ИННОВАЦИОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 635.64:631.8:631.544

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ И ЭЛЛИПСОМ В ОМЦН

С. А. ГОНЧАРОВ

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова,
Рубцовский индустриальный институт,
г. Рубцовск, Российская Федерация, 658207, e-mail: sgoncharoff@rambler.ru

А. В. ГОНЧАРОВ

ФГБОУ ВО МСХ РФ РГУНХ имени В. И. Вернадского,
г. Балашиха, Российская Федерация, e-mail: tikva2008@mail.ru

(Поступила в редакцию 05.01.2026)

В статье дана общая постановка задачи оценивания параметров линейных двухпараметрических функций при интервальном задании как входных, так и выходных переменных. Приведен алгоритм расчета параметров линейной функции методом прямоугольника в ОМЦН и эллипса в ОМЦН. Проведен сравнительный анализ оценок параметров линейной двухпараметрической функции. Расчеты проведены по программам «Аппроксимация экспериментальных данных линейной функцией» «ICM» и «ICM-2».

Методы прямоугольников и эллипсов являются одними из простейших методов интегрирования (запрограммировать их не составляет особого труда). Но эти методы имеют лишь второй порядок точности, в то время как есть методы более высоких порядков.

Показано, что при сравнении двух методов между собой, метод прямоугольников, который относится к методам Гаусса – Кристоффеля, является точнее метода эллипсов, относящегося к методам Ньютона – Котеса. В то же время метод эллипсов может применяться с произвольным шагом, в отличие от метода прямоугольников, который, не применим, например, к функциям, заданным в конечном числе точек.

Алгоритмы методов прямоугольников и эллипсов в ОМЦН (численное интегрирование) используются для аппроксимации площади под графиком функции \(f(x)\) на отрезке \([a,b]\), разбивая его на \(n\) части, где для линейной функции \(y=kx+b\) они дают точный результат: метод эллипсов (по сути, замена на прямую) аппроксимирует площадь эллипсом, метод прямоугольников – прямоугольником (левым, правым или средним), а в случае линейной функции оба метода могут давать точное значение интеграла, если правильно выбрать узлы.

Ключевые слова: *точечная оценка параметров, интервальная оценка параметров, центр неопределенности, интервальное задание переменных, прямоугольник в ОМЦН, эллипс в ОМЦН.*

This article presents a general formulation of the problem of estimating the parameters of linear two-parameter functions with interval specification of both input and output variables. An algorithm for calculating the parameters of a linear function using the rectangle method in the OMCN and the ellipse method in the OMCN is presented. A comparative analysis of the parameter estimates for the linear two-parameter function is conducted. The calculations were performed using the "ICM" and "ICM-2" programs for "Approximation of Experimental Data by a Linear Function."

The rectangle and ellipse methods are among the simplest integration methods (they are easy to program). However, these methods have only second-order accuracy, while higher-order methods exist. When comparing the two methods, it was shown that the rectangle method, which is a Gauss-Christoffel method, is more accurate than the ellipse method, which is a Newton-Cotes method. At the same time, the ellipse method can be applied with an arbitrary step size, unlike the rectangle method, which is not applicable, for example, to functions defined at a finite number of points. Rectangle and ellipse method algorithms in GMCN (numerical integration) are used to approximate the area under the graph of a function \(f(x)\) on the interval \([a,b]\), dividing it into \(n\) parts, where for a linear function \(y=kx+b\), they yield an exact result: the ellipse method (essentially a straight line replacement) approximates the area with an ellipse, the rectangle method with a rectangle (left, right, or middle). In the case of a linear function, both methods can yield an exact integral value if the nodes are chosen correctly.

Key words*: point parameter estimation, interval parameter estimation, center of uncertainty, interval variable assignment, rectangle in GMCN, ellipse in GMCN.*

Введение

При решении любых прикладных задач часто возникает необходимость точечной и интервальной оценки параметров функции известного вида по полученным экспериментальным данным. Эти данные почти всегда содержат случайные и систематические ошибки. Любые экспериментальные исследования проводятся с целью установить какие-либо закономерности между входными и выходными измеряемыми переменными. Проведение любого эксперимента связано с использованием измерительных приборов, позволяют измерить входные и выходные переменные в той или иной степени точности. Поэтому ошибка в измерениях может быть как в выходных, так и во входных переменных. При обработке любого эксперимента часто используются эмпирические модели или формулы, которые включают экспериментально неточно измеренные величины. Во многих работах, как правило, неточность учитывается только в выходных переменных. Однако реальная действительность предполагает неточные измерения как выходных, так и входных переменных и соответствующих параметров экспериментальных зависимостей. При точечной оценке параметров экспериментальных зависимостей, при работе с выборками малого объема эти оценки могут значительно отличаться от действительных значений оцениваемого параметра. В этом случае следует пользоваться интервальными оценками, которые позволяют установить точность и надежность оценок. Доверительные интервалы указывают множество возможных значений параметров. Применение методов обработки экспериментальных зависимостей при неточном измерении как выходных, так и входных переменных дает возможность более эффективные и надежные оценки параметров экспериментальных зависимостей, учитывая более полно весь массив получаемой экспериментальной информации. Одним из таких методов обработки экспериментальной информации является метод обобщенного центра неопределенности для оценки параметров линейной функции прямоугольником и эллипсом.

Цель – оценить параметры линейных двухпараметрических функций при интервальном задании как входных, так и выходных переменных и показать алгоритм расчета параметров линейной функции методом прямоугольника и эллипса в ОМЦН.

В рамках интервального подхода для точечной и интервальной оценки параметров экспериментальных зависимостей неопределенность измеряемых входных и выходных переменных задается не числом, а интервалом неопределенности:

$$[a] = [a^-; a^+] = [a : a^- \leq a \leq a^+].$$

Из литературы известно, что базовый принцип интервальной оценки параметров экспериментальных зависимостей можно сформулировать следующим образом: интервал неопределенности результата есть множество всех его возможных значений, получаемых при варьировании переменных и параметров задачи в границах известных интервалов. В частности, если дана функция $[y] = f([x])$ интервального векторного аргумента $[x] = \{[x_1], \ldots [x_i], \ldots [x_k]\}$, то границы y^-, y^+ интервала неопределенности значения функции находят как решение двух задач на экстремум:

$$y^- = \min_{x \in [x]} f(x), \quad y^+ = \max_{x \in [x]} f(x).$$

При большом количестве экспериментальной информации множество неопределенности параметров функций экспериментальных зависимостей представляет собой выпуклый многоугольник. Описание множества неопределенности параметров экспериментальных зависимостей в форме многоугольника не всегда является удобным. Построение такого многоугольника неопределенности при большом числе измерений представляет собой достаточно проблематичную задачу. Поэтому при практическом использовании метода центра неопределенности представляет интерес последовательное погружение множества неопределенности параметров экспериментальной линейной функции в простые геометрические фигуры. В качестве таких фигур можно выбрать прямоугольник неопределенности, который используется в классическом интервальном анализе, и эллипс неопределенности.

Если ошибки содержаться как в измерении входной, так и выходной величин, между которыми существует линейная зависимость, то при двух измерениях экспериментальные точки должны удовлетворять системе интервальных уравнений:

$$\begin{aligned} [y_1] &= a + b[x_1], \\ [y_2] &= a + b[x_2]. \end{aligned} \tag{1}$$

Область возможного изменения параметров линейной функции имеет вид неправильного четырехугольника, угловые точки которого, можно определить используя правила интервальной арифметики. Если функция $y = a + bx$ является возрастающей (т.е. при $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$), то угловые точки четырехугольника неопределенности:

$$A_1=(a_1,\ b_1)=\left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^+ x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^- - x_1^+}\right); \qquad (2)$$

$$A_2=(a_2,\ b_2)=\left(\frac{y_1^- x_2^+ - y_2^- x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^+ - x_1^+}\right); \qquad (3)$$

$$A_3=(a_3,\ b_3)=\left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^+ x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^- - x_1^-}\right); \qquad (4)$$

$$A_4=(a_4,\ b_4)=\left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^- x_1^-}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^+ - x_1^-}\right). \qquad (5)$$

Для случая, когда функция является убывающей (т.е. при $x_1 < x_2$, $y_1>y_2$), угловые точки четырехугольника определяются соотношениями:

$$A_1=(a_1,\ b_1)=\left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^- x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^- - x_1^+}\right); \qquad (2')$$

$$A_2=(a_2,\ b_2)=\left(\frac{y_1^- x_2^+ - y_2^+ x_1^-}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^+ - x_1^-}\right); \qquad (3')$$

$$A_3=(a_3,\ b_3)=\left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^+ x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^+ - x_1^+}\right); \qquad (4')$$

$$A_4=(a_4,\ b_4)=\left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^- x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^- - x_1^+}\right). \qquad (5')$$

Для определения центра тяжести четырехугольника неопределенности можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Тогда для центра тяжести имеем соотношения:

$$a_0=\frac{\bar{x}_2\bar{y}_1-\bar{x}_1\bar{y}_2}{\bar{x}_2-\bar{x}_1};\quad b_0=\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}, \qquad (6)$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ - средние значения измеряемых входных и выходных переменных.

При поступлении новой информации об изучаемом объекте происходит точечная и интервальная оценка параметров экспериментальной зависимости.

Постановка задач оценивания параметров линейных двухпараметрических функций при интервальном задании как входных, так и выходных переменных можно сформулировать следующим образом.

Пусть получены экспериментальные данные, содержащие интервальные значения переменных $[x_i^-;x_i^+],[y_i^-;\ y_i^+]$ для $i\in\overline{1,n}$ и известно, что истинные значения переменных лежат внутри соответствующих интервалов. Таким образом, каждому измеренному интервальному значению $[y]_i$ соответствует интервальное значение входной величины $[x]_i$. Известно, что ошибки измерения как входной, так и выходной переменных не превышают известных величин:

$$|\Delta x|\le\varepsilon_1;\ |\Delta y|\le\varepsilon_2, \qquad (7)$$

где Δx – ошибка измерений x_i, Δy – ошибка измерений y_i, ε_1 *и* ε_2 – верхние границы оценок Δx и Δy соответственно. Наша задача определить точечные и интервальные значения параметра линейной функции вида $y = a+bx$ при наличии информации об x_i, y_i, Δx и Δy [1, 2, 3].

Согласно принципам интервально-статистического анализа [9, 10] все интервальные точки должны удовлетворять системе интервальных уравнений:

$$[y]_i=[a]+[b]\cdot[x]_i. \qquad (8)$$

Система уравнений (2.58) приводит к системе неравенств:

$$y_i^-=\overline{y}_i-\varepsilon_1\le y_i\le\overline{y}_i+\varepsilon_i=y_i^+\quad \text{для}\quad i\in\overline{1,n}, \qquad (9)$$

где $\bar{y}_i$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины, ε_1 – верхняя граница ошибки измерения величины y_i.

Множество решений системы (3) задает на плоскости (*a, b*) область возможного изменения параметров Ω при заданных интервальных значениях измеряемых величин. Решая систему интервальных уравнений (3), можно показать, что множество Ω (множество неопределенности параметров (*a, b*)) имеет вид неправильного многоугольника. Центр тяжести этого многоугольника можно принять за точечные оценки параметров *a, b*. При большом числе опытов построение множества Ω представляет собой достаточно сложную задачу. Для облегчения работы с многоугольником Ω представляет интерес его аппроксимация простыми геометрическими фигурами, в частности прямоугольником и эллипсом. Для аппроксимации множества неопределенности параметров Ω прямоугольником запишем систему:

$$[b]_{ij} = \frac{[y]_i - [y]_j}{[x]_i - [x]_j} = \frac{[y_i^- - y_j^+;\ y_i^+ - y_j^-]}{[x_i^- - x_j^+;\ x_i^+ - x_j^-]},\quad i \in \overline{1, n-1},\ \ j \in \overline{2, n}. \tag{10}$$

Используя правила интервальной арифметики, определим

$$b^- \le b \le b^+, \tag{11}$$

где

$$b^- = \max_{i,j} b_{ij}^-;\ \ b^+ = \min_{i,j} b_{ij},\ i \in \overline{1, n-1},\ \ j \in \overline{2, n}. \tag{12}$$

и

$$a^- \le a \ \le a^+, \tag{13}$$

где

$$a^- = \max_i a_i^-;\quad a^+ = \min_i a_i^+. \tag{14}$$

Выражения (5) и (8) означают, что прямоугольник

$$\Omega_1 = \{(a,b) \in R^2 / a^- \le a \le a^+;\ b^- \le b \le b^+\} \tag{15}$$

содержит многоугольник Ω.

Для определения точечных оценок параметров *a, b* от истинных значений воспользуемся приближенными формулами:

$$\hat{a} = 0.5(a^+ + a^-);\ \ \hat{b} = 0.5(b^+ + b^-). \tag{16}$$

Абсолютные отклонения оценок параметров *a, b* от истинных значений определяем из соотношений:

$$\varepsilon_a = 0.5(a^+ - a^-);\ \varepsilon_b = 0.5(b^+ - b^-), \tag{17}$$

а относительные

$$\varepsilon_a^{om} = (100 \cdot \varepsilon_a)/(\min|a^-|, |a^+|), \%, \tag{18}$$

$$\varepsilon_b^{om} = (100 \cdot \varepsilon_b)/(\min|b^-|, |b^+|), \%. \tag{19}$$

Тогда результирующее уравнение прямой с параметрами [*a*], [*b*] и проходящей через все интервальные точки, имеет вид:

$$[y] = [a] + [b] \cdot [X], \tag{20}$$

удобный, для расчета предсказанных значений [1, 10].

Алгоритм погружения множества неопределенности параметров двумерной линейной зависимости в эллипс неопределенности при интервальном задании входных и выходных переменных можно сформулировать следующим образом [4, 7, 10].

При двух измерениях экспериментальные точки должны удовлетворять системе интервальных уравнений:

$$[y]_1 = [a] + b \cdot [X]_1,$$

$$[y]_2 = [a] + b \cdot [X]_2. \tag{21}$$

Область возможного измерения параметров линейной функции имеет вид неправильного четырехугольника, угловые точки которого можно определить, используя правила интервальной арифметики [9, 10–12]. Если функция $y = a + bx$ является возрастающей, т.е. при $x_1^+ < x_2^- \Rightarrow y_1^+ < y_2^-$, то угловые точки четырехугольника неопределенности определяем как

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_1,\ b_1) = \left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^+ x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^- - x_1^+} \right); \\ A_2 &= (a_2,\ b_2) = \left(\frac{y_1^- x_2^+ - y_2^- x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^+ - x_1^+} \right); \\ A_3 &= (a_3,\ b_3) = \left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^+ x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^- - x_1^-} \right); \\ A_4 &= (a_4,\ b_4) = \left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^- x_1^+}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^+ - x_1^-} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

В случае, если функция вида $y = a + bx$ является убывающей, т. е. при $x_1^+ < x_2^- \Rightarrow y_1^- > y_2^+$, то угловые точки четырехугольника неопределенности определяем из соотношений:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_1,\ b_1) = \left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^- x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^- - x_1^+} \right), \\ A_2 &= (a_2,\ b_2) = \left(\frac{y_1^- x_1^+ - y_2^+ x_1^-}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^+ - x_1^-} \right), \\ A_3 &= (a_3,\ b_3) = \left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^+ x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^+ - x_1^+} \right), \\ A_4 &= (a_4,\ b_4) = \left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^- x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^- - x_1^+} \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Для определения центра тяжести четырехугольника неопределенности можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Тогда, для определения координат центра тяжести, имеем соотношения

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1};\quad \bar{b}_0 = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}, \tag{24}$$

При поступлении новой информации об изучаемом объекте происходит уточнение параметров эллипса и сокращение его площади. [4, 7, 10].

В качестве примера рассмотрим массив данных, который представлен в табл. 1. Используя данные табл. 1, определим точечные и интервальные оценки параметров прямоугольником в ОМЦН и эллипсом в ОМЦН.

Таблица 1. **Исходные данные числового примера**

i	1	2	3	4	5
x	1.55	2.9	4.35	6.15	8.85
ε_x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	23.2	39.5	56.1	76.5	114.2
ε_y	0.5	1	1.5	2	2.5

Так как при $x_i < x_j \Rightarrow y_i < y_j$, то для оценки интервальных значений параметра b_{ij} прямоугольником в МЦН воспользуемся соотношением (3):

$$b_{ij}^- = \frac{y_i^+ - y_j^-}{x_i^- - x_j^+} \le b_{ij} \le \frac{y_i^- - y_j^+}{x_i^- - x_j^+} = b_{ij}^+ \text{ для } i = \overline{1,4};\ \ j = \overline{2,5}. \tag{25}$$

Тогда интервальная оценка параметра b, в соответствии с (4):

$$b^- \le b \le b^+, \qquad (26)$$

где $b^- = \max_{i,j} b_{ij}^- = b_{15}^- \approx 11.13924;\ b^+ = \min_{i,j} b_{ij}^+ = b_{14}^+ \approx 13.60976.$

Далее, используя соотношения (2.64) и (2.68), определим значения a_i^-, a_i^+, а затем, в соответствии с (2.70), получим:

$$a^- \le a \le a^+, \qquad (27)$$

где $a^- = \max_i a_i^- \approx 2.28208;\ a^+ = \min_i a_i^+ \approx 5.75698.$

Динамика изменения точечных и интервальных оценок параметров линейной функции представлена в табл. 2.

Таблица 2. **Динамика изменения точечных и интервальных оценок параметров линейной функции**

i	b^-	b^+	$\hat{b}$	ε_b	a^-	a^+	$\hat{a}$	ε_a	S
2	8.96970	16.95238	12.96069	3.99134	1.31486	4.907	3.11093	1.79607	7.16873
3	9.65625	14.54167	12.09896	2.44271	2.73672	6.15651	4.44662	1.70990	4.17679
4	9.96078	13.60976	11.78527	1.82449	3.25431	6.1136	4.93284	1.67853	3.06246
5	11.13924	13.60976	12.3745	1.23526	2.28208	5.75698	4.019525	1.73745	2.14620

Как видно из табл. 2, с увеличением числа опытов происходит уточнение точечных и интервальных оценок параметров линейной функции и сокращение площади неопределенности параметров.

В соответствии с алгоритмами эллипса в ОМЦН найдем точечные оценки параметров линейной зависимости, а также параметры и площади аппроксимирующих эллипсов. Для расчетов также используем исходные данные из табл. 1.

В табл. 3 приведены зависимости точечных оценок параметров линейной функции и параметров эллипсов неопределенности от объема поступающей экспериментальной информации.

Таблица 3. **Зависимость точечных оценок параметров линейной функции и параметров эллипса неопределенности в зависимости объема поступающей экспериментальной информации**

i	a	b	F_i	Q_i	D_i	S
2	4.19263	12.19251	0.65145	0.71640	0.65235	15.48849
3	3.98554	12.40591	0.01514	0.11638	0.03445	4.66232
4	4.45591	12.11035	0.0024	0.08433	0.01432	1.23983
5	5.14888	11.98370	0.00018	0.01513	0.00167	0.28656

Как видно из табл. 2 и 3, оценки площадей неопределенности параметров зависят от количества экспериментальных точек. Площади как прямоугольников, так и эллипсов уменьшаются с увеличением объема поступающей экспериментальной информации. Необходимо отметить, что площади эллипсов неопределенности меньше площадей соответствующих прямоугольников неопределенности. Результирующие уравнения регрессии:

прямоугольником

$$\hat{y} = 4.019525 + 12.3745x; \qquad (28)$$

эллипсом

$$\hat{y} = 5.14888 + 11.9837x; \qquad (29)$$

В табл. 4 представлены точечные оценки выходной величины $\hat{y}$, вычисленные по результирующим уравнениям связи (22–23).

Таблица 4. **Точечные оценки по прямоугольнику и эллипсу в МЦН**

i	прямоугольник			эллипс		
	$\bar{y}_j$	ε_{yi}	ε_y^{om}, %	$\bar{y}_j$	ε_{yi}	ε_y^{om}, %
1	23.2	0	0	23.724	0.524	2.26
2	39.906	0.406	1.03	39.902	0.402	1.02
3	57.849	1.749	3.12	57.28	1.18	2.10
4	80.123	3.623	4.74	78.849	2.349	3.07
5	113.534	-0.666	0.58	111.205	-2.995	2.62

Необходимо отметить, что изменения в размерах областей неопределенности зависят как от объема экспериментальной информации, так и от метода оценки параметров линейной функции. С появлением каждой новой экспериментальной точки я параметры эллипсов) и длин сторон прямоугольников неопределенности монотонно убывают. Следовательно, каждая новая экспериментальная точка приводит к уточнению параметров a, b линейной функции и уменьшению области неопределенности параметров.

Заключение

Все расчеты были выполнены с использованием программ «ICM» и «ICM 2» [8, 9]. При поступлении новой информации об изучаемом объекте происходит уточнение параметров эллипса и сокращение его площади, что представляет перспективы для новых направлений исследований [1–14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов, В. М. Об общей постановке задач оценки параметров аппроксимирующих функций методом центра неопределенности / В. М. Белов, В. В. Евстигнеев, С. А. Гончаров // Вестник Алтайского научного центра Сибирской Академии наук высшей школы. – 2000. – № 3. – С. 31 – 34.

2. Алгоритмы прямоугольника в методе центра неопределенности для оценивания параметров линейных функций / В. М. Белов, С. А. Гончаров, В.И. Пролубников, Ф. Г. Унгер, М. Ф. Лукьянцева. – Томск: Препринт ТНЦ СО РАН, 2001. – 36 с.

3. Выбор аппроксимирующей линейной функции методом центра неопределенности / С. А. Гончаров, В. М. Белов, В. В. Евстигнеев, М. В. Лукьянцева // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: межвуз. сборник. – Бийск, 2001. – С. 10–13.

4. Гончаров, С. А. Оценка области неопределенности параметров линейных функций эллипсом неопределенности / С. А. Гончаров, В. М. Белов, Н. Л. Гончарова // Междунар. научно-практ. конф. «Валихановские чтения - 7». – Кокшетау, 2002. – Т.7. – С. 3–5.

5. Гончаров, С. А. Оценка параметров линейной функции прямоугольником и эллипсом в обобщенном методе центра неопределенности (ОМЦН) / С. А. Гончаров, А. В. Гончаров // Междунар. научно-практ. конф. «Перспективы инновационного развития в агротехнических и энергетических системах». – Балашиха, 2025. – С. 208 – 212.

6. Гончаров, С. А. Оценивание параметров зависимости вязкости глицерина от температуры методом прямоугольника в ОМНЦ / С. А. Гончаров, А. В. Гончаров // Междунар. научно-практ. конфер. «Перспективы инновационного развития в агротехнических и энергетических системах». – Балашиха, 2024. – С. 240–247.

7. Гончаров, С. А. Оценка параметров линейной функции эллипсом неопределенности / С. А. Гончаров, Е. А. Дудник, С. В. Шарапов // IV Науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. – Рубцовск, 2002. – С. 5–9.

8. Аппроксимация экспериментальных данных линейной функцией («ICM») / С. А. Гончаров, В. М. Белов, В. В. Смородский, В. В. Евстигнеев // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2001610878 от 24.07.01. – М.: Роспатент.

8. Аппроксимация экспериментальных данных линейной функцией («ICM 2») / С. А. Гончаров, В. М. Белов, В. В. Евстигнеев, С. В. Шарапов // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2002611564 от 11.09.02. – М.: Роспатент.

10. Хомутов, О. И. Оценивание параметров эмпирических зависимостей обобщенным методом центра неопределенности: монография / О. И. Хомутов, В. М. Белов, С. А. Гончаров // АлтГТУ им. И. И. Ползунова. – Барнаул.: Изд-во АлтГТУ, 2006. – 137 с.

11. Шокин, Ю. И. Интервальный анализ / Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.

12. Кузнецов, В. П. Интервально-статистические модели / В. П. Кузнецов. – М.: Радио и связь, 1989. – 454 с.

13. Ушаков, О. В. «Цифровые технологии» в АПК / О. В. Ушаков, Е. Н. Закабунина, А. В. Гончаров // Междунар. научно-практ. конф. «Современные проблемы энергоэффективности агроинженерных исследований в условиях цифровой трансформации». – Балашиха, 2024. – С. 178–182.

14. Визуализация как инструмент бережливого производства и средство повышения производительности труда / О. В. Ушаков, Е. Е. Можаев, Е. Н. Закабунина, А. В. Гончаров // Вестн. Екатерининского ин-та. – 2023. – №3 (63). – С. 54–60.