательности выполнения работ – $t_{jr}^H \geq t_{ij}^0, i, j, r \in E$.

5. Неотрицательность переменных – $t_{ij}^H, t_{ij}^0 \geq 0, (i, j) \in \bar{e}$.

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события работы;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\bar{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

t_{ij}^H – время начала работы ij ;

t_{ij}^0 – время окончания работы ij .

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij ;

C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij ;

h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат, показывающий увеличение стоимости работы ij при уменьшении ее продолжительности на единицу времени;

D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij ;

6) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

7) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

8) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

9) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Т е м а 5. ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Математическая теория игр занимается выработкой рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций (когда сталкиваются интересы конкурирующих сторон), т. е. разрабатываются предложения по наилучшим вариантам поведения, которые обеспечивали бы оптимальный результат. В качестве выигрыша могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов, себестоимость, прибыль и т. д.

Рассмотрим основные категории применяемых моделей. *Игра* – это совокупность мероприятий, состоящая из ряда действий сторон. Участвующие стороны являются *игроками*. *Стратегия* – это свод правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации в зависимости от сложившейся обстановки. Правила игры – система условий, регламентирующих возможные варианты действий сторон. Выбор игроком одного из предусмотренных правилами вариантов поведения является этапом или ходом игры. Выбирая ту или иную стратегию, каждый из игроков стремится удовлетворить свои интересы: первый – обеспечить себе максимально возможный выигрыш, а второй – минимально возможный проигрыш.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько стратегий, то такая стратегия называется смешанной, а ее элементы – чистыми стратегиями, т. е. смешанная стратегия есть комбинация чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одного из игроков, выраженный в количественной форме. Оптимальной стратегией будет та, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный выигрыш.

Итак, каждая формализованная игра характеризуется:

- 1) количеством субъектов, которые называются игроками;
- 2) возможным для каждого из игроков набором действий, называемых стратегиями;
- 3) функциями выигрыша, отражающими степень удовлетворения интересов каждого из игроков;
- 4) результатом игры, к которому приводят выбранные игроками стратегии.

Задачи теории игр можно классифицировать с учетом различных признаков:

- в игре могут сталкиваться интересы двух (игра парная) или нескольких (игра множественная) противников;
- по характеру выигрышей игры делятся: а) с нулевой суммой; б) с ненулевой суммой;
- в зависимости от количества стратегий игры бывают конечные или бесконечные;
- по количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода) и многоходовые, которые в свою очередь бывают позиционные, стохастические, дифференциальные и др.;
- если одна сторона не является сознательно действующим против-

ником (спрос населения при выборе рынка сбыта, природно-климатические условия при выборе участка для посева и т. п.), то принятие оптимальных управленческих рекомендаций основывается на теории статистических решений, и поэтому такие игры называются статистическими, или игры с «природой».

5.1. Парная матричная игра

Специфика задачи парной игры в том, что здесь имеется игра двух лиц с нулевой суммой, в которой одна сторона проигрывает столько, сколько выигрывает другая.

Методические указания. У каждого из двух игроков A и B имеется конечное число возможных действий (чистых стратегий) с числом m и n соответственно. Условие игры записывают в форме платежной матрицы (табл. 5.1), а игру называют прямоугольной, или матричной.

Т а б л и ц а 5.1. Схема платежной матрицы

A_i	B_j			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Такое представление матричной игры означает, что если игрок A использует стратегию i , а игрок B – стратегию j , то платеж игроку A за счет B составит a_{ij} . Выигрыши могут выражаться и отрицательными числами. При $a_{ij} < 0$ игрок A платит игроку B сумму $|a_{ij}|$. Это означает, что в подобном случае фактически выигрывает игрок B .

Существует ряд методов решения матричных игр. Если матрица игры имеет одну из размерностей, равную двум ($2 \times n$ или $m \times 2$), то решение может быть получено графически. Не вдаваясь в подробности его описания, рассмотрим другой способ.

Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку A максимальный выигрыш, а игроку B – минимальный проигрыш. Поэтому стратегия игрока A называется оптимальной, если при ее применении его выигрыш не уменьшается, какими бы стратегиями не пользовался игрок B . Оптимальной для игрока B будет стратегия, при использовании которой его

проигрыш не увеличивается, какие бы стратегии не применял игрок A . Известно, что в теории игр основополагающим является принцип осторожности, в соответствии с которым каждый игрок, считая своего партнера по игре разумным противником, выбирает свои стратегии исходя из предположения, что соперник не упустит ни единой возможности использовать любую его ошибку в своих интересах.

Решение задачи. Предположим, что игроку A надлежит сделать свой выбор. Анализируя платежную матрицу (табл. 5.1), нужно найти для каждой чистой стратегии минимальное значение α_i ожидаемого выигрыша, а затем из всех найденных значений – наибольшее (а также соответствующую ему чистую стратегию). Ее называют максиминной, поскольку такая стратегия отвечает следующей величине:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Данная величина называется нижней чистой ценой игры, или максимином.

В свою очередь, игрок B , стремясь минимизировать проигрыш, при выборе наиболее предпочтительной стратегии поступает так: сначала для каждой чистой стратегии находит максимально возможный проигрыш, а затем среди этих значений выбирается минимальное, которое и укажет приемлемую стратегию. В данном случае верхняя чистая цена игры, или минимакс, равен:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Следовательно, максимин показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок A , правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока B . С другой стороны, минимакс показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока B при правильном выборе им своих чистых стратегий независимо от действий игрока A .

Таким образом, правильно используя чистые стратегии, игрок A обеспечит себе выигрыш не менее α , а игрок B в результате правильного применения своих чистых стратегий не позволит игроку A выиграть больше, чем β . Если $\alpha = \beta$, то такая игра имеет седловую точку, а ее решение лежит в области чистых стратегий: оптимальными будут максиминная и минимаксная стратегии, а ценой игры (v) – седловой элемент платежной матрицы. Если игрок B отклонится от своей мини-

максной стратегии, его проигрыш может только увеличиться. Аналогично отклонение игрока A от своей максиминной стратегии ведет к уменьшению его выигрыша. Значит, наиболее предпочтительные стратегии в игре с седловой точкой обладают свойством устойчивости, создают ситуацию равновесия. Она может возникнуть в игре тогда, когда каждый из игроков выбирает свою оптимальную стратегию и получает соответственно максимальный гарантированный выигрыш и минимальный гарантированный проигрыш, величины которых совпадают.

Пример 1. Две фирмы занимаются реализацией однотипных товаров. Фирма A рекламирует продукцию через следующие виды печатной рекламы: буклеты (A_1), каталоги (A_2) и проспекты (A_3). Фирма B в дополнение к использованию буклетов (B_1), каталогов (B_2) и проспектов (B_3) рассылает также информационные письма (B_4). В зависимости от деятельности маркетинговых отделов каждая из фирм может привлечь на свою сторону часть покупателей конкурента. Приведенная ниже матрица характеризует процент покупателей, которые привлечены или потеряны фирмой A (табл. 5.2).

Необходимо основываться на обеспечении наилучшего результата из наихудших для каждого игрока.

Т а б л и ц а 5.2. Платежная матрица привлечения покупателей, %

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	36	–8	36	–12
A_2	24	20	24	36
A_3	–8	16	–36	20

Решение. Стратегии фирмы A . Если фирма A выбирает стратегию A_1 , то независимо от того, что предпринимает фирма B , наихудшим результатом является потеря фирмой A 12 % рынка в пользу фирмы B (минимум элементов первой строки платежной матрицы). Аналогично при выборе стратегии A_2 наихудшим исходом для фирмы A является увеличение рынка на 20 % за счет фирмы B . Наихудшим исходом при выборе стратегии A_3 является потеря фирмой A 36 % в пользу фирмы B . Итак, чтобы достичь наилучшего результата из наихудших, фирма A выбирает стратегию A_2 .

Стратегии фирмы B . Так как элементы матрицы являются платежами фирмы A , критерий наилучшего результата из наихудших для фирмы B соответствует выбору минимаксного значения.

Максимальный элемент первого столбца (первой стратегии второго игрока) равен 32, второго – 20, третьего – 36, четвертого – 32; минимальное значение из них равно 20. В результате приходим к выводу, что выбором фирмы B является стратегия B_2 .

Вывод. Оптимальным решением игры является выбор стратегий A_2 и B_2 , т. е. обеим фирмам следует проводить рекламу с помощью каталогов. При этом выигрыш будет в пользу фирмы A , так как ее рынок увеличится на 20 %. Это свидетельствует о том, что цена игры равна 20 % и что фирмы A и B используют стратегии, соответствующие седловой точке.

Полученное решение гарантирует, что ни одной из фирм нет смысла выбирать другие стратегии. Действительно, если фирма B перейдет к другой стратегии (B_1 , B_3 или B_4), то фирма A может сохранить свой выбор стратегии A_2 , что приведет к большей потере рынка фирмой B (24 или 32 %). По тем же причинам фирме A нет смысла использовать другую стратегию.

Задачи для решения

Задача 1. Определите нижнюю и верхнюю цену игры, которая задана следующей платежной матрицей:

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1,0	1,2	1,6
A_2	1,9	1,4	1,6
A_3	1,4	1,2	1,2

Задача 2. Дана матричная игра с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить максиминную стратегию первого игрока, минимаксную стратегию второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры.

Задача 3. Завод тракторных запасных частей (З) реализует свою продукцию в розничной торговле. Специалисты коммерческого отдела завода рассчитали объемы денежной выручки, которая может быть

получена при различных вариантах появления аналогичных деталей на рынке, которые поставит конкурентная фирма K (табл. 5.3).

Т а б л и ц а 5.3. Платежная матрица реализации деталей, тыс. у. д. е.

$З_i$	K_j		
	K_1	K_2	K_3
$З_1$	50	60	80
$З_2$	80	70	70
$З_3$	90	70	60

Необходимо определить оптимальную стратегию продажи деталей для завода, применение которой позволит добиться наибольшего объема выручки от реализованных товаров на данном рынке.

Задача 4. Сельскохозяйственное предприятие занимается переработкой молока (A) и поставляет на рынок цельно-молочную продукцию. Специалисты отдела маркетинга рассчитали объемы денежной выручки для своей организации, которая может быть получена при различных вариантах появления продуктов конкурирующей фирмы (B) на данном рынке (табл. 5.4). Необходимо обосновать стратегию, применение которой позволит добиться того, что среднеожидаемое количество выручки от проданных товаров будет наибольшим, что бы не предпринимал конкурент.

Т а б л и ц а 5.4. Платежная матрица выручки, тыс. у. д. е.

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1000	1200	1600
A_2	1600	1400	1400
A_3	1800	1400	1200

5.2. Статистическая игра

Статистические игры, или игры с природой, – это ситуации, где существует неизвестность поведения противоположной стороны под влиянием случайных факторов. Здесь два игрока: а) природа, т. е. вся совокупность внешних обстоятельств, безразличная к результату игры; б) статистик как сознательный игрок.

При решении задач различают две ситуации: а) если вероятности состояний природы неизвестны, то речь идет о проблеме выбора в условиях неопределенности; б) если вероятности состояний природы

известны, то соответственно – в условиях риска. Для каждой из ситуаций существуют свои критерии, т. е. математическое обоснование выбора наилучшей стратегии.

Пример 2. Фермер занимается выращиванием различной сельскохозяйственной продукции (S_1, S_2, S_3), при реализации которой получает прибыль, которая зависит от уровня спроса (M_1, M_2, M_3). Средняя величина прибыли за предыдущие годы при каждой паре стратегий (S_i, M_j) представлена в табл. 5.5. Возможные вероятности проявления ситуаций (M_j): $p_1 = 0,25, p_2 = 0,41, p_3 = 0,34$. Для расчета критерия Гурвица $\lambda = 0,6$.

Т а б л и ц а 5.5. Платежная матрица дохода от сбыта сельскохозяйственной продукции, тыс. у. д. е.

Стратегия природы и исследователя	M_1	M_2	M_3
S_1	69,5	74	110,25
S_2	76,25	81,75	102,25
S_3	96,5	76,25	73,75

Решение. Если известны вероятности, с которыми реализуются состояния природы (условиях риска), для принятия решений используется *критерий Байеса*. Он предполагает, что оптимальной будет чистая стратегия A_i , при которой максимизируется средний выигрыш статистика (либо минимизируются средние издержки):

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j, i = \overline{1, m}.$$

Если в задаче отсутствует информация о вероятностях, с которыми реализуются стратегии природы, то, имея ситуацию неопределенности, используют следующие критерии.

$$S_1 = 69,5 \cdot 0,25 + 74 \cdot 0,41 + 110,25 \cdot 0,34 = 85,20;$$

$$S_2 = 76,25 \cdot 0,25 + 81,75 \cdot 0,41 + 102,25 \cdot 0,34 = 87,35;$$

$$S_3 = 96,5 \cdot 0,25 + 76,25 \cdot 0,41 + 73,75 \cdot 0,34 = 80,46.$$

Итак, максимальный средний доход будет достигнут при реализации стратегии S_2 (87,35).

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновероятности:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \frac{1}{n}.$$

Оптимальной по критерию Лапласа считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш статистика при равенстве всех априорных вероятностей:

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Итак, наступление любого возможного состояния спроса с точки зрения равновероятности приводит к тому, что $p_1 = p_2 = p_3 = 0,333$ и тогда нахождение функции решений осуществляется с помощью критерия Лапласа:

$$S_1 = (69,5 + 74 + 110,25) \cdot 0,333 = 84,50;$$

$$S_2 = (76,25 + 81,75 + 102,25) \cdot 0,333 = 86,66;$$

$$S_3 = (96,5 + 76,25 + 73,75) \cdot 0,333 = 82,08.$$

$$\max (84,50, 86,66, 82,08) = 86,66 (S_2).$$

Критерий Вальда – это максиминный критерий крайнего пессимизма, т. е. выбирается наилучшая альтернатива из наихудших: извлекается самый маленький результат a_{ij} из каждой строки таблицы и выбирается та из них, в которой находится наибольшее из этих чисел. Исходя из этого, игрок выбирает такую чистую стратегию A_i , при которой обеспечивается максимум минимального выигрыша, т. е. максиминную стратегию, при которой выигрыш – нижняя чистая цена игры:

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Итак, минимальное значение дохода по стратегии $S_1 = 69,5$, по $S_2 = 76,25$, по $S_3 = 73,75$, а оптимальная из них S_2 , как имеющая наибольший доход (т. е. гарантированный максимальный доход в наихудших условиях по критерию Вальда определен на уровне 76,25 тыс. у. д. е.).

Критерий Сэвиджа, как и предыдущий, является критерием крайнего пессимизма, потому что статистик исходит из предположения,

что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм максиминного критерия Вальда путем замены платежной матрицы матрицей риска и рекомендует в качестве оптимальной выбирать ту чистую стратегию A_i , при которой минимизируется величина максимального риска:

$$r = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Риском называют разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем при выбранной стратегии:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij};$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij},$$

где β_j – максимальный элемент j -го столбца.

Итак, определение тактики выбора для исследователя по критерию Сэвиджа основывается на попытке минимизировать потери дохода. В данном случае выбирается стратегия, при которой величина потерь дохода в наихудших условиях принимает наименьшее значение.

По расчетам $\beta_1 = 96,5$; $\beta_2 = 81,75$; $\beta_3 = 110,25$. Матрица рисков будет иметь вид (табл. 5.6). В эту матрицу добавляем столбец, содержащий максимальный риск для каждой стратегии.

Т а б л и ц а 5.6. Матрица рисков

Показатели	M_1	M_2	M_3	$\max_j r_{ij}$
S_1	27,00	7,75	0	27,00
S_2	20,25	0	8,00	20,25
S_3	0	5,5	36,50	36,50

Из максимальных рисков фермер выбирает минимальный: $\min(27,00; 20,25; 36,50) = 20,25$, т. е. минимальные потери в размере 20,25 тыс. у. д. е. будут при осуществлении стратегии S_2 .

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Исходя из субъективных соображений, в данный критерий вводится некоторый коэффициент λ . В области чистых стратегий оптимальной по Гурвицу считается стратегия, найденная из условия:

$$\max_i \left[\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right], \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (крайнего пессимизма). Если $\lambda = 0$, то получаем критерий крайнего оптимизма, ибо рассчитываем на наилучшее из наилучших условий. Если λ принять близкой к 1, то это позволяет говорить о желании подстраховаться в данной ситуации, когда о состоянии природы ничего не известно.

Если использовать $\lambda = 0,6$, то в этом случае:

$$S_1 = 0,6 \cdot 69,5 + (1 - 0,6) \cdot 110,25 = 85,8;$$

$$S_2 = 0,6 \cdot 76,25 + (1 - 0,6) \cdot 102,25 = 86,65;$$

$$S_3 = 0,6 \cdot 73,75 + (1 - 0,6) \cdot 96,5 = 85,82.$$

Оптимальная стратегия: $\max(85,8, 86,65, 85,82) = 86,65 (S_2)$.

Анализ показывает, что, находя решение статистической игры в чистых стратегиях, рассчитанные критерии чаще указывают на выбор альтернативы S_2 .

Задачи для решения

Задача 1. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия, т. е. стратегию продаж изделий ($C_1, C_2, C_3, H_1, H_2, H_3$).

Исходная информация.

Предприятие планирует продажу старых товаров (C_1, C_2, C_3) при наличии новых (H_1, H_2, H_3). Выигрыш от продажи товаров (a_{ij}) и условные вероятности продажи (p_{ij}) приведены в табл. 5.7.

Т а б л и ц а 5.7. Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.

Старые товары	Новые товары		
	$H_1(p)$	$H_2(p)$	$H_3(p)$
C_1	7 (0,6)	4 (0,3)	2 (0,1)
C_2	6 (0,3)	1 + 0,1N (0,1)	5 (0,6)
C_3	3 (0,2)	3 + 0,1K (0,3)	6 (0,5)

Задача 2. Требуется определить наиболее целесообразные варианты технологической переработки сырья овощеконсервного завода.

Исходная информация.

Коммерческая служба предприятия может принять один из четырех технологических способов переработки (A_1, A_2, A_3, A_4) при возможных состояниях среды: Π_1 – сырье поступает первого сорта при первом состоянии рынка сбыта; Π_2 – сырье поступает первого сорта при втором состоянии рынка сбыта; Π_3 – сырье поступает второго сорта при первом состоянии рынка сбыта; Π_4 – сырье поступает второго сорта при втором состоянии рынка сбыта (для критерия Гурвица $\lambda = 0,7$).

Т а б л и ц а 5.8. Прибыль от реализации консервов, у. д. е.

Технологические способы переработки	Ежедневный сбыт консервов (Π_j)			
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	520	440	280	200
A_2	400	320	560	480
A_3	480	400	400	320
A_4	520	440	360	280

Задача 3. Требуется обосновать оптимальную стратегию выпуска новых видов продукции для молокозавода.

Исходная информация.

На молокозаводе готовятся к переходу на выпуск новых видов продукции для освоения новых рынков сбыта. При этом возможны четыре решения (A_1, A_2, A_3, A_4), каждому из которых соответствует определенная модификация выпускаемой продукции. Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки (степени обеспеченности производства материальными ресурсами), которая может быть трех видов: Π_1, Π_2, Π_3 . Каждому сочетанию решений A_i и обстановки Π_j соответствует определенный выигрыш в виде дохода от продажи новых видов продукции (табл. 5.9).

Т а б л и ц а 5.9. Платежная матрица дохода от сбыта продукции, тыс. у. д. е.

A_i	Π_j		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	4,8	0,6	2,1
A_2	4,2	1,2	1,8
A_3	1,5	2,1	2,4

Задача 4. Необходимо выбрать оптимальную стратегию продажи товаров для агроторговой фирмы.

Исходная информация.

Фирма планирует реализацию овощной продукции в зимний сезон, учитывая возможные варианты покупательского спроса P_j (низкий, средний, высокий, очень высокий). Служба маркетинга разрабатывает три варианта стратегий сбыта товаров на различных рынках A_i . Объем товарооборота, зависящий от стратегий и покупательского спроса, представлен в табл. 5.10 (для критерия Гурвица $\lambda = 0,7$).

Т а б л и ц а 5.10. Платежная матрица товарооборота, тыс. у. д. е.

A_i	P_j		
	P_1	P_2	P_3
A_1	8,12	6,42	8,28
A_2	8,26	7,86	8,16
A_3	7,08	8,04	8,35

Задача 5. Требуется обосновать вариант модификации производства товара, величина предложения которого обеспечивает предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3).

Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса, приведены в табл. 5.11.

Т а б л и ц а 5.11. Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2	2,3	$2,2 + 0,1N$
T_2	2,1	$2,4 - 0,1K$	2,3
T_3	$2,0 + 0,1K$	2,2	2,5

Задача 6. Фермер может сбывать свинину на одном из трех городских рынков (P_1, P_2, P_3). В зависимости от уровня спроса-предложения и уровня обслуживания (B_1, B_2, B_3) средние цены на свинину на рынках сбыта различные (табл. 5.12).

Таблица 5.12. Средние цены на свинину на городских рынках в зависимости от уровня спроса/предложения (у. д. е/кг) и вероятность появления цены

Рынки сбыта	Уровень спроса-предложения и вероятность появления цены		
	$B_1 (p_1 = 0,4)$	$B_2 (p_2 = 0,4)$	$B_3 (p_3 = 0,2)$
P_1	30	24	26
P_2	32	28	30
P_3	33	26	28

Требуется обосновать цены и место сбыта продукции с помощью критериев Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица ($\lambda = 0,5$).

Задача 7. Коммерческий банк планирует привлечь денежные ресурсы. Для выбора имеются три возможные стратегии: A_1 – привлечь ресурсы в объеме 300 тыс. у. д. е.; A_2 – 350 тыс. у. д. е.; A_3 – 400 тыс. у. д. е. Спрос на ресурсы банка (Π_j) возникнет в объеме 300, 350, 400 тыс. у. д. е. Платежная матрица, представленная в табл. 5.13, показывает процентную маржу банка при различных вариантах.

Таблица 5.13. Элементы платежной матрицы, тыс. у. д. е.

A_i	Π_j		
	$\Pi_1 (p_1 = 0,3)$	$\Pi_2 (p_2 = 0,4)$	$\Pi_3 (p_3 = 0,3)$
A_1	8,0	4,6	1,4
A_2	4,0	8,4	5,2
A_3	0	4,4	9,5

Примечание. Для расчета критерия Гурвица значение критерия риска принять $\lambda = 0,625$.

Определить, какой объем привлеченных ресурсов следует планировать коммерческому банку, чтобы получить как можно большую прибыль.

Задача 8. Коммерческая фирма имеет три варианта вложения инвестиций в различные объекты агропромышленного комплекса. Ожидаемая прибыль зависит от возможных банковских процентных ставок (Π_1 – ниже сложившегося уровня, Π_2 – на уровне прошлого года, Π_3 – выше сложившегося уровня) и представлена в табл. 5.14.

Таблица 5.14. Прибыль от инвестиций, тыс. у. д. е.

Варианты инвестиций (A_i)	Процентные ставки (Π_j)		
	$\Pi_1 (p_1)$	$\Pi_2 (p_2)$	$\Pi_3 (p_3)$
A_1	200 (0,3)	490 (0,3)	530 (0,4)
A_2	400 (0,2)	470 (0,5)	240 (0,3)
A_3	500 (0,4)	400 (0,4)	200 (0,2)

Требуется найти оптимальный вариант вложения денежных средств. Для критерия Гурвица $\lambda = 0,46$.

Задача 9. На мясоперерабатывающем комбинате готовятся к переходу на выпуск новых видов продукции. При этом возможны четыре варианта решения (A_1, A_2, A_3, A_4), каждому из которых соответствует определенная модификация выпускаемой продукции.

Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки (степени обеспеченности производства материальными ресурсами), которая может быть трех видов: Π_1, Π_2, Π_3 . Каждому сочетанию решений A_i и обстановки Π_j соответствует определенный выигрыш в виде дохода от продажи новых видов продукции (табл. 5.15).

Т а б л и ц а 5.15. Платежная матрица дохода от сбыта продукции, тыс. у. д. е.

A_i	Π_j		
	$\Pi_1 (p_1 = 0,5)$	$\Pi_2 (p_2 = 0,3)$	$\Pi_3 (p_3 = 0,2)$
A_1	15	21	24
A_2	42	12	18
A_3	21	51	12
A_4	48	6	21

Требуется обосновать оптимальную стратегию выпуска новых видов продукции для мясокомбината. Для расчета критерия Гурвица $\lambda = 0,395$.

Задача 10. Фермерское хозяйство занимается производством овощей и может реализовать свою продукцию сразу после уборки (A_1), в зимние (A_2) или весенние (A_3) месяцы.

Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затрат на хранение и возможных потерь. Размер прибыли, рассчитанный для разных состояний-соотношений дохода и издержек (C_1, C_2, C_3), в течение всего периода реализации, представлен в табл. 5.16. Для расчета критерия Гурвица $\lambda = 0,61$.

Т а б л и ц а 5.16. Платежная матрица дохода от сбыта овощей, тыс. у. д. е.

A_i	C_j		
	C_1	C_2	C_3
A_1	4	-6	14
A_2	-2	10	8
A_3	-14	26	6

Задача 11. У компании существует четыре варианта инвестирования средств в различные отрасли (A_1, A_2, A_3, A_4). На рынке возможна

одна из четырех ситуаций с различным финансовым исходом (прибыль или убыток) (I_1, I_2, I_3, I_4) (табл. 5.17). Для расчета критерия Гурвица $\lambda = 0,6$.

Т а б л и ц а 5.17. Платежная матрица дохода от инвестиций, тыс. у. д. е.

A_i	I_j			
	$I_1 (0,5)$	$I_2 (0,1)$	$I_3 (0,1)$	$I_4 (0,3)$
A_1	26	-20	44	32
A_2	-32	-32	30	24
A_3	32	58	-32	34
A_4	-26	40	-30	-44

Требуется обосновать выбор варианта инвестирования исходя из значений различных критериев статистических игр.

Задача 12. Предприятие выпускает три вида продукции (A_1, A_2, A_3), получая при этом прибыль, зависящую от состояний спроса (Π_1, Π_2, Π_3).

Прибыль торговой структуры (тыс. у. д. е.) при возможных ее стратегиях поведения и стратегиях внешней среды (зарубежной фирмы) представлена в виде платежной матрицы (табл. 5.18).

Т а б л и ц а 5.18. Платежная матрица дохода от инвестиций, тыс. у. д. е.

A_i	Π_j		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	4,06	3,21	4,14
A_2	4,13	3,93	4,08
A_3	3,54	4,02	4,13

Найти оптимальную стратегию сбыта изделий из льноволокна, пользуясь критериями Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\lambda = 0,7$).

Необходимо:

1) определить, используя критерии Байеса и Лапласа, производство или продажа какого товара или товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль;

2) определить, используя критерий Вальда, производство или продажа какого товара гарантирует предприятию наилучшие результаты в наихудших условиях;

3) определить оптимальную стратегию предприятия, используя критерий Сэвиджа. Для этого необходимо следующее:

а) построить матрицу риска (определить значение коэффициентов риска r_{ij}):

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij} \text{ по каждому столбцу } j,$$

где i – номер строки;

j – номер столбца;

a_{ij} – элемент матрицы a , стоящий в i -й строке j -го столбца;

$\max a_{ij}$ – максимальный элемент a_{ij} в каждом столбце;

б) определить максимальное значение коэффициентов риска по каждой строке, т. е. $\max_j r_{ij}$;

в) найти минимальное значение коэффициентов риска по столбцу, полученному выше, т. е. $\min_i (\max_j r_{ij})$.

В результате определим стратегию предприятия, характеризующуюся наименьшим максимальным риском;

4) определить по критерию Гурвица оптимальную стратегию предприятия, которая выбирается по формуле

$$\max [\lambda \min a_{ij} + (1 - \lambda) \max a_{ij}],$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$;

5) обосновать, используя различные критерии, производство или продажа какого товара (товаров) более выгодно предприятию при любом уровне спроса.

5.3. Матричные игры в чистых стратегиях

Задача. Требуется обосновать, производство каких товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство шести товаров (T_1 – T_6) с неопределенным спросом, предполагаемый уровень которого характеризуется тремя состояниями (C_1 , C_2 , C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса (коэффициенты платежей матрицы a_{ij}), приведены в табл. 5.19.

Т а б л и ц а 5.19. Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у. д. е.

Товар	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	4	3	5
T_2	6	$1 + 0,2K$	4
T_3	3	2	7
T_4	8	3	$1 + 0,1N$
T_5	3	2	5
T_6	7	$1 + 0,1K$	6

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α :

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij},$$

т. е. сначала найти минимально возможный выигрыш a_i (минимальное значение): $\alpha_i = \min_j a_{ij} (i = \overline{1, m})$, а затем из всех α_i выбрать наибольшее значение α : $\alpha = \max_i \alpha_i$ и определить соответствующую ему чистую стратегию T_i^0 ;

2) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) β :

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

т. е. сначала найти минимально возможный выигрыш β_j (максимальное значение): $\beta_j = \max_i a_{ij} (j = \overline{1, n})$, а затем из всех β_j выбрать минимальное значение β : $\beta = \min_j \beta_j$ и определить соответствующую ему чистую стратегию C_j^0 ;

3) найти чистую цену игры.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены совпадают ($\alpha = \beta$), то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$\nu = \alpha = \beta;$$

$$\nu = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij};$$

4) найти оптимальное решение игры $\{A_{i*}, B_{j*}, a_{i*j*}\}$ и обосновать, производство какого товара более выгодно предприятию, где A_{i*} – оптимальная чистая стратегия игрока A ; B_{j*} – оптимальная чистая стратегия игрока B ; a_{i*j*} – седловой элемент платежной матрицы, стоящей в строке i^* и столбце j^* .

Примечание. Седловой элемент a_{i*j*} является наименьшим в строке i^* и наибольшим в столбце j^* .

5.4. Матричные игры в смешанных стратегиях

Если матричная игра не имеет седловой точки ($\alpha \neq \beta$), то оптимальный вариант находят в смешанных стратегиях, которые получаются путем случайного чередования чистых стратегий. Для решения таких задач используют графический метод или методы линейного программирования.

Создатель теории игр Дж. Фон Нейман еще в 1947 г. установил, что любую конечную игру двух лиц с нулевой суммой можно представить в виде задачи линейного программирования и наоборот.

Для изучения такого подхода обозначим через $P_1, P_2, \dots, P_m$ вероятности применения игроком A в ходе игры своих чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$. Тогда пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – вероятности применения игроком B своих чистых стратегий $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Для вероятностей P_i и Q_j выполняются условия:

$$P_i \geq 0, i = \overline{1, m} (i = 1, 2, \dots, m), \sum_{i=1}^m P_i = 1;$$

$$Q_j \geq 0, j = \overline{1, n} (j = 1, 2, \dots, n), \sum_{j=1}^n Q_j = 1.$$

Если обозначим смешанные стратегии первого (A) и второго (B) игроков через $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, то: $\bar{P} = (P_1, P_2, \dots, P_m)$; $\bar{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$. Например, смешанной стратегией игрока A является полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Рассмотрим пример. Для реконструкции производственных линий трех филиалов молочноконсервного комбината необходимы дополнительные инвестиции. Руководство перерабатывающей организации

провело переговоры с двумя коммерческими структурами (A и B), которые могут вложить денежные средства в данный проект. С учетом условий финансирования, особенностей налогообложения, объема выделяемых финансовых средств прибыль в первый год инвестирования для организации A представлена в платежной матрице (табл. 5.20). Требуется найти оптимальные стратегии инвесторов A и B (известно, что инвестор A может выделить 700 тыс. у. д. е., инвестор B – 400 тыс. у. д. е.).

Найдем максимин и минимакс игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 40; \quad \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 80.$$

Т а б л и ц а 5.20. Платежная матрица прибыли, тыс. у. д. е.

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	80	20	60	20
A_2	60	100	40	40
A_3	0	120	160	0
β_j	80	120	160	

Так как $\alpha \neq \beta$, то решение матричной игры, не имеющей седловую точку, нужно искать в смешанных стратегиях, а цена игры заключена в пределах $40 \leq v \leq 80$.

Для решения матричной игры методами линейного программирования обозначим оптимальные стратегии игроков A и B . Игрок A выбор своих стратегий делает по строкам, а игрок B – по столбцам:

$\bar{P}^* = (P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока A .

$\bar{Q}^* = (Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока B .

Цена игры в смешанных стратегиях равна математическому ожиданию выигрыша первого игрока, если оба игрока выберут оптимальные для себя стратегии, т. е. $v = M(\bar{P}^*, \bar{Q}^*)$. Оптимальная смешанная стратегия $\bar{P}^*$ игрока A гарантирует ему выигрыш не меньше v независимо от выбора стратегий игроком B . Это можно записать следующим образом:

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \dots + a_{m1}P_m \geq v;$$

$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + \dots + a_{m2}P_m \geq v;$$

$$a_{1n}P_1 + a_{2n}P_2 + \dots + a_{mn}P_m \geq v,$$

где $P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1$; $P_i \geq 0$; $i = \overline{1, m}$.

Аналогично оптимальная смешанная стратегия $\overline{Q}^*$ игрока B гарантирует ему проигрыш не больше v независимо от выбора стратегий игроком A , т. е.:

$$\begin{aligned} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n &\leq v; \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2n}Q_n &\leq v; \\ \hline a_{m1}Q_1 + a_{m2}Q_2 + \dots + a_{mn}Q_n &\leq v, \end{aligned}$$

где $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 1$; $Q_j \geq 0$; $j = \overline{1, n}$.

Если в матрице игры для отдельных задач имеются отрицательные коэффициенты, то для перевода их в область положительных значений можно добавить ко всем элементам матрицы некоторое достаточно большое число. При этом цена игры увеличится на это число, а оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся. Следовательно, элементы платежной матрицы всегда можно сделать положительными, а значит, и цена игры может быть принята больше нуля ($v > 0$).

Далее преобразуем системы ограничений, разделив обе части каждого из неравенств на положительное число v , вводя новые обозначения:

$\frac{P_i}{v} = x_i$; $\frac{Q_j}{v} = y_j$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\geq 1; \\ \hline a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &\geq 1, \end{aligned}$$

где $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{v}$; $x_i \geq 0$; $i = \overline{1, m}$.

Так как игрок A стремится максимизировать цену выигрыша, а обратная величина $\frac{1}{v}$ будет минимизироваться, то оптимальная стратегия игрока A определится из задачи линейного программирования следующего вида, в которой необходимо найти минимальное значение

функции: $F_{\min} = \sum_{i=1}^m x_i$ при ограничениях:

$$1. \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, j = \overline{1, n}.$$

$$2. x_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

Аналогичным образом проведем следующие расчеты:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1;$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1;$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1,$$

$$\text{где } y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{v}, y_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия игрока B определится решением задачи следующего вида, в которой необходимо найти

максимальное значение функции $F_{\max} = \sum_{j=1}^n y_j$ при ограничениях:

$$1. \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1, i = \overline{1, m}.$$

$$2. y_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Возвращаясь к примеру, составим две задачи линейного программирования, используя платежную матрицу:

$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3$ при ограничениях:

$$80x_1 + 60x_2 \geq 1;$$

$$20x_1 + 100x_2 + 120x_3 \geq 1;$$

$$60x_1 + 40x_2 + 160x_3 \geq 1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3$ при ограничениях:

$$80y_1 + 20y_2 + 60y_3 \leq 1;$$

$$60y_1 + 100y_2 + 40y_3 \leq 1;$$

$$120y_2 + 160y_3 \leq 1;$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Оптимальным решением, полученным с помощью LPX88, является: $F_{\min} = 0,0158$; $x_1 = 0,0077$; $x_2 = 0,0063$; $x_3 = 0,0018$. Так как задача игрока B является двойственной к задаче игрока A , это означает, что оптимальное решение одной из задач автоматически определяет решение другой, результаты которой следующие: $F_{\max} = 0,0158$; $y_1 = 0,0088$; $y_2 = 0,0032$; $y_3 = 0,0038$.

Таким образом, решив задачу по формулам

$$v = \frac{1}{F_{\min}}; P_i^* = v \cdot x_i^*, (i = \overline{1, m}),$$

находим компоненты P_i^* оптимальной смешанной стратегии фирмы A . Цена игры $v = \frac{1}{0,0158} = 63,29$, тогда $P_1^* = 63,29 \cdot 0,0077 = 0,49$; $P_2^* = 63,29 \cdot 0,0063 = 0,40$; $P_3^* = 63,29 \cdot 0,0018 = 0,11$.

Аналогично для фирмы B имеем: $v = \frac{1}{F_{\max}}$; $Q_j^* = v y_j^*, (j = \overline{1, n})$.

Следовательно,

$$Q_1^* = 63,29 \cdot 0,0088 = 0,56; Q_2^* = 63,29 \cdot 0,0032 = 0,20; \\ Q_3^* = 63,29 \cdot 0,0038 = 0,24.$$

Таким образом, оптимальными смешанными стратегиями фирм A и B по вложению инвестиций являются стратегии $\bar{P}^* = (0,49; 0,40; 0,11)$ и $\bar{Q}^* = (0,56; 0,2; 0,24)$, т. е. наилучшее распределение финансовых средств (тыс. у. д. е.) следующее: A (343; 280; 77) и B (224; 80; 96) при гарантированном получении прибыли фирмой A в количестве не менее 63,29 тыс. у. д. е. (независимо от стратегий коммерческой структуры B).

П р и м е ч а н и е. Решение игры можно существенно упростить, если своевременно выявить имеющееся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, ибо это позволит предварительно сократить размерность матрицы.

Если в платежной матрице элементы k -й строки не меньше соответствующих элементов S -й строки, т. е. $a_{kj} \geq a_{sj} (j = \overline{1, n})$, то выигрыш игрока A при стратегии A_k будет больше (не меньше), чем при страте-

гии A_s , какой бы стратегией B_j не пользовался игрок B . Поэтому для игрока A стратегия A_k будет более выгодной, чем стратегия A_s . Так как стратегия A_k доминирует над стратегией A_s , то A_k – доминирующая, а A_s – доминируемая стратегии. Частным случаем доминирования является дублирование стратегий. Аналогично, если элементы λ -го столбца не превосходят соответствующих элементов r -го столбца, т. е. $a_{i\lambda} \leq a_{ir} \ (i = \overline{1, m})$, то для игрока B при любых условиях невыгодно применять стратегию B_r , так как в этом случае он будет проигрывать больше (не меньше), чем при использовании стратегии $B\lambda$. Здесь $B\lambda$ – доминирующая, а B_r – доминируемая стратегии.

Допустим, необходимо выполнить возможные упрощения следующей платежной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 14 & 8 & 16 & 12 & 10 \\ 10 & 8 & 12 & 2 & 10 \\ 18 & 12 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки не превышают соответствующих элементов первой, поэтому ее опускаем и приходим к матрице:

$$\begin{pmatrix} 14 & 8 & 16 & 12 & 10 \\ 18 & 12 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Элементы первого столбца данной матрицы превышают соответствующие элементы второго столбца, элементы третьего – элементы четвертого, а элементы пятого – элементы второго. Поэтому доминируемые первый, третий и пятый столбцы опускаем. В результате получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, вместо того чтобы искать решение игры с матрицей размерности 3×5 , достаточно решить игру размерности 2×2 : вероятности активных стратегий игроков в обеих играх будут одними и теми же (активными стратегиями называются чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля).

Задачи для решения

Задача 1. Фермерское хозяйство занимается экспортом сельскохозяйственной продукции в страны СНГ и реализует такие виды продукции, как зерно, картофель, овощи. Необходимо принять решение о возделывании перечисленных трех культур, которые обозначим через A_1, A_2, A_3 . При прочих равных условиях урожай, а следовательно, и выручка зависят главным образом от погоды. Год может оказаться засушливым (B_1), нормальным (B_2) и дождливым (B_3). Платежная матрица, представляющая доход фермера от реализации своей продукции, приведена в табл. 5.21.

Таблица 5.21. Платежная матрица выручки, у. д. е. с 1 га

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	44	46	50
A_2	24	78	40
A_3	52	36	22

Необходимо определить оптимальную стратегию посева культур (площадь 1000 га), чтобы программа обеспечивала максимальный доход фермеру. Требуется решить матричную игру сведением к задаче линейного программирования.

Задача 2. Исследования показывают, что завод запасных частей для сельскохозяйственной техники может продать за сезон при дождливом лете 400 единиц для кормоуборочной техники и 2500 – для зерноуборочной. Статистические данные за предыдущие годы свидетельствуют также о том, что при засушливой летней погоде сельскохозяйственным производителям реализуется 7900 приспособлений для зерноуборочной техники и 2400 – для кормоуборочной. Определить, какое количество изделий необходимо выпустить заводу с целью получения максимальной прибыли от их продажи, если известно, что себестоимость единицы производимых приспособлений для кормоуборочной и зерноуборочной техники равна соответственно 108 и 36 у. д. е., а цена их реализации – 192 и 64 у. д. е.

Задача 3. Требуется обосновать ассортиментный набор товарной группы, который целесообразно завезти в магазин с целью максимизации результатов его работы.

Исходная информация.

На оптовой базе имеется ассортиментный набор товарной группы,

товары которого могут быть завезены в магазин. Если товар будет пользоваться спросом, то от его реализации магазин получит прибыль p_j , в противном случае магазин понесет издержки, связанные с хранением, порчей товара, т. е. получит убыток c_j (табл. 5.22).

Т а б л и ц а 5.22. Результаты сбыта единицы товара

Показатели	Товар					
	1	2	3	4	5	6
Доход от сбыта, у. д. е.	$30 + 0,5K$	28	32	29	31	30
Издержки, у. д. е.	$14 + 0,5K$	2	8	4	6	16

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) составить платежную матрицу согласно информации табл. 5.23;
- 2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α ;
- 3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β ;

Т а б л и ц а 5.23. Информация платежной матрицы

Товар	Состояние спроса					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
T_1	P_1	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$
T_2	$-C_2$	P_2	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$
T_3	$-C_3$	$-C_3$	P_3	$-C_3$	$-C_3$	$-C_3$
T_4	$-C_4$	$-C_4$	$-C_4$	P_4	$-C_4$	$-C_4$
T_5	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	P_5	$-C_5$
T_6	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	P_6

4) найти седловую точку игры $\alpha = \beta$. Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях. При этом нижней ценой игры будет число α , а верхней – число β :

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{g}} f(\bar{p}, \bar{g});$$

$$\beta = \min_{\bar{g}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}, \bar{g}).$$

Цена игры (ν) равна:

а) $\nu = \alpha = \beta$;

б) $\nu = f(\bar{p}^*, \bar{g}^*)$;

$$\text{в) } \nu = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{g}} f(\bar{p}^*, \bar{g}^*) = \min_{\bar{g}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}^*, \bar{g}^*),$$

где $\bar{p}$ – смешанная стратегия игрока A ;

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1;$$

$\bar{g}$ – смешанная стратегия игрока B ;

$$\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n), \quad g_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n g_j = 1;$$

$\bar{p}^*, \bar{g}^*$ – соответственно оптимальная смешанная стратегия игрока A и B ;

1) свести решение матричной игры в смешанных стратегиях к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования;

П р и м е ч а н и е. Если среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные элементы, то их необходимо преобразовать в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы постоянной величины C , значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. В противном случае цена игры может быть числом отрицательным.

б) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины двойственных задач;

7) составить развернутые экономико-математические задачи, используя следующие структурные модели:

а) задача линейного программирования для игрока A (T):

$$\text{требуется найти } F_{\min} = \sum_{i=1}^m x_i.$$

При условиях:

$$1. \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$2. x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$$x_i = \frac{p_i}{v};$$

v – цена игры;

p_i – вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i в столбце j ;

б) задача линейного программирования для игрока B (C):

требуется найти $F_{\max} = \sum_{j=1}^n y_j$.

При условиях:

$$1. \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1, i = \overline{1, m};$$

$$2. y_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$$y_j = \frac{g_j}{v};$$

v – цена игры;

g_j – вероятности, с которыми игрок B использует в ходе игры свои чистые стратегии.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i в столбце j ;

8) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

9) найти оптимальное решение задач, проанализировать его;

10) преобразовать результаты решения экономико-математических задач в решение матричной игры:

для игрока A

$$\nu = \frac{1}{F_{\min}};$$
$$p_i^* = \nu x_i^*, (i = \overline{1, m});$$

для игрока B

$$\nu = \frac{1}{F_{\max}};$$
$$g_j^* = \nu y_j^*, (j = \overline{1, n});$$

11) найти оптимальное решение игры $\{\bar{p}^*, \bar{g}^*, \nu\}$;

12) обосновать, сбыт каких товаров в ассортименте наиболее выгоден коллективу магазина.

Т е м а 6. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания – научное направление, которое возникло в связи с необходимостью анализа процессов образования очередей.

Модели теории массового обслуживания позволяют определить, например:

- оптимальное количество торговых точек, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры в организации фирменной торговли предприятий;

- в работе подразделений снабженческо-сбытовых организаций установить оптимальное соотношение между числом поступающих требований и количеством обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными;

- составить график прибытия транспортных средств под выгрузку (требование) на склад (обслуживающее устройство) и т. п.

Таким образом, теория массового обслуживания изучает процессы, в которых, с одной стороны, постоянно возникают запросы на выполнение каких-либо работ, а с другой – происходит постоянное удовлетворение этих запросов. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем составляет систему массового обслуживания (СМО).

Элементами СМО являются: входящий поток требований и выходящий поток обслуженных заявок; очередь; каналы обслуживания. Их сущность такова:

- а) требование (заявка) – это каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы или удовлетворение потребности. Например: разгрузка машины с грузом; отпуск товара в магазине и т. д. Требования поступают в систему обслуживания из источника. Выполнение

работы по удовлетворению поступившего требования называется *обслуживанием*. Поток требований (заявок) – это последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Если требования поступают через определенные равные промежутки времени, то поток называется регулярным. Однако такие потоки встречаются редко, тогда как в экономической практике они обычно нерегулярные и случайные. Поток требований, поступающих на систему обслуживания, – входящий, а покидающих обслуживающую систему, – выходящий;

б) очередь – это совокупность или скопление требований, ожидающих обслуживания;

в) каналы обслуживания – это технические устройства (персонал), выполняющие соответствующие функции или операции (т. е. продавцы, кассиры, мастера по ремонту оборудования, бензоколонки, элеваторные весы, линии по переработке сырья и т. д.).

Время обслуживания – это период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание (от начала до его завершения). Период от момента поступления требования в систему и до начала обслуживания – это время ожидания обслуживания. Следовательно, время ожидания обслуживания в совокупности со временем обслуживания составляет время пребывания требования в системе.

Максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно, определяет пропускную способность системы обслуживания. Если она равна единице – это однолинейная СМО, системы с пропускной способностью больше единицы – многолинейные.

Совокупность, в которой последовательно связаны между собой поток требований, очередь и каналы обслуживания, представляет собой СМО.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы (число каналов, их производительность, характер потока заявок) с показателями эффективности обслуживания.

На основе математических моделей СМО исследуются количественные связи между числом каналов обслуживания, их производительностью, режимом работы, характеристиками входящего потока требований и показателями (критериями) эффективности функционирования систем. Так как применяемых критериев много, то задачи оптимизации в теории массового обслуживания являются многокритериальными.

Для выработки рекомендаций по рациональному построению СМО

и оптимальной организации их работы важно рассчитать следующие показатели: абсолютная пропускная способность; относительная пропускная способность; коэффициент использования системы массового обслуживания; среднее время ожидания заявки в очереди; среднее время пребывания заявки в СМО; вероятность отказа заявке; вероятность того, что будет обслуживание; среднее число заявок, находящихся в очереди, а также в СМО и др.

Модели систем массового обслуживания классифицируют по следующим признакам:

- **по числу каналов обслуживания** СМО делятся на *одноканальные* и *многоканальные*;

- **в зависимости от поведения требования**, поступившего на вход системы, когда все каналы заняты, СМО бывают:

- а) *системы с отказами (потерями)*;
- б) *системы с ожиданием (очередью)*.

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему необслуженными и теряются. Пример: автоматическая телефонная станция (АТС), каналами обслуживания которой являются каналы связи. Если они заняты, то требование получает отказ.

Среди *систем с ожиданием* различают *чистые* и *смешанные* (с ограничением). СМО с ожиданием называется чистой, когда требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов. В данном случае время пребывания в очереди или системе, а также длина очереди не ограничиваются. Примеры СМО с ожиданием: торговое предприятие, где требованиями являются покупатели, а каналами обслуживания – продавцы или кассовые устройства. В подобных задачах необходимо соблюдение условия: отсутствие нетерпеливых клиентов, покидающих очередь необслуженными;

- **смешанные** СМО могут быть следующих видов:

- а) с ограниченной длиной очереди (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней);

- б) с ограниченным временем ожидания (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней);

- в) с ограничением на общее время пребывания требований в системе;

- г) с ограничением на длину очереди и время пребывания в очереди

(здесь требование покидает систему, если оно застало все каналы занятыми и очередь максимально допустимой длины, а также, если оно постояло в очереди в среднем больше некоторой величины);

д) с ограничением на длину очереди и время пребывания требований в системе;

• **в зависимости от правила отбора требований**, поступающих в каналы обслуживания (способа занятия канала обслуживания, или способ выбора требования из очереди), СМО делятся:

а) на *системы без приоритета*;

б) *системы с приоритетами*.

Системы массового обслуживания без приоритета могут быть:

а) с упорядоченным обслуживанием. Наиболее распространенным является выбор требований в порядке их поступления в очередь: «первым пришел – первым обслуживаешься» (например, система по приемке зерна на элеваторе) или «последним пришел – первым обслуживаешься» (например, в системе, состоящей из двух стадий обработки, детали, прошедшие первый этап обработки, складываются в контейнер, и первой на второй этап обработки поступает верхняя деталь);

б) с неупорядоченным обслуживанием. В такой системе действует случайный выбор требований на обслуживание, что часто встречается в производственной практике.

СМО с приоритетом обуславливают различный подход при отборе в канал обслуживания и могут быть:

1) с абсолютным приоритетом. Ее суть в том, что обслуживание требования немедленно прерывается при поступлении требования с более высоким приоритетом;

2) с относительным приоритетом. Ее суть в том, что начатое обслуживание требования с низким приоритетом не прекращается в момент поступления требования с более высоким приоритетом, а обязательно завершается. При этом требование с более высоким приоритетом, поступившее в систему, имеет право только на лучшее место в очереди. Примером такой системы являются кассовые аппараты магазина, обслуживающие вне очереди покупателей, пользующихся определенными льготами.

На основе моделей массового обслуживания можно разрабатывать экономические рекомендации по реорганизации СМО для повышения эффективности их работы, а также определять оптимальные показатели вновь создаваемых систем массового обслуживания.

Одноканальная система массового обслуживания с отказами.

Методические указания.

Для решения задач необходимо использовать следующие формулы:

1. Интенсивность потока обслуживания (μ):

$$\mu = \frac{1}{t_{об}}.$$

2. Относительную пропускную способность (g):

$$g = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ или } g = 1 - P_{отк}.$$

3. Абсолютную пропускную способность (A):

$$A = \lambda \cdot g.$$

4. Вероятность отказа ($P_{отк}$):

$$P_{отк} = 1 - g \text{ или } P_{отк} = \lambda / (\lambda + \mu).$$

5. Номинальную пропускную способность системы ($A_{ном}$):

$$A_{ном} = \frac{1}{t_{об}}.$$

6. $\bar{t}_{пр}$ – среднее время простоя канала:

$$\bar{t}_{пр} = \frac{1}{\lambda}.$$

7. p_0 – вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = \frac{\bar{t}_{пр}}{t_{об} + \bar{t}_{пр}}.$$

8. p_1 – вероятность того, что канал занят:

$$a) p_1 = 1 - p_0;$$

$$б) p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Проанализировать работу телефонной линии филиала банка (сравнить фактическую пропускную способность системы массового обслуживания с номинальной пропускной способностью; сравнить вероятности того, что канал обслуживания занят и свободен; сравнить среднее время обслуживания и среднее время простоя канала).

Пример. Информационная служба торгового предприятия дает справки по телефонной линии о наличии фруктов, поступивших по экспорту. В среднем за одну минуту происходит 3 запроса, а средняя продолжительность одного разговора составляет 0,25 мин. Определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т. е. с пропускной способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждый запрос обслуживался ровно 0,25 мин и все запросы следовали бы один за другим без перерыва.

Математической моделью телефонной линии торгового предприятия является **одноканальная СМО с отказами**. Параметры данной системы следующие: интенсивность входящего потока $\lambda = 3$; среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} = 0,25$; интенсивность потока обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = 4.$$

Найдем:

1) вероятность отказа запроса:

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{3}{3 + 4} = 0,429, \text{ или } 42,9 \, \%.$$

Вероятность того, что канал занят, составляет 0,43, а вероятность того, что канал свободен, – 0,57. Это связано с тем, что интенсивность входящего потока меньше интенсивности обслуживания (производительности канала). Значит, в установившемся предельном режиме из каждых 100 запросов в среднем 43 получают отказ;

2) относительную пропускную способность СМО:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,429 = 0,571;$$

3) абсолютную пропускную способность СМО:

$$A = \lambda \cdot Q = 3 \cdot 0,571 = 1,713.$$

Число запросов, обслуженных в течение часа, составляет $60A = 103$. В этих же условиях номинальная производительность $Q_n = 60 : 0,25 = 240$ запросов в час.

Из расчета следует, что случайный характер поступления телефонных звонков и случайный характер длительности разговоров привели к такой ситуации, что абсолютная пропускная способность (1,713 разговора в минуту) почти в 2,3 раза меньше производительности информационной службы. Что же нужно сделать, чтобы повысить относительную пропускную способность одноканальной СМО? Этого можно добиться либо снижением интенсивности потока запросов λ , что по условию невозможно, либо увеличением интенсивности обслуживания μ , что вряд ли реально, либо увеличением каналов обслуживания n .

Задачи для решения

Задача 1. На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0,9 + 0,2K$ вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{об} = 1,25 + 0,1N$ мин. Вызов – звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята – получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Задача 2. Информационная служба агрофирмы дает справки по телефонной линии о наличии продукции. В среднем за одну минуту происходит 3 запроса, а средняя продолжительность одного разговора составляет $0,25 + 0,1N$ мин. Определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т. е. с пропускной способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждый запрос обслуживался ровно $0,25 + 0,1N$ мин и все запросы следовали бы один за другим без перерыва. Требуется проанализировать работу информационной службы.

Задача 3. Фирма предлагает частным предпринимателям свои консультационные услуги по ведению финансовой отчетности. В фирме постоянно работают 8 консультантов. При этом соблюдается следующее условие: если предприниматель заходит в консультационный отдел, когда все работники заняты, то он сразу уходит в конкурирующую фирму, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в консультационный центр за один час, составляет 12 человек.

Среднее время, затрачиваемое консультантом на обслуживание одного предпринимателя, составляет 20 мин. Необходимо определить основные характеристики функционирования СМО.

Задача 4. На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $0,8 + N$ вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания 1,3 мин. Вызов – звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята – получает отказ в обслуживании. Необходимо определить основные характеристики функционирования СМО.

Задача 5. Гипермаркет принимает заказы на доставку продуктов из магазина по телефонной линии. Интенсивность заказов составляет $\lambda = 0,8$ в мин, среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} = 2$ мин. Определить важнейшие характеристики рассматриваемой системы.

Задача 6. В сельскохозяйственном предприятии имеется пункт проведения профилактического осмотра машин с одной группой проведения осмотра. На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем $\bar{t}_{об} = 0,4$ ч. На осмотр поступает в среднем 19 машин в смену, продолжительность которой 8 ч ($\lambda = 19/8 = 2,4$ машин в час). Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить характеристики обслуживания пункта профилактического осмотра.

Задача 7. Интенсивность потока телефонных звонков коммерческому директору $\lambda = 1,2$ вызова в минуту, средняя продолжительность разговора (обслуживания заявки) $\bar{t}_{об} = 2,5$ мин, и все потоки событий (вызовов и обслуживания) имеют характер простейших пуассоновских потоков.

Требуется определить предельную (относительную и абсолютную) пропускную способность СМО, вероятность отказа, а также полное число обслуженных и необслуженных (получивших отказ) заявок в течение 1 ч работы СМО. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т. е. с пропускной, способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждая заявка обслуживалась ровно 2,5 мин и все заявки следовали бы одна за другой без перерыва.

Задача 8. На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,9 - 0,1K$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля

распределено по показательному закону и в среднем равно $1,1 + 0,1N$ ч ($\bar{t}_{об}$). Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем ($m = 3$). Если все стоянки заняты, т. е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}};$$

2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему:

$$p = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) вычислить p_0, p_k – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-p}{1-p^{m+2}}, & \text{если } p \neq 1; \\ \frac{1}{m+2}, & \text{если } p = 1; \end{cases}$$

б) $p_k = p^k \cdot p_0$; $k = 1, \dots, m+1$, где k – состояние системы; m – максимальное число мест в очереди;

4) определить $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании автомобиля: $p_{отк} = p^{m+1} \cdot p_0$;

5) рассчитать g – относительную пропускную способность поста диагностики: $g = 1 - p_{отк}$;

6) вычислить A – абсолютную пропускную способность системы $A = \lambda \cdot g$;

7) определить $\bar{N}$ – среднее число автомобилей, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \begin{cases} p \frac{1 - (m+2)p^{m+2} + (m+1)p^{m+2}}{(1-p)(1-p^{m+2})}, & \text{если } p \neq 1; \\ \frac{m+1}{2}, & \text{если } p = 1; \end{cases}$$

8) рассчитать $\bar{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания автомобиля в системе: $\bar{T}_{\text{сис}} = \frac{\bar{N}_{\text{сис}}}{\lambda(1-p_{m+1})}$;

9) вычислить $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание: $\bar{T}_{\text{оч}} = \bar{T}_{\text{сис}} - \frac{1}{\mu}$;

10) определить $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди): $\bar{N}_{\text{оч}} = \lambda \cdot (1-p_{m+1}) \cdot \bar{T}_{\text{оч}}$;

11) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу поста диагностики автомобилей.

6.1. Одноканальная СМО с очередью (ее длина не ограничена)

Пример. Хлебокомбинат открыл фирменный магазин, который имеет один кассовый аппарат. Установлено, что в течение часа магазин посещают 24 человека. Значит, интенсивность входного потока покупателей равна $\lambda = 0,4$ человека в минуту, причем поток считается простейшим. Среднее время обслуживания покупателя подчинено экспоненциальному закону и составляет 0,5 мин ($\bar{t}_{\text{ог}} = 0,5$). Определить важнейшие характеристики СМО.

Математической моделью рассматриваемой задачи является **одноканальная СМО с ожиданием (очередью)**. Найдем следующие параметры:

– интенсивность обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ог}}} = \frac{1}{0,5} = 2$;

– интенсивность нагрузки системы: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,4}{2} = 0,2$.

В случае одноканальной системы условие, при котором очередь не возрастает бесконечно, имеет вид: $\rho < 1$ или $\lambda < \mu$, т. е. чтобы очередь не росла бесконечно, необходимо, чтобы интенсивность обслуживания была выше интенсивности входящего потока.

Рассчитаем характеристики эффективности СМО при неограниченном входящем потоке:

– вероятность того, что обслуживающий канал свободен,

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Этот показатель определяет коэффициент простоя кассового аппарата, т. е. в среднем 80 % рабочего времени продавец не занят обслуживанием покупателей, а остальные 20 % времени занят работой;

– среднее число требований, находящихся в системе:

$$\bar{N}_c = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,2}{1 - 0,2} = 0,25 \text{ покупателя продуктов в магазине (в оче-}$$

реди и на обслуживании);

– среднее число требований, находящихся в очереди:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \text{ или } \bar{r} = \bar{N}_c - \rho; \bar{r} = 0,25 - 0,2 = 0,05 \text{ покупателя в очереди}$$

за покупками (средняя длина очереди);

– среднее время пребывания требования в очереди (или время ожидания обслуживания):

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,2}{2 \cdot (1 - 0,2)} = 0,12 \text{ мин в среднем покупатель находится}$$

в очереди;

– среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} \text{ или } \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ож}} + \bar{t}_{\text{об}}; \bar{t}_{\text{сист}} = 0,12 + 0,5 = 0,62 \text{ мин покупа-}$$

тель находится в данной СМО (магазине).

Таким образом, в данной системе массового обслуживания наблюдается незначительное время ожидания в очереди. Однако руководство магазина установило, что в ближайшем будущем в районе расположения торговой точки будет сдан в эксплуатацию жилой дом, что может способствовать притоку покупателей. Низкий уровень обслуживания при наличии конкурентов может привести к потере потенциальных покупателей, а поэтому поставлена задача о возможности установления другого кассового аппарата в магазине, если среднее время ожида-

ния обслуживания превысит 5 мин. Как должна измениться интенсивность входного потока покупателей, чтобы возникла такая необходимость?

Зная, что $\bar{t}_{\text{ож}} = 5$ мин, подставим данные в формулу $\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} : 5 = \frac{\rho}{2(1-\rho)}$. Так как $\mu = 2$, получим $\rho = \frac{10}{11} = \frac{\lambda}{\mu}$. Следовательно, интенсивность входного потока покупателей должна быть $\lambda = \mu \cdot \rho = 2 \cdot \frac{10}{11} \approx 1,8$ человека в минуту, чтобы среднее время ожидания достигло 5 мин. Если средняя скорость входящего потока превышает 1,8, то с учетом заранее установленного качества обслуживания ($\bar{t}_{\text{ож}} \leq 5$) в магазине необходимо установить второй кассовый аппарат.

Задачи для решения

Задача 1. Интенсивность потока автомобилей на автозаправочной станции к колонке за бензином АИ-92 составляет 20 автомобилей в 1 ч, а среднее время заправки равно 5 мин. Проведем анализ работы системы массового обслуживания.

Задача 2. Агропредприятие имеет фирменный магазин, где работает один продавец. В результате исследований установлено, что поток покупателей простейший и составляет 0,6 покупателя в минуту. Если в момент поступления требования продавец свободен, то начинается обслуживание, если он занят, то вновь прибывший покупатель становится в очередь за теми, которые поступили раньше и еще не начали обслуживаться. Длительность обслуживания подчиняется экспоненциальному закону и равна 2 минуты. Требуется проанализировать работу магазина в установившемся режиме.

Задача 3. Автозаправочная станция имеет одну бензоколонку. Предполагается что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью $\lambda = 22$ автомашин/ч, которая подчиняется экспоненциальному закону с параметром $\mu = 28$ автомашин/ч. Определить важнейшие характеристики рассматриваемой системы.

Задача 4. В автомастерской открыли пункт по диагностике автомобилей, который представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно 3. Если в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслужи-

живание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность 0,85 автомобиля в час. Время диагностики автомобиля равно 1,05 ч.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Задача 5. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,8 + 0,05N$ (автомобилей в час). Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно $1,05 + 0,1K$ ч ($\bar{t}_{об}$). Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$;
- 2) определить p – относительную нагрузку на систему: $p = \frac{\lambda}{\mu}$;
- 3) вычислить p_0, p_k – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - p;$$

$$p_k = (1 - p) \cdot p^k; k = 1, \dots, m + 1;$$

- 4) определить $\bar{N}$ – среднее число автомобилей, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди): $\bar{N}_{сис} = \frac{p}{1 - p}$;

- 5) рассчитать $\bar{T}_{сис}$ – среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$\bar{T}_{сис} = \frac{\bar{N}_{сис}}{\lambda};$$

$$\bar{T}_{сис} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - p)};$$

6) вычислить $\bar{N}_{\text{оч}}$ – число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \bar{N}_{\text{сис}} - \frac{\lambda}{\mu};$$

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \frac{p^2}{(1-p)};$$

7) определить $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \frac{p}{\mu(1-p)};$$

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \frac{\bar{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

8) рассчитать A – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot g$, где g – относительная пропускная способность системы, $g = 1$, так как каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена;

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу пункта разгрузки сырья перерабатывающего предприятия.

6.2. Одноканальная СМО с очередью (ее длина ограничена)

Задача 1. Пункт по диагностике автомобилей работает с одним мастером. На него поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,8 + 0,1K$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно $1,2 + 0,1N$ ч ($\bar{t}_{\text{ог}}$). Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем ($m = 3$). Если все стоянки заняты, т. е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Задача 2. Организация занимается ремонтом и восстановлением генераторов. Конечная сборка каждого экземпляра проходит в соответствии с распределением Пуассона (в среднем 9 генераторов в час).

После этого генераторы с помощью ленточного конвейера транспортируются в отдел технического контроля для испытаний. На конвейере могут находиться максимум 6 генераторов. Электронный датчик автоматически останавливает конвейер, как только он заполнится. Рабочие сборочного цеха прекращают свою работу до появления свободного места на конвейере. Время проверки электрических генераторов имеет экспоненциальное распределение со средним значением 12 мин.

Определить вероятность того, что сборочный цех прекратит сборку электрогенераторов в условиях рассматриваемой СМО.

Методические указания.

Вместимость системы является ограниченной, т. е. СМО вмещает не более N клиентов. Если m – максимальное количество мест в очереди, то максимальная вместимость системы $N = m + 1$. Как только число клиентов в СМО достигает N , ни одно из дополнительных требований на обслуживание не принимается. Значение такого параметра, как интенсивность нагрузки системы ρ , не обязательно должно быть меньше 1, так как поступления заявок в систему контролируются максимальной емкостью системы N .

В СМО с неограниченной длиной очереди заявка, поступившая в момент, когда все n -каналы заняты, становится в очередь и ожидает своего обслуживания. Любое пришедшее требование будет удовлетворено. Установившийся режим работы системы существует при $\frac{\rho}{n} < 1$.

Если условие не выполняется (т. е. $\frac{\rho}{n} \geq 1$), то очередь заявок в системе с течением времени будет неограниченно расти.

Расчет показателей эффективности функционирования одноканальной СМО с очередью (ее длина ограничена) следующий:

– вероятности состояний:

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1, \\ \frac{1}{N+1}, & \rho = 1, \end{cases}$$

$$P_n = \rho^n \cdot P_0, \quad n \leq N \text{ (или } P_k = \rho^k \cdot P_0, \quad k = 1, \dots, m+1);$$

– вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = \rho^N \cdot P_0$;

– среднее число требований, находящихся в системе (в очереди и на обслуживании):

$$\bar{N}_c = \begin{cases} \frac{\rho \cdot [1 - (N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1}]}{(1-\rho) \cdot (1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1, \\ \frac{N}{2}, & \rho = 1; \end{cases}$$

– средняя продолжительность пребывания требования в системе:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{N}_c}{\lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}})};$$

– средняя продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \bar{t}_{\text{сист}} - \bar{t}_{\text{об}};$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди):

$$\bar{r} = \lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}}) \cdot \bar{t}_{\text{ож}}.$$

6.3. Многоканальная СМО с отказами (потерями)

Пример. В автотранспортной компании создали подразделение, занимающееся ремонтом и профилактическим осмотром автотранспорта. Первоначально в данном подразделении трудилось двое работников, статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. При этом в среднем в течение смены каждый из механиков успевал провести определенный ремонт 10 автомобилей. Установлено, что в среднем в течение рабочего дня в пункт обращается 20 человек, причем застав служащих занятыми, автотранспортные средства уезжают в другую фирму.

Рассматривается вопрос о целесообразности дополнительного привлечения механиков с установкой соответствующего оборудования на следующий месяц (25 рабочих дней). Известно, что стоимость простоя обслуживающего канала (т. е. зарплата персоналу, аренда оборудования и т. д.) составляет в день 30 у. д. е. В то же время каждое необслуженное транспортное средство приносит потери в количестве 50 у. д. е. Необходимо определить оптимальное число работников в

предстоящий месяц для рассматриваемой системы массового обслуживания.

Изучаемая система является многоканальной СМО с отказами, где имеются следующие параметры: число каналов ($n = 2$); интенсивность входящего потока ($\lambda = 20$); интенсивность потока обслуживания, или производительность канала $\mu = 10$. Рассчитаем интенсивность нагрузки системы (ρ): $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 20 : 10 = 2$. Найдем вероятность того, что система свободна (для $n = 2$), по формуле

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^k}{k!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2} \right]^{-1} = 0,2.$$

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, получит отказ,

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0 = \frac{2^2}{1 \cdot 2} \cdot 0,2 = 0,4.$$

Рассчитаем по следующим формулам:

– относительную пропускную способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,4 = 0,6;$$

– абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot Q = 20 \cdot 0,6 = 12$;

– среднее число занятых каналов: $\bar{N}_3 = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot Q = 2 \cdot 0,6 = 1,2$;

– среднее число простаивающих каналов: $\bar{N}_{\Pi} = n - \bar{N}_3 = 2 - 1,2 = 0,8$.

Для СМО с потерями (отказами) необходимо рассчитать функцию потерь (G_{Π}) за определенный интервал времени (T) по формуле

$$G_{\Pi} = (g_{\text{пк}} \cdot \bar{N}_{\Pi} + g_y \cdot P_{\text{отк}} \cdot \lambda) \cdot T,$$

где $g_{\text{пк}}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала;

g_y – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования;

$\bar{N}_{\Pi}$ – среднее число простаивающих каналов;

$P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа;

λ – интенсивность входящего потока.

При фактическом числе обслуживаемых работников функция издержек $G_n = (30 \cdot 0,8 + 50 \cdot 0,4 \cdot 20) \cdot 25 = 10\,600$. Увеличим число механиков и проведем аналогичные расчеты:

если $n = 3$, то $G_n = 6315$; если $n = 4$, то $G_n = 4018$; если $n = 5$, то $G_n = 3231$; если $n = 6$, то $G_n = 3318$. Таким образом, для рассматриваемой системы массового обслуживания оптимальное количество работников составляет 5 человек.

Задачи для решения

Задача 1. Работники ОАО «Белагропромбанк», проходящие повышение квалификации в учебном центре, должны выполнить контрольные задания на персональных компьютерах. В компьютерном классе центра для этой цели выделено 3 компьютера. В среднем за каждый час поступает 5 заявок. Среднее время на выполнение задания одним работником составляет 30 мин. Если слушатель курсов обращается в момент, когда все 3 компьютера заняты, то он получает отказ и вынужден обратиться в другое время. Требуется определить характеристики системы и оценить ее работу.

Задача 2. Торговое предприятие принимает заказы покупателей по телефонной линии с 4 аппаратами. Если заказ поступает, когда все линии заняты, то покупатель получает отказ. При наличии свободной линии происходит оформление заказа. Поток требований, поступающих на станцию, является простейшим со средним числом 3 заказа в минуту. Длительность оформления заказа является случайной величиной, при этом средняя продолжительность одного разговора равна 1,5 мин. Необходимо рассчитать основные показатели работы СМО.

Задача 3. В типографию с $n = 4$ множительными аппаратами поступают заказы от предприятий на размножение рабочей документации. Если все аппараты заняты, то вновь поступающий заказ не принимается. Среднее время работы с одним заказом составляет $t_{\text{ос}} = 2$ ч. Интенсивность потока – $\lambda = 0,5$ заявки в час. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы типографии.

Задача 4. Информационно-консультационная служба банка имеет трех консультантов, отвечающих на звонки. Телефонные аппараты взаимосвязаны, т. е. если звонок поступает, когда все консультанты заняты, то абонент получает отказ. Если же в момент поступления за-

явки хотя бы один консультант свободен, то он переключается на свободный канал. В среднем за одну минуту в информационно-справочное бюро поступает 4 запроса, время обслуживания каждого требования в среднем составляет 1,5 мин.

Необходимо определить основные важнейшие характеристики данной системы массового обслуживания, считая все потоки простейшими:

- 1) интенсивность нагрузки системы;
- 2) вероятность отсутствия требований в системе;
- 3) вероятность отказа;
- 4) относительную пропускную способность;
- 5) абсолютную пропускную способность системы;
- 6) среднее число занятых каналов;
- 7) коэффициент использования каналов;
- 8) коэффициент простоя каналов;
- 9) среднее число простаивающих каналов.

Найти решение с учетом дополнительного условия, что данная система должна удовлетворять не менее 90 % заявок, т. е. $Q \geq 0,9$, а

$$P_{\text{отк}} < 0,1.$$

Примечание. Необходимо рассчитать требуемое количество консультантов, рассматривая ограничение.

$$P_{\text{отк}} = \frac{6^n}{n!} \cdot \left(1 + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \dots + \frac{6^n}{n!}\right)^{-1} < 0,1.$$

6.4. Многоканальная СМО с очередью (длина не ограничена)

К числу показателей функционирования **многоканальной СМО с очередью (ее длина не ограничена)** относят также:

– предельные вероятности системы:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!(1 - \frac{\rho}{n})} \right]^{-1},$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, \quad k \leq n;$$

– вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{\rho^n}{n! \cdot (1 - \frac{\rho}{n})} \cdot P_0;$$

– среднее число занятых каналов:

$$\bar{N}_3 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди):

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2};$$

– среднее число требований, находящихся в системе:

$$\bar{N}_c = \bar{r} + \rho;$$

– среднюю продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n \cdot P_0}{n \cdot \mu \cdot n! (1 - \frac{\rho}{n})^2} \text{ или } \bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda};$$

– среднюю продолжительность пребывания требования в системе:

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}.$$

Пример 1. В цехе по ремонту аккумуляторов числится 5 мастеров. В среднем в течение рабочего дня поступает в ремонт 10 аккумуляторов. Так как общее число данных приборов очень велико и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя, то можно считать, что поток заявок на ремонт аккумуляторов является случайным (пуассоновским). Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности повреждения, квалификации мастера и других причин. Статистика показывает, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону, а среднее время, затрачиваемое на ремонт одного аккумулятора в течение семичасового рабочего дня, составляет 2,8 ч. Необходимо оценить функционирование цеха, рассчитав основные характеристики данной системы массового обслуживания (за единицу времени принять 1 день).

Данный цех по ремонту аккумуляторов моделируется пятиканальной СМО ($n = 5$) с ожиданием без ограничений на длину очереди, для которой $\lambda = 10$; $\bar{t}_{ог} = 2,8$ ч (или 0,4 дня).

Интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ог}} = \frac{1}{0,4} = 2,5$ аккумулятора в день и интенсивность нагрузки $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{2,5} = 4$. Так как $\rho < n$, то очередь не может расти безгранично. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта, составляет

$$P_0 = \left[1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!(1 - \frac{4}{5})} \right]^{-1} = 0,013.$$

Средняя длина очереди $\bar{r} = \frac{4^6 \cdot 0,013}{4!} \approx 2,2$ аккумулятора, среднее число заявок в системе $\bar{N}_c = 4 + 2,2 = 6,2$.

Пример 2. Учебный компьютерный центр для распечатки различных задач, программ, тестов, положений и актов, связанных с информацией о деятельности предприятий АПК, состоит из 6 персональных компьютеров. В среднем в течение рабочего дня от студентов, аспирантов, научных сотрудников поступает 2100 требований в день. Есть все основания полагать, что поток заявок в компьютерный центр является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждая заявка требует различного случайного времени на ее обслуживание, которая зависит от пожелания клиента иметь необходимые данные. Статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону и составляет 36 с на одного посетителя. Необходимо определить основные характеристики данной СМО.

Математической моделью этой задачи является многоканальная система массового обслуживания разомкнутого вида с ожиданием (очередью). За единицу времени примем 1 ч и рассмотрим параметры имеющейся модели: общее число каналов обслуживания $n = 6$; интенсивность входящего потока $\lambda = \frac{2100}{7} = 300$ заявок в час при семичасовой работе в день; среднее время обслуживания $\bar{t}_{ог} = 36$ с, или

$\frac{36}{3600} = 0,01$ ч; интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{0,01} = 100$

заявок в час; интенсивность нагрузки $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{300}{100} = 3$; количество заня-

тых каналов k .

В данной задаче $\rho < n$ ($3 < 6$), значит, предельный режим функционирования существует, а задача имеет решение.

Вероятность того, что в системе нет ни одного требования,

$$P_0 = \left[1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!(1-0,5)} \right]^{-1} = \frac{1}{20,425} = 0,049.$$

Это означает, что в среднем 4,9 % всего времени работы 6 компьютеров одновременно будут свободны.

Среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди), составляет

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n! n \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} = \frac{3^7 \cdot 0,049}{6! \cdot 6(1-0,5)^2} = 0,1.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{N}_3 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 3$. Среднее число требований, находящихся в системе, равно сумме среднего количества занятых каналов (ρ) и среднего числа требований, находящихся в очереди ($\bar{r}$): $\bar{N}_c = 3 + 0,1 = 3,1$ посетителя находится в СМО.

Средняя продолжительность пребывания требования в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n \cdot P_0}{n \cdot \mu \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} = \frac{3^6 \cdot 0,049}{6 \cdot 100 \cdot 6! (1-0,5)^2} = 0,0003.$$

Средняя продолжительность пребывания требования в системе

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = 0,0003 + 0,01 = 0,0103.$$

Так как число мест в очереди не ограничено, то все требования, поступившие в систему, рано или поздно будут обслужены. Следова-

но, $P_{\text{отк}} = 0$, относительная пропускная способность системы $Q = 1$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot Q = 300 \cdot 1 = 300$.

Рассчитаем коэффициенты использования каналов (K_n), простоя каналов (K_n), среднее число простаивающих каналов ($\bar{N}_n$):

$$K_n = \frac{\bar{N}_3}{n} = \frac{3}{6} = 0,5; K_n = 1 - K_n = 1 - 0,5 = 0,5;$$

$$\bar{N}_n = n - \bar{N}_3 = 6 - 3 = 3.$$

Задачи для решения

Задача 1. В магазине запасных частей и деталей для сельскохозяйственных машин работают 6 кладовщиков. Поток покупателей имеет пуассоновское распределение, в среднем в течение одного часа поступает 3 заявки. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним значением 1,5 ч на одно требование. Определить показатели работы данной СМО.

Задача 2. Автосервисная организация имеет участок контроля, который состоит из 5 испытательных стендов. Отремонтированные изделия поступают на контроль с интенсивностью 600 шт/ч. Среднее время, затрачиваемое на контроль одного изделия, равно 18 с. Так как процесс производства в организации непрерывный, то при малом числе стендов на контроле может скопиться неограниченное число изделий. Поэтому данную СМО можно отнести к числу систем с очередью (ожиданием), длина которой не ограничена. Входящий поток требований является простейшим, а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. Определить важнейшие характеристики данной СМО.

Задача 3. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Ремонтная мастерская сельскохозяйственного предприятия с тремя рабочими (каналами (n)) выполняет ремонт сельхозмашин. Поток (пуассоновский) неисправных сельхозмашин, прибывающих в мастерскую, имеет интенсивность $\lambda = 3 - 0,1N$ сельхозмашины в сутки. Среднее время ремонта одной сельхозмашины распределено по показательному закону и равно $\bar{t}_{\text{ог}} = 0,5$ сут. Так как в сельскохозяйственном предприятии одна ремонтная мастерская, то очередь растет неограниченно.

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{t_{об}}$;
- 2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему: $p = \frac{\lambda}{\mu}$;
- 3) найти p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p^k}{k!} + \frac{p^n}{n!(1-\frac{p}{n})}};$$

$$p_k = \frac{p^k}{k!} p_0; \quad k = 1, \dots, n;$$

- 4) определить $p_{от.о}$ – вероятность отсутствия очереди у мастерской:

$$p_{от.о} = \sum_{k=0}^n p_k;$$

- 5) рассчитать $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{оч} = \left(\frac{np}{(n-p)^2} \right) p_n;$$

- 6) вычислить $\bar{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{N}_{сис} = \bar{N}_{оч} + p;$$

- 7) найти $\bar{T}_{оч}$ – среднее время пребывания сельхозмашины в очереди на обслуживание:

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{оч}}{\lambda};$$

- 8) определить $\bar{T}_{сис}$ – среднее время пребывания сельхозмашины в системе (в мастерской):

$$\bar{T}_{\text{сис}} = \frac{\bar{T}_{\text{оч}}}{\mu};$$

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу ремонтной мастерской сельскохозяйственного предприятия.

6.5. Многоканальная СМО с очередью (длина очереди ограничена)

К числу показателей функционирования **многоканальной СМО с очередью (длина очереди ограничена)** относят:

– предельные вероятности системы:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right]^{-1}, \frac{\rho}{n} \neq 1,$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot (m+1) \right]^{-1}, \frac{\rho}{n} = 1,$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$P_k = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} \cdot P_0, \quad n \leq k \leq m+n;$$

– вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0;$$

– относительную пропускную способность (вероятность того, что поступившее в систему требование будет принято к обслуживанию):

$$Q = 1 - P_{\text{отк}};$$

– абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot Q;$$

– среднее число занятых каналов:

$$\bar{N}_3 = \frac{A}{\mu};$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди):

$$\bar{r} = P_0 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \quad \frac{\rho}{n} \neq 1;$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^n \cdot m \cdot (m + 1)}{2n!} \cdot P_0, \quad \frac{\rho}{n} = 1;$$

– среднее число требований, находящихся в системе:

$$\bar{N}_c = \bar{r} + \bar{N}_3;$$

– среднюю продолжительность пребывания в системе:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{N}_c}{\lambda(1 - P_{\text{отк}})} = \frac{\bar{N}_c}{A};$$

– среднюю продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{A} \quad \text{или} \quad \bar{t}_{\text{ож}} = \bar{t}_{\text{сист}} - \bar{t}_{\text{об}}.$$

Задачи для решения

Задача 1. В справочной банка оператор дает справку в среднем за 4 мин. Звонки поступают каждые 3 мин. Если операторы заняты, то звонок не обслуживается. Определить вероятности состояний и характеристики обслуживания справочной. Определить количество каналов, чтобы относительная пропускная способность была не меньше 0,75.

Задача 2. В банке в зависимости от сложности запроса клиента кассиру требуется в среднем 20 мин. Клиенты подходят к нему в среднем через каждые 12 мин. Кассир зарабатывает 15 000 ден. ед. за ме-

сяц. Очередь ограничена до 6 человек. Если в очереди больше 6 человек, клиент уходит, и потери за час составляют 200 ден. ед. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания. Определить оптимальное количество кассиров.

Задача 3. Фермер с целью дополнительного получения дохода открыл мойку автомобилей и тракторов. Анализ показал, что в среднем за час приезжает 9 технических средств, но если в очереди уже находятся 4 единицы, то вновь подъезжающие клиенты не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки любого технического средства составляет 20 мин, мест для мойки – 2. Средняя стоимость мойки одной технической единицы составляет 20 у. д. е. Определить среднюю величину потерь выручки фермера при работе мойки 10 ч в день.

Задача 4. Райагросервисная организация открыла небольшую ремонтную мастерскую. Три механика занимаются техническим обслуживанием мотокультиваторов, которые сдают в мастерскую люди, занимающиеся личным подсобным хозяйством. Мастерская функционирует в зимний период, для того чтобы подготовить к весенней кампании те технические средства, что приносят клиенты. Однако ограниченная емкость мастерской позволяет разместить для техобслуживания не более 15 мотокультиваторов, не учитывая тех, которые уже находятся у механиков. Поэтому, если очередной посетитель приходит в то время, когда все механизмы ожидают обслуживания, он уходит. Население прибывает в мастерскую в среднем каждые 10 мин, а на выполнение механиком одного обслуживания уходит примерно 30 мин. Клиенты заходят в соответствии с распределением Пуассона, а время выполнения работы подчиняется экспоненциальному распределению. Рассчитать основные характеристики данной СМО.

Рассматриваемая система является многоканальной СМО с ограниченной длиной очереди, для которой $n = 3$; $m = 15$; $\lambda = 6$ посетителей в час; $\bar{t}_{ог} = 0,5$ ч.

Т е м а 7. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Независимо от сферы народного хозяйства, на всех предприятиях важно поддерживать рациональный уровень запасов (сырья, полуфабрикатов, готовых изделий).

Под запасами понимается все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления.

Совокупные запасы на пути технологической цепи «поставщик – потребитель» разделяют на две основные части:

а) производственный запас – это продукция производственно-технического назначения, находящаяся в руках производителей и вступившая или готовая вступить в процесс непосредственного производства;

б) товарный запас – это продукция, которая находится в сфере обращения и на складах предприятий-изготовителей, снабженческо-сбытовых, торговых и иных базах, в пути.

Основные причины создания оптимального объема запасов для любой организации:

1) необходимо обеспечить непрерывность и бесперебойность процессов производства;

2) периодичность выпуска различных видов продукции поставщиками, а также их транспортировка к потребителю партиями;

3) в большинстве случаев происходит несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Затраты на хранение слишком больших запасов уменьшают прибыльность организации; поддержание запасов на слишком низком уровне связано с риском возникновения дефицита и остановкой производства. Для решения данной проблемы применяют *математические методы и модели теории управления запасами*.

Итак, важно найти наилучшее соотношение между требованием минимизации общих издержек, связанных с доставкой и хранением запасов и надежным обеспечением спроса на хранимый запас.

Использование моделей теории управления запасами позволяет определить такую организацию поставок (объемы и периодичность заказов), при которой суммарные затраты на доставку, хранение, а также потери (недополученная прибыль), обусловленные дефицитом товаров, были бы минимальными.

При постановке экономико-математической задачи по управлению товарными запасами необходимо учитывать следующие особенности:

1) *величину запаса*. Она определяется в натуральном или стоимостном выражении;

2) *спрос* – это совокупность требований на товары или потребность в материальных ресурсах для обеспечения непрерывности производственного процесса;

3) *порядок пополнения запасов*, т. е. интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой. Пополнение запасов осуществляется на основе следующих вариантов: а) мгновенная, т. е. экс-

тренная поставка; б) задержка поставок относительно момента подачи требования. В этом случае новые заказы размещаются тогда, когда их уровень опускается до заранее определенного значения, называемого точкой заказа товара;

4) *издержки*, которые разделяют на четыре основных вида: а) на приобретение; б) на оформление заказа; в) на хранение запасов; г) вследствие дефицита (нехватки запасов);

5) *критерий оптимальности* – интегрирующий показателем сформулированной цели управления запасами. Чаще всего используется минимум суммарных затрат, связанных с заготовкой и содержанием запасов.

7.1. Модель оптимального запуска продукции в производство

Модель оптимального запуска продукции в производство представлена на рис. 7.1, 7.2.

Задача 1. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны $K = 200 + 2N$ у. д. е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида $v = 2500 + 5N$ т в год, стоимость 1 т $a = 500 + 5K$ у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют $p = 1\%$ от стоимости хранимой продукции.

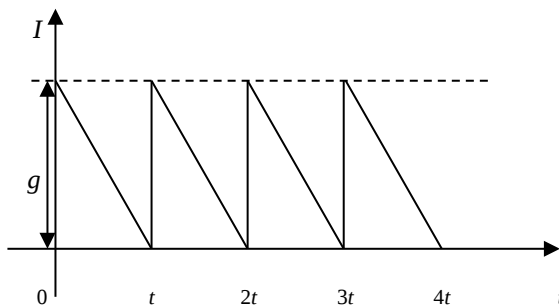


Рис. 7.1. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона

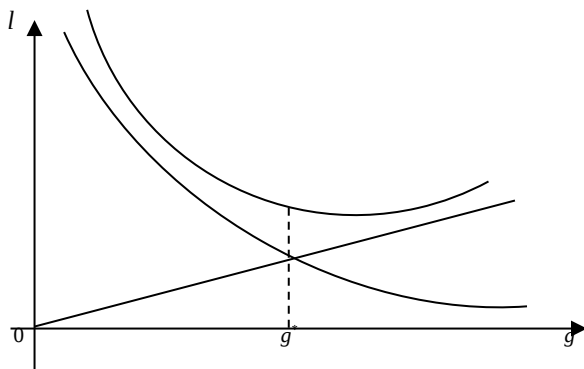


Рис. 7.2. Зависимость издержек содержания запасов, стоимости заказа от размера партии поставок

Задача 2. Требуется определить оптимальные параметры существующей системы управления запасами и сравнить с действующей системой поставки партии запасных частей в количестве 400 шт.

Исходная информация.

Торговый отдел районного агросервиса планирует иметь потребность в запчастях в количестве $30\,000 + 100N$ шт. Годовые затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 1,2 у. д. е. Издержки на транспортировку одной партии этого товара равны 10 у. д. е.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени: $s = ap$;

2) используя модель Уилсона, определить g^* – оптимальный размер партии запуска (поставки):

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}};$$

где K – затраты на организацию поставки;

ν – интенсивность спроса;

3) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{g^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}};$$

4) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы (по формированию поставок и содержанию запасов) в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv}.$$

Задача 3. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

Исходная информация.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц (τ_d). Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют: $K = 400 + 2K$ у. д. е. Потребность в соках – $v = 1,5 + 0,01N$ тыс. л в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня $s = 0,1 + 0,01K$ у. д. е.

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) найти S – издержки содержания единицы продукции в месяц;
- 2) используя модель Уилсона, определить g^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2 задачи 1);
- 3) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3 задачи 1);
- 4) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4 задачи 1);
- 5) найти g_d – размер партии поставки при действующей системе:

$$g_d = \tau_d v;$$

- 6) определить L – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L = \frac{Kv}{g} + \frac{sg}{2};$$

- 7) проанализировать результаты решения задачи, сравнить оптимальные параметры системы с действующими.

7.2. Модель оптимального размера партии поставки

Модель оптимальной партии поставки используется для оценки объема заказа на определенный товар и включает в себя следующую систему предположений:

а) спрос на товар известен и является постоянным, т. е. определенным, детерминированным. Пусть v – спрос (потребность), т. е. общий объем поставок товара за период t ;

б) нулевой цикл заказа предполагает, что товары будут поставлены без задержки, т. е. заказ выполняется экстренно. При этом отклонения в ту или иную сторону в поступлении заказанной партии недопустимы, а время доставки принимается нулевое;

в) уровень запасов снижается равномерно в соответствии с равномерно поступающими требованиями. Когда все запасы исчерпаны, происходит поставка новой партии товара. Пусть Q – объем заказа (количество единиц);

г) неизменность цены приобретения, т. е. расходы на приобретение единицы товара постоянны, которые обозначим P ;

д) дефицит недопустим. Товар должен быть всегда в наличии и потребности покупателей немедленно удовлетворяться.

На рис. 7.3 представлено изменение уровня запасов I конкретного товара от начального значения Q в момент поставки до нуля к концу периода.

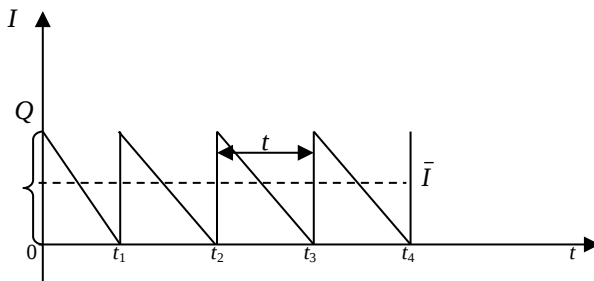


Рис. 7.3 Динамика изменения запасов во времени

На графике выделены средний уровень запасов данного товара $\bar{I}$, который равен половине размера заказа $\left(\bar{I} = \frac{Q}{2} \right)$, длина цикла t , т. е.

интервал времени между поставками $\left(t = \frac{Q}{v} \right)$.

Для решения задачи необходимо построить модель, где описываются общие затраты в системе управления запасами. Они складываются из стоимости на приобретение товара, расходов на организацию заказа и хранение запасов.

В качестве целевой функции принимаются суммарные годовые затраты системы управления запасами:

$$C = C_3 + C_x,$$

где C_3 – сумма затрат по организации заказа;

C_x – сумма затрат на хранение товаров за период t (год).

Ежегодная стоимость оформления заказа определяется по формуле

$$C_3 = K \cdot n \text{ или } C_3 = K \cdot \frac{v}{Q},$$

где K – затраты на оформление, связанные с размещением заказа (стоимость заказа одной партии товара), т. е. их постоянная часть;

n – число поставок за анализируемый период t ($n = \frac{v}{Q}$).

Ежегодная стоимость хранения запасов определяется по формуле

$$C_x = \bar{I} \cdot S \text{ или } C_x = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot S,$$

где $\bar{I}$ – средний уровень запасов;

S – затраты на хранение единицы товара в единицу времени (за год).

Значит, целевую функцию можно записать следующим образом:

$$C = \left(K \cdot \frac{v}{Q} + \frac{Q}{2} \cdot S \right) \rightarrow \min. \quad (7.1)$$

Первый член в формуле прямо пропорционален, а второй – обратно пропорционален размеру партии. При изменении величины размера партии Q изменяется C как функция Q . Таким образом, неуправляемыми параметрами в целевой функции являются v, K, S . Это исходные данные для решения задачи. Выберем управляемую переменную Q из условия минимума суммарных затрат. Приравняем к нулю первую производную по Q (необходимый признак экстремума):

$$\frac{dC}{dQ} = -\frac{Kv}{Q^2} + \frac{S}{2} = 0.$$

Отсюда находится оптимальный размер партии заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{S}}. \quad (7.2)$$

Так как $\frac{d^2C}{dQ^2} > 0$ (достаточный признак экстремума) для всех $Q > 0$, то значение формулы (7.2) доставляет функции цели (7.1) абсолютный минимум. Причем данная формула (7.2) известна как экономичная величина заказа, формула размера оптимальной партии поставки, формула Уилсона.

Далее приведем ряд расчетных характеристик системы управления однономенклатурными запасами:

- оптимальный средний уровень запаса – $\bar{I}^* = \frac{Q^*}{2}$;
- оптимальное число поставок – $n^* = \frac{v}{Q^*}$;
- оптимальный интервал времени между поставками –

$$t^* = \frac{1}{n^*} = \frac{Q^*}{v}.$$

При этом минимальный размер суммарных затрат составит:

$$C_{\min}^* = \frac{K \cdot v}{\sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}}} + \frac{S}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}} = \sqrt{2 \cdot K \cdot S \cdot v} = S \cdot Q^*.$$

Задачи для решения

Задача 1. Частный предприниматель открыл кафе. Для удовлетворения месячного спроса он заказывает мяса птицы у производителей в количестве 1850 кг. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 25 у. д. е. Стоимость замораживания и хранения одного килограмма мяса обходится предпринимателю в 1,6 у. д. е. в месяц. Фактически ему поставляют продукцию партиями по 1670 кг мяса в каждой.

Требуется:

1) определить оптимальную стратегию управления запасами для предпринимателя в предположении, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно нулю;

2) найти затраты предпринимателя, связанные с существующей стратегией создания запаса;

3) вычислить разность между текущими месячными затратами предпринимателя и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

Задача 2. Отдел снабжения автосервисной организации планирует иметь потребность в подшипниках в количестве 80 000 шт. Годовые затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 1,8 у. д. е. Издержки на транспортировку одной партии этого товара равны 30 у. д. е.

Требуется:

1) определить оптимальные параметры данной системы управления запасами;

2) сравнить с действующей системой поставки партии подшипников в количестве 900 шт.

Задача 3. На склад оптовой базы поступают аккумуляторы для автомобилей, годовая потребность в которых составляет 900 шт. Затраты на оформление, т. е. издержки завоза одной партии равны 50 у. д. е. Ежегодные затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 103 у. д. е.

Рассматривая детерминированную модель управления однономенклатурными запасами, необходимо:

1) найти фиксированный размер заказываемой партии аккумуляторов, который минимизирует расходы по завозу и хранению запасных частей;

2) определить оптимальные параметры системы управления запасами;

3) рассчитать, каким образом изменятся суммарные издержки по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами, если размер одной партии поставки аккумуляторов составит 16 шт.

Задача 4. Годовая потребность сельхозорганизации в азотных удобрениях составляет 430 т. Годовые затраты по хранению 1 т данного вида удобрений составляют 25 у. д. е. Затраты на подготовительно-заключительные операции, связанные с каждой поставкой и не зависящие от величины поставляемой партии, равняются 5 у. д. е.

Необходимо:

1) определить оптимальные параметры системы управления запасами;

2) рассчитать коэффициент относительного увеличения затрат, если известна фактическая стратегия доставки партии удобрений в количестве 10 т (имеется 2 специализированные автомашины по перевозке груза грузоподъемностью 5 т каждая).

Задача 5. Фабрика выпускает партиями различные виды печенья. При переходе от выпуска одного вида к другому предприятие несет издержки из-за переналадок, которые составляют 100 у. д. е. Интенсивность потребления, т. е. средний объем продаж, составляет 8 т в декаду. Издержки, связанные с хранением 1 т печенья за данный период, составляют 1,6 у. д. е. Необходимо определить оптимальный объем запускаемой в производство партии конфет.

7.3. Модель оптимального размера поставки партии с определением точки заказа

Для обеспечения бесперебойного снабжения в некоторых случаях следует также учитывать срок выполнения заказа L , т. е. время от момента размещения заказа до момента появления товара у потребителя. Из-за того, что пополнение запаса не всегда может происходить мгновенно (как предполагалось ранее), в отдельных задачах существует положительный срок выполнения заказа L (временное запаздывание) от момента его размещения до реальной поставки, как показано на рис. 7.4. В этой ситуации точка возобновления заказа имеет место, когда уровень запаса опускается до $r = L \nu$ единиц. Точка заказа r есть минимальный уровень наличных запасов, при котором необходимо разместить новый заказ, чтобы избежать дефицита.

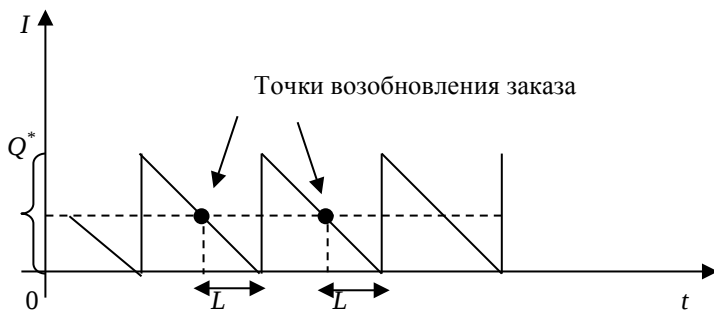


Рис. 7.4. Изменение запасов при учете времени их доставки

На рис. 7.4 представлено изменение уровня запаса во времени в предположении, что *срок выполнения заказа L меньше продолжительности цикла заказа* (оптимального интервала времени между поставками) t^* .

Пример 1. Торговый отдел агротехсервисного предприятия реализует 2000 электродвигателей в год. Величина спроса равномерно распределяется в течение указанного периода. Каждый электродвигатель стоит 150 у. д. е. Согласно экономическим расчетам стоимость одного заказа составляет 50 у. д. е. в виде административных и постоянных транспортных расходов. Время доставки заказа от поставщика – 3 рабочих дня. По оценкам специалистов издержки хранения составляют 15 % среднегодовой стоимости запасов. Предполагается, что торговый отдел работает 300 дн. в году.

Требуется определить:

- 1) оптимальную партию поставки электродвигателей;
- 2) оптимальный интервал между поставками (длину цикла);
- 3) точку размещения заказа (уровень повторного заказа);
- 4) моменты размещения заказов, если известно, что запас электродвигателей на начало года составляет 60 шт.

Решение. По формуле Уилсона найдем оптимальный размер партии:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 2000}{150 \cdot 0,15}} = 94 \text{ электродвигателя.}$$

Оптимальная длина цикла

$$t^* = \frac{94}{2000} = 0,047 \text{ года} \approx 14 \text{ дн.}$$

Так как срок выполнения заказа ($L = 3$) меньше длины цикла ($t^* = 14$), то точка размещения заказа (учитывая, что 3 дня составляет 0,01 года) равна: $r = L \cdot v = 0,01 \cdot 2000 = 20$ шт. Следовательно, очередной заказ необходимо подавать, когда в торговом отделе на складе останется 20 электродвигателей.

В общем случае заказы следует размещать в моменты:

$$t_k = \left(\frac{I_0}{v} - L\right) + k \cdot t^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, первый заказ необходимо сделать в момент $t_0 = (\frac{60}{2000} - 0,01) = 0,02$ (года) = 6 дн., следующий — в момент

$t_1 = (\frac{60}{2000} - 0,01) + 1 \cdot 0,047$, т. е. 20 дн. и т. д.

В некоторых задачах *срок выполнения заказа L больше продолжительности цикла заказа*. Тогда находят эффективный срок L_e выполнения заказа:

$$L_e = L - m \cdot t^*,$$

где m — наибольшее целое, не превышающее $\frac{L}{t^*}$.

Стратегия управления запасами при этом формулируется следующим образом: заказывать Q^* единиц продукции, как только уровень запаса снижается до $L_e \cdot v$ единиц.

При подобной постановке задачи можно также выделить следующие этапы модели с определением точки заказа:

а) нахождение оптимального размера партии поставки (Q^*) по формуле Уилсона и расчет оптимального интервала (t^*);

б) нахождение точки размещения заказа:

$$r = L \cdot v - \left[\frac{L}{t^*} \right] \cdot Q^*,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа $[\cdot]$;

в) нахождение минимального начального запаса:

$$I_{\min} = L \cdot v;$$

г) расчет минимальных суммарных издержек системы ($C_{\min}^*$).

Пример 2. Завод производит сельскохозяйственную технику для поставок на рынки ближнего зарубежья. Для этих целей он имеет потребность в комплектующих изделиях в количестве 90 шт. в день. Подразделение, занимающееся коммерческими операциями, заказывает эти изделия с определенной периодичностью. Стоимость размещения заказа на поставку комплектующих составляет 90 у. д. е. Расходы на хранение изделий на складе оцениваются в 0,02 у. д. е. в день. Срок выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равен 17 дн.

Требуется определить оптимальную стратегию заказа комплектующих изделий.

Решение. В данной задаче оптимальный объем заказа –

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K \cdot v}{S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 90}{0,02}} = 900,$$

длина цикла –

$$t^* = \frac{Q^*}{v} = \frac{900}{90} = 10.$$

Так как срок выполнения заказа ($L = 17$ дн.) превышает продолжительность цикла $t^* = 10$, поэтому необходимо вычислить L_e . Число целых циклов, заключенных в L , равно:

$$m = (\text{наибольшее целое} \leq \frac{L}{t^*}) = (\text{наибольшее целое} \leq \frac{17}{10}) = 1.$$

Таким образом, $L_e = L - m \cdot t^* = 17 - 1 \cdot 10 = 7$ дн. Поэтому точка повторного заказа имеет место при уровне запаса:

$$L_e \cdot v = 7 \cdot 90 = 630 \text{ изделий.}$$

Для нахождения точки размещения заказа воспользуемся другой формулой:

$$r = 17 \cdot 90 - \left[\frac{17}{10} \right] \cdot 900 = 1530 - 1 \cdot 900 = 630.$$

Оптимальная стратегия заказа комплектующих изделий может быть сформулирована так: необходимо заказать 900 изделий, как только уровень их запаса уменьшается до 630 шт.

В данной задаче для обеспечения бездефицитной работы необходимо иметь минимальный начальный запас, величина которого $I_0 = L \cdot v = 1530$.

Дневные расходы, связанные с содержанием запаса в соответствии с оптимальной стратегией, равны:

$$C_{\min}^* = S \cdot Q^* = 0,02 \cdot 900 = 18 \text{ у. д. е.}$$

Задача 1. Коммерческая фирма, занимающаяся внешнеторговыми операциями, хранит на складе импортные вентиляторы для поставки их районным агропромтехснабам. Интенсивность потребления одного товара обусловлена планом проведения ремонтно-восстановительных работ обслуживающих организаций и составляет 80 ед. в день. За размещение заказа коммерческая фирма каждый раз платит 10 у. д. е. Стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в 0,42 у. д. е. в неделю или 0,06 у. д. е. за день. Необходимо определить оптимальную стратегию управления запасами, если предположить, что время выполнения заказа от момента его размещения до поставки равно 5 дн.

Рассмотрим определение *оптимальной точки заказа в модели с конечной интенсивностью поступления заказа*, т. е. в модели производственных поставок. Оптимальная точка заказа определяется следующим образом (два случая):

$$1) \text{ если } L - \left\lfloor \frac{L}{t^*} \right\rfloor \cdot t^* < t_2^*, \text{ то } r = Lv - \left\lfloor \frac{L}{t^*} \right\rfloor \cdot Q^*;$$

$$2) \text{ если } L - \left\lfloor \frac{L}{t^*} \right\rfloor \cdot t^* > t_2^*, \text{ то } r = L(v - \lambda) + \left(\left\lfloor \frac{L}{t^*} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{v} - 1 \right) \cdot Q^*.$$

Пример 3. Для ремонта топливных насосов УТН-5 агропромтехнике требуется 360 узлов в квартал. Необходимые узлы, которые используются в ремонтно-сборочной линии обслуживающей организации, можно производить собственными силами в объеме 600 шт. за квартал. Затраты на наладку производства данного узла (каждого нового производственного цикла) составляют 200 у. д. е. Квартальные расходы на хранение и поддержание изделия в нужном состоянии – 3 у. д. е. Время реализации заказа (от подачи заявки до выхода готовой продукции) составляет: а) 30 дней; б) 60 дней. Определить минимальный уровень запасов, при котором необходимо разместить новый заказ.

Решение. Найдем величину оптимальной партии или размер производственного заказа: $Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 360}{3 \cdot (1 - \frac{360}{600})}} \approx 346$ узлов.

Определим оптимальное время расхода запаса:

$$t_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{3 \cdot 360}} \cdot \sqrt{1 - \frac{360}{600}} = 0,385 \text{ квартала} \approx 35 \text{ дн.}$$

Рассчитаем оптимальный период возобновления заказа:

$$t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{3 \cdot 360}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{360}{600}}} = 0,962 \text{ квартала} \approx 87 \text{ дн.}$$

Рассматривая период $L = 30$ дн., что составляет 0,333 квартала, имеем: $0,333 - \left[\frac{0,333}{0,962} \right] \cdot 0,962 < 0,385$.

$$\text{Тогда } r = L \cdot v - \left[\frac{L}{t^*} \right] \cdot Q^* = 0,333 \cdot 360 - \left[\frac{0,333}{0,962} \right] \cdot 346 = 120.$$

В случае, если $L = 60$ дн., т. е. 0,667 квартала, имеем:

$$0,667 - \left[\frac{0,667}{0,962} \right] \cdot 0,962 > 0,385.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } r = L \cdot (v - \lambda) + \left(\left[\frac{L}{t^*} \right] + 1 \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{v} - 1 \right) \cdot Q^* = 0,667(360 - \\ - 600) + \left(\left[\frac{0,667}{0,962} \right] + 1 \right) \cdot \left(\frac{600}{360} - 1 \right) \cdot 346 = 71 \text{ узел.} \end{aligned}$$

Задача 2. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется $v = 8 + 0,1N$ тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа $K = 30 - K$ у. д. е., содержание одной заготовки $s = 2 - 0,1N$ у. д. е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 20$ дней, или 0,055 года.

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) определить g^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2 задачи 1), применяя модель Уилсона;
- 2) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3 задачи 1);

3) найти r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta \nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right] g^*,$$

где $\left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right]$ – целая часть числа $\frac{\Theta}{\tau^*}$;

4) рассчитать I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta \nu;$$

5) определить t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{\nu} - \Theta + k\tau^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где I – фактический начальный запас;

6) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4 задачи 1);

7) проанализировать результаты решения задачи.

Задача 3. Модель оптимального размера партии поставки поступления заказа (партии товара) (рис. 7.5).

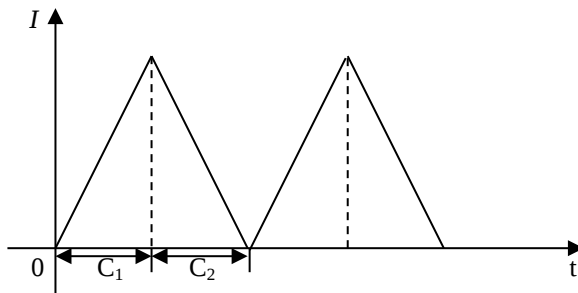


Рис. 7.5. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления партии товара

Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Консервный завод выпускает партиями 8 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консер-

вов – $\nu = 400 + (N + K)$ тыс. туб в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов, $K = 300 + 2N$ у. д. е. Стоимость хранения 1 тыс. туб консервов на складе $S = 40 + K$ у. д. е. в год. Производительность завода (интенсивность) $\lambda = 3200, 0 + 10, 0(N + K)$ тыс. туб в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 2$ месяца, или 0,164 года.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти g^* – оптимальный размер партии поставки:

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать τ_1^* – время производства:

$$\tau_1^* = \frac{g^*}{\lambda};$$

3) рассчитать τ_2^* – время чистого потребления:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}};$$

4) определить оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

5) определить r – точку заказа:

$$a) \quad r = \Theta\nu - \left\lceil \frac{\Theta}{\tau^*} \right\rceil g^*, \text{ если } \Theta - \left\lceil \frac{\Theta}{\tau^*} \right\rceil \tau^* < \tau_2^*;$$

$$б) \quad r = \Theta(\nu - \lambda) + \left(\left\lceil \frac{\Theta}{\tau^*} \right\rceil + 1 \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu} - 1 \right) g^*, \text{ если } \Theta - \left\lceil \frac{\Theta}{\tau^*} \right\rceil \tau^* > \tau_2^*;$$

6) определить t_k – моменты размещения заказа при $t_0 = 0$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, \quad k = 1, 2, \dots;$$

7) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}};$$

8) проанализировать результаты решения задачи.

7.4. Модель с конечной интенсивностью поступления заказа (модель производственных поставок)

Модель с конечной интенсивностью поступления заказа (или модель производственных поставок) используется для ситуации, когда держатель запасов одновременно является и поставщиком. Например, ремонтный завод при сборке использует специальные детали, которые на нем же и производятся.

Система с конечной интенсивностью поступления заказа может работать без дефицита, если интенсивность поставок (производительность, норма выпуска) λ превосходит интенсивность потребления (спрос) v (рис. 7.6). Издержки рассматриваемой системы в единицу времени составляют:

$$C = \frac{Kv}{Q} + \frac{Q}{2} \cdot S \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right).$$

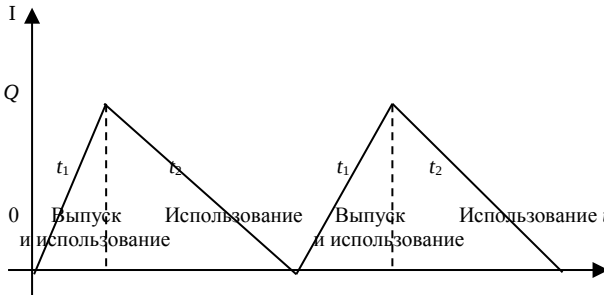


Рис. 7.6. Изменение уровня запасов в модели выпуска партии продукции

Оптимальные параметры работы системы находят следующим образом:

– величина оптимальной партии:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S \cdot (1 - \frac{v}{\lambda})}};$$

– оптимальные периоды возобновления заказа:

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{Sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}};$$

$$t_1^* = \frac{Q}{\lambda}, \quad t_2^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}};$$

– минимальные издержки в единицу времени:

$$C_{\min}^* = \sqrt{2Ksv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}.$$

Пример. В ремонтной мастерской на некотором станке производятся детали в количестве 1000 ед. в месяц. Они используются для выпуска продукции на другом станке с производительностью 250 ед. в месяц. Оставшиеся детали образуют запас и поступают на специальный склад. Фиксированные издержки по организации производственного цикла, т. е. затраты на производство одной партии изделий, равны 500 у. д. е. По оценкам специалистов планово-учетного отдела стоимость выпуска одной детали равна 1,25 у. д. е., а издержки хранения составляют 20 % средней стоимости запасов в год.

Определить:

- 1) каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке;
- 2) как следует организовывать циклы для производства деталей;
- 3) если бы можно было снизить фиксированные затраты на производство одной партии деталей до 180 у. д. е., какой будет оптимальный размер партии и насколько снизятся издержки системы.

Решение. Найдем величину оптимальной партии:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S \cdot \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 3000}{1,25 \cdot 0,2 \cdot \left(1 - \frac{3000}{12000}\right)}} = 400 \text{ деталей.}$$

Рассчитаем оптимальное время накопления запаса t_1^* (в течение этого периода детали одновременно и поступают, и потребляются) и оптимальное время расхода запаса t_2^* :

$$t_1^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{4000}{12000} = 0,333 \text{ года;}$$

$$t_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{S \cdot v}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{0,25 \cdot 3000}} \cdot \sqrt{1 - \frac{3000}{12000}} = 1 \text{ год.}$$

Оптимальный период возобновления заказа:

$$t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{S \cdot v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{0,25 \cdot 3000}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3000}{12000}}} = 1,33 \text{ года.}$$

или же $t^* = t_1^* + t_2^* = 0,33 + 1 = 1,33 \text{ года.}$

Если затраты на наладку производства одной партии деталей снизятся до 180 у. д. е., то оптимальный размер выпуска составит:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 180 \cdot 3000}{0,25 \cdot \left(1 - \frac{3000}{12000}\right)}} = 2400 \text{ шт. в год.}$$

Минимальные издержки системы в единицу времени находим по формуле

$$C_{\min}^* = \sqrt{2 \cdot K \cdot S \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}.$$

Тогда

$$C_1^* = \sqrt{2 \cdot 500 \cdot 0,25 \cdot 3000} \cdot \sqrt{1 - \frac{3000}{12000}} = 750 \text{ у. д. е.;}$$

$$C_2^* = \sqrt{2 \cdot 180 \cdot 0,25 \cdot 3000} \cdot \sqrt{1 - \frac{3000}{12000}} = 450 \text{ у. д. е.}$$

Следовательно, затраты при втором варианте снизятся по сравнению с первым на 300 у. д. е. Становится понятным, что в таких задачах, когда интенсивность поставок значительно выше интенсивности потребления ($\frac{\nu}{\lambda} \rightarrow 0$), будем иметь обычную базовую модель Уилсона.

Задачи для решения

Задача 1. Организация занимается производством различных видов запасных частей, выпуск которых налажен партиями на одном и том же оборудовании. Спрос (интенсивность потребления) на каждый их вид заранее известен и составляет 304 упаковки в месяц. Фиксированные издержки переналадки, связанные с перестройкой оборудования при переходе от выпуска одного вида запасных частей к другому, равны 162 у. д. е. Содержание одной упаковки запасных частей на складе обходится агропромтехнике в 96 у. д. е. в месяц. Мощность производства цеха составляет 1600 упаковок в месяц.

Требуется определить оптимальный размер партии производства каждого вида запасных частей и среднемесячные издержки, связанные с переналадками и содержанием продукции исходя из того, что дефицит запаса на складе цеха не допускается.

Задача 2. На некотором станке производятся детали в количестве 2000 ед. в месяц. Они используются для выпуска продукции на другом станке с производительностью 500 ед. в месяц. Оставшиеся детали образуют запас и поступают на специальный склад. Фиксированные затраты на производство одной партии изделий равны 300 у. д. е. Стоимость выпуска одной детали равна 1,5 у. д. е., а издержки хранения составляют 10 % средней стоимости запасов в год.

Требуется определить:

- 1) каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке;
- 2) как следует организовывать циклы для производства деталей;
- 3) какой будет оптимальный размер партии и насколько снизятся издержки системы, если бы можно было снизить фиксированные затраты на производство одной партии деталей до 280 у. д. е.

7.5. Модели управления запасом с дефицитом

Ситуация, когда в условиях дефицита поступающие требования берутся на учет.

Впоследствии после получения новых поставок удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас и выполняются вновь поступившие заказы покупателей (рис. 7.7).

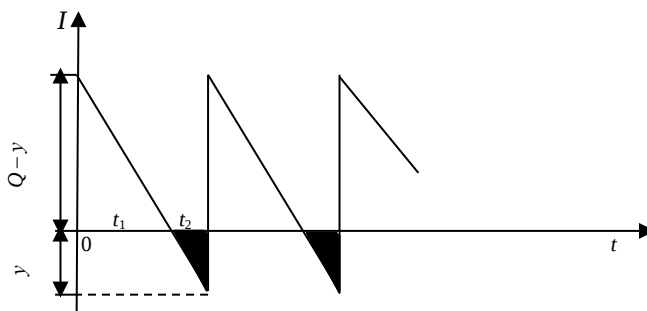


Рис. 7.7. Изменение запасов при возникновении дефицита (неудовлетворенные требования ставятся на учет):

Q – партия поставки; y – максимальная величина задолженного спроса (максимальный уровень дефицита); t_1 – время существования наличного запаса; t_2 – период дефицита (заштрихован)

Максимальная величина наличного запаса в системе будет равна $Q - y$. Обозначим d убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени (в других случаях затраты на штраф).

В рассматриваемой постановке задачи средние издержки работы в единицу времени

$$C = \frac{K \cdot v}{Q} + S \cdot \frac{(Q - y)^2}{2Q} + d \cdot \frac{y^2}{2Q}.$$

Отсюда оптимальные параметры системы будут равны:

– оптимальный размер партии поставки:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K \cdot v}{S}} \cdot \sqrt{1 + \frac{S}{d}};$$

– максимальная величина дефицита:

$$y^* = \frac{S}{d} \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}};$$

– максимальная величина наличного запаса:

$$Y^* = Q^* - y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}};$$

– время существования наличного запаса:

$$t_1^* = \frac{Y^*}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{S \cdot v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}};$$

– время дефицита:

$$t_2^* = \frac{y^*}{v} = \frac{S}{d} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K}{S \cdot v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}};$$

– оптимальная величина цикла:

$$t^* = t_1^* + t_2^* = \frac{Q^*}{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{S \cdot v}} \cdot \sqrt{1 + \frac{S}{d}};$$

– минимальные издержки системы в единицу времени:

$$C_{\min}^* = \sqrt{2 \cdot K \cdot S \cdot v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}}.$$

Пример. Сельскохозяйственные организации, по мере необходимости, делают заявку на поставку двигателей на базу снабжения. Если на базе снабжения в момент подачи заявки нет данного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере поступления на склад обслуживающей организации. База снабжения закупает товар у непосредственного производителя.

Спрос на двигатели составляет 1800 ед. и равномерно распределяется в течение года. Издержки по размещению заказа равны 40 у. д. е., затраты, связанные с хранением данной запасной части, за год равны 7 у. д. е.

Между базой снабжения и сельскохозяйственными предприятиями заключен договор о том, что за доставку товаров позже необходимого срока уплачивается штраф. Его величина составляет 3 у. д. е. в год за одну муфту сцепления.

Необходимо определить:

- 1) величину оптимального размера заказа муфт сцепления у специализированного завода;
- 2) максимальную величину задолженного спроса;
- 3) максимальную величину наличного запаса;
- 4) периоды существования запаса и дефицита, а также продолжительность цикла;
- 5) среднегодовые издержки работы системы.

Решение. Оптимальный размер партии поставки

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K \cdot v}{S}} \cdot \sqrt{1 + \frac{S}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1800}{7}} \cdot \sqrt{1 + \frac{7}{3}} \approx 262.$$

Максимальная величина дефицита составит:

$$y^* = \frac{S}{d} \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1800}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}}} \approx 183.$$

Максимальная величина наличного запаса

$$Y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot v}{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1800}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}}} \approx 79$$

или же

$$Y^* = Q^* - y^* = 262 - 183 = 79 \text{ деталей.}$$

Время существования наличного запаса t_1^* и время дефицита t_2^* рассчитывают так:

$$t_1^* = \frac{Y^*}{v} = \frac{79}{1800} = 0,0439 \text{ (года), т. е. 16 дн.};$$

$$t_2^* = \frac{y^*}{v} = \frac{183}{1800} = 0,1017 \text{ (года), т. е. 37 дн.}$$

Следовательно, оптимальная величина цикла

$$t^* = t_1^* + t_2^* = 16 + 37 = 53 \text{ дн.}$$

или же

$$t^* = \frac{Q^*}{v} = \frac{262}{1800} = 0,1456 \text{ года или 53 дн.}$$

Издержки (минимальные затраты), связанные с заказом и хранением товара, при условии, что дефицит допустим (при оптимальных параметрах системы), равны:

$$C_{\min}^* = \sqrt{2 \cdot K \cdot S \cdot v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 1800 \cdot 7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}}} \approx 550 \text{ у. д. е.}$$

Если дефицит недопустим, то величина партии составит:

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1800}{7}} \approx 143 \text{ шт.}$$

При такой системе поставок величина издержек

$$\bar{C} = \frac{40 \cdot 1800}{143} + \frac{7 \cdot 143}{2} \approx 1004 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, если база снабжения будет использовать модель планирования дефицита, экономия составит 454 у. д. е. (1004 – 550).

Задачи для решения

Задача 1. Коммерческая фирма, выступающая в качестве посредника, обязуется продавать райагросервисной организации, занимающейся восстановлением двигателей, коленчатые валы. Согласно заключенному контракту фирма должна ежедневно обеспечивать

агросервисную организацию данными запасными частями в количестве 5 шт. В одном из пунктов контракта записано то, что за просроченный день в поставке коленчатого вала коммерческая фирма выплачивает организации штраф в размере 1 у. д. е. Издержки размещения заказа (организационные затраты) обходятся фирме в 250 у. д. е. Специалисты планово-аналитической службы рассчитали, что затраты по хранению одного коленчатого вала составляют 0,15 у. д. е. в день. Руководство фирмы решает закупать коленчатые валы на свой склад партиями по 60 шт. в каждой.

Необходимо:

- 1) внести руководству свои предложения, рассчитав оптимальный размер партии поставки деталей;
- 2) определить оптимальную продолжительность цикла и соответствующий уровень запасов, который находится на складе в начале каждого периода;
- 3) найти суммарные издержки при оптимальной политике управления запасами.

Задача 2. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам сельскохозяйственное предприятие поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет: $\nu = 5000 + 2(N + K)$ т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукцией, $s = 50 + K$ у. д. е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа $K = 400 - K$ у. д. е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют: $d = 150 + 2K$ у. д. е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц.

Используя приведенную информацию, необходимо:

- 1) найти g^* – оптимальный размер партии поставки:

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

2) рассчитать y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d} \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = g^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

5) найти τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d} \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

6) найти τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{g^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

7) определить r – точку заказа:

$$r = \Theta \nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right] g^* - y^*;$$

П р и м е ч а н и е. Точка заказа может принимать отрицательное значение. Это показывает, что заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$.

8) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

9) проанализировать результаты решения задачи.

Ситуация Б, когда в условиях дефицита поступающие и неудовлетворенные требования теряются.

Многопродуктовая модель размера партии поставки при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов (раздельная оптимизация).

Задача 3. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площади холодильника.

Исходная информация.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (N). Холодильник имеет площадь $f = 300 - 5N$ м². Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Характеристики запасов готовой продукции

Ассортиментные группы продукции	V_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	S_i – издержки содержания (хранения) в год, у. д. е.	f_i – расход площади холодильника, м ² /т
1	$900 + 5N$	3	$5 + 0,2K$	4
2	$2000 - 5N$	4	20	3
3	1000	3	30	2
4	1800	5	25	1
5	1700	4	15	2
6	1500	6	10	3

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить g_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$g_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

2) проверить, существует ли ограничение на складские площади (площадь холодильника) при максимальном уровне запасов:

$$h \sum_{i=1}^N f_i g_i^0 \leq f,$$

где h – нормировочный множитель, позволяющий учесть время поступления запасов товаров, $0 < h \leq 1$, чаще всего $\frac{1}{2} \leq h \leq 1$.

Если $h = 1$, то запасы всех товаров поступают одновременно и занятая ими площадь максимальная, т. е. вводят ограничение по максимальному уровню запасов.

Если $h = \frac{1}{2}$, то запасы поступают в разное время, т. е. вводят ограничение по среднему уровню запаса;

3) определить λ^* , используя следующую формулу:

$$h \sum_{i=1}^N f_i \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} = f,$$

где λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу;

4) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$g_i^* = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

5) определить $L(g^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$L(g^0) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2K_i s_i v_i} = \sum_{i=1}^N s_i g_i^0;$$

6) определить $L(g^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$L(g^*) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2K_i (s_i + 2\lambda^* f_i v_i)} = \sum_{i=1}^N (s_i + 2\lambda^* f_i) g_i^*;$$

7) проанализировать результаты решения задачи, определить эффект от расширения складских площадей (площадей холодильника):

$$L(g^*) - L(g^0).$$

Многопродуктовая модель размера партий поставки в случае нескольких ограничений.

Задача 4. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На оптовую базу поступают товары $N = 6$ видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере $A = 2000 + 2(N + K)$ у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает $f = 1000 + N + K$ м². Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере $p = 6 - 0,1K$ % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 7.2.

Т а б л и ц а 7.2. Характеристики запасов товаров

То- вары	v_i – интен- сивность потребления в месяц, шт.	K_i – из- держки размеще- ния заказа, у. д. е.	α_i – стои- мость 1-го товара, у. д. е.	S_i – издержки содержания (хра- нения) 1-го това- ра в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на один товар, м ²
1	$1000 + 2N$	8	22	1,0	1,3
2	1800	15	18	$1,4 + 0,1K$	1,2
3	1600	$30 - N$	15	$2,0 - 0,1K$	1,5
4	$1200 + 2K$	10	$30 - N$	1,2	1,0
5	2000	$25 - K$	20	1,8	1,4
6	1500	20	$25 - K$	1,6	1,6

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени:

$$s = \alpha \cdot p;$$

2) определить g_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$g_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^N f_i g_i^0 \leq f;$$

4) проверить, существует ли ограничение на оборотные средства (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i^0 \leq A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить λ^* , введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу

$$h \sum_{i=1}^N f_i \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} = f, \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

6) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$g_i^* = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

7) проверить, удовлетворяют ли g_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i^* < A, \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

8) если вышеизложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае необходимо определить λ^* , используя формулу

$$h \sum_{i=1}^N \alpha_i \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} = A, \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

9) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства, используя формулу п. 5 задачи 9;

10) проверить, удовлетворяют ли найденные в п. 6 задачи 9 g_i^* требованию ограничения на складские площади;

11) определить $L(g^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(g^*) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2K_i (s_i + 2\lambda^* f_i)} = \sum_{i=1}^N (s_i + 2\lambda^* f_i) g_i^*;$$

12) проанализировать результаты решения задачи.

Т е м а 8. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Основой баланса является совокупность всех отраслей материального производства (промышленность, строительство, сельское и лесное хозяйство) и сферы услуг.

Принципиальная схема межотраслевого баланса в системе национальных счетов (СНС) в денежном выражении для трех условных отраслей приведена в табл. 8.1. Каждая отрасль в балансе фигурирует дважды: как производящая и как потребляющая. Определенная строка характеризует отрасль как производителя продукции, а столбец – как потребителя продукции.

В схеме МОБ процесс воспроизводства отражается тремя квадрантами, которые имеют следующее содержание:

$\{x_{ij}\}, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}$ – обозначение первого квадранта;

$\{\bar{x}_{ij}\}, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}$ – обозначение второго квадранта;

$\{\tilde{x}_{ij}\}, i = \overline{1,5}; j = \overline{1,3}$ – обозначение третьего квадранта;

x_{ij} – поставка продукции из i -й отрасли в j -ю;

$\bar{x}_{ij}$ – поставка продукции из i -й отрасли для формирования j -го

элемента конечного использования;

$\tilde{x}_{ij}$ – объем i -го элемента добавленной стоимости в j -й отрасли;

x_i – валовая продукция i -й отрасли.

В столбцах первого квадранта МОБ отражается отраслевая структура промежуточных затрат (включая материальные затраты) каждой отрасли.

Например, если на данной схеме первая отрасль – сельское хозяйство (С), вторая – прочие отрасли материального производства (ПО), третья – отрасли сферы услуг (У). Тогда

x_{11} – это количество продукции сельского хозяйства в стоимостном выражении, израсходованной внутри отрасли для собственных нужд;

x_{21} – затраты прочих отраслей материального производства в выпуске продукции сельского хозяйства;

x_{31} – затраты отраслей сферы услуг в производстве продукции сельского хозяйства.

В целом столбец (x_{11}, x_{21}, x_{31}) характеризует структуру промежуточных затрат сельского хозяйства, а элементы столбца (x_{11}, x_{21}) – структуру материальных затрат сельского хозяйства. Сумма элементов первого столбца $(\sum_{i=1}^3 x_{i1})$ характеризует промежуточные затраты сельского хозяйства т. е. количество продукции, которое сельское хозяйство потребило в сфере производства.

Элемент первой строки (x_{11}, x_{12}, x_{13}) определяют отраслевые поставки продукции сельского хозяйства соответственно для собственных нужд (x_{11}) , нужд ПО (x_{12}) , нужд У (x_{13}) . Сумма всех элементов строки $(\sum_{j=1}^3 x_{1j})$ характеризует промежуточное потребление сельского хозяйства, т. е. количество продукции, которое сельское хозяйство поставило для целей производственного потребления.

Т а б л и ц а 8.1. Схема отчетного межотраслевого баланса

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежу- точное потребле- ние	Конечное использование				Вало- вой выпуск
	1	2	3		Конечное потребле- ние	Валовое накопле- ние	Сальдо экспорта- импорта	Итого	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\sum_{j=1}^3 x_{1j}$	$\bar{X}_{11}$	$\bar{X}_{12}$	$\bar{X}_{13}$	$\sum_{j=1}^3 \bar{x}_{1j}$	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\sum_{j=1}^3 x_{2j}$	$\bar{X}_{21}$	$\bar{X}_{22}$	$\bar{X}_{23}$	$\sum_{j=1}^3 \bar{x}_{2j}$	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\sum_{j=1}^3 x_{3j}$	$\bar{X}_{31}$	$\bar{X}_{32}$	$\bar{X}_{33}$	$\sum_{j=1}^3 \bar{x}_{3j}$	X_3
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^3 x_{i1}$	$\sum_{i=1}^3 x_{i2}$	$\sum_{i=1}^3 x_{i3}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}$	$\sum_{i=1}^3 \bar{x}_{i1}$	$\sum_{i=1}^3 \bar{x}_{i2}$	$\sum_{i=1}^3 \bar{x}_{i3}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{ij}$	$\sum_{i=1}^3 X_i$
Потребление основного капитала	$\tilde{X}_{11}$	$\tilde{X}_{12}$	$\tilde{X}_{13}$	$\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{1j}$					
Заработная плата	$\tilde{X}_{21}$	$\tilde{X}_{22}$	$\tilde{X}_{23}$	$\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{2j}$					
Прибыль	$\tilde{X}_{31}$	$\tilde{X}_{32}$	$\tilde{X}_{33}$	$\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{3j}$					
Косвенные налоги	$\tilde{X}_{41}$	$\tilde{X}_{42}$	$\tilde{X}_{43}$	$\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{4j}$					
Субсидии	$-\tilde{X}_{51}$	$-\tilde{X}_{52}$	$-\tilde{X}_{53}$	$\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{5j}$					
Валовая добавленная стоимость	$\sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i1}$	$\sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i2}$	$\sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i3}$	$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{ij}$					
Валовые затраты	X_1	X_2	X_3	$\sum_{i=1}^3 X_i$					

В строках второго квадранта отражается структура конечного использования продукции каждой отрасли. В табл. 8.1 величина $\bar{X}_{11}$ показывает количество продукции сельского хозяйства, которое использовано в целях конечного потребления домашних хозяйств и текущего государственного потребления, значение $\bar{X}_{12}$ – поставку продукции сельского хозяйства для целей валового накопления, т. е. для накопления основного капитала и прироста материальных запасов, $\bar{X}_{13}$ – поставку продукции сельского хозяйства для целей чистого экспорта. Сумма элементов первой строки второго квадранта ($\sum_{j=1}^3 \bar{X}_{1j}$) представляет количество продукции сельского хозяйства в стоимостном выражении, которое поставлено в сферу конечного использования. Элементы первого столбца второго квадранта ($\bar{X}_{11}, \bar{X}_{21}, \bar{X}_{31}$) характеризуют поставки отраслей для целей конечного потребления, а сумма элементов ($\sum_{i=1}^3 \bar{X}_{i1}$) – конечное потребление по народному хозяйству в целом.

Сумма всех элементов второго квадранта ($\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \bar{X}_{ij}$) характеризует объем товаров и услуг, направляемых в сферу конечного использования. Данный показатель – валовой внутренний продукт (ВВП).

В столбцах третьего квадранта МОБ отражается структура элементов валовой добавленной стоимости каждой отрасли. Элементы первого столбца ($\tilde{X}_{11}, \tilde{X}_{21}, \tilde{X}_{31}, \tilde{X}_{41}, \tilde{X}_{51}$) показывают в сельском хозяйстве потребление основного капитала, заработную плату, прибыль, косвенные налоги, субсидии соответственно (знак минус в строке «Субсидии» исключает двойной счет при определении валовой добавленной стоимости). Сумма всех элементов первого столбца ($\sum_{i=1}^5 \tilde{X}_{i1}$) представляет валовую добавленную стоимость сельского хозяйства. Элементы первой строки ($\tilde{X}_{11}, \tilde{X}_{12}, \tilde{X}_{13}$) указывают потребление основного капитала в разрезе каждой отрасли, сумма всех элементов первой строки ($\sum_{j=1}^3 \tilde{X}_{1j}$) – потребление основного капитала по народному хозяйству в целом.

Таким образом, в совокупности элементы первого и второго квадрантов МОБ описывают материально-вещественную структуру валового выпуска (объем товаров и услуг, обращающихся в сферах производства и конечного использования), а первый и третий квадранты МОБ – стоимостную структуру валовых затрат (материальные затраты, оплата труда, потребление основного капитала, прибыль и т. д.).

В отчетном МОБ последний столбец представляет валовой выпуск продукции отраслей, а последняя строка – валовые затраты. В схеме МОБ валовой выпуск каждой отрасли совпадает с валовыми затратами.

Модель отчетного МОБ выражается в виде двух групп соотношений: для отраслей-производителей и отраслей-потребителей. В рамках первой группы валовая продукция отрасли-производителя распределяется на продукцию, направляемую в сферы производства и конечного использования. Так, валовая продукция первой отрасли (X_1) распределяется на продукцию, которую отрасль поставила в сферу производства ($\sum_{j=1}^3 x_{1j}$), и продукцию, которую отрасль поставила в сферу конечного использования ($\sum_{j=1}^3 \bar{x}_{1j}$), что можно записать:

$$X_1 = \sum_{j=1}^3 x_{1j} + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{1j}.$$

Исходя из этого, первая группа соотношений МОБ для нашего случая представлена системой трех уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{1j}; \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{2j}; \\ X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{3j}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Для МОБ с n отраслями модель МОБ будет охватывать систему из n уравнений.

Смысл второй группы соотношений для отраслей-потребителей заключается в том, что валовые затраты отраслей-потребителей состоят из промежуточных затрат отраслей и стоимости, добавленной в процессе обработки (валовой добавленной стоимости). Так, валовые затраты первой отрасли (X_1) определяются суммой ее промежуточных

затрат $(\sum_{i=1}^3 x_{i1})$ и валовой добавленной стоимости первой отрасли $(\sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i1})$, что можно записать:

$$X_1 = \sum_{i=1}^3 x_{i1} + \sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i1}.$$

Исходя из этого, вторая группа соотношений МОБ для нашего случая представлена системой трех уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + \sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i1}; \\ X_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32} + \sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i2}; \\ X_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33} + \sum_{i=1}^5 \tilde{x}_{i3}. \end{cases} \quad (8.2)$$

Аналогично для межотраслевого баланса с n отраслями модель МОБ будет охватывать систему из n уравнений.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (8.1) и уравнения (8.2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 X_i &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{ij}; \\ \sum_{i=1}^3 X_i &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{ij}. \end{aligned}$$

Левые части обоих равенств равны. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{ij} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_{ij}. \quad (8.3)$$

Левая часть уравнения (8.3) – есть сумма элементов второго квадранта, правая – итог третьего квадранта, а в целом это представляет собой ВВП. Таким образом, в межотраслевом балансе соблюдается принцип единства материально-вещественного и стоимостного состава ВВП. Но следует иметь в виду, что равенство валовой добавленной

стоимости и конечного использования справедливо для всего народного хозяйства. В отдельных отраслях эти показатели не равны, так как их величины определяются различными факторами.

Модели отчетного МОБ непригодны для прогнозных практических расчетов. Поэтому элементы промежуточного потребления определяют на базе нормативов. Их на макроуровне называют коэффициентами прямых затрат, или технологическими коэффициентами. По данным отчетного МОБ они могут быть рассчитаны путем деления величин межотраслевых потоков на валовую продукцию потребляющих отраслей:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}. \quad (8.4)$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i -й отрасли необходимо для производства единицы продукции j -й отрасли. При $i = j$ имеем коэффициент затрат собственной продукции отрасли на единицу валового выпуска.

Например, если первой отраслью является промышленность, а второй – сельское хозяйство, то коэффициент a_{12} прямых затрат – это количество продукции промышленности для выпуска одной единицы валовой продукции сельского хозяйства, который равен $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2}$.

Аналогично a_{21} обозначает количество продукции сельского хозяйства, израсходованное для получения одной валовой единицы продукции промышленности.

Коэффициенты прямых затрат образуют квадратную матрицу A , содержащую для трехотраслевого МОБ 3 строки и 3 столбца:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей коэффициентов прямых затрат. Из формулы (8.4) следует:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}.$$

Используя данные обозначения, модель (8.2) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{1j}; \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{2j}; \\ X_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \sum_{j=1}^3 \bar{x}_{3j}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Система уравнений (8.5) называется *базовой прогнозной моделью МОБ связи отраслевых структур валового выпуска и конечного спроса*, или *экономико-математической моделью межотраслевого баланса производства и распределения продукции*.

Систему уравнений баланса можно записать в матричной форме, предварительно введя следующие обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \text{вектор валовой продукции отраслей};$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{pmatrix} - \text{вектор конечного спроса};$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{единичная матрица}.$$

Тогда в матричном виде модель (8.5) запишется:

$$X = AX + \bar{X}. \quad (8.6)$$

В модели (8.5) предполагается, что на прогнозный период известна матрица прямых затрат A . Учитывая определенную инерционность технологических процессов, можно принять предпосылку о неизменности нормативов расхода материалов и постоянстве технологической матрицы. В противном случае необходимо осуществить расчет коэффициентов матрицы прямых затрат на планируемый период.

Пример 1. Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (промышленность, сельское хозяйство, отрасли сферы услуг), за от-

четный период известны межотраслевые потоки X_{ij} (табл. 8.2) и поставки отраслей для целей конечного использования $\bar{X}_{ij}$ (табл. 8.3).

Т а б л и ц а 8.2. Межотраслевые поставки, тыс. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	200	20	8
2	20	60	4
3	16	4	8

Т а б л и ц а 8.3. Отраслевые поставки для целей конечного использования, тыс. руб.

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	100	80	80	100
2	65	4	40	32
3	8	0	4	4

Необходимо привести схему первого и второго квадрантов отчетного МОБ с расчетом показателей: промежуточное потребление, промежуточные затраты, конечное использование, валовой внутренний продукт. Рассчитать материальные затраты каждой отрасли.

Решение.

1. Используя данные табл. 8.3, рассчитаем столбец конечного использования продукции отраслей (сумма конечного потребления, валового накопления, экспорта за исключением импорта):

$$x_1 = 100 + 80 + 80 - 100 = 160;$$

$$x_2 = 65 + 4 + 40 - 32 = 77;$$

$$x_3 = 8 + 0 + 4 - 4 = 8.$$

Валовой внутренний продукт (ВВП) равен сумме всех элементов столбца конечного использования:

$$\text{ВВП} = 160 + 77 + 8 = 245 \text{ тыс. руб.}$$

2. Используя данные межотраслевых поставок (табл. 8.2) рассчитаем столбец промежуточного потребления (pp) продукции отраслей:

$$pp_1 = 200 + 20 + 8 = 228;$$

$$pp_2 = 20 + 60 + 4 = 84;$$

$$pp_3 = 16 + 4 + 8 = 28.$$

Величина промежуточного потребления по народному хозяйству в целом как сумма всех элементов столбца промежуточного потребления равна:

$$PP = 228 + 84 + 28 = 340 \text{ тыс. руб.}$$

3. Рассчитаем строку промежуточных затрат (PZ) каждой отрасли:

$$PZ = (pz_1, pz_2, pz_3) = (200 + 20 + 16 = 236; 20 + 60 + 4 = 84; 8 + 4 + 8 = 20) = (236; 84; 20).$$

Полученные результаты занесем в табл. 8.4.

Т а б л и ц а 8.4. Показатели первого и второго квадрантов МОБ, млн. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежуточное потребление	Конечное использование
	1	2	3		
1	200	20	8	228	160
2	20	60	4	84	77
3	16	4	8	28	8
Промежуточные затраты	236	84	20	340	245

Материальные затраты i -й отрасли складываются из поставок всех отраслей материального производства для целей выпуска i -й отрасли. В данной задаче к отраслям материального производства относятся две: промышленность (отрасль 1), сельское хозяйство (отрасль 2). Материальные затраты каждой из отраслей рассчитываются следующим образом:

$$MЗ_1 = 200 + 20 = 220 \text{ тыс. руб.};$$

$$MЗ_2 = 20 + 60 = 80 \text{ тыс. руб.};$$

$$MЗ_3 = 8 + 4 = 12 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2. По данным задачи 1 необходимо заполнить три квадранта отчетного МОБ. При заполнении таблицы выделить: валовой выпуск, зарплату, валовую добавленную стоимость, прочие элементы добавленной стоимости. Предусмотреть, что 25 % валовой добавлен-

ной стоимости приходится на заработную плату.

Решение. 1. В соответствии с формулой (8.1) объем валового выпуска первой, второй и третьей отрасли в отчетном периоде определяется суммой промежуточного потребления и конечного использования:

$$X_1^{\text{отч}} = 228 + 160 = 388;$$

$$X_2^{\text{отч}} = 84 + 77 = 161;$$

$$X_3^{\text{отч}} = 28 + 8 = 36.$$

2. В соответствии с формулой (8.2) объем валового выпуска в отчетном периоде определяется суммой промежуточных затрат и валовой добавленной стоимости. Поэтому валовую добавленную стоимость отраслей определяем как разность между объемом валового выпуска отраслей и промежуточными затратами:

$$\nu_1 = 388 - 236 = 152;$$

$$\nu_2 = 161 - 84 = 77;$$

$$\nu_3 = 36 - 20 = 16.$$

3. Рассчитаем уровень зарплаты трех отраслей, которая, согласно условию задачи, составляет 25 % валовой добавленной стоимости:

$$Z_1 = 152 \cdot 0,25 = 38,0;$$

$$Z_2 = 77 \cdot 0,25 = 19,3;$$

$$Z_3 = 16 \cdot 0,25 = 4,0.$$

4. Прочие элементы добавленной стоимости равны разности между валовой добавленной стоимостью и заработной платой:

$$d_1 = 152 - 38,0 = 114,0;$$

$$d_2 = 77 - 19,3 = 57,7;$$

$$d_3 = 16 - 4,0 = 12,0.$$

Результаты расчетов элементов модели МОБ приведены в табл. 8.5.

Т а б л и ц а 8.5. Показатели МОБ, тыс. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежуточное потребление	Конечное использование	Валовой выпуск
	1	2	3			
1	200	20	8	228	160	388
2	20	60	4	84	77	161
3	16	4	8	28	8	36
Промежуточные затраты	236	84	20	340	245	
Зарплата	38,0	19,3	4,0			
Прочие элементы добавленной стоимости	114,0	57,7	12,0			
Валовая добавленная стоимость	152	77	16			
Валовой выпуск	388	161	36			585

Пример 3. На базе трехотраслевого отчетного МОБ задачи из примера 2 рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию.

Матрицу A рассчитаем по данным табл. 8.5 на основе отчетного МОБ по формуле (8.4). Для нашего случая элементы матрицы коэффициентов прямых затрат равны:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{200}{388} & \frac{20}{161} & \frac{8}{36} \\ \frac{20}{388} & \frac{60}{161} & \frac{4}{36} \\ \frac{16}{388} & \frac{4}{161} & \frac{8}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,515 & 0,124 & 0,222 \\ 0,052 & 0,373 & 0,111 \\ 0,041 & 0,025 & 0,222 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты прямых затрат количественно характеризуют интенсивность межотраслевых взаимодействий. Например, значения второго столбца матрицы показывают, что для производства валовой продукции сельского хозяйства на сумму 1 тыс. руб. требуется израсходовать валовой продукции промышленности на сумму 0,124 тыс. руб., продукции сельского хозяйства – 0,3873 тыс. руб., объем услуг в размере 0,025 тыс. руб.

Задачи для решения

Задача 1. Необходимо привести схему квадрантов отчетного МОБ с расчетом показателей: промежуточное потребление, промежуточные затраты, конечное использование, валовой внутренний продукт (табл. 8.10). Рассчитать материальные затраты каждой отрасли. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию.

Исходная информация.

Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (промышленность, сельское хозяйство, отрасли сферы услуг), за отчетный период известны межотраслевые потоки (табл. 8.6) и поставки отраслей для целей конечного использования (табл. 8.7).

Т а б л и ц а 8.6. Межотраслевые поставки, млн. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	200	20	8
2	20	60	4
3	16	5	8

Т а б л и ц а 8.7. Отраслевые поставки для целей
конечного использования, млн. руб.

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	100	80	80	100
2	65	4	40	30
3	8	0	5	4

Задача 2. Необходимо привести числовую схему отчетного МОБ (табл. 8.10), предусмотреть, что 25 % валовой добавленной стоимости приходится на заработную плату. Рассчитать материальные затраты каждой отрасли. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию. Рассчитать матрицу коэффициентов полных затрат и дать их экономическую интерпретацию.

Исходная информация.

Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (промышленность, прочие отрасли материального производства, отрасли сферы

услуг), за отчетный период известны межотраслевые поставки (табл. 8.8) и поставки отраслей для целей конечного использования (табл. 8.9).

Т а б л и ц а 8.8. Межотраслевые поставки, млн. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	1800	800	1000
2	1400	1200	800
3	1000	1200	400

Т а б л и ц а 8.9. Поставки отраслей для целей конечного использования, млн. руб.

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	1200	900	200	300
2	1040	800	130	160
3	760	0	80	40

Т а б л и ц а 8.10. Показатели МОБ, млн. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежуточное потребление	Конечное использование	Валовой выпуск
	1	2	3			
1						
2						
3						
Промежуточные затраты						
Зарплата					—	—
Прочие элементы добавленной стоимости					—	—
Валовая добавленная стоимость					—	—
Валовой выпуск					—	—

Задача 3. Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (сельское хозяйство, промышленность, строительство), за отчетный период известны межотраслевые поставки и поставки отраслей для целей конечного использования (табл. 8.11 и 8.12).

Т а б л и ц а 8.11. Межотраслевые поставки, тыс. руб.

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	900	400	$500 + N$
2	700	600	$400 + 2N$
3	500	600	$200 + N$

Т а б л и ц а 8.12. Поставки отраслей для целей конечного использования, тыс. руб.

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	600	450	100	150
2	520	400	60	80
3	380	0	40	20

Необходимо:

1. Привести числовую схему отчетного МОБ. Предусмотреть, что 35 % валовой добавленной стоимости приходится на заработную плату. Рассчитать материальные затраты каждой отрасли.

2. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колеснёв, В. И. Эконометрика и ЭММ: модели теории массового обслуживания : метод. указания для выполнения практических работ / В. И. Колеснёв. – Горки: Белорус. гос. с.-х. акад., 2013. – 44 с.
2. Колеснёв, В. И. Эконометрика и ЭММ: модели теории игр: метод. указания / В. И. Колеснёв. – Горки: Белорус. гос. с.-х. акад., 2010. – 40 с.
3. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели. Практикум: учеб.пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2010. – 295 с.
4. Белова, Т. Н. Методы и модели оптимального планирования в экономике: учебник / Т. Н. Белова. – М.: Проспект, 2022. – 317 с.
5. Шафранская, И. В. Эконометрика и ЭММ: сетевое планирование и управление: метод. указания / И. В. Шафранская. – Горки: Белорус. гос. с.-х. акад., 2011. – 36 с.
6. Ленькова, Р. К. Экономико-математические методы и модели: пособие / Р. К. Ленькова, Е. В. Гончарова. – Горки: Белорус. гос. с.-х. акад., 2011. – 217 с.
7. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование: учебник и практикум для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям / А. В. Королев. – М.: Юрайт, 2023. – 282 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Т е м а 1. Симплексный метод	4
Т е м а 2. Корректировка оптимального решения	23
Т е м а 3. Двойственные экономико-математические оценки	32
Т е м а 4. Сетевые модели	40
Т е м а 5. Игровые методы и модели	51
Т е м а 6. Модели теории массового обслуживания	79
Т е м а 7. Модели теории управления запасами	105
Т е м а 8. Модели межотраслевого баланса	136
Библиографический список	151