МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия для студентов
учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям 1-74 04 01 Сельское
строительство и обустройство территорий,
1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство*

Горки
БГСХА
2019

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
К93

*Одобрено методической комиссией мелиоративно-строительного факультета 25.02.2019 (протокол № 6)
и Научно-методическим советом БГСХА 28.02.2019 (протокол № 6)*

Авторы:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*;
кандидат экономических наук, доцент *Т. Б. Воронкова*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М. П. Дымков*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*

Курзенков, С. В.
К93 Высшая математика. Элементы линейной алгебры : учебно-методическое пособие / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова. – Горки : БГСХА, 2019. – 84 с.
ISBN 978-985-467-979-2.

Приведены краткий теоретический материал по теме «Элементы линейной алгебры», тестовые задания, варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы, список рекомендуемой литературы.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-74 04 01 Сельское строительство и обустройство территорий, 1-74 05 01 Мелиорация и водное хозяйство.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-467-979-2

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных моментов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы выработать прочные навыки самостоятельной работы с книгой, сформировать умение рационально организовывать свой умственный труд.

Самостоятельная работа студентов по математике способствует усвоению теоретического материала и методов решения задач.

Предлагаемое пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Элементы линейной алгебры». Для того чтобы студенты могли оценить уровень своих знаний по данному разделу, в пособие включены тридцать вариантов индивидуальных и тестовых заданий, а также типовой пример модульного задания. После проверки преподавателем индивидуального задания, выполненного студентом, предполагается его защита. При этом студент должен показать знание соответствующих теоретических вопросов раздела и приобретенные навыки при решении задач.

Пособие является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики и физики для студентов по теме «Элементы линейной алгебры».

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. Н. Высшая математика: в 2 ч. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Ч. 1. – 544 с.

2. Дымков, М. П. Высшая математика: Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб.-практ. пособие / М. П. Дымков, Е. И. Шилкина. – Минск: БГЭУ, 2010. – 207 с.

3. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Е. И. Шилкина [и др.]. – Минск: БГЭУ, 2007. – Ч. 1. – 350 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и линейные операции над ними. Умножение матриц

Матрицей размерности m *на* n ($m \times n$) называется прямоугольная таблица чисел или буквенных обозначений, содержащая m *строк* (горизонтальных рядов) и n *столбцов* (вертикальных рядов) одинаковой длины. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно матрицу $A_{m \times n}$ можно представить как

$$A = \left(a_{ij}\right),$$

где $i = \overline{1,\ m}$ (т. е. $i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ m$) – *номер строки*;

$j = \overline{1,\ n}$ (т. е. $j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$) – *номер столбца*;

a_{ij} – *элементы матрицы.*

Матрицы A и B одинаковой размерности называются *равными*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1,\ m};\ j = \overline{1,\ n}.$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей *n-го порядка.*

Элементы матрицы a_{ij}, для которых номера строк и столбцов совпадают (i = j), образуют ее *главную диагональ.* Другая диагональ матрицы называется *побочной*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* и обозначается

$$diag(a_{11},\ a_{22},\ \dots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Например, $diag(-1,\ 4,\ 5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной* и обозначается E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ – верхняя треугольная матрица;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ – нижняя треугольная матрица.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O.

Матрицы O и E в линейной алгебре играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (или вектор-столбцом, или вектор-строкой соответственно):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной* к данной, и обозначается A^{T}.

Например, транспонированной к $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ является матрица

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сложение и вычитание матриц. Операция сложения и вычитания матриц вводится только для матриц *одинаковой размерности.*

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}.$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$

Разностью двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $D_{m\times n} = (d_{ij})$ такая, что $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}.$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$

Умножение матрицы на число. Данная операция определена для матриц *любой размерности.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}.$

Например, $-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & -16 & -20 \end{pmatrix}.$

Матрица $-A = -1 \cdot A$ называется *противоположной матрице A.*

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами (A, B, C – матрицы, α и β – числа):

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + O = A$;
4) $A - A = O$;
5) $0 \cdot A = O$;
6) $1 \cdot A = A$
7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
8) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
9) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A.$

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $2A + B$.

Решение. 1) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на *матрицу* $B_{n\times p} = (b_{ik})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, p}$, т. е. элемент i-й строки и k-го столбца результирующей матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда существуют. При этом, вообще говоря, $A \cdot B \neq$ $\neq B \cdot A$.

Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A – квадратная матрица, Е – единичная матрица того же размера.

Заметим, что из существования $A \cdot B$ не следует существование $B \cdot A$.

Например, для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A равно трем. Оно не совпадает с числом строк матрицы B, равным двум.

При этом определено обратное произведение $B \cdot A$, которое вычисляют следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются *перестановочными*. Заметим также, что произведение ненулевых матриц может дать нулевую матрицу.

Если для заданных матриц операция умножения определена, то справедливы следующие свойства:

1) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; 2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;

3) $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B$.

Пример 2. Являются ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ перестановочными?

Решение. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,4\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2\,4\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21$. Так как $A \cdot B \neq B \cdot A$, то данные матрицы не являются перестановочными.

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение. Найдем квадрат матрицы A, т. е. произведение $A \cdot A$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}.$$

Найдем куб матрицы A^3, для этого перемножим A на A^2, получим

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

1.2. Понятие и способы вычисления определителей, их свойства

Квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие *число* $|A|$ ($\det(A)$), называемое ее *определителем,* по следующим правилам:

– если $n = 1$, т. е. $A = (a_{11})$, то $|A| = a_{11}$;

– если $n = 2$, т. е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Пример 1. Найти определители матриц $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$$

Для того чтобы обобщить методику вычисления определителей квадратных матриц произвольного порядка, введем понятие минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} *выбранного* элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель n 1-го порядка, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания в ней строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Например, если исходной матрицей является матрица 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ а } M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы называется ее минор, взятый со знаком плюс, если сумма индексов выбранного элемента $i + j$ – четное число, и со знаком минус, если эта сумма нечетная, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Например, для матрицы 3-го порядка $A_{11} = M_{11}, A_{32} = -M_{32}$.

Тогда если $n \geq 2$, то определитель матрицы n-го порядка можно вычислить на основе разложения его по элементам некоторого ряда, т. е. определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда заданной квадратной матрицы на соответствующие им алгебраические дополнения. При этом схемы разложений определителя по выбранной строке или выбранному столбцу будут выглядеть соответственно:

по k-й строке – $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{kj} \cdot A_{kj} \right);$

по p-му столбцу– $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ip} \cdot A_{ip} \right),$

где a_{kj} и a_{ip} – элементы выбранного ряда;

A_{kj} и A_{ip} – алгебраические дополнения соответствующим элементам выбранного ряда матрицы.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot (-9 + 24) + 1 \cdot (-15 - 6) = 2 \cdot 15 - 21 = 9$.

Пример 3. Вычислить определитель четвертого порядка наиболее удобным способом:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по 4-й строке:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 4 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \left(0 + 0 + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 4 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \cdot (2-0) = -24 .$$

Определители матриц обладают приведенными ниже *свойствами*:

1) при транспонировании матрицы ее определитель не изменится;

2) общий множитель элементов любой строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя;

3) если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю;

4) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;

5) определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

1.3. Обратная матрица и ее нахождение

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю $|A| \neq 0$, иначе матрица A *вырожденная*.

Матрица $\tilde{A}$ называется *союзной* к матрице A, если ее элементы получаются по следующей схеме:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Например, для матрицы 3-го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ союзной матрицей будет матрица вида

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если выполняется условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет ту же размерность, что и матрица A.

Справедливо утверждение: всякая невырожденная матрица A имеет обратную A^{-1}, причем $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$.

Обратная матрица A^{-1} к матрице A обладает следующими *свойствами*:

1) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$; 2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$; 3) $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

Пример 1. Найти обратную матрицу к заданной $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Обратная матрица к данной определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}.$$

Определитель матрицы A равен $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-2+12=10.$

Союзная матрица для матриц второго порядка имеет вид

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

В нашем случае алгебраические дополнения для элементов заданной матрицы: $A_{11} = -2$; $A_{12} = -4$; $A_{21} = -(-3) = 3$; $A_{22} = 1$. Из них составим союзную матрицу к заданной $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обратная матрица будет иметь вид $A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная к матрице $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$ Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, значит матрица A имеет обратную.

Пример 3. Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ является обратной для $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично находим произведение $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & 3-6+3 & 3-9+6 \\ -3+5-2 & -3+10-6 & -3+15-12 \\ 1-2+1 & 1-4+3 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Следовательно, матрица *A* является обратной для матрицы *B*.

1.4. Ранг и элементарные преобразования матриц

Рассмотрим матрицу *A* размерности $m \times n$.

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней *k* строк и *k* столбцов $\left(k \le \min(m;n)\right)$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель *k*-го порядка. Все такие определители называются *минорами k-го порядка этой матрицы.*

Выделим в матрице *A* миноры 2-го порядка. Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из *n* элементов по *k*.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы.* Обозначается $r(A)$, или *rang*(*A*).

Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min(m;\ n)$ – меньшее из чисел *m* и *n*.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$.

Базисный минор стоит на пересечении 2-й и 3-й строк с 1-м и 3-м столбцами.

Ранг матрицы *не изменится*:

1) при транспонировании матрицы;

2) если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд;

3) если в ней поменять местами две строки (два столбца);

4) при умножении каждого элемента строки (столбца) на один и тот же множитель, отличный от нуля;

5) если прибавить к элементам одной строки (столбца) соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования матриц, указанные в свойствах ранга 2–5, называются *элементарными*.

Матрицы A и B будем называть *эквивалентными* $A \sim B$, если одна матрица из другой получается с помощью элементарных преобразований.

Пример 2. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -25 - (-24) = -25 + 24 = -1 \neq 0,$$

т. е. $rang(A) = 2$. Заметим, что ранг матрицы равен числу «ступеней».

1.5. Понятие систем линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – *коэффициенты* системы;

b_i – *свободные члены* системы;

$x_1, x_2, ..., x_n$ – *неизвестные* системы;

$i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Если ввести следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец из неизвестных x_j;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец из свободных членов b_i,

то система линейных уравнений записывается в *матричной форме*

$$A \cdot x = b.$$

Произведение матриц $A \cdot x$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в столбце x (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, подстановка которых в уравнения системы обращает их в тождества. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения. В случае неопределенной системы каждое ее решение называется *частным решением*. Совокупность всех частных решений системы называется ее *общим решением.*

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. В случае совместности системы находится ее общее решение.

Ответ на вопрос о совместности системы m линейных уравнений с n неизвестными дает *теорема Кронекера – Капелли*: система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы, т. е.

$$rang(A) = rang\left(\overline{A}\right).$$

При этом:

– если ранг совместной системы равен числу неизвестных $rang(A)$ = n, то система имеет единственное решение;

– если ранг совместной системы меньше числа неизвестных $rang(A)$ < n, то система имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот. Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным.*

1.6. Решение невырожденных линейных систем матричным методом

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, т. е. *квадратная система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot x = b$.

Основная матрица А такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной.*

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot x = b$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot x = x$, то справедливо равенство

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Отыскание решения системы по приведенной формуле называют *матричным способом* решения системы.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. По условию задачи

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (4-9) + 1 \cdot (2-12) - 1 \cdot (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы x.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} (-5) \cdot 0 + (-1) \cdot 14 + (-1) \cdot 16 \\ (10) \cdot 0 + 14 \cdot 14 + (-16) \cdot 16 \\ (-5) \cdot 0 + (-19) \cdot 14 + 11 \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда решения системы следующие: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

1.7. Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера

Пусть требуется решить квадратную систему n уравнений. Согласно приведенному матричному способу решения таких систем можем записать

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Таким образом, *правило Крамера* решения системы n линейных уравнений с n неизвестными можно сформулировать так:

– если определитель системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, причем $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}$;

– если определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$) и все $\Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то система имеет бесчисленное множество решений;

– если определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$) и найдется такое k, что $\Delta_k \neq 0$, то система является несовместной, т. е. не имеет ни одного решения.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$ Так как он не равен нулю, то можем сделать вывод, что система имеет единственное решение, причем $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, 2}$.

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{7}{7} = 1, \; x_2 = \dfrac{14}{7} = 2.$

Пример 2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ -4x + 6y = 2. \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Так как все определители $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то данная система уравнений является неопределенной. Найдем множество решений системы, придавая одной из переменных произвольные значения. Пусть $x \in R$, тогда выражаем переменную y через x, например, из первого уравнения: $-3y = -2x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{3}$. Итак, множество системы уравнений имеет вид $x \in R; \; y = \dfrac{2x+1}{3}$ или $\left(x; \; \dfrac{2x+1}{3} \right)$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ -9x - 3y = -1 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 1 = -11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 36 = 33.$$

Так как определитель системы $\Delta = 0$, а вспомогательные определители $\Delta_1 = -11 \neq 0$; $\Delta_2 = 33 \neq 0$, то система уравнений несовместна или имеет $\varnothing$ решений

Пример 4. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

Значит, система имеет единственное решение $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1$; $x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2$; $x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3$.

1.8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения этой системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому*, или *треугольному*, виду а на втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из преобразованной ступенчатой системы.

Прямой ход метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью ряда элементарных преобразований прийти к эквивалентной системе более простого вида.

Предположим, что коэффициент данной системы $a_{11} \neq 0$, в противном случае в системе первую строку можно поменять местами с любой другой строкой так, чтобы коэффициент при x_1 был отличен от нуля.

Преобразуем систему, исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $\left(i, j = \overline{2, m} \right)$ – новые значения коэффициентов и свободных членов, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. Продолжим этот процесс, пока это возможно, в результате получим ступенчатую систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2k}x_k + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \qquad \qquad \tilde{a}_{kk}x_k + \ldots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k, \end{cases}$$

где a_{11}, $\tilde{a}_{22}, \ldots, \tilde{a}_{kk}$ – главные элементы системы ($k \leq n$).

Если в процессе приведения системы к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же при $b_i \neq 0$ появится уравнение вида $0 = b_i$, то это свидетельствует о несовместности системы.

При обратном ходе из последнего уравнения преобразованной ступенчатой системы выражается первое неизвестное x_k через все остальные неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$, которые называют *свободными*. Затем выражение переменной x_k из последнего уравнения системы подставляется в предпоследнее и из него выражается переменная x_{k-1}. Аналогичным образом последовательно определяются переменные $x_{k-2}, \ldots, x_1$. В результате получается общее решение системы линейных уравнений.

Чтобы найти частное решение системы, свободным неизвестным $x_{k+1}, \ldots, x_n$ в общем решении придаются произвольные значения и вычисляются значения переменных $x_k, \ldots, x_1$.

На практике прямой ход метода Гаусса удобно реализовывать не на самой системе, а работая с элементами расширенной матрицы

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

При этом эквивалентные преобразования строк расширенной матрицы производятся с помощью вычисления определителей второго порядка, которые формируются относительно выбранных главных элементов по так называемому правилу прямоугольников. Рассмотрим, как производятся эти преобразования на примере.

Пример 1. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу для данной системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 6 & 3 & 21 \\ 4 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 5 & 4 & 33 \end{array}\right).$$

В качестве главного элемента на первом шаге выберем a_{11} = 1. Элементы столбца под главным элементом заменим нулями, а строку, в которой он стоит, оставим без изменений. Остальные элементы расширенной матрицы пересчитаем с помощью соответствующих определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -16, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} = -66 \text{ – для элементов 2-й строки;}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -13, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} = -30 \text{ – для элементов 3-й строки.}$$

В результате получим эквивалентную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & \boxed{-16} & -11 & -66 \\ 0 & -13 & -5 & -30 \end{array}\right).$$

На втором шаге преобразований возьмем элемент a_{22} = –16. Элемент под ним в столбце заменим нулем, строку, в которой он стоит, оставим без изменений, а все остальные элементы расширенной матрицы пересчитаем по правилу прямоугольников:

$$\begin{vmatrix} -16 & -11 \\ -13 & -5 \end{vmatrix} = -63, \quad \begin{vmatrix} -16 & -66 \\ -13 & -30 \end{vmatrix} = -378 \text{ – для элементов 3-й строки.}$$

Получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & -16 & -11 & -66 \\ 0 & 0 & -63 & -378 \end{array}\right)$.

Так как $r(A) = 3$, $r(\overline{A}) = 3$ и $n = 3$, то заданная система совместна и определена. Найдем ее решение. Для этого запишем систему для преобразованной расширенной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ \quad -16x_2 - 11x_3 = -66, \\ \qquad\qquad -63x_3 = -378. \end{cases}$$

Выполним обратный ход. Третье уравнение системы разрешим относительно x_3:

$$x_3 = \frac{-378}{-63} = 6.$$

Подставим найденное значение во второе уравнение системы и выразим из него x_2:

$$-16x_2 - 11 \cdot 6 = -66; \quad -16x_2 = -66 + 66; \quad -16x_2 = 0; \quad x_2 = 0.$$

С учетом значений переменных x_2 и x_3 разрешим первое уравнение относительно x_1: $x_1 + 18 = 21$; $x_1 = 3$.

Значит, система имеет следующее решение: $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 6$.

Пример 2. Для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$$

найти общее решение.

Решение. Выпишем расширенную матрицу для данной системы и произведем прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 10 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 10 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 12 & 21 \\ 0 & -4 & -1 & 10 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 10 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход. Для этого запишем систему для преобразованной расширенной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7, \\ -4x_2 - x_3 + 10x_4 = 18, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Подставим в первое и второе уравнения системы $x_4 = 1$, получим

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ -4x_2 - x_3 = 8, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы, например, x_3. Тогда общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_3 = -8 - 4x_2, \\ x_4 = 1, \end{cases}$$

где x_2 – свободная переменная решения.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -23 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Данной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_4 = 4, \\ -x_2 + \quad x_3 \quad -9x_4 = -6, \\ 2x_3 - 23x_4 = -21, \\ 0x_4 = 1. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как последнее уравнение приводит к противоречию. Следовательно, исходная система имеет пустое множество решений.

2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И ДОМАШНИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1

1. Найти $A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу X из уравнения

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Найти $A \cdot B$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти A^2, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $E \cdot B - 4B + A^2B$.

6. Проверить, выполняются ли равенства $AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

7. Вычислить $AB+2C^{\mathrm{T}}$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&4\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&4&6\\5&7&3\end{pmatrix}.$$

Домашнее задание к занятию 1

1. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\-1&0&7\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}6&0&0\\-3&4&0\\0&-5&2\end{pmatrix}$. Найти $A^2+2AB-BA+B$.

2. Найти $A\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-3\\5&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&3\end{pmatrix}$.

3. Дано: $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$.

Показать, что $A\cdot X=B\cdot X$, хотя $A\neq B$.

Практическое занятие 2

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}3&-2\\4&6\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}3&-2\\-4&5\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}\sqrt{a}&-1\\a&\sqrt{a}\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}3&-2&1\\-2&1&3\\2&0&-2\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}2&0&0\\5&2&4\\3&3&8\end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix}4&3&-5\\2&0&-1\\-4&1&3\end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix}6&4&2\\4&-1&2\\1&-3&1\end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix}3&4&5\\3&2&2\\0&-1&1\end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix}2&-3&-1\\4&-1&2\\3&5&0\end{vmatrix}$.

2. Найти все миноры и алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы уравнений методом Крамера:

1) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 9x+12y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y+3z=-9, \\ 8x+3y+5z=-13, \\ 2x+5y-z=-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+y-z=1, \\ 5x+2y+3z=2, \\ 8x+3y+2z=3. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 2

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 10 & 11 & 9 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Решить системы уравнений методом Крамера

1) $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x-5y=40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y+3z-4=0, \\ 2x+y-z-3=0, \\ 3x+3y+2z-7=0. \end{cases}$

Практическое занятие 3

1. Найти обратную матрицу A^{-1} к данным матрицам:

а) $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Показать, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

2. Матричным способом решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$

Домашнее задание к занятию 3

1. Найти обратную матрицу A^{-1} к данным матрицам:

а) $A = \begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Показать, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

2. Матричным способом решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$

Практическое занятие 4

1. Решить системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

$$
\text{д)}\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3; \end{cases}
$$

$$
\text{е)}\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}
$$

Домашнее задание к занятию 4

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$
\text{а)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}
$$

$$
\text{в)}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}
$$

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении приведенных ниже заданий вместо буквы N необходимо поставить число, обозначающее порядковый номер студента в списке группы, а вместо буквы G – номер группы.

1. Вычислить выражение $\dfrac{(A^2 \cdot B - 4 \cdot B)^T \cdot C}{2}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & G-3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & G-2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} G \\ 22-N \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений $A \cdot x = b$ методом Крамера и матричным способом, если

$$A=\begin{pmatrix} G+1 & 2 & 0 \\ 2 & N & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ G \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Сравнить результаты решения системы линейных уравнений в реализованных методах.

3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & G & -1 \\ 2 & N & 1 \\ 3 & 3G & -3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Ответить на вопрос задания, выбрав один из вариантов ответов.

1.1. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) не определена.

1.2. Разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ равна …

1) не определена; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1.3. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) не определена.

1.4. Разность матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) не определена; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1.5. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) не определена.

1.6. Разность матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ равна …

1) не определена; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.7. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) не определена.

1.8. Разность матриц $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ равна …

1) не определена ; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.9. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$; 4) не определена

1.10. Разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$; 3) не определена; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}$ равна …

1) 0; 2)(0 0); 3) (2 8); 4) не определена

1.12. Разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}$ равна …

1) 0; 2) (0 0); 3) (2 8); 4) не определена.

1.13. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$; 4) не определена.

1.14. Разность матриц $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$; 3) не определена; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.

1.15. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$;   4) не определена.

1.16. Разность матриц $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$;   3) не определена;   4) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \end{pmatrix}$.

1.17. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;   4) не определена.

1.18. Разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;   3) не определена;   4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.

1.19. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$;   4) не определена.

1.20. Разность матриц $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;   3) не определена;   4) $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1.21. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -1$ равно…

1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;   3) не определено;   4) $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1.22. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 2$ равно…

1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;   3) не определено;   4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.23. Разность матриц $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ равна …

1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;   3) не определена;   4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.

1.24. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 5$ равно …

1) 25;   2) (5 20);   3) (20 5);   4) не определено.

1.25. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -1$ равно…

1) – 5;   2) (–2 –3);   3) (–3 2);   4) не определено.

1.26. Произведение числа $\lambda = 2$ на матрицу $\begin{pmatrix} -2 \\ 15 \end{pmatrix}$ равно…

1) $\begin{pmatrix} 30 \\ 4 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -4 & 30 \end{pmatrix}$;   3) не определено;   4) $\begin{pmatrix} -4 \\ 30 \end{pmatrix}$.

1.27. Произведение числа $\lambda = -3$ на матрицу $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ равно…

1) $\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$;   3) не определено;   4) $\begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1.28. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -1$ равно…

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;   3) не определено;   4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.29. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 2$ равно…

1) не определено; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1.30. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 3$ равно…

1) $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 3) не определено; 4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить выражение $2A + 3B - C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для выполнения указанных линейных операций над матрицами необходимо следовать определенным правилам:

– чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число;

– чтобы сложить или вычесть матрицы одинаковой размерности, необходимо сложить или вычесть соответствующие элементы данных матриц, т.е. элементы, стоящие на пересечении одних и тех же строк и столбцов.

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}; \qquad 3B = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 15 & -21 \end{pmatrix};$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 15 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 0+6 \\ 8-9 & 6+3 \\ 0+15 & 14-21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 9 \\ 15 & -7 \end{pmatrix};$$

$$2A + 3B - C = \begin{pmatrix} 7-0 & 6-1 \\ -1-2 & 9+2 \\ 15-3 & -7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 11 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}. \qquad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 11 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти произведение матриц A и B.

2.1. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}12 & -3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 12 & -1\end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 12 & -1\end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -10\end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & -10\end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.5. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}15 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}5 & 11\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

2.6 $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

2.7. $A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}9 & -9\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix}9 & -9\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & -9\end{pmatrix}$.

2.8. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -5\\ 12 & 7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4 & 12\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3 & -12\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; 4) ответ нет.

2.9. $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 10 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}12 & 7\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}7 & 14\\ -2 & 6\end{pmatrix}$.

2.10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 14\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 0 & 14\end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$.

2.11. $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}15 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & 15\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}15 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}6 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.13. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}9 & 18\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -18 & 7\end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 18 & 6\end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -12 & -3\end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix}9 & 12\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}12 & 1\\ 2 & -9\end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & 8\\ 9 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}9 & 11\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}8 & 11\\ -6 & -9\end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.17. $A=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 10 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}10 & 7\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}10 & 14\\ -5 & -7\end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 14\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-9 & 23\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}-8 & 19\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & 15\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}15 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-7 & 17\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.21. $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix}9 & 18\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-7 & 13\\ 6 & 1\end{pmatrix}$.

2.22. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -11 & 14 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.23. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.25. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$.

2.26. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

2.27. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}$; 2) ответа нет; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.28. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$; 4) ответа нет.

2.29. $A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) ответа нет; 2) $\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.30. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -6 & 25 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$; 3) ответа нет; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти произведение матриц A и B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведением согласованных матриц $A_{m\times s}$, $B_{s\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны:

$$c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\ldots+a_{is}\times b_{sj},$$

где $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

По определению имеем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+(-1)\cdot 6 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 3+5\cdot 6 & 3\cdot 0+5\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Вычислить определитель заданной матрицы.

3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 1; 2) –1; 3) 3; 4) –2.

3.2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1) –10; 2) –2; 3) 4; 4) 3.

3.3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –5; 2) 7; 3) 5; 4) 4.

3.4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1) 2;   2) 14;   3) 10;   4) –14.

3.5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) 5;   2) 3;   3) –5;   4) 1.

3.6. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) –3;   2) –4;   3) 3;   4) –7.

3.7. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 12;   2) 0;   3) 1;   4) –1.

3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) –5   2) 3;   3) 5;   4) 6.

3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1) 7;   2) 3;   3) 10;   4) –7.

3.10. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) 5;   2) 19;   3) 11;   4) –19.

3.11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1) 11;   2) 13;   3) 7;   4) –7.

3.12. $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 10;   2) 4;   3) –1;0   4) 21.

3.13. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) –3   2) 11;   3) 3;   4) 4.

3.14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1) –19 2) 17; 3) 11; 4) 19.

3.15. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 10; 2) 2; 3) 12; 4) –2.

3.16. $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1) –1; 2) 53; 3) 1; 4) 17.

3.17. $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 0; 2) 18; 3) 24; 4) 3.

3.18. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 22 2) –4; 3) 19; 4) 4.

3.19. $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 11; 2) –15; 3) 15; 4) 25.

3.20. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) – 2 2) 11; 3) 16; 4) 2.

3.21. $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 8; 2) 22; 3) – 8; 4) 21.

3.22. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) –18; 2) 18 3) 12; 4) 10.

3.23. $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 11 2) 19; 3) –11; 4) 5.

3.24. $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –10 2) 32; 3) 19; 4) 10.

3.25. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$.

1) 27; 2) 3; 3) –2;7 4) –3.

3.26. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1) –5; 2) 7; 3) 5; 4) 25.

3.27. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1) 1; 2) –3; 3) –1; 4) –47.

3.28. $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) –2; 2) 26; 3) 2; 4) 27.

3.29. $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –1; 2) 1; 3) –2; 4) –3.

3.30. $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –1 2) 25; 3) 5; 4) 1.

Пример. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Определителем матрицы второго порядка называется число, равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

По определению получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 11 \cdot (-2) = -5 + 22 = 17.$$

Ответ: 17.

Задание 4. Вычислить определитель заданной матрицы.

4.1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

1) 1;   2) 11;   3) 3;   4) –2.

4.2. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 6;   2) –2;   3) 4;   4) 3.

4.3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 0;   2) 1;   3) 8;   4) –8.

4.4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 10;   2) 9;   3) 8;   4) 11.

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1) 16;   2) 15;   3) 17;   4) 14.

4.6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1) 1;   2) 15;   3) 16;   4) 17.

4.7. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) 11;   2) 12;   3) 13;   4) 14.

4.8. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 9; 2) 10; 3) 8; 4) 7.

4.9. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 6; 2) 8; 3) 9; 4) 7.

4.10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 14; 2) 15; 3) 13; 4) 16.

4.11. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 9; 2) 11; 3) 10; 4) 8.

4.12. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

4.13. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) 1; 2) 13; 3) 12; 4) 10.

4.14. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) 9; 2) 11; 3) 8; 4) 10.

4.15. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –9;   2) –10;   3) –11;   4) –8.

4.16. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –11;   2) –13;   3) –12;   4) –14.

4.17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) –5;   2) –4;   3) –3;   4) –6.

4.18 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) –8;   2) –7;   3) –6;   4) –5.

4.19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –8;   2) –5;   3) –7;   4) –6.

4.20. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 1;   2) 3;   3) 4;   4) 2.

4.21. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –13;   2) –15;   3) –14;   4) –17.

4.22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

1) –13;   2) –14;   3) –15;   4) –12.

4.23. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –15; 2) –14; 3) –16; 4) –13.

4.24. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –8; 2) –10; 3) –11; 4) –9.

4.25 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –2; 2) –3; 3) –4; 4) –1.

4.26. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 3.

4.27. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –2 2) –1; 3) –3; 4) 0.

4.28. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –13; 2) –15; 3) –14; 4) –12.

4.29. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –9; 2) –10; 3) –11; 4) –12.

4.30. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) –4;   2) –3;   3) –6;   4) –5.

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы третьего порядка по теореме Лапласа, т. е. как сумму произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения.

Алгебраическими дополнениями элемента матрицы a_{ij} называется определитель второго порядка, полученный вычеркиванием из матрицы i-й строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$. Получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+18) + 1 \cdot (8+3) +$$

$$+10 \cdot (12-0) = 18 + 11 + 120 = 149.$$

Ответ: 149.

Задание 5. Определить союзную матрицу для заданной.

5.1. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

5.2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5.3. $\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$.

5.4. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

5.5. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5.6. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

5.7. $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

5.8. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5.9. $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.

5.10. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5.11. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

5.12. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.13. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$.

5.14. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

5.15. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.16. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5.17. $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

5.18. $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

5.19. $\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$.

5.20. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

5.21. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.22. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5.23. $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

5.24. $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

5.25. $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

5.26. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5.27. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5.29. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

5.30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти союзную матрицу для заданной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Союзная матрица для матриц второго порядка имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Найдем алгебраические дополнения для элементов заданной матрицы: $A_{11} = -2$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -(-3) = 3$, $A_{22} = 1$. Составляем союзную матрицу: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 6. Выписать соответствующий минор M_{ij} или алгебраическое дополнение A_{ij} для заданной матрицы.

6.1. M_{11}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

6.2. M_{12}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.3. A_{12}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$.

6.4. A_{11}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $-\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.5. M_{13}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

6.6. M_{21}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.7. A_{13}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

6.8. A_{21}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.9. M_{22}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$.

6.10. M_{23}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.11. A_{22}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.12. A_{23}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

6.13. M_{31}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$.

6.14. M_{32}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

6.15. A_{32}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

6.16. A_{31}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 4) $-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

6.17. M_{33}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

6.18. M_{11}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$.

6.19. A_{33}, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

6.20. A_{11}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$.

6.21. M_{12}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$.

6.22. M_{13}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$.

6.23. A_{12}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$.

6.24. A_{13}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$.

6.25. M_{21}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$.

6.26. M_{22}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$.

6.27. A_{21}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $-\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$.

6.28. A_{22}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$; 4) $-\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$.

6.29. M_{23}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$.

6.30. A_{23}, $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $-\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$.

Пример. Выписать минор M_{22} и алгебраическое дополнение A_{23} для заданной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 11 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение. Для получения минора M_{22} исключим из матрицы вторую строку и второй столбец. Получаем $M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Для записи алгебраического дополнения A_{23} исключаем из данной матрицы вторую строку, третий столбец и учитываем местоположение элемента a_{23}, стоящего на пересечении исключенной строки и столбца с помощью коэффициента $(-1)^{2+3} = (-1)^5 = -1$. В результате алгебраическое дополнение A_{23} запишется в виде $A_{23} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, $A_{23} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Решить заданную систему линейных уравнений.
Задание оценивается в 1 балл.

7.1. $\begin{cases} 6x - 3y = 4, \\ 5x + 4y = -1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.2. $\begin{cases} -5x + 2y = -1, \\ 6x - 3y = 1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

7.3. $\begin{cases} -3x + 4y = 1, \\ 2x + 9y = 4. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{cases} 3x + 6y = 2, \\ -4x + 5y = 6. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{cases} 4x + 5y = -1, \\ 3x - 3y = 6. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

7.6. $\begin{cases} 7x + 2y = -1, \\ 3x - 3y = 6. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{cases} -x + 4y = -1, \\ 3x - 6y = 2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{cases} -x + 4y = -1, \\ 7x - 8y = 2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

7.9. $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 2x - 4y = 1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

7.10. $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ x - 2y = -2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

7.11. $\begin{cases} -5x + 2y = -3, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

7.12. $\begin{cases} -7x + 3y = -3, \\ 5x - 2y = -2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -12 \\ -29 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

7.13. $\begin{cases} -9x + 4y = -1, \\ 5x - 2y = -2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

7.14. $\begin{cases} -5x + 4y = -1, \\ 3x - 2y = -2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

7.15. $\begin{cases} -5x+4y=1, \\ 3x-2y=-2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$.

7.16. $\begin{cases} -6x+4y=1, \\ x-2y=2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{13}{8} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

7.17. $\begin{cases} -5x-4y=1, \\ x-2y=3. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

7.18. $\begin{cases} -3x-y=4, \\ x-5y=2. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

7.19. $\begin{cases} -5x+y=2, \\ -x-4y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

7.20. $\begin{cases} -8x + y = 2, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.21. $\begin{cases} -6x + 5y = 3, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.22. $\begin{cases} -6x + 5y = 1, \\ 3x - 3y = 1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$.

7.23. $\begin{cases} 5x + 4y = 1, \\ 3x - 4y = 3. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

7.24. $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$.

7.25. $\begin{cases} 2x+3y=2, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

7.26. $\begin{cases} 7x+3y=2, \\ 5x+y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7.27. $\begin{cases} 6x+3y=2, \\ 5x+2y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

7.28. $\begin{cases} 6x+3y=2, \\ 5x+3y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 3 \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

7.29. $\begin{cases} 7x+4y=2, \\ 6x+3y=1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

7.30. $\begin{cases} 7x+3y=-2, \\ 6x+2y=-1. \end{cases}$

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Задание 8. Дать ответ на вопрос, выбрав один из вариантов ответов.

8.1. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 5$. Тогда произведение корней системы равно … .

1) 0,2; 2) 5; 3) 1; 4) Ø.

8.2. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 5$. Тогда система имеет … решение(й).

1) Ø; 2) ∞; 3) 1; 4) 5.

8.3. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Тогда система имеет … решение(й).

1) 2; 2) Ø; 3) 1; 4) ∞.

8.4. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 6$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Тогда система имеет … решение.

1) Ø; 2) нулевое; 3) ненулевое; 4) ∞ .

8.5. Систему линейных уравнений, имеющую нулевое решение, называют … .

1) неоднородной; 2) неопределенной; 3) однородной; 4) несовместной.

8.6. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 1$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Тогда система имеет … решение(й).

1) пустое множество; 2) нулевое; 3) ненулевое; 4) ∞.

8.7. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 3$, $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = -3$. Тогда сумма корней системы равна … .

1) 1; 2) –2; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$.

8.8. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 4$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 5$. Тогда система имеет … решение(й).

1) Ø;   2) 2;   3) 1;   4) ∞.

8.9. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 2$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 3$. Тогда система имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.10. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 0$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 4$. Тогда система имеет … решение.

1) нулевое;   2) Ø;   3) ∞;   4) ненулевое.

8.11. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 1$, $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = 0$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 2;   2) 0,5;   3) 1;   4) 0.

8.12. Несовместная система линейных уравнений имеет … решение(й).

1) Ø;   2) множество;   3) единственное;   4) нулевое.

8.13. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 3$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$. Тогда сумма корней системы равна … .

1) 6;   2) 1;   3) 5;   4) 3.

8.14. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 6$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$. Тогда произведение корней системы равно … .

1) 5;   2) 6;   3) $-\frac{1}{6}$;   4) $\frac{1}{6}$.

8.15. Если для системы линейных уравнений $\Delta \neq 0$, а элементы столбца свободных членов ненулевые, то система называется … .

1) неопределенной;   2) несовместной;   3) однородной;   4) совместной.

8.16. Если при решении системы методом Крамера $\Delta = 0$ и существует $\Delta_k \neq 0$, то система линейных уравнений называется … .

1) совместной;   2) однородной;   3) несовместной;   4) неопределенной.

8.17. Система линейных уравнений, для которой при реализации метода Крамера $\Delta = 4$, $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = -16$, имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;   3) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$;   4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -4 \end{pmatrix}$.

8.18. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 5$, $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 15$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 3; 4) 4.

8.19. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 5$, $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 15$. Тогда сумма значений неизвестных системы равна … .

1) 10; 2) 25; 3) 3; 4) 4.

8.20. Система линейных уравнений, для которой при реализации метода Крамера $\Delta = 3$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -6$, имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

8.21. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 6$, $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 18$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 5; 2) 6; 3) 18; 4) 0.

8.22. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 6$, $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = -18$. Тогда сумма значений неизвестных системы равна … .

1) –1; 2) –6; 3) –5; 4) 1.

8.23. Система линейных уравнений, для которой при реализации метода Крамера $\Delta = 7$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 21$, имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -3 \end{pmatrix}$; 2) $\varnothing$; 3) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.24. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 24$, $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 48$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 6; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

8.25. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 2$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -1$. Тогда сумма значений неизвестных системы равна … .

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) –1.

8.26. Система линейных уравнений, для которой при реализации метода Крамера $\Delta = 8$, $\Delta_1 = 16$, $\Delta_2 = 24$, имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.27. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 9$, $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 27$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 2; 2) –2; 3) 6; 4) 4.

8.28. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 8$, $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 4$. Тогда сумма значений неизвестных системы равна … .

1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

8.29. Система линейных уравнений, для которой при реализации метода Крамера $\Delta = 1$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -2$, имеет следующее решение … .

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; 3) $\varnothing$; 4) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8.30. При решении системы линейных уравнений методом Крамера $\Delta = 2$, $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = -8$. Тогда произведение значений неизвестных системы равно … .

1) 6; 2) 4; 3) 2; 4) –24.

Рекомендации к решению заданий 7 и 8

Система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет вид $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – коэффициенты системы;

b_1, b_2 – свободные члены системы уравнений.

Если в системе $b_1 = b_2 = 0$, ее называют однородной, иначе – неоднородной.

Метод Крамера в данном случае сводится к составлению и вычислению главного определителя системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и ее вспомогательных определителей $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Если главный определитель $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, которое находят по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \;\; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей Δ_1, Δ_2 отличен от нуля, то система уравнений не имеет решений, т. е. является несовместной.

Если все определители системы $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система имеет множество решений, т. е. является неопределенной.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

Составляем и вычисляем определители: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3.$$

Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, которое найдем по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{9} = 0; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}. \qquad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

Вычисляем определители системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Так как все определители $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система уравнений является неопределенной. Найдем множество решений системы, придавая одной из переменных произвольные значения. Пусть $x \in R$, тогда выражаем переменную y через x, например, из первого уравнения $-3y = -2x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{3}$. Итак, множество системы уравнений имеет вид $x \in R;\ y = \dfrac{2x+1}{3}$. Ответ: $\left(x;\ \dfrac{2x+1}{3}\right)$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ -9x - 3y = -1 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

Вычисляем определители системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 1 = -11; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 36 = 33.$$

Так как главный определитель системы $\Delta = 0$, а вспомогательные определители $\Delta_1 = -11 \neq 0;\ \Delta_2 = 33 \neq 0$, то система уравнений несовместна. Ответ: $\varnothing$.

Задание 9. Решить систему и указать неверные утверждения из приведенных (неоднозначный ответ):

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -1, \\ 2x_1 + Nx_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = -1, \end{cases}$$

где N – номер варианта;

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -N-2 & 1 & -N-4 \end{pmatrix}$$ – союзная матрица.

9.1.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 6$;

3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -2$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -1$.

9.2.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен -3;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_2 = 4$;
3. Значение переменной $x_1 = -1$;
4. Значение переменной $x_2 = 2$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -4$.

9.3.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 7;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_2 = -4$;
3. Значение переменной $x_1 = 5$;
4. Значение переменной $x_1 = -3$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -5$.

9.4.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 12$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -2$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -6$.

9.5.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 5;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 6$;
3. Значение переменной $x_1 = -1$;
4. Значение переменной $x_1 = -3$;
5. Значение переменной $x_2 = -7$;
6. Значение переменной $x_3 = -7$.

9.6.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен -2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_1 = 6$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -6$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -8$.

9.7.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен 7;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 18$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_3 = -9$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = 4$.
9.8.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен 1;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_2 = 4$;
3. Значение переменной $x_1 = 4$;
4. Значение переменной $x_3 = -10$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = 4$.
9.9.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –3;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 22$;
3. Значение переменной $x_3 = -11$;
4. Значение переменной $x_1 = -3$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = 4$.
9.10.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 12$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -12$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -6$.
9.11.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –5;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 26$;
3. Значение переменной $x_1 = 3$;
4. Значение переменной $x_1 = -3$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -13$.
9.12.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –1;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 6$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_2 = -2$;

5. Значение переменной $x_2 = 1$;
6. Значение переменной $x_3 = –14$.
9.13.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –15;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 30$;
3. Значение переменной $x_1 = –3$;
4. Значение переменной $x_3 = –2$;
5. Значение переменной $x_2 = –2$;
6. Значение переменной $x_3 = –15$.
9.14.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 32$;
3. Значение переменной $x_1 = –3$;
4. Значение переменной $x_1 = –2$;
5. Значение переменной $x_2 = –2$;
6. Значение переменной $x_3 = 4$.
9.15.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –7;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 34$;
3. Значение переменной $x_1 = –1$;
4. Значение переменной $x_1 = –5$;
5. Значение переменной $x_2 = –2$;
6. Значение переменной $x_3 = –17$.
9.16.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 6$;
3. Значение переменной $x_1 = –3$;
4. Значение переменной $x_1 = –2$;
5. Значение переменной $x_2 = –2$;
6. Значение переменной $x_3 = 10$.
9.17.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –5;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = –2$;
3. Значение переменной $x_1 = –3$;
4. Значение переменной $x_3 = –19$;
5. Значение переменной $x_2 = –2$;
6. Значение переменной $x_3 = 5$.
9.18.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –12;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 40$;

3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $\Delta_2 = 4$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -20$.

9.19.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 42$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $\Delta_1 = 6$;
5. Значение переменной $x_2 = -1$;
6. Значение переменной $x_3 = 9$.

9.20.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 44$;
3. Значение переменной $\Delta_2 = 4$;
4. Значение переменной $x_1 = 7$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -22$.

9.21.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 3;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_1 = 6$;
3. Значение переменной $x_1 = 4$;
4. Значение переменной $x_1 = -5$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -23$.

9.22.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 48$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -2$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 =14$.

9.23.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен 50;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 50$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -2$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -25$.

9.24.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –7;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 52$;
3. Значение переменной $\Delta_2 = 4$;
4. Значение переменной $\Delta_1 = 6$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6.Значение переменной $x_3 = -1$.

9.25.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –3;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 54$;
3. Значение переменной $\Delta_2 = 4$;
4. Значение переменной $\Delta_1 = 6$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = 1$.

9.26.

1 Определитель матрицы коэффициентов равен 14;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 56$;
3. Значение переменной $\Delta_2 = 4$;
4. Значение переменной $\Delta_1 = 6$;
5. Значение переменной $x_2 = 7$;
6. Значение переменной $x_3 = 1$.

9.27.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –8;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 15$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -8$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -29$.

9.28.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 60$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -16$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = -29$.

9.29.

1. Определитель матрицы коэффициентов равен –2;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 62$;
3. Значение переменной $x_1 = -5$;

4. Значение переменной $x_1 = -13$;
5. Значение переменной $x_2 = -1$;
6. Значение переменной $x_3 = -31$.

9.30.
1. Определитель матрицы коэффициентов равен –5;
2. Вспомогательный определитель $\Delta_3 = 64$;
3. Значение переменной $x_1 = -3$;
4. Значение переменной $x_1 = -8$;
5. Значение переменной $x_2 = -2$;
6. Значение переменной $x_3 = 4$.

Пример. Для данной системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \qquad = -1, \\ 2x_1 + x_1 - 2x_3 = 4, \\ \;\; x_1 - x_2 \qquad = -1 \end{cases}$$

выберите верные утверждения из приведенных ниже:

1) основной определитель системы $\Delta = -14$;
2) вспомогательный определитель $\Delta_3 = 17$;
3) значение переменной $x_1 = 5$;
4) союзная матрица имеет вид $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;
5) значение переменной $x_2 = -2$;
6) значение переменной $x_3 = -\dfrac{15}{7}$.

Решение.

Систему линейных уравнений в матричной форме можно записать как $A \cdot x = b$, где в нашем случае

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение будем искать в матричном виде $x = A^{-1} \cdot b$, где $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ – обратная матрица к матрице коэффициентов системы;

$\tilde{A}$ – союзная матрица.

Найдем обратную матрицу к данной матрице A. Для этого вычислим определитель, разлагая его по третьему столбцу:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5 - 2) = -14.$$

Союзную матрицу выпишем исходя из матрицы коэффициентов по правилу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица будет иметь вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ищем решение системы с помощью матричного метода:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \cdot b = -\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (-4) \cdot (-1) \\ -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (10) \cdot (-1) \\ -3 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{14} \\ \frac{8}{14} \\ -\frac{30}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{15}{7} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, данная система линейных уравнений имеет решение $x_1 = -\frac{3}{7}$; $x_2 = \frac{4}{7}$; $x_3 = -\frac{15}{7}$.

Для проверки правильности приведенных утверждений нам необходимо знать вспомогательный определитель Δ_3. Определить этот параметр мы можем, воспользовавшись правилом Крамера. Если основной определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ $(i = \overline{1, 3})$. Это означает, что Δ_3 может быть определен по формуле $\Delta_3 = x_3 \cdot \Delta = -\frac{15}{7} \cdot (-14) = 30$.

Проанализируем данные в задаче утверждения:

1) основной определитель системы равен –14 – это **верное** утверждение;

2) вспомогательный определитель $\Delta_3 = 17$ – это **неверное** утверждение, так как он равен 30;

3) значение переменной $x_1 = 5$ – это **неверное** утверждение, так как ее величина равна $-\frac{3}{7}$;

4) союзная матрица имеет вид $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ – это **верное** утверждение;

5) значение переменной $x_2 = -2$ – это **неверное** утверждение, так как ее величина равна $\frac{4}{7}$;

6) значение переменной $x_3 = -\frac{15}{7}$ – это **верное** утверждение.

Ответ: 1, 4, 6.

5. ПРИМЕР МОДУЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Вычислить выражение $[(E - A^{-1}) \cdot |A| \cdot B]^{\mathrm{T}} \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = -1, \\ -3x + y - 2z = 3, \\ 2x - 2z = -2. \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x + 3y - z = 8, \\ x - y + 2z = -1. \end{cases}$$

Выполнить проверку решения путем подстановки его в уравнения системы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 3
1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 3
1.1. Матрицы и линейные операции над ними. Умножение матриц 3
1.2. Понятие и способы вычисления определителей, их свойства 8
1.3. Обратная матрица и ее нахождение 11
1.4. Ранг и элементарные преобразования матриц 14
1.5. Понятие систем линейных уравнений 15
1.6. Решение невырожденных линейных систем матричным методом 18
1.7. Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера 20
1.8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса 23
2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И ДОМАШНИХ ЗАНЯТИЙ 28
3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 32
4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ 33
5. ПРИМЕР МОДУЛЬНОГО ЗАДАНИЯ 82

Учебное издание

Курзенков Сергей Владимирович
Воронкова Татьяна Борисовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. Г. Толмачева*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 26.12.2019. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,63.
Тираж 40 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.