МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. П. Сазонова

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

КУРС ЛЕКЦИЙ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области сельского хозяйства в качестве
учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования I ступени
по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация
производства в отраслях агропромышленного комплекса*

Горки
БГСХА
2022

УДК 330.43:519.86(075.8)
ББК 65В6я73
С14

Рекомендовано методической комиссией
экономического факультета 28.06.2021 (протокол № 10)
и Научно-методическим советом БГСХА
30.06.2021 (протокол № 10)

Автор:
старший преподаватель *С. П. Сазонова*

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор *А. Г. Ефименко*;
кандидат экономических наук, доцент *В. А. Головков*

Сазонова, С. П.

С14 Эконометрика и экономико-математические методы и модели. Курс лекций : учебно-методическое пособие / С. П. Сазонова. – Горки : БГСХА, 2022. – 207 с.
ISBN 978-985-882-298-9.

Приведены информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе эконометрических моделей, экономико-математических методов и моделей осуществляется решение задач по прогнозированию, анализу и оптимизации управления предприятиями АПК.

Для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования I ступени по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса.

УДК 330.43:519.86(075.8)
ББК 65В6я73

ISBN 978-985-882-298-9

ВВЕДЕНИЕ

Любая деятельность экономической системы в агропромышленном комплексе, особенно в условиях развития рыночных отношений, определяется эффективным использованием имеющихся материальных, трудовых, энергетических, финансовых и информационных ресурсов. Современный этап экономического развития страны предъявляет к специалисту высокие требования по использованию новейших достижений науки для оперативного и достоверного анализа, планирования и прогнозирования.

В курсе лекций излагаются основные понятия и принципы построения эконометрических моделей, принятия решений о спецификации и идентификации модели, выбора метода оценки параметров модели, интерпретации результатов, получения прогнозных результатов, умения давать статистическую оценку значимости таких искажающих эффектов, как гетероскедастичность остатков зависимой переменной, мультиколлинеарность объясняющих переменных, автокорреляции.

Также характеризуется использование линейного программирования в экономике АПК, показывается применение алгоритма симплексного метода, сущность двойственных оценок на основе составления двойственной экономико-математической задачи, обращается внимание на роль метода потенциалов при постановке транспортных задач.

Значительное количество тем посвящено наиболее разработанным и эффективно применяемым на практике экономико-математическим моделям межотраслевого баланса, массового обслуживания, управления запасами, теории игр, анализу и оценке эффективности инвестиционных проектов, сетевому планированию и управлению. Темы лекций расположены с учетом развития процессов в агропромышленном комплексе нашей страны.

Таким образом, представленный лекционный материал направлен на овладение студентами методологическими аспектами научной работы, которые должны найти отражение в специфике конкретных экономических исследований и формировать навыки к их проведению.

Именно из этих принципиальных позиций и предлагается курс лекций «Эконометрика и экономико-математические методы и модели», в котором изучаются основы оптимального принятия управленческих решений.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Понятие эконометрики и эконометрического моделирования, экономико-математические методы и модели для оптимизации в АПК

Название «эконометрика» было введено в 1926 г. норвежским экономистом и статистиком Рагнаром Фришем (имеются сведения, что данный термин появился еще в 1910 г. на основании другой концепции). Формально «эконометрика» означает «измерения в экономике».

Эконометрика *– это наука, которая на базе статистических данных дает количественную характеристику взаимозависимым экономическим явлениям и процессам.*

Слово «эконометрика» произошло от двух слов: «экономика» и «метрика» (от греч. «метрон» – правило определения расстояния между двумя точками в пространстве, «метрия» – измерение).

Зарождение эконометрики является следствием междисциплинарного подхода к изучению экономики. Эконометрика представляет собой сочетание *трех наук*:

1) экономической теории;
2) математической и экономической статистики;
3) математики.

На современном этапе развития науки неотъемлемым фактором развития эконометрики является развитие компьютерных технологий и специальных пакетов прикладных программ.

Основным предметом исследования эконометрики являются массовые экономические явления и процессы.

Эконометрика ставит своей целью количественно охарактеризовать те экономические закономерности, которые экономическая теория выявляет и определяет лишь в общем.

Анализ экономических процессов и явлений в эконометрике осуществляется с помощью математических моделей, построенных на эконометрических модельпирических данных. Практически все эконометрические методы и приемы изучения экономических закономерностей заимствованы из математической статистики. Специфика применения методов математической статистики в эконометрике заключается в том, что практически все экономические показатели являются величинами случайными, а не результатами контролируемого эксперимента.

Поэтому существуют определенные усовершенствования и дополнения методов, которые в математической статистике не используются. Нередко экономические данные содержат ошибки измерения.

В эконометрике разрабатываются специальные методы анализа, позволяющие устранить или снизить влияние этих ошибок на результаты экспериментов. Таким образом, эконометрика через математические и статистические методы анализирует экономические закономерности, доказанные экономической теорией.

К основным задачам эконометрики относятся:

• построение экономических моделей в математической форме, удобной для эконометрического модельпирического анализа (проблема спецификации);

• определение параметров уравнения (этап параметризации);

• проверка качества найденных параметров модели и самой модели в целом (верификация);

• использование построенных моделей для объяснения поведения исследуемых экономических показателей, прогнозирования и предсказания, осмысленного проведения экономической политики.

Поведение и значение экономических показателей зависят от бесконечного числа факторов. Обычно лишь ограниченное количество факторов действительно существенно влияет на исследуемый экономический показатель. Экономическая теория выявила и исследовала значительное число устоявшихся и стабильных связей между различными показателями. Например, хорошо изученными являются зависимости спроса или потребления от уровня дохода и цен на товары; зависимость между уровнями безработицы и инфляции; зависимость объема производства от целого ряда факторов (размера основных фондов, их возраста, качества персонала и т. д.); зависимость между производительностью труда и уровнем механизации, а также многие другие.

Однако в реальных ситуациях даже устоявшиеся зависимости могут проявляться по-разному. Еще более сложной является задача анализа малоизученных и нестабильных зависимостей, построение моделей которых является задачей эконометрики. Такие экономические модели невозможно строить, проверять и совершенствовать без статистического анализа входящих в них переменных с использованием реальных статистических данных. Инструментарием такого анализа являются методы статистики и эконометрики, в частности регрессионного и корреляционного анализа. Следует иметь в виду, что статистический анализ зависимостей сам по себе не вскрывает существо причинных связей между явлениями, т. е. не решает вопроса, в силу каких причин одна переменная влияет на другую. Решение такой задачи является результатом качественного (содержательного) изучения связей, которое обязательно должно либо предшествовать статистическому анализу, либо сопровождать его.

Суть регрессионного анализа. В случае функциональной зависимости каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой. Однако между экономическими переменными таких зависимостей нет. Например, нет строгой зависимости между доходом и потреблением, ценой и спросом, производительностью труда и стажем работы и т. д. Это связано с целым рядом причин. Во-первых, при анализе влияния одной переменной на другую не учитывается целый ряд других факторов, влияющих на нее; во-вторых, это влияние может быть не прямым, а проявляться через цепочку других факторов; в-третьих, многие такие воздействия носят случайный характер и т. д.

Поэтому в экономике говорят не о функциональных, а о *корреляционных*, либо *статистических*, зависимостях. Нахождение, оценка и анализ таких зависимостей, построение формул зависимостей и оценка их параметров являются одним из важнейших разделов эконометрики.

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой.

Корреляционная зависимость – частный случай статистической связи, при котором разным значениям переменной соответствуют различные средние значения другой переменной.

Можно указать два варианта рассмотрения взаимосвязей между двумя переменными X и Y. В первом случае обе переменные считаются равноценными в том смысле, что они не подразделяются на первичную и вторичную (независимую и зависимую) переменные.

Основным в этом случае является вопрос о наличии и силе взаимосвязи между этими переменными (например, между ценой товара и объемом спроса на него, между урожаем картофеля и урожаем зерна, между интенсивностью движения транспорта и числом аварий).

При исследовании силы линейной зависимости между такими переменными обращаются к корреляционному анализу, основной мерой которого является коэффициент корреляции. Вполне вероятно, что связь в этом случае вообще не носит направленного характера. Например, урожайность картофеля и зерновых обычно изменяется в одном и том же направлении, однако очевидно, что ни одна из этих переменных не является определяющей.

Другой вариант рассмотрения взаимосвязей выделяет одну из величин как независимую (объясняющую), а другую как зависимую (объясняемую). В этом случае изменение первой из них может служить причиной для изменения другой. Например, рост дохода ведет к увеличению потребления; рост цены – к снижению спроса; снижение процентной ставки увеличивает инвестиции; увеличение обменного курса валюты сокращает объем чистого экспорта и т. д.

Однако такая зависимость не является однозначной. Каждому конкретному значению объясняющей переменной (набору объясняющих переменных) может соответствовать не одно, а множество значений зависимой переменной. Другими словами, каждому конкретному значению объясняющей переменной (набору объясняющих переменных) соответствует некоторое вероятностное распределение зависимой переменной (рассматриваемой как случайная величина). Поэтому анализируют, как объясняющая (объясняющие) переменная (переменные) влияет (влияют) на зависимую переменную в среднем.

Чтобы найти лучшие варианты организации процессов или функционирования объектов в этих условиях необходимы специальные методы, способные учесть особенности развития процессов и объектов во времени и пространстве при минимальном расходовании материальных и денежных средств, а также времени. Такими методами могут быть математические, которые применительно преимущественно к экономическим объектам (на начальной стадии их разработки и применения) получили название экономико-математических.

Экономико-математические методы – это программа вычислений, обеспечивающая нахождение оптимального варианта решения задачи. Ее условия записаны в виде уравнений и неравенств, которые взаимосвязаны и, как следствие, образуют систему, где решение подчинено достижению цели или целевой функции, записанной в виде уравнения.

Таким образом, нахождение оптимального варианта развития процесса или объекта требует наличия системы уравнений и неравенств, описывающих поведение или функционирование объекта, подчиненное определенной цели.

В свою очередь система уравнений и неравенств является математическим аналогом объекта, учитывающим все важнейшие стороны и особенности его функционирования, по которому можно найти наилучший вариант развития этого объекта. Очевидно, что чем детальнее мы понимаем сущность и содержание объекта, взаимосвязи его элементов и их влияние на конечный результат деятельности или функционирование объекта, тем более точным и приемлемым для применения и реализации на практике получится решение. Таким образом, оптимальное решение мы получаем в рамках составленных уравнений и неравенств, т. е. ограничений задачи. При этом формирование и содержание ограничений задачи должно подчиняться также и определенным требованиям, вытекающим из теории определителей, матриц, векторных пространств, из особенностей и правил составления уравнений, неравенств и их систем. Наиболее существенные свойства реального объекта (предприятия, его подразделения, отрасли или процесса) можно отразить с помощью модели, которая позволяет имитировать поведение объекта в различных условиях, включая и такие, которые связаны с большими затратами ресурсов или риском.

В общем смысле слова модель – это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, получая знания из исследования данного аналога. При этом следует иметь в виду, что сходство между моделью и оригиналом наблюдается в наиболее существенных чертах с точки зрения цели исследования.

Математические модели, применяемые в экономических исследованиях, получили название «экономико-математических». Они являются эффективным средством для обоснования оптимальных решений.

Экономико-математическая модель – это концентрированное выражение наиболее существенных, важных сторон моделируемого объекта или процесса, записанных в виде системы ограничений, различных неравенств, подчиненных целевой функции.

Переменные фактического цифрового материала для математической модели, решение задач на ПК и внедрение результатов вычисления в производство называется ***моделированием***.

Основное назначение модели – служить средством познания оригинала. При этом установлено, что графические, геометрические и физические модели в экономике распространены не так широко, как математические. Это связано со следующими обстоятельствами:

а) использование математических моделей обходится значительно дешевле и требует меньше затрат времени. Это явственно проявляется по сравнению, например, с проведением экспериментальных севооборотов или экспериментальных систем ведения сельского хозяйства. Их освоение происходит в течение многих лет, требует значительных финансовых средств, а эффективность видна через длительный период;

б) в математической модели любое явление, процесс, объект могут быть представлены без воздействия внешних факторов, особенно природных, что исключает вероятность получения непредсказуемых результатов.

1.2. Классификация экономико-математических методов, экономико-математических и эконометрических моделей

Применяемые экономико-математические методы можно подразделить на два вида:

а) *оптимальные.* К их числу относятся симплексный метод (впервые опубликован в 1949 г. американским ученым Дж. Данцигом); метод потенциалов (у истоков его разработки в 1940-е гг. был советский ученый Л. В. Канторович); дельта-метод; метод дифференциальных рент; венгерский метод (разработан в 1931 г. венгерским ученым Б. Эгервари) и др.

б) *неоптимальные.* Примером данного вида может являться метод аппроксимации, или Фогеля, так как он позволяет получать решения, близкие к оптимальным.

По своим возможностям математические методы можно условно разделить на такие группы:

а) *универсальные*, которые позволяют решать задачи любого типа. Например, симплексный метод;

б) *специальные*, которые позволяют решать задачи определенного типа. Так, задачи транспортного характера в основном решаются распределительным или методом потенциалов, а задача о назначениях реализуется венгерским методом.

По виду различают уравнения:

а) *линейные*, которые позволяют решать задачи, записанные в виде линейных уравнений и неравенств.

б) *нелинейные*, которые позволяют решать задачи, записанные в виде нелинейных уравнений и неравенств (переменная стоит в степени, отличной от 1).

Экономико-математические модели являются эффективным средством для обоснования оптимальных решений.

По цели создания и реализации моделей различают следующие основные их типы.

1. Оптимизационные. Основаны на методах линейного программирования. Такие модели представляют собой систему математических уравнений и неравенств, объединенных целевой функцией.

Цель данных моделей – нахождение оптимального варианта из множества возможных направлений использования ограниченных ресурсов. Часто эти модели называют экстремальными, потому что в них находят максимальное или минимальное значение критерия оптимизации (например, максимум прибыли, максимум стоимости товарной продукции или минимум издержек и т. д.).

2. Балансовые. Их сущность – взаимоувязка различных отраслей АПК и устранение диспропорций в их развитии. Важное место здесь занимает модель межотраслевого баланса (МОБ), представляющая собой систему уравнений, каждое из которых выражает требование баланса в разрезе каждой отрасли между производимым количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. В балансовых моделях отрасль рассматривается с двух позиций: а) производящая; б) потребляющая. Для решения таких задач условия сводятся в шахматные квадратные матрицы.

3. Эконометрические. Иногда их называют экономико-статистическими, так как мощным инструментом эконометрических исследований является аппарат математической статистики. Эконометрическая модель описывает количественную зависимость результата от влияния на него одного или нескольких факторов.

Основные задачи, решаемые при использовании данных моделей:

- построение уравнения математической зависимости (этап спецификации);
- оценка параметров полученной модели (этап параметризации);
- проверка качества найденных параметров и самой модели в целом (этап верификации);
- применение модели для анализа и планирования в АПК.

Параметры эконометрических моделей оцениваются с помощью методов математической статистики. Наиболее распространены эконометрические модели, представляющие собой системы регрессионных уравнений. В этих уравнениях отражается зависимость эндогенных (зависимых) переменных от экзогенных (независимых) переменных. Данная зависимость в основном выражается через тренд (длительную тенденцию) основных показателей моделируемой экономической системы. Эконометрические модели используются для анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов с использованием реальной статистической информации.

4. Имитационные. Существуют различные постановки и комбинации данного типа моделей (имитационные эконометрические, имитационные оптимизационные, имитационные балансовые). При расчетах обычно требуется проведение большого количества повторяющихся действий для обеспечения длительного периода моделируемой переменной. Поэтому более удобным и эффективным способом решения имитационной модели является ее реализация в виде программы или пакета прикладных программ для ЭВМ.

5. Кроме того, в аграрной экономике находят широкое распространение ***модели исследования операций:***

а) ***игровые.*** В АПК часто применяются модели в виде статистических игр. Их сущность – определение игроком (исследователем) правильного поведения. Цель решения данных задач – выбор оптимальной стратегии с наилучшей функцией выигрыша для ЛПР, т. е. лица, принимающего решение;

б) ***модели управления запасами.*** В коммерческой деятельности АПК представляет интерес управление товарными запасами торгового предприятия на основе данного типа моделей. Их сущность – определение такой организации поставок, при которой суммарные затраты на доставку и хранение товаров были бы минимальные.

При постановке задачи учитывают товарный запас, спрос, порядок пополнения запаса, издержки. Цель таких моделей – уменьшение затрат по завозу и хранению товаров с удовлетворением спроса каждого покупателя;

в) ***модели массового обслуживания (МО).*** Их применение вызвано тем, что в АПК имеется необходимость упорядочения процессов, связанных с образованием очередей (люди, машины, станки в эксплуатации). Сущность моделей МО – определение оптимального числа каналов обслуживания (продавцов, автозаправок и т. д.), при которых суммарные издержки, обусловленные пребыванием в очереди и простоем обслуживающих линий, были бы минимальные. При постановке задачи учитывают такие элементы, как требование (заявка), каналы обслуживания;

г) ***сетевые модели.*** С их помощью моделируется процесс выполнения комплекса работ для достижения определенной цели. Эта модель является основным элементом системы сетевого планирования и управления (СПУ). Реализация задач осуществляется на основе построения сетевых графиков. Чаще всего требуется их улучшение с учетом сроков выполнения работ и рационального использования материальных, трудовых и денежных ресурсов. Оптимизация проектов в таком случае может осуществляться по времени, стоимости и ресурсам.

Выделяют три основных класса *эконометрических моделей*.

1. Модель временных рядов.

Модель представляет собой зависимость результативного признака от переменной времени или переменных, относящихся к другим моментам времени.

К моделям временных рядов, в которых результативный признак зависит от времени, относятся:

а) ***модель тренда*** (модель зависимости результативного признака от трендовой компоненты):

$$y(t) = T(t) + \varepsilon(t), \tag{1.1}$$

где $y(t)$ – результативный признак;

$T(t)$ – временной тренд заданного параметрического вида (например, линейный);

$\varepsilon(t)$ – случайная (стохастическая) компонента.

б) ***модель сезонности*** (модель зависимости результативного признака от сезонной компоненты):

$$y(t) = S(t) + \varepsilon(t), \tag{1.2}$$

где $y(t)$ – результативный признак;

$S(t)$ – периодическая (сезонная) компонента;

$\varepsilon(t)$ – случайная (стохастическая) компонента.

в) ***модель тренда и сезонности:***

$$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t) \text{ (аддитивная)}, \tag{1.3}$$

$$y(t) = T(t)S(t) + \varepsilon(t) \text{ (мультипликативная)}, \tag{1.4}$$

где $y(t)$ – результативный признак;

$T(t)$ – временной тренд заданного параметрического вида (например, линейный);

$S(t)$ – периодическая (сезонная) компонента;

$\varepsilon(t)$ – случайная (стохастическая) компонента.

К моделям временных рядов, в которых результативный признак зависит от переменных, датированных другими моментами времени, относятся:

г) ***модели с распределенным лагом***, которые объясняют изменение результативного признака в зависимости от предыдущих значений факторных переменных;

д) ***модели авторегрессии***, которые объясняют изменение результативного признака в зависимости от предыдущих значений результативных переменных;

е) ***модели ожидания***, объясняющие вариацию результативного признака в зависимости от будущих значений факторных или результативных переменных.

2. Регрессионные модели с одним уравнением.

По числу факторных признаков регрессионные модели подразделяются:

а) на ***парные*** (с одним факторным признаком $y_i = a_0 + a_1 x_1$);

б) ***множественные*** (с двумя и более факторными признаками – $y_i = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$).

В зависимости от вида уравнения модели делятся на:

а) на ***линейные*** ($y_i = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$);

б) ***нелинейные*** ($y_i = a_0 + a_1 \sqrt{x_2} + a_2 x_2^3 + ... + a_n x_n$).

3. Системы одновременных уравнений.

Данные модели описываются системами взаимозависимых регрессионных уравнений. Системы могут состоять из тождеств и регрессионных уравнений, каждое из которых может включать в себя не только факторные переменные, но и результативные переменные из других уравнений системы.

Для тождеств характерно то, что их вид и значения параметров известны. Регрессионные уравнения, из которых состоит система, называются поведенческими уравнениями. В поведенческих уравнениях значения параметров являются неизвестными и подлежат оцениванию.

Примером может служить модель спроса и предложения, приведенная ниже. Системы одновременных уравнений требуют относительно более сложный математический аппарат. Они могут использоваться для моделей страновой экономики и др.

Пример. *Модель спроса и предложения.* Пусть Q_t^D – спрос на товар в момент времени *t*; Q_t^S – предложение товара в момент времени *t*; P_t – цена товара в момент времени *t*; Y_t – доход в момент времени *t*. Составим следующую систему уравнений «спрос – предложение»:

$$\begin{cases} Q_t^S = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_t & \text{(предложение)}, \\ Q_t^D = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t & \text{(спрос)}, \\ Q_t^S = Q_t^D & \text{(равновесие)}. \end{cases}$$

Цена товара P_t и спрос на товар $Q_t = Q_t^S = Q_t^D$ определяются из уравнений модели, т. е. являются эндогенными переменными. Предопределенными переменными в данной модели являются доход Y_t и значение цены товара в предыдущий момент времени P_{t-1}.

Классификация видов эконометрических переменных и типов данных. В эконометрических исследованиях, как правило, используются два типа выборочных данных:

1) *пространственные данные* (crosssectional data);

2) *временные данные* (timeseries data).

Под пространственными данными понимается совокупность экономической информации, относящейся к разным объектам, полученной за один и тот же период или момент времени. Пространственные данные представляют собой выборочную совокупность из некоторой генеральной совокупности. В качестве примера пространственных данных можно привести совокупность различной информации по какому-либо предприятию (численность работников, объем производства, размер основных фондов), об объемах потребления продукции определенного вида и т. д.

Под временными данными понимается совокупность экономической информации, характеризующей один и тот же объект, но за разные периоды времени. По аналогии с пространственной выборкой отдельно взятый временной ряд можно считать выборкой из бесконечного ряда значений показателей во времени. В качестве примера временных данных можно привести данные о динамике индекса потребительских цен, ежедневные обменные курсы валют. Временная информация естественным образом упорядочена во времени в отличие от пространственных данных.

Экономические переменные, участвующие в любой эконометрической модели, делятся на четыре вида:

1) *экзогенные* (независимые) – переменные, значения которых задаются извне. Данные переменные являются управляемыми (x);

2) *эндогенные* (зависимые) – переменные, значения которых определяются внутри модели, или взаимозависимые (y);

3) *лаговые* – экзогенные или эндогенные переменные в эконометрической модели, относящиеся к предыдущим моментам времени и находящиеся в уравнении с переменными, относящимися к текущему моменту времени. Например, x_{i-1} лаговая экзогенная переменная, y_{i-1} – лаговая эндогенная переменная;

4) *предопределенные* (объясняющие переменные) – лаговые (x_{i-1}) и текущие (x) экзогенные переменные, а также лаговые эндогенные переменные (y_{i-1}). Любая эконометрическая модель предназначена для объяснения значений одной или нескольких текущих эндогенных переменных в зависимости от значений предопределенных переменных.

1.3. Общие сведения об эконометрических моделях и этапы их построения

При управлении производством постоянно возникает необходимость выяснить взаимосвязи показателей, влияние изменений одних из них на изменение других. Эти исследования осуществляют при построении группировок. Но группировки не позволяют определять тесноту связи множества показателей, что является предметом метода корреляций. Чтобы объяснить влияние количественного изменения одного показателя на изменение другого, используются регрессии. Наличие взаимосвязи показателей является основанием для построения математических аналогов или моделей. Если все параметры, на основе которых построена модель, являются следствием точных измерений и экспериментов, то она будет регрессионной. Если среди показателей имеются статистические данные, то полученная на их основе модель является эконометрической.

Эконометрическая модель *– это математическое выражение в виде уравнения, которое отражает количественную взаимосвязь результативного показателя с одним или несколькими факторными показателями.*

Название «эконометрическая модель» является более точным, так как модель дает усредненную оценку эффективности факторов (в том числе статистических). В общем виде однофакторная линейная эконометрическая модель имеет вид

$$y_x = a_0 + a_1 x, \tag{1.5}$$

где y_x – ожидаемое значение результативного показателя, который формируется под воздействием вектора (фактора x);

a_0 – известная величина (свободный член), которая показывает, на сколько изменится результативный показатель (если «+» увеличится, если «–» уменьшится) его единиц измерения при влиянии неучтенных факторов и если учтенные факторы неизменны;

a_1 – коэффициент регрессии или эффективность фактора. Он показывает, на сколько единиц возрастает (при знаке «+») или уменьшается (при знаке «–») результативный показатель его единиц измерения, если факторный показатель увеличится на одну его единицу измерения;

x – факторный показатель.

Пример. Было исследовано влияние основных факторов на себестоимость 1 ц зерновых культур, как одного из важнейших показателей эффективности производства, с помощью эконометрического анализа. В результате расчетов, после удаления не существенно влияющих факторов эконометрическая модель получила следующий вид:

$$y_x = 23{,}3 + 0{,}03x_1 + 0{,}03x_2 - 0{,}40x_3 - 0{,}09x_4 + 0{,}09x_5 + 0{,}07x_6,$$
$$R = 0{,}75,\ D = 58{,}5\ \%,\ F = 33{,}3,$$

где y_x – себестоимость зерновых, руб/ц;

x_1 – затраты на удобрения, руб/га;

x_2 – затраты на содержание основных средств, руб/га;

x_3 – урожайность зерновых, ц/га;

x_4 – балл пашни, балл;

x_5 – оплата труда, руб/чел.-ч;

x_6 – затраты труда, чел.-ч/га.

Анализируя коэффициенты регрессии, можно отметить, что:

$a_0 = 23{,}3$ – значит, себестоимость зерновых увеличится на 23,3 руб/ц при влиянии неучтенных факторов, если учтенные неизменны;

$a_1 = 0{,}03$ – значит, себестоимость зерновых увеличится на 0,03 руб/ц, если затраты на удобрения увеличатся на 1 руб/га;

$a_2 = 0{,}03$ – значит, себестоимость зерновых увеличится на 0,03 руб/ц, если затраты на содержание основных средств увеличатся на 1 руб/га;

$a_3 = -0{,}40$ – значит, себестоимость зерновых уменьшится на 0,40 руб/ц, если урожайность увеличится на 1 ц/га.

Реальные значения зависимой переменной не всегда совпадают с ее условными математическими ожиданиями и могут быть различными при одном и том же значении объясняющей переменной (наборе объясняющих переменных), поэтому фактическая зависимость должна быть дополнена некоторым слагаемым, которое является случайной величиной.

Рассмотрим основные причины обязательного присутствия в регрессионных моделях случайного фактора (отклонения) ε.

1. *Невключение в модель всех объясняющих переменных.* Любая ре-

грессионная (в частности, эконометрическая) модель является упрощением реальной ситуации. Последняя всегда представляет собой сложнейшее переплетение различных факторов, многие из которых в модели не учитываются, что порождает отклонение реальных значений зависимой переменной от ее модельных значений.

2. *Неправильный выбор функциональной формы модели.* Из-за слабой изученности исследуемого процесса либо из-за его переменчивости может быть неверно подобрана моделирующая его функция. Это, безусловно, скажется на отклонении модели от реальности, что отразится на величине случайного члена. Кроме того, неверным может быть подбор объясняющих переменных.

3. *Агрегирование переменных.* Во многих моделях рассматриваются зависимости между факторами, которые сами представляют сложную комбинацию других, более простых переменных. Это может оказаться причиной отклонения реальных значений от модельных.

4. *Ошибки измерений.* Какой бы качественной ни была модель, ошибки измерений переменных отразятся на несоответствии модельных значений эконометрическим эмпирическим данным, что также отразится на величине случайного члена.

5. *Ограниченность статистических данных.* Зачастую строятся модели, выражаемые непрерывными функциями. Но для этого используется набор данных, имеющих дискретную структуру.

Это несоответствие находит свое выражение в случайном отклонении.

6. *Непредсказуемость человеческого фактора.* Эта причина может «испортить» самую качественную модель, так как невозможно спрогнозировать поведение каждого индивидуума.

Для построения эконометрической модели требуется выполнить ***5 этапов***:

первый – ***теоретический***, в ходе которого формулируется цель исследования, определяется круг участвующих в модели экономических характеристик, определяется, что будет y (результативный показатель), а что будет x (факторный показатель);

второй – ***информационный***, когда осуществляются поиск требуемых данных, необходимые пересчеты, используются пространственные и временные данные;

третий – ***спецификация модели***, когда устанавливаются связи и соотношения, т. е. выбор формулы связи переменных (и самих переменных, включаемых в уравнение). В случае парной регрессии выбор формулы обычно осуществляется по графическому изображению реальных статистических данных в виде точек в декартовой системе координат, которое называется корреляционным полем (диаграммой рассеяния);

четвертый – ***идентификация модели***, т. е. выявление условий корректного оценивания параметров модели на основе соотношения количества переменных и связей между ними; оценка параметров модели (рассчитываются параметры эконометрической модели: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$);

пятый – ***верификация модели***, т. е. проверка адекватности модели, делается вывод о том, какова точность расчетов на основе модели, получаемых прогнозных оценок (т. е. рассчитываются характеристики эконометрической модели и факторных показателей).

1-й этап самый трудный, так как выбор результативного и факторных показателей осуществляется только с помощью личных знаний и собственных логических рассуждений, без применения какого-либо математического аппарата.

В связи с этим при обосновании результативного и факторных показателей необходимо руководствоваться следующими положениями:

а) результативный показатель в цепочке причинно-следственных связей всегда находится на более высоком уровне, который определяют на основе логических рассуждений, а также знаний о том, какие из рассматриваемых показателей являются первичными и вторичными. Например: y_x – себестоимость, x – урожайность;

б) в эконометрическую модель следует включать факторы, которые оказывают непосредственное влияние на результативный показатель, а не опосредственное.

Например: удой на 1 корову (y – результативный показатель), расход корма (x_1), классическая музыка (x_2);

в) в эконометрическую модель нельзя включать факторы, преобразование которых даст результативный показатель.

Например: y_x – результативный показатель (урожайность), а факторы: x_1 – валовой сбор; x_2 – площадь зерновых; x_3 – затраты труда; x_4 – балл пашни;

г) если результативный показатель является синтетическим (сложным), то и факторные показатели должны быть такими же.

Например: стоимость валовой продукции – это показатель синтетический, который характеризует хозяйство в целом. В свою очередь остальные показатели также являются синтетическими и сложными.

Для этого вводим факторы: x_1 – стоимость ОПФ, тыс. руб.; x_2 – стоимость оборотных фондов, тыс. руб.; x_3 – площадь сельскохозяйственных угодий, га; x_4 – численность работников, чел. и т. д.;

д) Если результативный показатель является относительным, то и факторные показатели должны быть такими же (по возможности).

Например: результативный показатель – это уровень производства, который равен отношению стоимости валовой продукции к площади сельскохозяйственных угодий (из расчета 100 га). Значит, все остальные показатели должны быть взяты в расчете на 100 га сельскохозяйственных угодий, за исключением тех, содержание которых от количества гектаров не меняется (к примеру, балл сельскохозяйственных угодий);

е) если исследования показывают, что увеличение какого-то показателя сверх определенного уровня предполагает получение дополнительного эффекта, то этот показатель может быть учтен дважды, что вытекает из закона превращения количества в качество.

Например: установлено, что если стоимость кормов в издержках превышает 28 %, то эффективность оборотных фондов возрастает. Чтобы посчитать эффективность превышения фондов сверх 28 %, вводим дополнительный фактор (стоимость кормов сверх 28 % в стоимости оборотных фондов), что позволит определить его влияние на результативный показатель.

Для оценки качественных признаков следует руководствоваться положениями о том, что все качественные признаки можно разделить на две группы: ***альтернативные и нарастающие***.

Альтернативные признаки характеризуются тем, что они или присутствуют, или отсутствуют.

Примером альтернативного качественного признака является сорт растений, который присутствует или отсутствует в посевах, породы животных и т. д. Для количественной характеристики этих признаков используется два параметра (1 и 0).

Пример. Допустим, что фермер возделывает картофель, но данные об эффективности его сортов отсутствуют. С помощью эконометрической модели имеется возможность сделать подобную оценку, т. е. определить, какова эффективность сорта (в центнерах дополнительной продукции).

Строим эконометрическую модель формирования урожайности. При этом учитываем факторы, которые формируют урожайность картофеля (табл. 1.1).

Таблица 1.1. **Значения факторов, формирующих урожайность картофеля**

Урожайность, ц/га	Факторы эконометрической модели ($x_1, ..., x_{25}$)					Сорта культуры	
						Темп	Ласунок
y_1	x_1	x_2	x_3	…	x_{25}	x_{29}	x_{30}
I опыт, 210	4,8	2,6	40,0		3,0	0	1
II опыт, 190	4,6	2,4	35,0		2,8	1	0

В результате решения модели с альтернативными качественными признаками получают коэффициенты регрессии, которые помогут определить дополнительный эффект от использования сортов.

Нарастающие – изменяются (возрастают от какой-то величины).

Специфика их состоит в том, что они формируются под влиянием нескольких элементов, взаимосвязанных между собой. Взаимосвязь элементов обычно не является линейной, поэтому вывести закон или формулы оценки нарастающего качественного признака очень сложно, хотя в условиях рыночной системы хозяйствования роль качественных признаков в результатах хозяйствования постоянно возрастает. Примером нарастающего качественного признака может быть квалификация специалиста. Ее элементами являются (1 – образование, 2 – стаж работы, 3 – черта характера и др.).

Применительно к каждому специалисту влияние этих параметров на его квалификацию бывает разным. Поэтому оценка квалификации в баллах, как производная от образования и стажа работы специалиста, не всегда точна. Отсюда, с одной стороны, необходимо учитывать влияние квалификации на результаты хозяйствования, с другой стороны, искать методы правильной оценки элементов, формирующих нарастающий качественный признак. Квалификацию работников в корреляционной модели часто выражают через число работников с высшим образованием, с определенными разрядами или стажем работ. Однако подобный подход не отличается достаточной точностью.

Качественные признаки используются в эконометрических моделях со структурными изменениями.

2-й этап. Необходимо, чтобы число опытов или хозяйств, по данным которых строим эконометрическую модель, было не меньше 20 ($n \geq 20$). Если модель многофакторная, то требуется выдержать соотношение между числом опытов (n) и числом факторов (k); число опытов (хозяйств) должно быть в 2,5 раза больше числа факторов, включая и результативный ($n \geq 2,5\ k$).

К собранному материалу предъявляются следующие требования:

1. Информация должна обеспечивать ***однородность*** исследуемой совокупности, т. е. в одну совокупность нельзя включать объекты, характер и условия производства которых резко отличаются (например, ларек и супермаркет).

2. Информация должна быть ***репрезентативной***, т. е. иметь те же характеристики, что и генеральная совокупность.

3. Информация должна быть ***достоверной***, т. е. не должна содержать ошибок.

Экономическая информация в основном отвечает закону нормального распределения. Для ее проверки используем правило 3 сигм:

$$\left|x_i - \overline{x}\right| \le 3\sigma_x, \tag{1.6}$$

где x_i – фактическое значение признака;

$\overline{x}$ – среднее значение признака;

σ_x – среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение определяют по одной из формул

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_0}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}; \quad \sigma_x = \sqrt{\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2}. \tag{1.7}$$

После проверки информации на однородность, репрезентативность и достоверность данные можно подвергать количественному анализу. Нарушение вышеизложенных требований приводит к искажению результатов экономических исследований.

3-й этап. На данном этапе вид эконометрической модели определяется следующими способами:

а) *логического анализа*;

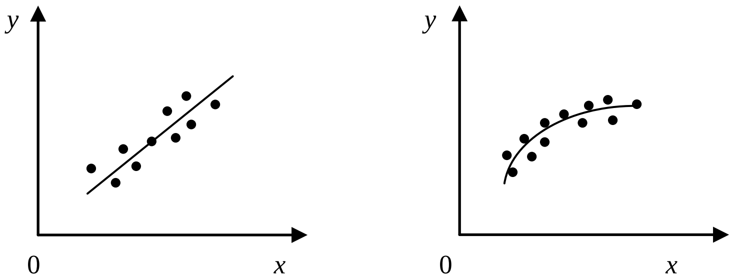
б) *графиков*;

в) *аналитического приема.*

Способ логического анализа основан на логических рассуждениях о взаимосвязи зависимой переменной и каждой в отдельности независимой переменной.

Графический метод основан на построении точечных графиков (поле корреляции).

В случае если речь идет об однофакторной эконометрической модели, вывод о характере связи y и x делают на основании одного графика. Для этого строим корреляционное поле и по расположению в нем точек находим преобладающую тенденцию (рис. 1.1, *а* и 1.1, *б*).



а *б*

Рис. 1.1. Поле корреляции:
а – линейной зависимости; *б* – степенной зависимости

Из взаимосвязи y и x, показанной на рис. 1.1, *а*, следует, что эконометрическая модель имеет вид $y_x = a_0 + a_1 x$. В случае, показанном на рис. 1.1, *б*, характер связи имеет вид $y_x = a_0 x^{a_1}$.

Если корреляционное поле отличается неопределенностью, то влияние фактора x_2 учитываем как линейное, т. е. $a_2 x_2$.

Аналитический прием основан на построении поля корреляции между результативным и каждым факторным признаком в отдельности и наложения на него линий тренда различных математических функций, расчета величины достоверности аппроксимации. Выбирается та зависимость, где данная величина принимает наибольшее значение.

Таким образом, на основании графиков, интуиции, опыта, с помощью ПК можно определить вид корреляционной модели.

4-й этап. Для определения a_0, ..., a_n обычно используется метод наименьших квадратов, а также метод моментов, который применяется значительно реже.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, чтобы найти такие значения $a_0, a_1, ..., a_n$, при которых сумма квадратов разностей расчетных и фактических значений результативного показателя была бы минимальной, т. е.

$$\sum(y_x - y_i)^2 \to \min, \qquad (1.8)$$

где y_i – фактическое значение результативного признака;

y_x – расчетное значение результативного признака.

Расчетное значение результативного признака получают путем подстановки в эконометрическую модель соответствующих значений факторов по каждому предприятию в отдельности.

Выявление лучшего варианта эконометрической модели обычно осуществляется сравнением соответствующих им качественных характеристик, которые можно рассчитать на основе исходной статистической информации, содержащейся в векторе y, матрице x, и новой расчетной информации, появляющейся после построении каждого из вариантов модели. Логика в решении этого вопроса достаточно простая: лучшему варианту модели в общем случае должны соответствовать и лучшие значения характеристик его качества.

Характеристики эконометрической модели.

Отметим основные критерии оценки «качества» эконометрических моделей:

1. *Коэффициенты тесноты связи.*

а) Для линейной однофакторной эконометрической модели рассчитывают ***коэффициент парной корреляции (r)***:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\delta_y \delta_x}, \qquad (1.9)$$

где $\overline{xy}$ – среднее произведение x и y;

$\overline{x}\,\overline{y}$ – произведение средних x и y;

$\delta_x \delta_y$ – произведение среднеквадратических отклонений соответственно факторному и результативному показателям.

Коэффициент парной корреляции изменяется в пределах $-1 \le r \le 1$ и показывает силу и направление связи между результативным и факторным показателями.

Если «+» – связь прямая (урожайность – минеральные удобрения), т. е. чем больше факторный показатель, тем больше результативный.

Если «–» – обратная (урожайность – заморозки), чем больше факторный показатель, тем меньше результативный.

Если $0 \le |r| \le 0{,}3$, то считают, что связь между результативным и включенными в модель факторными показателями слабая, если $0{,}3 < |r| \le 0{,}7$ – то средняя, если $0{,}7 \le |r| < 1{,}0$ – сильная.

б) Если эконометрическая модель многофакторная линейная, то определяют ***коэффициент множественной корреляции*** (R).

Общая формула коэффициента множественной корреляции (корреляционного отношения):

$$R(\eta) = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_x - y_i)^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}}\,, \tag{1.10}$$

где y_x – расчетное значение результативного показателя;

y_i – фактическое значение результативного показателя;

$\overline{y}$ – среднее значение фактического результативного показателя.

Значения коэффициента множественной корреляции и корреляционного отношения изменяются в пределах $0 \le R \le 1$ и отражают силу влияния учтенных в модели факторных признаков на результативный. Чем ближе показатель к 1, тем связь сильнее. Если $0 \le R \le 0{,}3$ считают, что связь между результативным и включенными в модель факторными показателями слабая, если $0{,}3 < R \le 0{,}7$ – то средняя, если $0{,}7 \le R < 1{,}0$ – сильная.

в) Если эконометрическая модель нелинейная, *определяют* ***корреляционное отношение*** (η). Данная характеристика показывает то же и рассчитывается так же как r, R.

2. Так как коэффициенты тесноты связи величины вероятностные, их необходимо проверить на существенность, т. е. определить ***коэффициент существенности коэффициента множественной (парной) корреляции, или корреляционного отношения***:

$$t_{R(\eta)} = \frac{R(\eta)}{\mu_{R(\eta)}}, \; t_r = \frac{r}{\mu_r}, \tag{1.11}$$

где $\mu_r, \mu_{R(\eta)}$ – соответственно ошибка коэффициента парной, множественной корреляции (корреляционного отношения).

Ошибка коэффициента парной, множественной корреляции (корреляционного отношения) находится по формуле

$$\mu_{R(\eta)} = \frac{1 - R^2(\eta^2)}{\sqrt{n - k - 1}}, \ \mu_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}, \qquad (1.12)$$

где k – количество факторов модели;

n – количество опытов.

Если коэффициент существенности коэффициента парной, множественной корреляции (корреляционного отношения) больше его табличного значения (2,48), то коэффициент парной, множественной корреляции (корреляционное отношение) существенен, и модель, для которой он рассчитан, можно применять в дальнейших расчетах.

Если же получим небольшие значения коэффициентов тесноты связи, обычно ниже 0,7, и коэффициент существенности коэффициентов тесноты связи ниже, чем его табличное значение, то необходимо вернуться к первому этапу построения модели, т. е. к выбору факторов, найти неучтенные в модели, но существенно влияющие на результат факторы, ввести их в уравнение и повторить расчеты.

3. Кроме коэффициентов тесноты связи рассчитывают и ***коэффициент детерминации*** (D):

$$D = r^2 100\,\%; \ D = R^2(\eta^2)100\,\%. \qquad (1.13)$$

Коэффициент детерминации показывает, на сколько процентов учтенные в модели факторы объясняют вариацию (изменение) результативного показателя.

Например: $D = 0{,}948^2 \cdot 100\ \% = 89{,}9$, т. е. на 89,9 % выбранные факторы объясняют вариацию результата. А на 100 % – 89,9 % = 10,1 % на изменение результативного признака оказывают влияние неучтенные в модели факторы.

4. ***Скорректированный коэффициент детерминации*** равен:

$$\overline{D} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n - 1}{n - m - 1}, \qquad (1.14)$$

где n – число наблюдений,

m – число факторов уравнения, включая результативный.

Полученное выражение связывает два показателя тесноты связи – скорректированный и нескорректированный коэффициенты детерминации. Скорректированный коэффициент детерминации применяется для решения двух задач:

- оценки реальной тесноты связи между результатом и факторами;
- сравнения моделей с разным числом параметров.

В первом случае обращают внимание на близость скорректированного и нескорректированного коэффициентов детерминации. Если эти показатели велики и различаются незначительно, модель считается хорошей.

При сравнении разных моделей предпочтение при прочих равных условиях отдается той, у которой больше скорректированный коэффициент детерминации.

Следует отметить, что область применения скорректированного коэффициента детерминации ограничивается только этими задачами. Его нельзя использовать в формулах, где применяется обычный коэффициент детерминации. Скорректированный коэффициент детерминации нельзя интерпретировать как долю вариации результата, объясненную вариацией факторов, включенных в модель регрессии.

Пример. Отметим, что все модели имеют равное число параметров и поэтому коэффициенты детерминации сопоставимы между собой (табл. 1.2).

Таблица 1.2. **Скорректированные коэффициенты детерминации**

Модель	R^2	$R^2_{\text{скорр}}$
$y = 225{,}68 + 29{,}21x_1 + 0{,}21x_3$	0,747	$1-(1-0{,}747)\cdot\dfrac{30-1}{30-2-1}\approx 0{,}728$
$y = 474{,}09 + 30{,}08x_1 + 2{,}16x_2$	0,803	$1-(1-0{,}803)\cdot\dfrac{30-1}{30-2-1}\approx 0{,}788$
$y = 37{,}46\, x_1^{0{,}5} x_2^{0{,}4}$	0,802	$1-(1-0{,}801)\cdot\dfrac{30-1}{30-2-1}\approx 0{,}786$

Скорректированные коэффициенты детерминации близки к нескорректированным (исходным), что свидетельствует о хорошем качестве рассматриваемых моделей, но лучшей будет вторая модель, так как разница между скорректированным и обычным коэффициентом детерминации – наименьшая (0,015).

5. Для определения ценности модели в целом используют ***критерий Фишера, или F-критерий***, который равен отношению общей дисперсии к остаточной:

$$F = \frac{\delta^2_{\text{общ}}}{\delta^2_{\text{ост}}};\ \ F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m}, \tag{1.15}$$

где n – число наблюдений;

m – число факторов уравнения, включая результативный.

Полученное значение критерия ($F_{расч}$) сравнивают с критическим (табличным) ($F_{табл}$) для принятого уровня значимости (α) и числа степеней свободы ($\nu_1 = m - 1$ и $\nu_2 = n - m$, где n – число наблюдений, m – число факторов уравнения, включая результативный). Если оно окажется больше соответствующего табличного значения (1,5), то данное уравнение статистически значимо, т. е. доля вариации, обусловленная регрессией, намного превышает случайную ошибку. Если же $F_{расч} < F_{табл}$, то модель неадекватно описывает реальный процесс и ее использовать для анализа и планирования нельзя, нужно пересмотреть выбор факторных показателей.

6. Для обобщающей оценки модели рассчитывают показатель ***средней относительной ошибки аппроксимации*** $\overline{\varepsilon}$, показывающий среднее отклонение расчетных значений зависимой переменной от соответствующих искомых величин:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - y_x}{y_i}\right| 100\ \%, \qquad (1.16)$$

где n – число наблюдений;

y_i – фактическое значение результативного признака;

y_x – фактическое значение результативного признака.

Модель имеет высокую точность, если $\overline{\varepsilon}$ не превышает 10 %. Если $\overline{\varepsilon}$ более 10 % и менее 20 %, модель имеет допустимую точность и может быть использована для анализа и прогноза. Если $\overline{\varepsilon}$ больше 20 %, модель имеет недопустимую точность.

Характеристики факторных показателей.

1. Кроме проверки ценности эконометрической модели в целом проверяют на существенность и каждый коэффициент регрессии, что делают с помощью ***коэффициента существенности коэффициента регрессии***, или ***t-критерия Стьюдента:***

$$t_{a_j} = \frac{a_j}{\mu_{a_j}}, \qquad (1.17)$$

где t_{a_j} – коэффициент существенности коэффициента регрессии a_j;

μ_{a_j} – ошибка коэффициента регрессии a_j.

Ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле

$$\mu_{a_j} = \frac{\delta_{y_i y_x}}{\delta_x \sqrt{n}}, \tag{1.18}$$

где $\delta_{y_i y_x}$ – среднеквадратическое отклонение по данным уравнения;

δ_x – среднеквадратическое отклонение фактора x_j;

n – число наблюдений.

Среднеквадратическое отклонение по данным уравнения определяется по формуле

$$\delta_{y_i y_x} = \sqrt{\frac{\sum (y_x - y_i)^2}{n}}. \tag{1.19}$$

Расчетные значения t-критерия Стьюдента сравнивают с критическими, которые определяют по таблице с учетом принятого уровня значимости ($\alpha = 0{,}10$; $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$) и числа степеней свободы $v = n - m - 1$ (где n – число наблюдений; m – число факторов уравнения). Параметр признается значимым, если $t_{\text{расч}} \geq t_{\text{табл}}$ (иногда принимают 1,96).

Некоторые исследователи придерживаются мнения, что коэффициенты регрессии:

1) относительно значимы, если $1 < \left|t_{a_j}\right| < 2$;

2) значимы, если $2 < \left|t_{a_j}\right| < 3$;

3) сильно значимы, если $\left|t_{a_j}\right| > 3$.

Если есть коэффициент регрессии, для которого условие не выполняется, то из уравнения исключают тот фактор, при котором коэффициент незначим и имеет наименьшее значение t-критерия. После этого уравнение регрессии строится без исключенного фактора и снова проверяется значимость коэффициентов регрессии. Такой процесс длится до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся значимыми, что свидетельствует о наличии в уравнении только существенных (действительно влияющих на результативный показатель) факторов.

2. Коэффициенты регрессии показывают эффективность каждого ресурса. Но, так как факторные показатели эконометрической модели имеют различные единицы измерения, коэффициенты регрессии не-

сравнимы между собой. Вместе с тем часто требуется оценить роль факторных показателей в формировании результата и сравнить их между собой. Для этого используются ***коэффициенты эластичности*** $(Э_{x_j})$, которые определяются по формуле

$$Э_{x_j} = a_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}, \tag{1.20}$$

где a_j – коэффициент регрессии при *j*-м факторном признаке;

$\overline{x}_j$ – среднее арифметическое значение факторного признака;

$\overline{y}$ – среднее арифметическое значение результативного признака.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится результативный показатель, если факторный показатель изменится на 1 %. Недостаток данного показателя заключается в том, что он применяется только при приблизительно одинаковой вариации факторов.

Коэффициенты эластичности имеют недостаток, который состоит в том, что они приемлемы, если вариации факторов одинаковы или почти одинаковы. Допустим, $\overline{x_1} = 20$ изменяется в диапазоне $\left(x_1^{\min} = 19\right) \le x_1 \le \left(x_1^{\max} = 22\right)$, $\overline{x_2} = 40$ изменяется в диапазоне $\left(x_2^{\min} = 25\right) \le x_2 \le \left(x_2^{\max} = 70\right)$.

Вариация первого факторного значения меньше, чем второго. Это значит, что первый фактор в меньшей степени объясняет изменение результативного показателя, чем второй.

3. Если вариация факторов отличается существенно, то для объяснения роли отдельных факторов в формировании результативного показателя используются ***бета коэффициенты, или стандартизированные коэффициенты регрессии*** (β_{x_j}):

$$\beta_{x_j} = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y}, \tag{1.21}$$

где a_j – коэффициент регрессии при *j*-м факторном признаке;

σ_{x_j} – стандартное (среднее квадратическое) отклонение *j*-го факторного признака;

σ_y – стандартное (среднее квадратическое) отклонение результативного признака.

Он показывает, на какую часть стандартного отклонения изменяется зависимая переменная относительно своего среднего значения, с изменением фактора x_j на величину своего стандартного отклонения, относительно его среднего значения.

Если все β-коэффициенты суммировать и сумма будет больше 1, то это означает, что значение результативного показателя увеличивается более быстрыми темпами, чем происходит прирост факторов. Если же данная сумма меньше единицы, то прирост результативного показателя отстает от темпов прироста факторов. Вышеизложенное касается и коэффициентов эластичности.

4. По рассчитанным β-коэффициентам и коэффициентам парной корреляции можно оценить индивидуальный вклад каждого факторного показателя в вариацию зависимой переменной. Для этой цели используются ***показатели частной детерминации***:

$$d_{x_j} = \beta_{x_j} r_{yx}, \tag{1.22}$$

где β_{x_j} – β-коэффициент факторного показателя x_j;

r_{xy} – коэффициент парной корреляции между результативным и факторным показателями.

Сумма показателей частной детерминации равна коэффициенту детерминации. $\left(\sum d_{x_j} = R^2\right)$. Например: если построенная модель объясняет 89,9 % общей вариации переменной y, на долю фактора x_1 приходится 44,0 % (d_{x_1} = 0,504 · 0,873 = 0,440); фактора x_2 – 37,3 % (d_{x_2} = = 0,432 · 0,863 = 0,373) и т. д.

Комбинируя факторы-ресурсы производства различным образом, можно обеспечить высокий уровень результатов. Причем в определенных пределах имеется возможность замещения одного ресурса другим.

2. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ НАРУШЕНИИ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

2.1. Свойства МНК-оценок

Теория статистического оценивания определяет качество оценок по свойствам несмещенности, эффективности, состоятельности и некоторым другим.

1. Оценка является ***несмещенной***, если истинное значение параметра можно рассматривать как ее математическое ожидание:

$$M\left[a_i\right] = \alpha_i. \tag{2.1}$$

Если это не так, то оценка называется *смещенной*, а разность $M\left[a_i\right] - \alpha_i$ – смещением.

Несмещенность означает, что в среднем наша оценка соответствует параметру. Возможно, что полученное значение a_i будет удалено от α_i. При увеличении объема выборки n дисперсия x уменьшается, поскольку var(x) = σ^2 / n и, соответственно, становится меньше правдоподобие того, что a_i будет удалено от α_i.

Часто свойство несмещенности выполняется лишь с некоторой степенью приблизительности при достаточно больших объемах выборочных данных (при большом числе измерений T), в пределе при $T \to \infty$. В этом случае говорят, что оценки являются ***асимптотически несмещенными.***

2. Если мы будем сравнивать две исследуемые оценки, то мы обратимся к их эффективности, основанной на соотношении их дисперсий. Та из оценок, которая имеет меньшую дисперсию, является более эффективной. Это свойство показано на рис. 2.1.

Оценка рассматривается как ***эффективная***, если она характеризуется наименьшей дисперсией (дисперсия ошибки оценки минимальна) среди всех других аналогичных оценок, полученных различными методами, способами.

$$\sigma_k^2(\alpha_i) = \min(\sigma_j^2(a_i)), \tag{2.2}$$

где $\sigma_j^2(a_i)$ – дисперсия оценки, полученной с использованием j-го метода оценивания.

Предположим, что имеются две оценки параметра α_0, рассчитанные на основе одной и той же информации (рис. 2.1). Оценка *A* является более эффективной, чем оценка *B*.

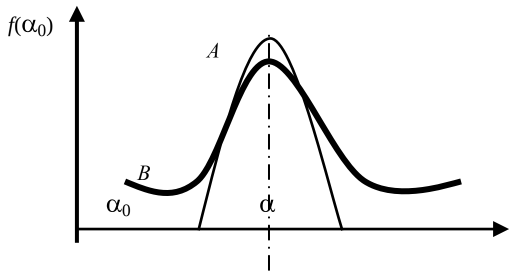


Рис. 2.1. Оценки параметра α_0

Обе оценки *A* и *B* являются несмещенными оценками α_0, однако оценка *A* является более эффективной оценкой: она имеет дисперсию меньше по сравнению с дисперсией для *B*.

При достаточно больших объемах выборочных данных, в пределе при Т $\to \infty$. В этом случае говорят, что оценки являются ***асимптотически эффективными***.

3. Еще одним асимптотическим свойством является ***состоятельность***. Состоятельной называется такая оценка, которая дает точное значение для большой выборки независимо от входящих в нее конкретных наблюдений. Это свойство записывается следующим образом:

$$p \lim(a_i^{(T)}) = \alpha_i, \tag{2.3}$$

где *p* – вероятность события, заключенного в фигурные скобки.

На рис. 2.2 показано, как при различном объеме выборки может выглядеть распределение вероятностей (состоятельная оценка, смещенная на малой выборке).

Однако следует проявлять определенную осторожность. Дело в том, что при конечных объемах выборки интуитивно предполагается: чем больше значение *T*, тем ближе полученная оценка параметра к его истинному значению и тем меньше ее ошибка. Но увеличение объема выборки ведет к уменьшению величины смещения только в том случае, если закономерности рассматриваемых процессов на «старом» и «добавленном» временных интервалах полностью идентичны (однородная выборка) и, таким образом, построенные на соответствующей этим интервалам информации модели будут малоразличимы.

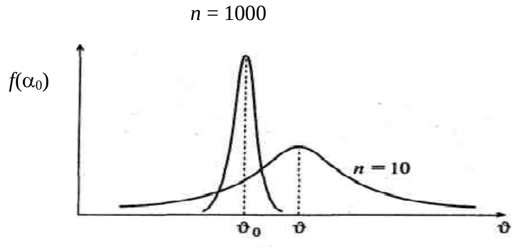


Рис. 2.2. Распределение вероятностей при различном объеме выборки

В эконометрике часто приходится сталкиваться с такой ситуацией, когда на отдельных временных участках закономерности процессов различаются. Это может быть вызвано, например, начавшимся воздействием на зависимую переменную y нового фактора, изменением характера взаимосвязей между рассматриваемыми переменными в связи с изменением их масштабов (действие диалектического закона перехода «количества» в «качество») и по другим причинам. В этом случае увеличение числа измерений не ведет к автоматическому «росту качества» оценок параметров модели.

Состоятельность является «более удобным» при анализе свойством, чем асимптотическая несмещенность, поскольку оно часто автоматически сохраняется при преобразованиях рассматриваемых переменных и некоторых операциях с ними.

2.2. Обобщенная регрессионная модель

Для получения несмещенных, эффективных и состоятельных оценок параметров модели необходимо выполнение следующих предпосылок:

1. Остатки e_i (i = 1, 2, …, n) есть величина случайная, а факторы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – величины неслучайные. Это означает, что вектор e – случайный вектор, а матрица значений факторов x – неслучайная (детерминированная).

2. Математическое ожидание случайного остатка равно нулю:

$$M(e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

3. Дисперсия случайного остатка одинакова для всех наблюдений результата Y:

$$\sigma^2(E_i) = \sigma^2(E_j) = \sigma^2 = \text{const} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Это условие называется условием ***гомоскедастичности***. Напротив, если эта дисперсия не постоянна, то такое явление называют ***гетероскедастичностъю остатков***.

Выполнение этой предпосылки может проверяться разными методами. Ниже рассмотрена процедура проверки предпосылки методом Голдфельда – Квандта.

4. Возмущения не коррелированны (не зависят друг от друга) между собой. Это означает, что ковариация между отдельными возмущениями e_i и e_j ($i \neq j$) равна нулю:

$$r_{e_i e_j} = 0. \tag{2.6}$$

Проверка выполнения предпосылки *4* с помощью d-статистики Дарбина – Уотсона рассмотрена ниже.

5. Случайные остатки e_i есть нормально распределенная случайная величина, а вектор e – нормально распределенный случайный вектор:

$$e \sim N_n(0; \sigma_e^2 I_n). \tag{2.7}$$

Обоснованием такого допущения служит центральная предельная теорема теории вероятностей, согласно которой сумма большого числа случайных величин имеет приближенно нормальное распределение независимо от индивидуального распределения слагаемых. Отклонение фактических значений результата Y от теоретических вызывается, как правило, множеством случайных и неучтенных факторов, каждый из которых не оказывает доминирующего влияния. Поэтому нормальное распределение является приемлемой моделью суммарной погрешности, т. е. возмущения.

Первые четыре условия известны как условия Гаусса – Маркова.

Теорема Гаусса – Маркова. *Если регрессионная модель удовлетворяет предпосылкам 1–4, то оценки* $a_0, a_1, \ldots, a_p$ *имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок и модель считается классической.*

Таким образом, оценки $a_0, a_1, \ldots, a_p$ в определенном смысле являются наиболее *эффективными* линейными оценками параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

При моделировании реальных экономических процессов нередко сталкиваемся с ситуациями, в которых условия классической линейной модели регрессии оказываются нарушенными. В частности, могут не выполняться предпосылки *3* и *4* о том, что случайные остатки модели имеют постоянную дисперсию и не коррелированы между собой.

В отличие от классической, в обобщенной модели ковариации и дисперсии объясняющих переменных могут быть произвольными.

В этом состоит суть обобщения регрессионной модели.

2.3. Тесты гетероскедастичности: графический анализ остатков, тест Голдфелда – Куандта, тест Уайта

На практике гетероскедастичность не так уж и редка. На рис. 2.3 приведены два примера линейной регрессии – зависимости потребления *C* от дохода *I*: $C = a_0 + a_1 I + e$.

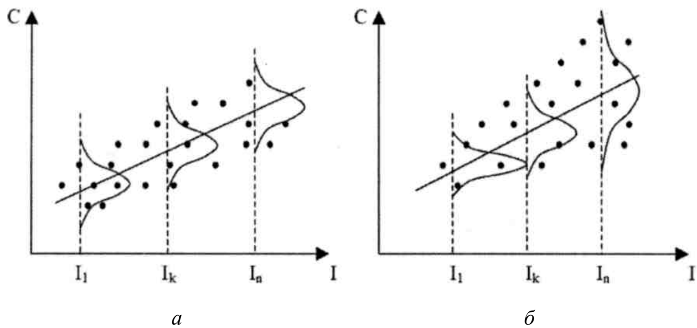


Рис. 2.3. Зависимость потребления *C* от дохода *I*

В обоих случаях с ростом дохода растет среднее значение потребления. Но если на рис. 2.3, *а* дисперсия потребления остается одной и той же для различных уровней дохода, то на рис. 2.3, *б* при аналогичной зависимости среднего потребления от дохода дисперсия потребления не остается постоянной, а увеличивается с ростом дохода. Фактически это означает, что во втором случае субъекты с большим доходом в среднем потребляют больше, чем субъекты с меньшим доходом, и, кроме того, разброс в их потреблении более существенен для большего уровня дохода. Фактически люди с большими доходами имеют больший простор для распределения своего дохода. Реалистичность данной ситуации не вызывает сомнений. Разброс значений потребления вызывает разброс точек наблюдения относительно линии регрессии, что и определяет дисперсию случайных отклонений.

Виды гетероскедастичности.

1. *Истинная гетероскедастичность* вызывается непостоянством дисперсии случайной компоненты, ее зависимостью от различных факторов. Наиболее распространенный случай истинной гетероскедастичности: дисперсия растет с ростом одного из факторов.

2. *Ложная гетероскедастичность* вызывается ошибочной спецификацией модели регрессии.

Последствия гетероскедастичности.

При гетероскедастичности последствия применения МНК будут следующими:

1. Оценки коэффициентов по-прежнему остаются несмещенными и линейными, но не будут эффективными (т. е. они не будут иметь наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками данного параметра). Увеличение дисперсии оценок снижает вероятность получения максимально точных оценок.

2. Дисперсии оценок будут рассчитываться со смещением.

3. Вследствие вышесказанного все выводы, получаемые на основе соответствующих t- и F-статистик, а также интервальные оценки будут ненадежными. Следовательно, статистические выводы, получаемые при стандартных проверках качества оценок могут быть ошибочными и приводить к неверным заключениям по построенной модели. Вполне вероятно, что стандартные ошибки коэффициентов будут занижены, а следовательно, t-статистики будут завышены. Это может привести к признанию статистически значимыми коэффициентов, таковыми на самом деле не являющимися.

Обнаружение гетероскедастичности.

В ряде случаев на базе знаний характера данных появление проблемы гетероскедастичности можно предвидеть и попытаться устранить этот недостаток еще на этапе спецификации. Однако значительно чаще эту проблему приходится решать после построения уравнения регрессии. Естественно, не существует какого-либо однозначного метода определения гетероскедастнчности. Однако к настоящему времени для такой проверки разработано довольно большое число тестов и критериев для них. Рассмотрим наиболее популярные и наглядные: графический анализ отклонений, тест Голдфелда – Куандта, тест Уайта.

Графический анализ остатков.

Использование графического представления отклонений позволяет определиться с наличием гетероскедастичности. В этом случае по оси абсцисс откладывается объясняющая переменная x (либо линейная комбинация объясняющих переменных $y = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_m$, а по оси ординат либо отклонения e_i, либо их квадраты.

Примеры таких графиков приведены на рис. 2.4.

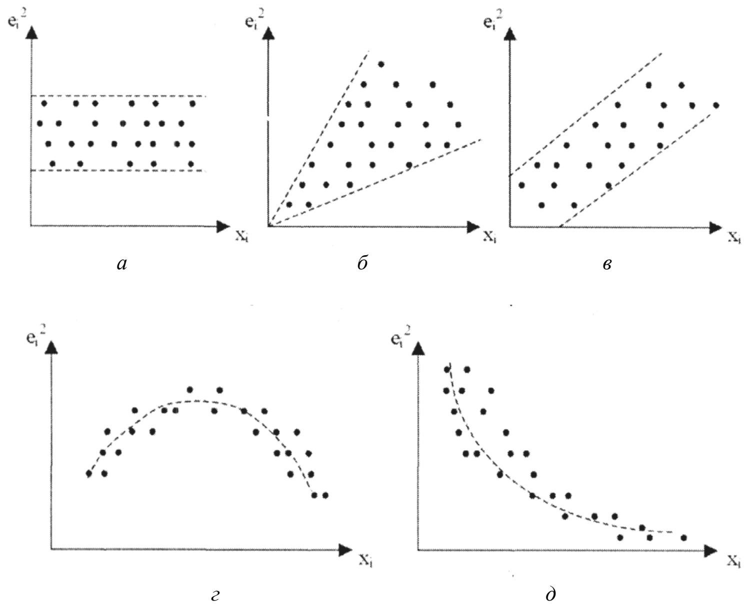


Рис. 2.4. Точечный график зависимости квадрата остатков e^2 от объясняющей переменной x

На рис. 2.4, *а* все отклонения e_i^2 находятся внутри полуполосы постоянной ширины, параллельной оси абсцисс, т. е. в этом случае мы находимся в условиях гомоскедастичности.

Ситуации, представленные на рис. 2.4, *б–д*, отражают большую вероятность наличия гетероскедастичности для рассматриваемых статистических данных.

Отметим, что графический анализ отклонений является удобным и достаточно надежным в случае парной регрессии. При множественной регрессии графический анализ возможен для каждой из объясняющих переменных x_i отдельно. Такой анализ наиболее целесообразен при большом количестве объясняющих переменных.

Тест Голдфелда – Куандта.

Тест Голдфелда – Куандта состоит в следующем:

1. Все n остатков упорядочиваются по возрастанию значений фактора x_j.

2. В упорядоченном ряду выбирают k первых и k последних остатков, при этом k должно быть больше числа факторов, включенных в модель. Обычно принимают $k \approx n/3$. Центральные остатки, таким образом, исключаются из рассмотрения.

3. По каждой из групп выбранных остатков определяется сумма их квадратов

$$SS_1 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_k^2 \text{ и } SS_2 = e_{n-k+1}^2 + e_{n-k+2}^2 + \ldots + e_n^2. \qquad (2.8)$$

4. Рассчитывается F-статистика Фишера по формуле $F = SS_1 / SS_3$, если $SS_1 > SS_3$, или по формуле $F = SS_3 / SS_1$, если $SS_3 > SS_1$.

5. Статистическая гипотеза об одинаковой дисперсии возмущений не отклоняется, если F-статистика не превышает табличное значение F-критерия Фишера для принятого уровня значимости α и чисел степеней свободы числителя и знаменателя $v_1 = v_2 = k - m - 1$.

6. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}} = F_{\sigma,\,\text{H}_1,\,\text{H}_2}$, то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отклоняется.

Естественным является вопрос, какими должны быть размеры подвыборок для принятия обоснованных решений. Для парной регрессии Голдфелд и Куандт предлагают следующие пропорции: n = 32, k = 11; n = 60, k = 22.

Тест Уайта.

Тест Уайта состоит в следующем:

1. Строится уравнение регрессии: $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + b_{i3}$ и вычисляются остатки $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1,n}$.

2. Строится квадратичная функция, включающая все факторы, а также их попарные произведения:

$$e_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \alpha_3 x_{i3} + \alpha_4 x_{i1}^2 + \alpha_5 x_{i2}^2 + \alpha_6 x_{i3}^2 + \alpha_7 x_{i1} x_{i2} + \\ + \alpha_8 x_{i1} x_{i3} + \alpha_9 x_{i2} x_{i3} + \eta_i. \qquad (2.9)$$

При проверке по тесту Уайта гетероскедастичность случайных остатков имеется, если вся функция (2.9) значима по F-критерию Фишера. Если фактическое значение критерия больше табличного, то гипотеза о гомоскедастичности остатков отклоняется.

Обобщенный (взвешенный) МНК.

При наличии гетероскедастичности используют обобщенный (взвешенный) МНК. Суть метода заключается в уменьшении вклада наблюдений, имеющих большую дисперсию в результаты расчета.

Для экономических данных σ часто пропорциональна значениям объясняющей переменной x, поэтому оценивается обычным МНК преобразованная модель: $y / x = \alpha_0 / x + \alpha_1 + \varepsilon / x$. Коэффициент при $1 / x$ будет эффективной оценкой α_0, а постоянный член – эффективной оценкой α_1. При применении взвешенного МНК оценки параметров будут несмещенными, кроме того, иметь меньшую дисперсию, чем невзвешенные оценки.

2.4. Эконометрическая модель с автокоррелированными ошибками. Анализ автокорреляции ошибок на основе статистики и теста Дарбина – Уотсона. Процедура Кохрейна – Оркатта

Автокорреляция возмущений бывает положительной или отрицательной.

Положительная автокорреляция проявляется в том, что завышенные значения возмущений предыдущих наблюдений результата Y приводят к завышению возмущений последующих наблюдений. На графике временного ряда остатков регрессии это выражается, например, в чередовании зон положительных и отрицательных остатков (рис. 2.5). Графически положительная автокорреляция выражается в чередовании зон, где наблюдаемые значения оказываются выше объясненных (предсказанных), и зон, где наблюдаемые значения ниже.

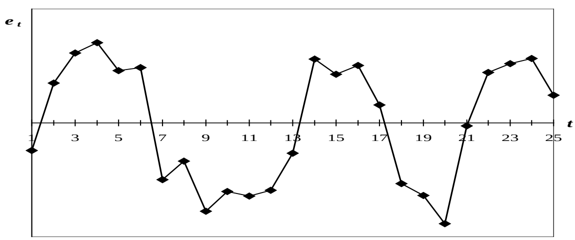


Рис. 2.5. Модель регрессии с положительной автокорреляцией возмущений

При *отрицательной автокорреляции*, наоборот, завышенные значения возмущений предыдущих наблюдений занижают возмущения последующих наблюдений, а остатки регрессии «слишком часто» меняют знак (рис. 2.6). Графически это выражается в том, что результаты наблюдений y_t «слишком часто» «перескакивают» через график объясненной части *t*.

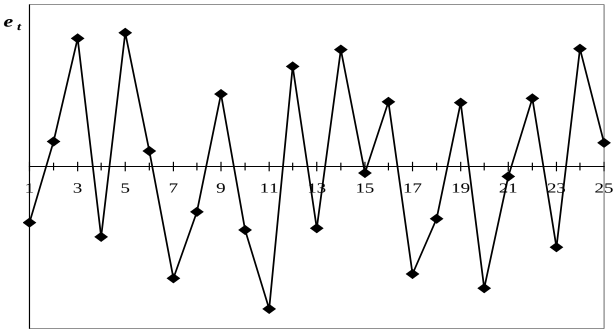


Рис. 2.6. Модель регрессии с отрицательной автокорреляцией возмущений

Среди основных причин, вызывающих появление автокорреляции, можно выделить ошибки спецификации, инерцию в изменении экономических показателей, эффект паутины, сглаживание данных.

1. *Ошибки спецификации*. Неучет в модели какой-либо важной объясняющей переменной либо неправильный выбор формы зависимости обычно приводит к системным отклонениям точек наблюдений от линии регрессии, что может привести к автокорреляции.

Проиллюстрируем это следующим примером. Анализируется зависимость предельных издержек МС от объема выпуска *Q*. Если для ее описания вместо реальной квадратичной модели $MC = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_2 Q^2 + \varepsilon$ выбрать линейную модель $MC = \beta_0 + \beta_1 Q + \varepsilon$, то совершается ошибка спецификации. Ее можно рассматривать как неправильный выбор формы модели или как отбрасывание значимой переменной при линеаризации указанных моделей. Последствия данной ошибки выразятся в системном отклонении точек наблюдений от прямой регрессии (рис. 2.7) и существенном преобладании последовательных отклонений одинакового знака над соседними отклонениями противоположных знаков. Налицо типичная картина, характерная для положительной автокорреляции.

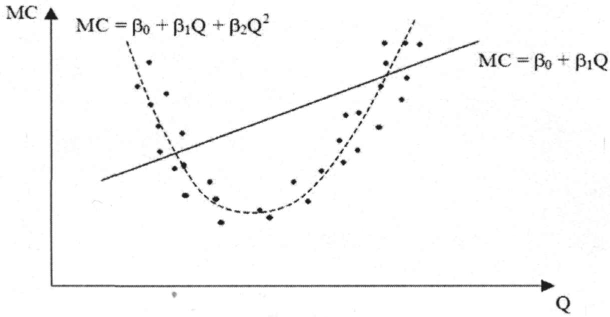


Рис. 2.7. Зависимость издержек от объема выпуска

2. *Инерция.* Многие экономические показатели (например, инфляция, безработица, ВНП и т. п.) обладают определенной цикличностью, связанной с волнообразностью деловой активности. Действительно, экономический подъем приводит к росту занятости, сокращению инфляции, увеличению ВНП и т. д. Этот рост продолжается до тех пор, пока изменение конъюнктуры рынка и ряда экономических характеристик не приведет к замедлению роста, затем остановке и движению вспять рассматриваемых показателей. В любом случае эта трансформация происходит не мгновенно, а обладает определенной инертностью.

3. *Эффект паутины.* Во многих сферах экономики экономические показатели реагируют на изменение экономических условий с запаздыванием. Например, предложение сельскохозяйственной продукции реагирует на изменение цены с запаздыванием (равным периоду созревания урожая). Большая цена сельскохозяйственной продукции в прошлом году вызовет (скорее всего) ее перепроизводство в текущем году, а следовательно, цена на нее снизится и т. д. В этой ситуации нельзя предполагать случайность отклонений друг от друга.

4. *Сглаживание данных.* Часто данные по некоторому продолжительному временному периоду получают усреднением данных по составляющим его подынтервалам. Это может привести к определенному сглаживанию колебаний, которые имелись внутри рассматриваемого периода, что, в свою очередь, может послужить причиной автокорреляции.

Последствия автокорреляции.

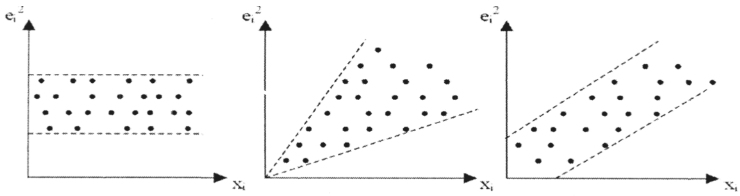
Последствия автокорреляции сходны с последствиями гетероскедастичности.

Обнаружение автокорреляции.

Рассмотрим возможные методы определения автокорреляции.

Графический метод.

Существует несколько вариантов графического определения автокорреляции. Один из них, увязывающий отклонения e_t с моментами t их получения (их порядковыми номерами i), приведен на рис. 2.8.



а *б* *в*

Рис. 2.8. Точечный график зависимости отклонение ε_t от времени t

Это так называемые последовательно-временные графики. В этом случае по оси абсцисс обычно откладываются либо момент получения статистических данных, либо порядковый номер наблюдения, а по оси ординат – отклонения ε_t, либо оценки отклонений e_t.

Естественно предположить, что на рис. 2.8, *б, в* имеются определенные связи между отклонениями, т. е. автокорреляция имеет место. Отсутствие зависимости на рис. 2.8, *а,* скорее всего, свидетельствует об отсутствии автокорреляции.

Критерий Дарбина – Уотсона.

Наиболее известным критерием обнаружения автокорреляции первого порядка является критерий Дарбина – Уотсона. Статистика Дарбина – Уотсона (*DW*) приводится во всех эконометрических пакетах как важнейшая характеристика качества регрессионной модели. Тест Дарбина – Уотсона основан на простой идее: если корреляция ошибок регрессии не равна нулю, то она присутствует и в остатках регрессии e_t, получающихся в результате применения обычного метода наименьших квадратов. В тесте Дарбина – Уотсона для оценки корреляции используется статистика вида

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} \approx 2(1 - r_{e_i e_j}). \qquad (2.10)$$

Таким образом, 0 < DW < 4 и его значения могут указывать на наличие либо отсутствие автокорреляции. Действительно, если $r_{e_t, e_{t-1}} \approx 0$ (автокорреляция отсутствует), то $DW \approx 2$. Если $r_{e_t, e_{t-1}} \approx 1$ (положительная автокорреляция), то $DW \approx 0$. Если $r_{e_t, e_{t-1}} \approx -1$ (отрицательная автокорреляция), то $DW \approx 4$.

Для более точного определения, какое значение DW свидетельствует об отсутствии автокорреляции, а какое об ее наличии, была построена таблица критических точек распределения Дарбина – Уотсона. По ней для заданного уровня значимости α, числа наблюдений n и количества объясняющих переменных m определяются два значения: $d_{\text{Н}}$ – нижняя граница и $d_{\text{В}}$ – верхняя граница.

Общая схема критерия Дарбина – Уотсона будет следующей:

1. По построенному эконометрическому уравнению регрессии $y_t = b_0 + b_1 x_{t1} + ... + b_m x_{tm}$ определяются значения отклонений $e_t = y_t - \hat{y}_t$ каждого наблюдения $t, t = \overline{1, T}$.

2. По формуле (2.10) рассчитывается статистика DW.

3. По таблице критических точек Дарбина – Уотсона определяются два числа $d_{\text{Н}}$ и $d_{\text{В}}$ и осуществляются выводы по следующей схеме:

$0 \le DW < d_{\text{Н}}$ – существует положительная автокорреляция;

$d_{\text{Н}} \le DW < d_{\text{В}}$ – вывод о наличии автокорреляции не определен;

$d_{\text{В}} \le DW < 4 - d_{\text{В}}$ – автокорреляция отсутствует;

$4 - d_{\text{В}} \le DW < 4 - d_{\text{Н}}$ – вывод о наличии автокорреляции не определен;

$4 - d_{\text{Н}} \le DW < 4$ – существует отрицательная автокорреляция.

Изобразим результат Дарбина – Уотсона графически (рис. 2.9).

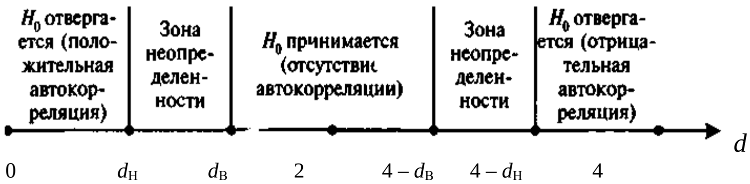


Рис. 2.9. Графическая интерпретация результатов критерия Дарбина – Уотсона

Для d-статистики находят верхнюю $d_{\text{В}}$ и нижнюю $d_{\text{Н}}$ границы на уровнях значимости α = 0,01; 0,025 и 0,05 (норматив). Недостатками критерия Дарбина – Уотсона является наличие области неопределенности критерия, а также то, что критические значения d-статистики определены для объемов выборки не менее 15. Тем не менее тест Дарбина – Уотсона является наиболее употребляемым.

Методы устранения автокорреляции.

Процедура, которую следует принять для устранения автокорреляции, будет зависеть от характера зависимости между значениями случайного члена. Наибольшее внимание уделяется так называемой авторегрессионной схеме первого порядка, так как она интуитивно правдоподобна, но для того, чтобы было целесообразным ее использование в более сложных моделях, оснований обычно не хватает.

Метод Кохрейна – Оркатта является итерационным. Каждая итерация дает лучшую оценку ρ, чем предыдущая.

1. На первом этапе с помощью метода наименьших квадратов оцениваются параметры простой линейной регрессии: $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$.

2. Вычисляются остатки, полученные из этого уравнения, $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

3. Оценивается регрессионная зависимость e_t от e_{t-1}, и коэффициент при e_{t-1} представляет собой оценку ρ, т. е. используются для оценки параметров модели

$$e_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (2.11)$$

Оценка, полученная методом наименьших квадратов, является начальной оценкой значения ρ:

$$\rho = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}. \qquad (2.12)$$

4. С этой оценкой ρ уравнение (2.11) преобразуется в (2.12), оценивание которого позволяет получить пересмотренные оценки α, β, т. е. эта оценка дальше используется для нахождения обобщенных разностей: $Y'_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$, $X'_t = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$. Для преобразованной модели $Y'_t = \alpha(1-\hat{\rho}) + \beta X'_t + \varepsilon_t$ проводится регрессионный анализ, дающий уточненные оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ наклона и свободного члена. На этом первая итерация заканчивается.

5. Уточненные оценки из первой итерации подставляются в начальное уравнение $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$ из которого находим новые значения остатков e_t, и возвращаются к этапу 3.

Новые остатки подставляются в уравнение (2.12), вычисляется новая оценка ρ и продолжаем итерации дальше. Этот процесс заканчивается, когда очередной шаг не дает существенного изменения величины $\hat{\rho}$.

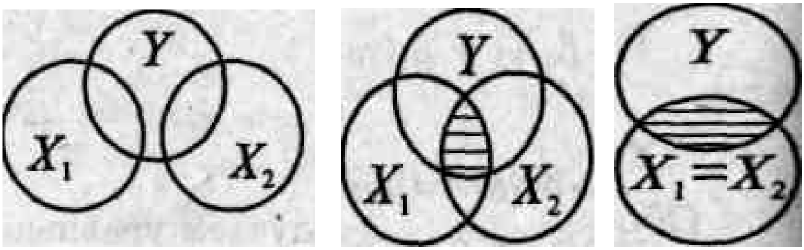
После завершения итераций для окончательно преобразованной модели (уравнение (2.12)) можно провести стандартный регрессионный анализ и сделать выводы о связи между величинами *Y* и *X*. Найденную модель также можно использовать для прогноза будущих значений *Y* по известным величинам *X*.

2.5. Мультиколлинеарность факторов: причины и эффекты

Еще одной серьезной проблемой при построении моделей множественной линейной регрессии по МНК является ***мультиколлинеарность*** – линейная взаимосвязь двух или нескольких объясняющих переменных. Если объясняющие переменные связаны строгой функциональной зависимостью, то говорят о *совершенной мультиколлинеарности.* На практике можно столкнуться с очень высокой (или близкой к ней) мультиколлинеарностью – сильной корреляционной зависимостью между объясняющими переменными.

Мультиколлинеарность может быть проблемой лишь в случае множественной регрессии. В случае мультиколлинеарности выводы по коэффициентам и самому уравнению регрессии будут ненадежными.

Совершенная мультиколлинеарность является скорее теоретическим примером. Реальна же ситуация, когда между объясняющими переменными существует довольно сильная корреляционная зависимость, а не строгая функциональная. Такая зависимость называется *несовершенной мулътиколлинеарностью*. Она характеризуется высоким коэффициентом корреляции между соответствующими объясняющими переменными. Причем, если его значение по абсолютной величине близко к единице, то говорят о почти совершенной мультиколлинеарности. В любом случае мультиколлинеарность затрудняет разделение влияния объясняющих факторов на поведение зависимой переменной и делает оценки коэффициентов регрессии ненадежными. Данный вывод наглядно подтверждается с помощью диаграммы Венна (рис. 2.10).



а *б* *в*

Рис. 2.10. Диаграмма Венна

На рис. 2.10, *а* коррелированность между объясняющими переменными X_1 и X_2 отсутствует и влияние каждой из них на Y находит отражение в наложении кругов X_1 и X_2 на круг Y. По мере усиления линейной зависимости между X_1 и X_2 соответствующие круги все больше накладываются друг на друга. Заштрихованная область отражает совпадающие части влияния на Y. На рис. 2.10, *в* при совершенной мультиколлинеарности невозможно разграничить степени индивидуального влияния объясняющих переменных X_1 и X_2 на зависимую переменную Y.

Количественные меры мультиколлинеарности. Как известно, при выполнении определенных предпосылок МНК дает наилучшие линейные несмещенные оценки. Причем свойство несмещенности и эффективности оценок остается в силе, даже если несколько коэффициентов регрессии оказываются статистически незначимыми. Однако несмещенность фактически означает лишь то, что при многократном повторении наблюдений (при постоянных объемах выборок) за исследуемыми величинами средние значения оценок стремятся к их истинным значениям. К сожалению, повторять наблюдения в одинаковых условиях в экономике практически невозможно. Поэтому это свойство ничего не гарантирует в каждом конкретном случае. Наименьшая возможная дисперсия вовсе не означает, что дисперсия оценок будет мала по сравнению с самими оценками. В ряде случаев такая дисперсия достаточно велика, чтобы оценки коэффициентов стали статистически незначимыми.

Обычно выделяют следующие *последствия мультиколлинеарности*:

1) большие дисперсии (стандартные ошибки) оценок. Это затрудняет нахождение истинных значений определяемых величин и расширяет интервальные оценки, ухудшая их точность;

2) уменьшаются t-статистики коэффициентов, что может привести к неоправданному выводу о существенности влияния соответствующей объясняющей переменной на зависимую переменную;

3) оценки коэффициентов по МНК и их стандартные ошибки становятся очень чувствительными к малейшим изменениям данных, т. е. они становятся неустойчивыми;

4) затрудняется определение вклада каждой из объясняющих переменных в объясняемую уравнением регрессии дисперсию зависимой переменной;

5) возможно получение неверного знака у коэффициента регрессии.

Существует несколько *признаков, по которым может быть установлено наличие мультиколлинеарности:*

1) коэффициент детерминации R^2 достаточно высок, но не которые из коэффициентов регрессии статистически незначимы, т. е. они имеют низкие t-статистики;

2) парная корреляция между малозначимыми объясняющими переменными достаточно высока.

Однако данный признак будет надежным лишь в случае двух объясняющих переменных. При большем их количестве более целесообразным является использование частных коэффициентов корреляции;

3) высокие частные коэффициенты корреляции.

Частные коэффициенты корреляции определяют силу линейной зависимости между двумя переменными без учета влияния на них других переменных. Однако при изучении многомерных связей в ряде случаев парные коэффициенты корреляции могут давать совершенно неверные представления о характере связи между двумя переменными. Например, между двумя переменными X и Y может быть высокий положительный коэффициент корреляции не потому, что одна из них стимулирует изменение другой, а оттого, что обе эти переменные изменяются в одном направлении под влиянием других переменных как учтенных в модели, так и, возможно, неучтенных. Поэтому необходимо измерять действительную силу линейной связи между двумя переменными, освобожденную от влияния на рассматриваемую пару переменных других факторов. Коэффициент корреляции между двумя переменными, освобожденный от влияния других переменных, называется *частным коэффициентом корреляции*;

4) сильная вспомогательная (дополнительная) регрессия.

Мультиколлинеарность может иметь место вследствие того, что какая-либо из объясняющих переменных является линейной (или близкой к линейной) комбинацией других объясняющих переменных.

2.6. Методы построения эконометрических моделей в условиях мультиколлинеарности факторов

Прежде чем указать основные методы устранения мультиколлинеарности, отметим, что в ряде случаев мультиколлинеарность не является таким уж серьезным «злом», чтобы прилагать существенные усилия по ее выявлению и устранению. В основном все зависит от целей исследования.

Если основная задача модели – прогноз будущих значений зависимой переменной, то при достаточно большом коэффициенте детерминации $R^2 > 0,9$ наличие мультиколлинеарности обычно не сказывается на прогнозных качествах модели. Хотя это утверждение будет обоснованным лишь в том случае, если и в будущем между коррелированными переменными будут сохраняться те же отношения, что и ранее.

Если же целью исследования является определение степени влияния каждой из объясняющих переменных на зависимую переменную, то наличие мультиколлинеарности, приводящее к увеличению стандартных ошибок, скорее всего, исказит истинные зависимости между переменными. В этой ситуации мультиколлинеарность является серьезной проблемой.

Отметим, что единого метода устранения мультиколлинеарности, годного в любом случае, не существует. Это связано с тем, что причины и последствия мультиколлинеарности неоднозначны и во многом зависят от результатов выборки.

Исключение переменной (переменных) из модели.

Простейшим методом устранения мультиколлинеарности является исключение из модели одной или ряда коррелированных переменных.

Однако необходима определенная осмотрительность при применении данного метода. В этой ситуации возможны ошибки спецификации.

Например, при исследовании спроса на некоторое благо в качестве объясняющих переменных можно использовать цену данного блага и цены заменителей данного блага, которые зачастую коррелируют друг с другом. Исключив из модели цены заменителей, мы, скорее всего, допустим ошибку спецификации. Вследствие этого можно получить смещенные оценки и сделать необоснованные выводы.

Таким образом, в прикладных эконометрических моделях желательно не исключать объясняющие переменные до тех пор, пока коллинеарность не станет серьезной проблемой.

Получение дополнительных данных или новой выборки.

Поскольку мультиколлинеарность напрямую зависит от выборки, то, возможно, при другой выборке мультиколлинеарности не будет либо она не будет столь серьезной.

Иногда для уменьшения мультиколлинеарности достаточно увеличить объем выборки.

Например, при использовании ежегодных данных можно перейти к поквартальным данным. Увеличение количества данных сокращает дисперсии коэффициентов регрессии и тем самым увеличивает их статистическую значимость.

Однако получение новой выборки или расширение старой не всегда возможно или связано с серьезными издержками. Кроме того, такой подход может усилить автокорреляцию. Эти проблемы ограничивают возможность использования данного метода.

Изменение спецификации модели.

В ряде случаев проблема мультиколлинеарности может быть решена путем изменения спецификации модели: либо измененяется форма модели, либо добавляются объясняющие переменные, не учтенные в первоначальной модели, но существенно влияющие на зависимую переменную.

Если данный метод имеет основания, то его использование уменьшает сумму квадратов отклонений, тем самым сокращая стандартную ошибку регрессии. Это приводит к уменьшению стандартных ошибок коэффициентов.

Использование предварительной информации о некоторых параметрах.

Иногда при построении модели множественной регрессии можно воспользоваться предварительной информацией, в частности, известными значениями некоторых коэффициентов регрессии. Вполне вероятно, что значения коэффициентов, рассчитанные для каких-либо предварительных (обычно более простых) моделей либо для аналогичной модели по ранее полученной выборке, могут быть использованы для разрабатываемой в данный момент модели.

Например, строится регрессия вида: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$. Предположим, что переменные X_1 и X_2 коррелированны. Для ранее построенной модели парной регрессии $X_2 = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + v$ был определен статистически значимый коэффициент γ_1 (для определенности пусть γ_1 = 0,8), связывающий Y с X_1. Если есть основания считать, что связь между Y и X_1 останется неизменной, то можно предположить, что γ_1 = β_1 = 0,8. Тогда эконометрическая модель примет вид $Y = \beta_0 + 0{,}8X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \Rightarrow Y - 0{,}8X_1 = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

Данное уравнение фактически является уравнением парной регрессии, для которого проблема мультиколлинеарности не существует.

Ограниченность использования данного метода обусловлена тем, что, *во-первых*, получение предварительной информации нередко затруднительно, а *во-вторых*, вероятность того, что выделенный коэффициент регрессии будет одним и тем же для различных моделей, невысока.

Преобразование переменных.

В ряде случаев минимизировать либо вообще устранить проблему мультиколлинеарности можно с помощью преобразования переменных. Например, пусть эконометрическое уравнение регрессии имеет вид $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$, причем X_1 и X_2 – коррелированные переменные. В этой ситуации можно попытаться определить регрессионные зависимости относительных величин: $\dfrac{\hat{Y}}{X_1} = b_0 + b_1 \dfrac{X_2}{X_1}$, $\dfrac{\hat{Y}}{X_2} = b_0 + b_1 \dfrac{X_1}{X_2}$.

Вполне вероятно, что в этих моделях проблема мультиколлинеарности будет отсутствовать. Возможны и другие преобразования, близкие по своей сути к вышеописанным. Например, если в уравнении рассматриваются взаимосвязи номинальных экономических показателей, то для снижения мультиколлинеарности можно попытаться перейти к реальным показателям и т. п.

Каскадный корреляционный анализ.

Чтобы избежать искажения коэффициентов регрессии в корреляционной модели с мультиколлинеарными факторами, используется каскадный корреляционный анализ.

Сущность каскадного корреляционного анализа заключается в следующем:

1) выбираем результативный и факторные показатели, проверяем информацию столбцов на достоверность;

2) выясняем пары факторов, тесно связанных друг с другом, т. е. коррелируемых (например в эконометрической модели формирования стоимости валовой продукции – основные производственные и оборотные фонды);

3) определяем, какие из факторов тесно связанных пар являются ведущими (определяющими). Эти определяющие факторы назовем промежуточными результативными;

4) строим парную корреляционную модель взаимосвязи каждой пары факторов, например: $y_{x_2} = a_0 + a_1 x_1$, где y_x – стоимость оборотных фондов; x_1 – стоимость основных производственных фондов. При этом рассчитываем все остальные характеристики;

5) рассчитаем разность фактических и расчетных значений фактора, тесно связанного с другим или другими: $x_2 - y_{x_2} = \Delta x_2$.

В корреляционной модели вместо фактора x_2 ставим столбец Δx_2, определяющий величину отклонения фактического значения фактора от среднего уровня, и считаем параметры модели. Коэффициенты регрессии при Δx_2 покажут влияние на результативный показатель нового фактора при его отклонении от среднего уровня. В этом случае удается избежать искажения, имеющего место в корреляционной модели с тесно коррелируемыми факторами.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

3.1. Общие сведения о временных рядах и их классификация

При анализе многих экономических показателей часто используют ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные, ежедневные данные. Например, это могут быть годовые данные по ВНП, ВВП, инфляции и т. д., месячные данные по объему продажи продукции, ежедневные объемы выпуска какого-либо предприятия. Для рационального анализа необходимо систематизировать моменты получения соответствующих статистических данных.

В этом случае следует упорядочить данные по времени их получения и построить так называемые *временные ряды.*

Пусть исследуется показатель Y. Его значение в текущий момент времени t обозначают y_t; значения Y в последующие моменты обозначаются $y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_{t+k}$ значения Y в предыдущие моменты обозначаются $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k}$.

Нетрудно понять, что при изучении зависимостей между такими показателями либо при анализе их развития во времени в качестве объясняющих переменных используются не только текущие значения переменных, но и некоторые предыдущие по времени значения, а также само время T. Модели данного типа называют *динамическими.*

В свою очередь переменные, влияние которых характеризуется определенным запаздыванием, называются *лаговыми переменными.*

Динамические модели используются достаточно широко. Это вполне естественно, так как во многих случаях воздействие одних экономических факторов на другие осуществляется не мгновенно, а с некоторым временным запаздыванием – лагом. Причин наличия лагов в экономике достаточно много, и среди них можно выделить следующие.

Психологические причины выражаются через инерцию в поведении людей. Например, люди тратят свой доход постепенно, а не мгновенно. Привычка к определенному образу жизни приводит к тому, что люди приобретают те же блага в течение некоторого времени даже после падения реального дохода.

Технологические причины. Например, изобретение персональных компьютеров не привело к мгновенному вытеснению ими больших ЭВМ в силу необходимости замены соответствующего программного обеспечения, которое потребовало продолжительного времени.

Институциональные причины. Например, контракты между фирмами, трудовые договоры требуют определенного постоянства в течение времени действия контракта (договора).

Механизмы формирования экономических показателей. Например, инфляция во многом является инерционным процессом; денежный мультипликатор (создание денег в банковской системе) также проявляет себя на определенном временном ряде и т. д.

Временным рядом называют последовательность наблюдений, обычно упорядоченную во времени (хотя возможно упорядочение и по какому-либо другому параметру). Основной чертой, выделяющей анализ временных рядов среди других видов статистического анализа, является существенность порядка, в котором производятся наблюдения.

В эконометрии принято моделировать временной ряд как *случайный процесс*, называемый также *стохастическим процессом*, под которым понимается статистическое явление, развивающееся во времени согласно законам теории вероятностей. Случайный процесс – это случайная последовательность.

Итак, при построении временного ряда его разделяют на составляющие части

$$Y(t) = f(t) + s(t) + u(t) + e(t), \tag{3.1}$$

где $f(t)$ – функция тренда;

$s(t)$ – сезонная компонента;

$u(t)$ – циклическая компонента;

$e(t)$ – остаточная компонента.

Охарактеризуем их более подробно.

Трендом характеризуют долговременную тенденцию развития некоторого явления. При этом она выражается некоторой монотонной функцией. В качестве примера трендов можно указать изменение демографических характеристик, рост экономических показателей, рост потребления.

Сезонная компонента характеризует воздействие факторов, возникающих с определенной периодичностью. Особенностью является то, что их действие заканчивается в течение года. Например, загруженность трассы в течение суток, повышение спроса на товары для школьников в конце августа.

Циклическая компонента – это функция, описывающая явление, действующее с длительным периодом. Особенностью является то, что для выявления циклической компоненты обычно недостаточно только наблюдаемых данных, а требуется анализ общей, экономической, социальной и даже исторической ситуаций. Например, демографические ямы.

Остаточная компонента выражает воздействие случайных факторов и при изучении этой компоненты требуется изучение статистического и вероятного анализов. В зависимости от характера взаимосвязи выделяют: «белый шум», авторегрессию, скользящее среднее и смешанную случайную компоненту.

Временной ряд можно считать состоящим из двух частей (табл. 3.1).

Таблица 3.1. **Составляющие части временного ряда**

Временной ряд						
1. Детерминированная составляющая			2. Случайная составляющая $e(t)$			
Тренд $f(t)$	Циклическая компонента $u(t)$	Сезонная компонента $s(t)$	«Белый шум»	Авторегрессия	Скользящее среднее	Смешанная случайная компонента

На рис. 3.1 показан график временного ряда, на котором прослеживаются все три детерминированные составляющие.

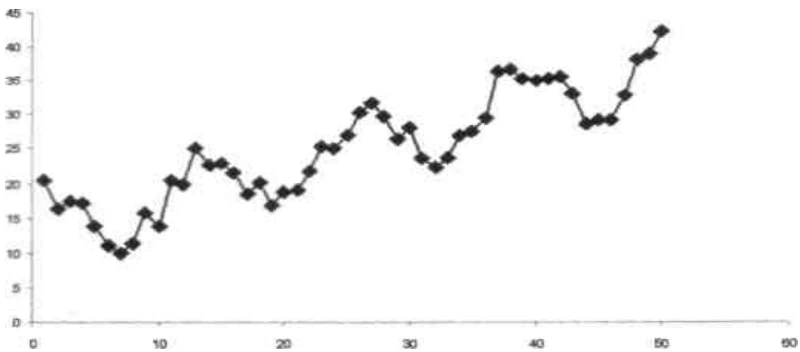


Рис. 3.1. Временной ряд

Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда – выявить и придать количественное выражение каждой из перечисленных выше компонент, с тем чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

Различают два вида временных рядов:

1) *непрерывные*;

2) *дискретные.*

Измерение некоторых величин (температуры, напряжения и т. д.) производится непрерывно, по крайней мере, теоретически. При этом наблюдения можно фиксировать в виде графика. Но даже в том случае, когда изучаемые величины регистрируются (или могут регистрироваться) непрерывно, практически при их обработке используются только те значения, которые соответствуют дискретному множеству моментов времени.

Если время фиксируется дискретно (т. е. через фиксированный интервал времени), то временной ряд *дискретен* ($y_1, y_2, ..., y_T$, так что интервал $(t, t+1)$ является постоянным). В дальнейшем мы будем иметь дело только с дискретными временными рядами.

В зависимости от вида исходных данных временные ряды делятся:

1) на *детерминированные*;

2) *случайные*.

Детерминированным называют процесс, который принимает заданное значение с вероятностью единица. Когда же мы будем говорить о случайном процессе и случайном временном ряде, то, как правило, будем подразумевать, что он существенно случаен, т. е. не является детерминированным.

По соответствию своим свойствам временные ряды делятся:

1) на *стационарные*;

2) *нестационарные.*

Временной ряд является стационарным, если он находится в определенном смысле в статистическом равновесии, т. е. его свойства с вероятностной точки зрения не зависят от времени. Процесс *нестационарен*, если эти условия нарушаются.

3.2. Стационарный временной ряд и его характеристики

Линейные модели временных рядов применяются, как правило, для описания стационарных процессов: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + ... + \alpha_\tau y_{t-\tau} + \varepsilon_t$, $t = \overline{1, T}$, где $y_t, y_{t-1}, ..., y_{t-\tau}$ – значения переменной в соответствующие моменты времени; $\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ – параметры модели или коэффициенты модели, ε_t – случайная ошибка, или «белый шум».

На практике при изучении случайных процессов говорят о *слабой стационарности* и *строгой стационарности процессов*.

Ряд называется ***строго стационарным*** (или *стационарным в узком смысле*), если его свойства не меняются при изменении начала отсчета времени.

Часто используется понятие ***слабой стационарности*** (или *стационарности в широком смысле*), которое состоит в том, что среднее, дисперсия и ковариации y_t не зависят от момента времени t: $M(y_t) = \mu$, $D(y_t) = \gamma_0$, $\mathrm{cov}(y_t, y_{t-\tau}) = \gamma_\tau$.

В дальнейшем под стационарностью будем понимать слабую стационарность. Временной ряд, не удовлетворяющий перечисленным выше свойствам, называется *нестационарным* временным рядом.

Стационарный процесс будет характеризоваться следующими свойствами:

1) *постоянное математическое ожидание* стационарного ряда, т. е. среднее значение временного ряда, вокруг которого изменяются уровни, является величиной неизменной: $M(y_t) = \mu = \mathrm{const}$; где $\mu = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ – оценка среднего значения;

2) *постоянная дисперсия* стационарного ряда, определяющая размах его колебаний относительно среднего значения:

$D(y) = M(y_t - \mu)^2 = \sigma^2(y) = \mathrm{const}$; $\sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \mu\right)^2$ – оценка дисперсии;

3) *постоянная автоковариация* стационарного ряда. Для стационарных рядов автоковариация зависит только от величины t, поэтому $\gamma(0) = D(y) = \sigma^2(y)$.

Автоковариационная функция $\gamma(\tau)$. Значения автоковариационной функции статистически оцениваются по имеющимся наблюдениям временного ряда по формуле

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau} y\left(y_t - \mu\right)\left(y_{t-\tau} - \mu\right), \text{ где } \tau = 1, \ldots, T-1$$

$$\text{или } \gamma(\tau) = \mathrm{cov}\left(y_t y_{t-\tau}\right). \tag{3.2}$$

Важной характеристикой временного ряда является *автокорреляция*.

При наличии тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих значений. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют *автокорреляцией уровней ряда*.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени. Коэффициент автокорреляции порядка определяется как коэффициент корреляции между рядами y_t, y_{t-1}:

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}\left(y_t - \overline{y_{1\tau}}\right)\left(y_{t-\tau} - \overline{y_{2\tau}}\right)}{\sqrt{\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_t - \overline{y_{1\tau}})^2 \cdot \sum_{t=\tau+1}^{n}(y_{t-\tau} - \overline{y_{2\tau}})^2}}, \tag{3.3}$$

где τ – величина сдвига, называемая *лагом*, определяет порядок коэффициента автокорреляции, $\overline{y_{1\tau}} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_t)}{n-\tau}$, $\overline{y_{2\tau}} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_{t-\tau})}{n-\tau}$.

Коэффициенты автокорреляции разных порядков принято обозначать как r_1, r_2, …, r_n, где 1, 2, …, n указывают на номер порядка коэффициента автокорреляции.

Отметим два важных свойства коэффициента автокорреляции.

Во-первых, он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и, таким образом, характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

Во-вторых, по знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом они могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и более высоких порядков называется *автокорреляционной функцией* (*АКФ*) *временного ряда*.

График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой* (рис. 3.2).

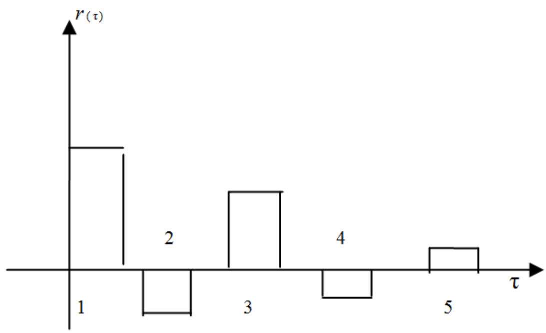


Рис. 3.2. Коррелограмма

Автокорреляционную функцию обычно используют для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой и сезонной компонент:

• если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, то исследуемый ряд содержит только тенденцию;

• если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка $\tau > 1$, то ряд содержит сезонные колебания с периодом τ;

• если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, то либо ряд не содержит тенденции и сезонных колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ;

4) *частная автокорреляционная функция* $\rho_{част}(\tau)$. Наряду с автокорреляционной функцией при исследовании стационарных временных рядов рассматривается частная автокорреляционная функция $r_{част}(\tau)$ (ЧАКФ). С помощью ЧАКФ измеряется корреляция между уровнями ряда y_t и $y_{t-\tau}$, разделенными τ временными тактами, при исключении влияния на эту взаимосвязь всех промежуточных уровней ряда $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-\tau+1}$.

Частная автокорреляция 1-го порядка может быть подсчитана с использованием соотношения

$$r_{\text{част}}(2) = r\left(y_t, y_{t-2} \middle| y_{t-1} = \overline{y}\right) = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)}, \tag{3.4}$$

ЧАКФ также должна быстро убывать для стационарного процесса.

Проверка на стационарность.

Первое, что следует сделать, – построить график временного ряда.

График может содержать очевидный на глаз тренд или сезонную компоненту. Также возможно, что разброс наблюдений возрастает или убывает со временем. Это может служить указанием на зависимость среднего или дисперсии от времени, т. е. ряд будет, скорее всего, нестационарным.

Второе – построить график выборочной АКФ или коррелограммы $r(\tau)$, являющейся статистической оценкой $r(\tau)$.

Коррелограмма стационарного временного ряда быстро убывает с ростом τ после нескольких первых значений. Если график убывает достаточно медленно, есть основание предположить нестационарность ряда.

Кроме выборочной АКФ можно также построить график выборочной ЧАКФ $r_{\text{ч}}(\tau)$, которая также должна быстро убывать для стационарного процесса.

Третье – можно использовать тесты на наличие единичного корня.

Например, рассмотрим процесс авторегрессии $AR(2)$: $y_t = -0{,}9y_{t-1} - 0{,}2y_{t-2} + \varepsilon_t$.

Характеристическое уравнение принимает вид $1 + 0{,}9z + 0{,}2z^2 = 0$, или $z^2 + 4{,}5z + 5 = 0$. При этом его корни $z_1 = -2{,}5$ и $z_2 = -2$ ($z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) по абсолютной величине больше единицы, следовательно процесс стационарный.

Процессы, у которых $|z| = 1$, называются *процессами единичного корня* и являются *нестационарными*.

Большое значение в анализе временных рядов имеют стационарные временные ряды, вероятностные свойства которых не изменяются во времени. Это объясняется тем, что многие временные ряды могут быть приведены к стационарному ряду после выделения и удаления из них тренда, сезонной компоненты или взятия разностей. Как правило, ряд ошибок является стационарным рядом.

Наиболее распространенными моделями стационарных рядов являются *модели авторегрессии* и *модели скользящего среднего*.

3.3. Определение и свойства модели авторегрессии *AR*(*p*), *AR*(1), модели скользящего среднего *MA*(*m*), *MA*(1). Модель *ARMA*(*p*, *m*): свойства, методы построения и тестирования

Модель авторегрессии порядка p – AR(p).

Пусть имеется временной ряд $y_1, y_2, \ldots, y_n$, или y_t $(t = 1, 2, ..., n)$, где y_t – текущее значение уровня.

Основное предположение состоит в том, что текущее значение уравнения ряда y_t является линейной комбинацией *p* предыдущих значений и случайной ошибки.

Общая модель авторегрессии имеет вид

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \tag{3.5}$$

где $p \le t$ и $\alpha_1, ..., \alpha_k$ – параметры модели;

ε_t – случайная ошибка, или «белый шум».

Простейшим примером является модель ***AR*(1)**, или ***марковский процесс***:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{3.6}$$

Условие стационарности ряда для *AR*(1) определяется условием $|\alpha < 1|$, или, что то же самое, корень характеристического уравнения 1 – α*z* = 0 должен быть по абсолютной величине больше $|z| > 1$.

Таким образом, механизм порождения последовательных наблюдений образует стационарный временной ряд (рис. 3.3).

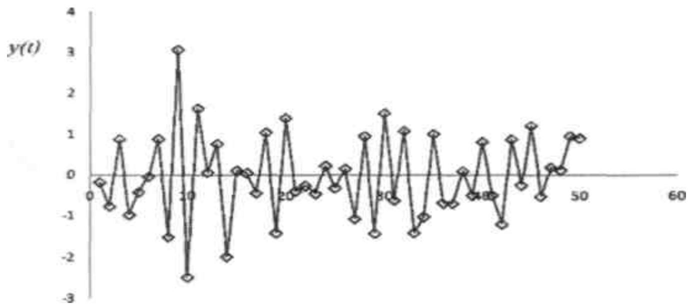
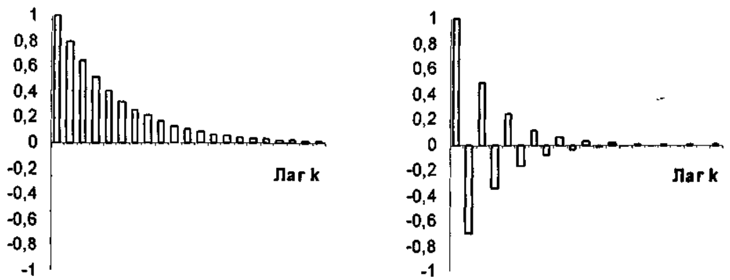


Рис. 3.3. Процесс авторегрессии первого порядка *AR*(1)

В общем случае для процесса $AR(p)$ вытекают следующие *практические рекомендации по их идентификации*:

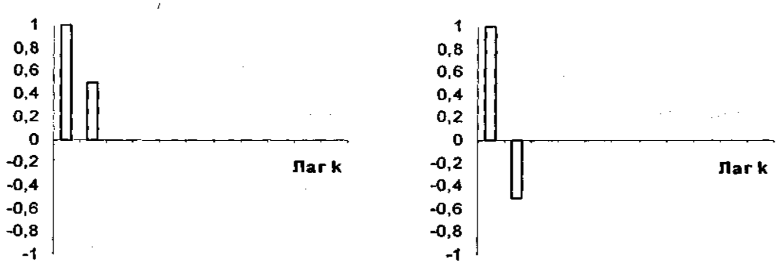
• значения коэффициентов АКФ экспоненциально затухают, либо монотонно, либо попеременно меняя знак (рис. 3.4, *а* и 3.4, *б*);



а *б*

Рис. 3.4. Коррелограмма процесса $AR(1)$:
а – $\alpha_1 > 0$; *б* – $\alpha_1 < 0$

• значения коэффициентов ЧАКФ имеют выбросы (пики) на первых *р*-лагах, а значения коэффициентов для лагов, больших порядка авторегрессии, статистически незначимы (рис. 3.5, *а, б*).



а *б*

Рис. 3.5. Частная автокорреляционная функция процесса $AR(1)$:
а – $\alpha_1 > 0$; *б* – $\alpha_1 < 0$

Модели скользящего среднего MA(m).

Эти модели строят на основании предположения о том, что текущее значение уровня ряда представляется в виде линейной комбинации текущей и прошлых значений ошибки, т. е.:

$$y_t = \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_m\varepsilon_{t-m}, \tag{3.7}$$

где $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ – параметры модели;

ε_t – процесс «белого шума».

Название «скользящее среднее» объясняется тем, что текущее значение случайного процесса определяется взвешенным средним m предыдущих значений «белого шума». Процедуру скользящего среднего часто используют для того, чтобы сгладить данные, которые сильно колеблются.

Модель скользящего среднего MA(1).

Она представляется следующим выражением:

$$y_t = \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1}. \tag{3.8}$$

На рис. 3.6 представлено графическое изображение модели $MA(1)$.

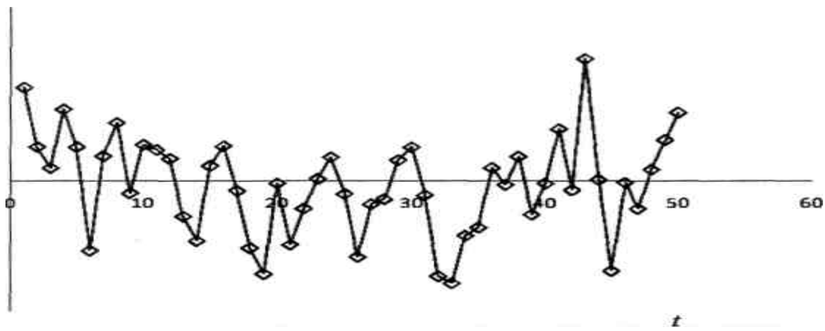
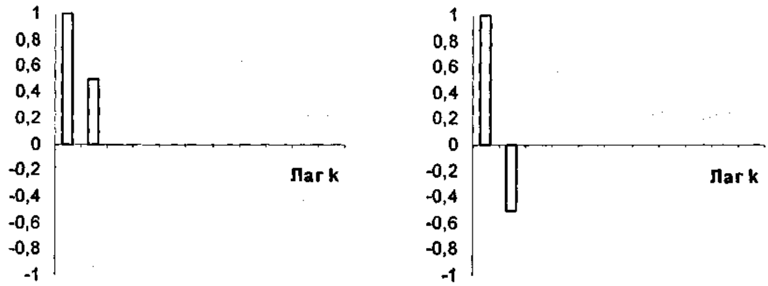


Рис. 3.6. Процесс скользящего среднего $MA(1)$

В общем случае для процесса $MA(q)$ вытекают следующие *практические рекомендации* по их идентификации:

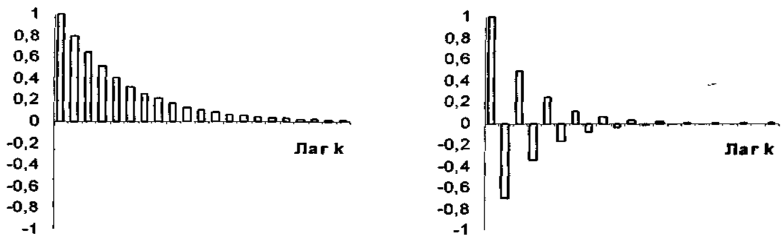
• автокорреляционная функция имеет выбросы на первых q-лагах, а остальные значения статистически незначимы (рис. 3.7, *а*, *б*);



а *б*

Рис. 3.7. Коррелограмма процесса *MA*(1):
а – $\beta_1 < 0$; *б* – $\beta_1 > 0$

• частная автокорреляционная функция экспоненциально затухает (либо монотонно, либо осциллируя, т. е. меняя знак (рис. 3.8, *а*, *б*)).



а *б*

Рис. 3.8. Частная автокорреляционная функция процесса *MA*(1):
а – $\beta_1 < 0$; *б* – $\beta_1 > 0$

Модели ARMA(p, m) – модели авторегрессии – скользящего среднего.

Эти модели основаны на предположении о том, что текущий уровень ряда y_t является линейной комбинацией k своих предыдущих уровней и m своих предыдущих ошибок. При идентификации модели *ARMA(p, m)* пользуются тем, что их автокорреляционные функции затухают плавно по экспоненте или синусоиде.

Модель имеет общий вид:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_m \varepsilon_{t-m}, \quad (3.9)$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_m$ – коэффициенты модели;

p – порядок авторегрессии;

m – порядок скользящего среднего.

Заметим, что модель (3.9) может быть преобразована либо в модель авторегрессии *AR*(p), либо в модель скользящего среднего – *MA*(m).

Рассмотрим процесс *ARMA*(1, 1):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (3.10)$$

На рис. 3.9 представлено графическое изображение модели *ARMA*(1, 1).

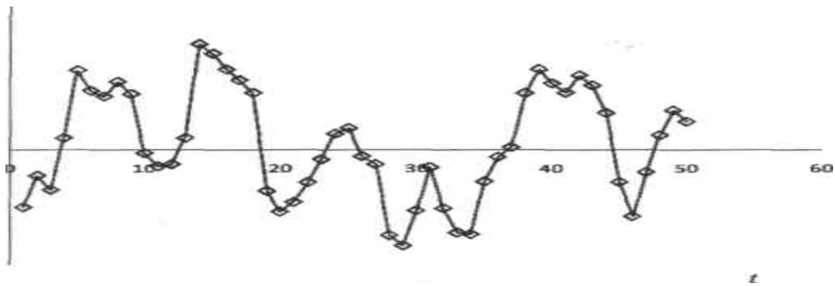


Рис. 3.9. Процесс авторегрессии – скользящего среднего *ARMA*(1, 1)

Обычно число параметров p или q не бывает больше 2. Для процесса *ARMA*(p, q) вытекают следующие практические рекомендации по их идентификации:

• *ARMA*(1, 0): АКФ экспоненциально затухает, ЧАКФ имеет выброс на лаге 1;

• *ARMA*(2, 0): АКФ имеет форму затухающей синусоидальной волны, ЧАКФ имеет выбросы на лагах 1 и 2;

• *ARMA*(0, 1): АКФ имеет выброс на лаге 1, ЧАКФ экспоненциально затухает;

• *ARMA*(0, 2): АКФ имеет выбросы для лагов 1 и 2, ЧАКФ имеет форму затухающей синусоидальной волны или экспоненциально затухает;

• $ARMA(1, 1)$: АКФ экспоненциально затухает от значения $r(1)$, ЧАКФ экспоненциально убывает от значения $r_\tau(1)$.

Из рассмотренных соотношений вытекает важный вывод: *на практике можно подобрать модель с минимальным числом параметров, которая описывает временной ряд y_t, являющийся стационарным процессом второго порядка, «не хуже», чем другие варианты моделей с большим числом параметров. Обычно понятие «не хуже» связывается с минимальной дисперсией модели и отсутствием автокорреляции в ряду ее ошибки.*

Практическая ценность этого вывода состоит в следующем. При построении моделей временных рядов нужно стремиться к минимизации числа их параметров, а следовательно, и порядка самой модели. Дело в том, что параметры таких моделей оцениваются на основе коэффициентов автокорреляции исходного процесса y_t. С увеличением порядка модели для определения значений ее параметров необходимо использовать в качестве исходных данных и большее число выборочных коэффициентов автокорреляции (с большими номерами). Точность их оценки с ростом сдвига падает, да и их абсолютные значения либо стремятся к нулю, либо попадают в область повышенной неопределенности. Из-за этого снижается надежность оценок коэффициентов моделей временных рядов высоких порядков, как и качество самих моделей. Все это и заставляет эконометриков искать для описания реальных процессов модели временных рядов с минимальным числом параметров.

3.4. Модели и методы анализа нестационарных временных рядов

Если временной ряд содержит, например, некоторый тренд, то требование постоянства дисперсии, среднего и ковариации нарушается, и мы имеем дело с нестационарным процессом, или процессом случайного блуждания. На практике временной ряд y_t можно субъективно определить как нестационарный при помощи графика временного ряда и его коррелограмм. Если на них обнаруживаются:

1) тренд;

2) детерминистическая периодичность;

3) гетероскедастичность;

4) изменяющаяся автокорреляция, то имеются веские причины предполагать, что лежащий в основе процесс является нестационарным. Теоретически он нестационарен, если среднее или дисперсия,

или ковариация случайного процесса, сгенерировавшего этот временной ряд, изменяются во времени.

Как правило, временные ряды, характеризующие экономические явления, отличаются нестационарностью. Это связано с некоторыми свойствами экономических временных рядов, прежде всего с *наличием тренда*. Очевидно, что при наличии трендовой компоненты сложно утверждать, что среднее значение ряда, а также его дисперсия и автоковариация не зависят от времени, следовательно, ряд нестационарен. Временные ряды могут иметь как строго возрастающий (убывающий) тренд, так и заметные колебания на фоне общего тренда. Подобное поведение характерно для показателей ВВП, а также для показателей инфляции и процентной ставки.

Для некоторых нестационарных временных рядов характерно *случайное блуждание.* Обычно такие временные ряды не выказывают тенденции ни к возрастанию, ни к убыванию. Временной ряд может возрастать или убывать со временем и не сохранять

Еще одной из причин, вызывающих нестационарность временных рядов, является *высокая инерционность внезапного воздействия (шока)* на временной ряд. Во время экономического спада или бума основные макроэкономические показатели претерпевают сильные изменения и остаются на новом уровне в течение длительного промежутка времени, не возвращаясь к своему прежнему положению. Типичным примером может служить динамика обменного курса доллара во время финансового кризиса.

Относительно длинные временные ряды, характеризующие, например, процессы инфляции или уровень инвестиций, в некоторых случаях можно охарактеризовать как условно гетероскедастичные. Это означает, что в долгосрочном периоде (на протяжении нескольких десятков лет) дисперсия ряда постоянна, но в рамках данного периода имеются более короткие отрезки времени (продолжительностью в несколько лет), на протяжении которых дисперсия явления относительно высока.

Идентификация рядов, основанная на проверке постоянства среднего, дисперсии и ковариации, невозможна, так как априори структура ряда неизвестна.

Для получения критерия, который можно было бы использовать для выявления нестационарности рядов, рассмотрим авторегрессионный процесс y_t первого порядка:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{3.11}$$

Не сложно проверить, что при $|\alpha_1| < 1$ условия выполняются, а при $|\alpha_1| = 1$ – не выполняются, т. е. в первом случае можно говорить о стационарном, а во втором случае – о нестационарном процессе y_t, поэтому нестационарные процессы называют также процессами единичного корня.

Между стационарными и нестационарными временными рядами имеется существенное отличие. Единовременное шоковое воздействие на стационарный ряд носит временный характер. Со временем эффект рассеивается, и значения временного ряда возвращаются к своему долгосрочному среднему значению. Следовательно, долгосрочный прогноз стационарного ряда сходится к безусловному среднему.

Нестационарные ряды обязательно имеют постоянную компоненту, среднее и (или) дисперсия зависят от времени. Перечисленные ниже свойства помогут идентифицировать нестационарные временные ряды.

1. В долгосрочном периоде не существует постоянного среднего значения, к которому возвращаются значения временного ряда.

2. Дисперсия зависит от времени и по мере увеличения времени растет до бесконечности.

3. Теоретическая автокорреляция не сокращается, но для наблюдений, ограниченных некоторыми пределами, медленно затухает.

В основу тестов на идентификацию временных рядов положена проверка условия равенства или неравенства параметра α_1 единице. Это так называемые тесты единичного корня.

Метод разностей и интегрируемость.

С одной стороны, большинство экономических временных рядов нестационарны, а с другой стороны, многие методы и модели основаны на предположении о стационарности временных рядов.

Во многих случаях взятие разностей временных рядов позволяет получить стационарные временные ряды.

Первые разности стохастического процесса имеют вид

$$(1 - L)\, y_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}. \tag{3.12}$$

Если первые разности ряда Y стационарны, то ряд y_t называется интегрируемым первого порядка.

В противном случае дальнейшее взятие разностей приведет ко вторым разностям:

$$\left(1-L\right)^2 y_t = \Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}. \qquad (3.13)$$

Если этот ряд стационарен, то ряд y_t называется интегрируемым второго порядка. Если мы получаем первый стационарный ряд после k-кратного взятия разностей, процесс называется интегрируемым k-го порядка. Временной ряд, сгенерированный случайным процессом, интегрируемым k-го порядка, также называется интегрируемым k-го порядка.

3.5. Определение и свойства модели *ARIMA*, построение, тестирование и прогнозирование

Нестационарные временные ряды могут быть сведены к стационарным с помощью оператора последовательной разности.

Пусть временной ряд y_t после применения к нему d раз оператора последовательной разности стал стационарным рядом $\Delta^d y_t$, удовлетворяющим *ARMA*(p, q)-модели. В этом случае процесс y_t принято называть *интегрированным процессом авторегрессии и скользящего среднего*, или *ARIMA*(p, d, q). В специальной литературе – это модель Бокса – Дженкинса.

Модель *ARIMA* обладает тремя параметрами: p – порядок авторегрессии *AR*; d – порядок последовательных разностей уровней временных рядов, обеспечивающий стационарность ряда; q – порядок скользящей средней *MA*. Из модели для ряда Δy_t можно получить модель для исходного ряда y_t, используя соотношение $y_t = y_{t-1} + \Delta y_t$.

Например, модель *ARMA*(2, 1): $y_t = 1,2y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$ имеет для *AR*-части характеристическое уравнение $1 - 1,2z + 0,2z^2 = (1-0,2z)(1-z) = 0,$ корни которого $z_1 = 5$, $z_2 = 1$.

Поскольку один из корней равен 1, то процесс *ARMA*(2, 1) является нестационарным. Оператор авторегрессии этого процесса можно представить в следующем виде: $(1-0,2L)(1-L) = (1-0,2L)\Delta$.

Введем обозначение $\Delta y_t = y_t + \Delta y_{t-1}$. Полученный процесс Δy_t является стационарным процессом *ARMA* (1, 1), задаваемым уравнением: $\Delta y_t = 0,2\Delta y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$, при этом исходный ряд y_t является рядом *ARIMA*(1, 1, 1), или проинтегрированным первого порядка *ARMA*(1, 1)-рядом.

Методология Бокса – Дженкинса подбора *ARIMA*-модели для описания и прогнозирования временного ряда включает следующие этапы:

1-й этап – идентификация модели;

2-й этап – оценивание модели и проверка ее адекватности;

3-й этап – прогнозирование.

1-й этап. Диагностика, т. е. проверка временного ряда на стационарность:

• изучение графика временного ряда;

• тест на единичный корень.

В случае нестационарности необходимо произвести взятие разностей и повтор тестов.

Далее проводится оценивание диагностических функций, таких, как автокорреляционная, и исследование их графиков.

Затем следует выбор типов возможных процессов, сгенерировавших этот временной ряд, так называемая идентификация модели.

В результате должны быть получены три основных параметра: d – порядок интегрируемости, p и q – порядки компонент *AR* и *MA* соответственно.

В процессе диагностики параметр d легко определяется как количество взятых разностей, необходимое для получения стационарного процесса. Для экономических временных рядов параметр d обычно равен 1, но иногда он может быть равен 0 или 2.

Более сложен выбор параметров p и q. Обычно при выборе этих параметров полагаются на результаты исследования автокорреляционной функции (АКФ), частной автокорреляционной функции (ЧАКФ). В случае сомнений следует придерживаться правила выбора модели с наименьшим возможным числом параметров.

2-й этап. Оценивание параметров для всех возможных версий модели подходящими статистическими методами, такими, как:

• обычный метод наименьших квадратов;

• метод максимального правдоподобия;

3-й этап. Выбор наиболее подходящей модели среди оцененных:

• проверка модели;

• анализ остатков, которые должны иметь свойства «белого шума»;

• рассмотрение модели, наилучшим образом воспроизводящей конкретный временной ряд, и ее наиболее экономичного с точки зрения количества параметра. Исходя из сравнения критериев выбирается оптимальная модель и на ее основе можно производить прогнозирование.

3.6. Модели временных рядов с условной гетероскедастичностью. Определение и свойства моделей *ARCH* и *GARCH*

В 2003 г. американец Роберт Энгле получил Нобелевскую премию за разработку метода анализа экономических временных рядов на основе математической модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью (*ARCH*). Данная модель позволяет прогнозировать тенденции изменения финансовых индексов, таких как ВВП, потребительские цены, процентные ставки, биржевые курсы и др., как на ближайший день, так и на неделю и даже год вперед.

Экономические данные обычно представлены в виде временных рядов, т. е. последовательности наблюдений в хронологическом порядке. Например, величины ВВП за различные годы, цены на товар в различные дни месяца и т. д. Такие ряды можно представить в виде суммы двух компонентов, один из которых изменяется случайным образом, а другой подчиняется определенному закону.

На финансовых рынках случайные отклонения величины от постоянного значения с течением времени (так называемая колеблемость) особенно важны, поскольку стоимость акций, опционов и других финансовых инструментов зависит от уровня их рисков. Колебания могут значительно меняться во времени: периоды сильных изменений сменяются периодами незначительных отклонений. Несмотря на меняющуюся колеблемость, экономисты применяли статистические методы, в которых предполагалось, что колеблемость постоянна.

Но в 1982 г. Роберт Энгле обнаружил, что авторегрессионная гетероскедастическая (т. е. предполагающая изменение во времени) модель очень точно описывает множество временных рядов, встречающихся в экономике. Его метод в настоящее время стоит на вооружении финансовых аналитиков, использующих *ARCH* для оценки стоимости активов и рисков портфельных инвестиций.

Колеблемость обычно измеряется дисперсией σ^2 временного ряда, или стохастического процесса.

Условная гетероскедастичность означает, что условная дисперсия ошибки, т. е. дисперсия при условии известной информации, зависит от времени. Она может проявляться, несмотря на *общую гомоскедастичность (безусловную)*.

Дисперсия ошибок модели ε_t имеет вид $\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

Но условная дисперсия в соответствии с имеющейся на последний момент информацией определяется как $\mathrm{var}(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$.

Модели ARCH/GARCH.

1. *ARCH-модель.* В *ARCH*(p)-модели, предложенной Р. Энгле, предполагается, что дисперсия является линейной функцией квадратов предшествующих значений наблюдаемой величины:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{p} \alpha_1 y_{n-1}^2 \,. \tag{3.14}$$

Для того чтобы эта величина оставалась положительной с вероятностью, равной единице, требуется, чтобы $\alpha_0 > 0,\ \ \alpha_1 \geq 0$.

В рамках *ARCH*-модели стало возможным объяснить такой феномен финансовых временных рядов, как кластерность, который состоит в том, что большие (малые) значения y_n. Влекут за собой большие (малые) последующие значения, но непредсказуемого знака.

Из (3.14) видно, что величины σ_n^2 являются функциями от предшествующих значений $y_{n-1}, ..., y_{n-p}$.

Таким образом, суть модели *ARCH* состоит в том, что если абсолютная величина y_n является большой, то это приводит к повышению условной дисперсии в последующие периоды. В свою очередь при высокой условной дисперсии более вероятно появление больших (по абсолютной величине) значений y_n. И наоборот, если значения y_n в течение нескольких периодов близки к нулю, то это приводит к понижению условной дисперсии в последующие периоды практически до уровня α_0. В свою очередь при низкой условной дисперсии более вероятны появления малых (по абсолютной величине) значений y_n. Таким образом, *ARCH*-процесс характеризуется инерционностью условной дисперсии (кластеризацией колеблемости).

Эффект кластеризации колеблемости отмечен для многих высокочастотных рядов, таких как изменение цен акций, валютных курсов, доходности спекулятивных активов.

Самая простая *ARCH*-модель при p = 1, *ARCH*(1) выглядит так:

$$y_n = \sigma_n \varepsilon_n \,,\ \ \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{n-1}^2 \,. \tag{3.15}$$

2. *GARCH-модель.* Исторически одним из первых обобщений модели *ARCH*(p) стала обобщенная *ARCH*-модель, или *GARCH*, предложенная Т. Боллерслевом. Эта модель характеризуется двумя параметрами p и q и обозначается *GARCH*(p, q). В этой модели, как и *ARCH*(p)-модели, $y_n = \sigma_n \varepsilon_n$, но относительно формирования колеблемости σ_n

предполагается, что $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{i-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2$.

Основным преимуществом *GARCH*(*p*, *q*)-моделей перед *ARCH*(*p*)-моделью является то, что при подгонке статистических данных моделям *ARCH*(*p*) часто приходится обращаться к слишком большим значениям *p*, в то время как при подгонке *GARCH*(*p*, *q*)-моделям можно ограничиваться лишь небольшими значениями *p* и *q*.

В простейшем варианте *GARCH*(1, 1) имеем:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 . \tag{3.16}$$

Как и в модели *ARCH,* σ^2 служит условной дисперсией процесса $y_n \left| y_{n-1} \right|$. Обобщенная авторефессионная модель с условной гетероскедастичностью *GARCH*(*p, q*) описывает процесс, в котором условная дисперсия ошибки находится в зависимости от всей доступной в момент времени *t* информации.

4. ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

4.1. Особенности изучения взаимосвязанных временных рядов

Изучение причинно-следственных зависимостей переменных, представленных в форме временных рядов, является одной из самых сложных задач эконометрического моделирования. Применение в этих целях традиционных методов корреляционно-регрессионного анализа может привести к ряду серьезных проблем, возникающих как на этапе построения, так и на этапе анализа эконометрических моделей. В первую очередь эти проблемы связаны со спецификой временных рядов как источника данных в эконометрическом моделировании. Известно, что каждый уровень временного ряда содержит три основные компоненты: тенденцию, циклические, или сезонные, колебания и случайную компоненту. Рассмотрим, каким образом наличие этих компонент сказывается на результатах корреляционно-регрессионного анализа временных рядов данных.

Предварительный этап такого анализа заключается в выявлении структуры изучаемых временных рядов. Если на этом этапе было выявлено, что временные ряды содержат сезонные, или циклические, колебания, то перед проведением дальнейшего исследования взаимосвязи необходимо устранить сезонную, или циклическую, компоненту из уровней каждого ряда, поскольку ее наличие приведет к завышению истинных показателей силы и тесноты связи изучаемых временных рядов в случае, если оба ряда содержат циклические колебания одинаковой периодичности, либо к занижению этих показателей в случае, если сезонные, или циклические, колебания содержат только один из рядов или если периодичность колебаний в рассматриваемых временных рядах различна.

Устранение сезонной компоненты из уровней временных рядов можно проводить в соответствии с методикой построения аддитивной и мультипликативной моделей. При дальнейшем изложении методов анализа взаимосвязей примем предположение, что изучаемые временные ряды не содержат периодических колебаний.

Допустим, что изучается зависимость между рядами x и y. Для количественной характеристики этой зависимости используется линейный коэффициент корреляции. Если рассматриваемые временные ряды имеют тенденцию, коэффициент корреляции по абсолютной величине будет высоким. Однако из этого еще нельзя делать вывод о том, что x причина y или наоборот. Высокий коэффициент корреляции в данном случае – это результат того, что x и y зависят от времени, или содержат тенденцию. При этом одинаковую или противоположную тенденцию могут иметь ряды, совершенно не связанные друг с другом причинно-следственной зависимостью. Например, коэффициент корреляции между численностью выпускников вузов и числом домов отдыха составил 0,8. Это, естественно, не означает, что увеличение количества домов отдыха способствует росту числа выпускников вузов или увеличение числа последних стимулирует спрос на дома отдыха.

Для того чтобы получить коэффициенты корреляции, характеризующие причинно-следственную связь между изучаемыми рядами, следует избавиться от так называемой ложной корреляции, вызванной наличием тенденции в каждом ряде. Обычно это осуществляют с помощью одного из методов исключения тенденции.

Предположим, что по двум временным рядам x_t и y_t строится уравнение парной линейной регрессии вида

$$y_t = a + bx_t + \varepsilon_t. \tag{4.1}$$

Наличие тенденции в каждом из этих временных рядов означает, что на зависимую y_t и независимую x_t переменные модели оказывает воздействие фактор времени, который непосредственно в модели не учтен. Влияние фактора времени будет выражено в корреляционной зависимости между значениями остатков ε_t за текущий и предыдущие моменты времени, которая получила название автокорреляция в остатках.

Автокорреляция в остатках – это нарушение одной из основных предпосылок МНК-предпосылки о случайности остатков, полученных по уравнению регрессии. Один из возможных путей решения этой проблемы состоит в применении обобщенного МНК к оценке параметров модели. При построении уравнения множественной регрессии по временным рядам данных, помимо двух вышеназванных проблем, возникает также проблема мультиколлинеарности факторов, входящих в уравнение регрессии, в случае, если эти факторы содержат тенденцию.

Для исключения тенденции существует несколько методов. Их сущность заключается в том, чтобы устранить или зафиксировать воздействие фактора времени на формирование уровней ряда. Основные методы исключения тенденции можно разделить на две группы:

• методы, основанные на преобразовании уровней исходного ряда в новые переменные, не содержащие тенденции. Полученные переменные используются далее для анализа взаимосвязи изучаемых временных рядов. Эти методы предполагают непосредственное устранение трендовой компоненты T из каждого уровня временного ряда. Два основных метода в данной группе – это *метод последовательных разностей* и *метод отклонений от трендов*;

• методы, основанные на изучении взаимосвязи исходных уровней временных рядов при элиминировании воздействия фактора времени на зависимую и независимую переменные модели. В первую очередь – это *метод включения в модель регрессии по временным рядам фактора времени*.

4.2. Метод отклонения от тренда

Пусть имеются два временных ряда x_t и y_t, каждый из которых содержит трендовую компоненту T и случайную компоненту ε_t. Аналитическое выравнивание каждого из этих рядов позволяет найти параметры соответствующих уравнений трендов и определить расчетные по тренду уровни $\hat{x}_t$ и $\hat{y}_t$ соответственно. Эти расчетные значения можно принять за оценку трендовой компоненты T каждого ряда. Поэтому влияние тенденции можно устранить путем вычитания расчетных значений уровней ряда из фактических. Эту процедуру проделывают для каждого временного ряда в модели. Дальнейший анализ взаимосвязи рядов проводят с использованием не исходных уровней, а отклонений от тренда $x_t - \hat{x}_t$ и $y_t - \hat{y}_t$ при условии, что последние не содержат тенденции.

Содержательная интерезультативная показательретация параметров этой модели затруднительна, однако ее можно использовать для прогнозирования. Для этого необходимо определить трендовое значение факторного признака $\hat{x}_t$ и с помощью одного из методов оценить величину предполагаемого отклонения фактического значения от трендового. Далее по уравнению тренда для результативного признака определяют трендовое значение $\hat{y}_t$, а по уравнению регрессии по отклонениям от трендов находят величину отклонения $y_t - \hat{y}_t$. Затем рассчитывают точечный прогноз фактического значения $\hat{y}_t$ по формуле: $y_t = \hat{y}_t + (y_t - \hat{y}_t)$.

4.3. Метод последовательных разностей

Если временной ряд содержит ярко выраженную линейную тенденцию, ее можно устранить путем замены исходных уровней ряда цепными абсолютными приростами (первыми разностями).

Пусть

$$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t, \tag{4.2}$$

где ε_t – случайная ошибка;

$$\hat{y}_t = a + bt. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} = a + bt + \varepsilon_t - (a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1}) = b + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}). \tag{4.4}$$

Коэффициент b – константа, которая не зависит от времени. При наличии сильной линейной тенденции остатки ε_t достаточно малы и в соответствии с предпосылками МНК носят случайный характер. Поэтому первые разности уровней ряда Δ_t не зависят от переменной времени, их можно использовать для дальнейшего анализа.

Если временной ряд содержит тенденцию в форме параболы второго порядка, то для ее устранения можно заменить исходные уровни ряда на вторые разности.

Пусть имеет место соотношение (4.2), однако

$$\hat{y}_t = a + b_1 t + b_2 t^2. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_t = y_t - y_{t-1} = a + b_1 t + b_2 t^2 + \varepsilon_t - (a + b_1(t-1) + b_2(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}) = \\ = b_1 - b_2 + 2b_2 t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Как показывает это соотношение, первые разности Δ_t непосредственно зависят от фактора времени t и, следовательно, содержат тенденцию.

Определим вторые разности:

$$\begin{aligned} \Delta^{//}{}_t = \Delta_t - \Delta_{t-1} = b_1 - b_2 + 2b_2 t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - (b_1 - b_2 + 2b_2(t-1) + \\ + (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})) = 2b_2 + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Очевидно, что вторые разности $\Delta^{//}{}_t$ не содержат тенденции, поэтому при наличии в исходных уровнях тренда в форме параболы второго порядка их можно использовать для дальнейшего анализа. Если тенденции временного ряда соответствует экспоненциальный, или степенной, тренд, метод последовательных разностей следует применять не к исходным уровням ряда, а к их логарифмам.

При всей своей простоте метод последовательных разностей имеет два существенных недостатка.

Во-первых, его применение связано с сокращением числа пар наблюдений, по которым строится уравнение регрессии, а следовательно, с потерей числа степеней свободы.

Во-вторых, использование вместо исходных уровней временных рядов их приростов, или ускорений, приводит к потере информации, содержащейся в исходных данных.

4.4. Включение в модель регрессии фактора времени

В корреляционно-регрессионном анализе можно устранить воздействие какого-либо фактора, если зафиксировать воздействие этого фактора на результат и другие включенные в модель факторы. Данный прием широко применяется в анализе временных рядов, когда тенденция фиксируется через включение фактора времени в модель в качестве независимой переменной. Модель вида

$$y_t = a + b_1 x_1 + b_2 t + \varepsilon_t, \tag{4.8}$$

относится к группе моделей, включающих фактор времени. Очевидно, что число независимых переменных в такой модели может быть больше единицы. Кроме того, это могут быть не только текущие, но и лаговые значения независимой и результативной переменных.

Преимущество данной модели перед методами отклонений от трендов и последовательных разностей состоит в том, что она позволяет учесть всю информацию, содержащуюся в исходных данных, поскольку значения x_t и y_t – это уровни исходных временных рядов. Кроме того, модель строится по всей совокупности данных за рассматриваемый период в отличие от метода последовательных разностей, который приводит к потере числа наблюдений. Параметры a и b модели с включением фактора времени определяются обычным МНК.

Пример. Допустим построено уравнение регрессии, описывающее зависимость расходов на конечное потребление y_t от совокупного дохода x_t, и в данную модель включаем фактор времени. После расчета обычным МНК получена модель вида $y_t = 1{,}15 + 0{,}49x_t + 0{,}63t$.

Интерезультативная показательретация параметров этого уравнения следующая. Параметр b_1 = 0,49 характеризует, что при увеличении совокупного дохода на 1 д. е. расходы на конечное потребление возрастут в среднем на 0,49 д. е. в условиях существования неизменной тенденции. Параметр b_2 = 0,63 означает, что воздействие всех факторов, кроме совокупного дохода, на расходы на конечное потребление приведет к его среднегодовому абсолютному приросту на 0,63 д. е.

4.5. Коинтеграция временных рядов. Критерий Энгла – Грэнджера

Общий недостаток методов исключения тенденции заключается в том, что эти методы предполагают некоторую модификацию модели (4.1) вследствие либо замены переменных, либо добавления в эту модель фактора времени. Однако большая часть соотношений, постулируемых экономической теорией, верификацией которых занимается эконометрика, сформулирована в терминах уровней временных рядов, а не их последовательных разностей или отклонений от трендов и предполагает измерение взаимосвязи переменных без включения в модель каких-либо дополнительных факторов (например, переменной времени).

В ряде случаев наличие в одном из временных рядов тенденции может быть следствием именно того факта, что другой ряд, включенный в модель, тоже содержит тенденцию, а не просто является результатом прочих случайных причин. Поэтому одинаковая или противоположная направленность тенденций рядов может иметь устойчивый характер и наблюдаться на протяжении длительного промежутка времени, а коэффициент корреляции, рассчитанный по уровням временных рядов, может соответственно не содержать ложной корреляции и характеризовать истинную причинно-следственную зависимость между ними.

Эти предположения были положены в основу новой теории о коинтеграции временных рядов. Под *коинтеграцией* понимается причинно-следственная зависимость в уровнях двух (или более) временных рядов, которая выражается в совпадении или противоположной направленности их тенденций и случайной колеблемости.

В соответствии с этой теорией между двумя временными рядами коинтеграция существует в случае, если линейная комбинация временных рядов – это стационарный временной ряд (т. е. ряд, содержащий только случайную компоненту и имеющий постоянную дисперсию на длительном промежутке времени).

Рассмотрим уравнение регрессии вида $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$. Остатки ε_t в этом уравнении представляют собой линейную комбинацию рядов x_t и y_t:

$$\varepsilon_t = y_t - a - bx_t. \qquad (4.9)$$

Одним из методов тестирования гипотезы о коинтеграции временных рядов x_t и y_t является критерий Энгла – Грэнджера.

Алгоритм применения этого критерия следующий.

1. Выдвигается нулевая гипотеза об отсутствии коинтеграции между рядами x_t и y_t.

2. Рассчитывают параметры уравнения регрессии вида

$$\Delta\varepsilon_t = a + b\varepsilon_{t-1}, \qquad (4.10)$$

где $\Delta\varepsilon_t$ – первые разности остатков, полученных из соотношения (4.9).

3. Определяют фактическое значение t-критерия для коэффициента регрессии a в уравнении (4.10).

4. Сравнивают полученное значение с критическим значением статистики τ. Критические значения τ, рассчитанные Энглом и Грэнджером для уровня значимости 1, 5 и 10 %, составляют соответственно 2,5899, 1,9439 и 1,6177. Если фактическое значение t больше критического значения τ для заданного уровня значимости α, то между рядами x_t и y_t есть коинтеграция. В противном случае – отсутствует.

Коинтеграция двух временных рядов значительно упрощает процедуры и методы, используемые в целях их анализа, поскольку в этом случае можно строить уравнение регрессии и определять показатели корреляции, применяя в качестве исходных данных непосредственно уровни изучаемых рядов, учитывая тем самым информацию, содержащуюся в исходных данных, в полном объеме. Однако поскольку коинтеграция означает совпадение динамики временных рядов в течение длительного промежутка времени, то сама эта концепция применима только к временным рядам, охватывающим сравнительно длительные (например, в несколько десятилетий) промежутки времени. При наличии коротких временных рядов данных, даже если формальные критерии показали присутствие их коинтеграции, моделирование взаимосвязей по уровням этих рядов может привести к неверным результатам ввиду нарушения предпосылок теории коинтеграции.

5. СИСТЕМА ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Структурная и приведенная формы уравнений

Системный подход в экономическом анализе предполагает сложную структуру взаимосвязей между признаками, когда эффективность деятельности экономического объекта характеризуется несколькими показателями. В этом случае одного регрессионного уравнения может быть недостаточно и для описания явления или процесса может потребоваться система уравнений и тождеств.

Система одновременных уравнений получила название также структурной формы модели. ***Структурной формой модели*** (системой одновременных уравнений) называется система уравнений, в каждом из которых аргументы, помимо объясняющих переменных, могут включать в себя также объясняемые переменные из других уравнений системы.

Уравнения, составляющие исходную модель, называются *структурными уравнениями модели*.

Простейшая структурная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 + \beta_{12} y_2 + \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \varepsilon_1; \\ y_2 = \alpha_2 + \beta_{21} y_1 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \varepsilon_2, \end{cases} \tag{5.1}$$

где y и x – зависимая и независимая переменные;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – случайные члены;

α, β – параметры модели.

Параметры структурной формы модели называются *структурными коэффициентами*.

Структурная форма модели обычно включает в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и уравнения, отражающие тенденцию развития явления, а также разного рода уравнения-тождества. Тождества не содержат каких-либо подлежащих оценке параметров, а также не включают случайного члена.

В процессе оценивания параметров одновременных уравнений следует различать эндогенные и экзогенные переменные. Приставки «эндо» и «экзо» означают соответственно внутреннее и внешнее.

Эндогенными считаются переменные, значения которых определяются *внутри модели* и являются зависимыми переменными.

Экзогенными считаются переменные, значения которых определяются *вне модели* и являются независимыми переменными.

В качестве экзогенных переменных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (лаговые переменные).

Предполагается, что в каждом уравнении экзогенные переменные некоррелированы со случайным членом.

В общем случае эндогенные переменные коррелированны со случайным членом, поэтому применение МНК к структурной форме модели приводит к *смещенным* и *несостоятельным* оценкам структурных коэффициентов.

Для определения структурных коэффициентов структурная форма модели преобразуется в приведенную форму.

Приведенной формой модели называется система уравнений, в каждом из которых эндогенные переменные выражены только через экзогенные переменные и случайные составляющие.

Например, приведенная форма исходной модели имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha'_1 + \alpha'_{11} x_1 + \alpha'_{12} x_2 + v_1; \\ y_2 &= \alpha'_2 + \alpha'_{21} x_1 + \alpha'_{22} x_2 + v_2, \end{aligned} \qquad (5.2)$$

где α' – параметры приведенной формы;

v_1, v_2 – случайные члены.

Параметры приведенной формы модели называются *коэффициентами приведенной формы* (приведенными коэффициентами).

Коэффициенты приведенной формы оцениваются обычным МНК, поскольку экзогенные переменные некоррелированы со случайным членом.

Оцененные коэффициенты приведенной формы могут быть использованы для оценивания структурных коэффициентов. Такой способ оценивания структурных коэффициентов называется *косвенным МНК*.

Приведенная форма модели аналитически уступает структурной форме модели, так как в ней отсутствуют оценки взаимосвязи между эндогенными переменными.

При переходе от приведенной формы модели у структурной возникает проблема идентификации.

Идентификация – это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Тот или иной структурный коэффициент может либо однозначно выражаться через приведенные коэффициенты, либо иметь несколько разных оценок, либо совсем не выражаться через них.

Структурный коэффициент называется *идентифицируемым*, если его можно вычислить на основе приведенных коэффициентов, причем *точно идентифицируемым*, если он единственен, и *сверхидентифицируемым*, если имеет несколько разных оценок; в противном случае он называется *неидентифицируемым*.

Какое-либо структурное уравнение называется идентифицируемым, если идентифицируемы все его коэффициенты. Если хотя бы один структурный коэффициент неиндифицируем, то и все уравнение является неидентифицируемым.

Модель считается идентифицируемой, если каждое ее уравнение идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то вся модель неиндифицируема.

5.2. Методы оценивания структурных уравнений

Рассмотрим различные виды структурных уравнений.

Точная идентифицируемость.

Допустим, требуется оценить параметры уравнения функции потребления в простой модели Кейнса формирования доходов:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t (\textit{функция потребления}); \\ \quad Y_t = C_t + I_t (\textit{тождество дохода}), \end{cases} \tag{5.3}$$

где C_t, Y_t, I_t – объем потребления, совокупный доход и инвестиции соответственно;

ε_t – случайный член.

Структурный коэффициент β характеризует предельную склонность к потреблению, т. е. из каждой единицы валового внутреннего продукта расходуется β единиц на конечное потребление.

В данной модели C_t, Y_t – эндогенные переменные, а I_t – экзогенная.

Непосредственное оценивание параметров α, β в структурном уравнении функции потребления дает *смещенные* и *несостоятельные* оценки, так как объясняющая переменная Y_t является эндогенной.

Разрешая структурную систему относительно эндогенных переменных, получим приведенную систему:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1-\beta}. \\ Y_t &= \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1-\beta}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

В приведенной системе коэффициенты при переменной I_t, равные $MC = \beta / (1 - \beta)$ и $MY = 1 / (1 - \beta)$ – *инвестиционные мультипликаторы потребления* и *дохода* соответственно. Это значит, что если объем инвестиций возрастает на единицу, то объем потребления увеличится на $\beta / (1 - \beta)$ единиц, а совокупный доход – на $1 / (1 - \beta)$ единиц.

Косвенный метод наименьших квадратов.

Уравнение для C_t в приведенной форме можно также представить в виде

$$C_t = \alpha' + \beta' I_t + \varepsilon'_t, \tag{5.5}$$

где $\alpha^{/} = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$; $\beta^{/} = \dfrac{\beta}{1-\beta}$; $\varepsilon_t^{/} = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta}$.

В этом уравнении экзогенная переменная I_t некоррелирована со случайным членом ε_t, поэтому для оценки параметров $(\alpha^{/}, \beta^{/})$ можно использовать обычный МНК.

Оцененное уравнение $\hat{C}_t = \alpha^{/} + \beta^{/} I_t$, полученное по выборочным данным с помощью МНК, дает *несмещенные* и *состоятельные* оценки параметров.

Поскольку оценки (α, β) структурных коэффициентов $\alpha = \dfrac{\alpha^{/}}{1-\beta}$, $\beta^{/} = \dfrac{\beta^{/}}{1-\beta}$ однозначно выражаются через оценки $(\alpha^{/}, \beta^{/})$ приведенных коэффициентов, то структурное уравнение функции потребления является *точно идентифицируемым*.

Таким образом, для решения точно идентифицируемого уравнения применяется косвенный метод наименьших квадратов (КМНК).

Процедура КМНК производится в несколько этапов.

1. Структурная модель преобразуется в приведенную форму.
2. Для каждого приведенного уравнения обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты.
3. Оценки приведенных коэффициентов преобразуются в оценки параметров структурных уравнений.

Сверхидентифицированность. ***Двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).***

Рассмотрим следующую простую модель Кейнса формирования доходов:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t (\textit{функция потребления}); \\ Y_t = C_t + I_t + G_t (\textit{тождество дохода}), \end{cases} \tag{5.6}$$

где G_t – объем государственных расходов.

В исходной модели C_t, Y_t – эндогенные переменные, а I_t, G_t – экзогенные. Обе экзогенные переменные I_t, G_t не присутствуют в структурном уравнении функции потребления и могут использоваться как инструментальные для эндогенной переменной Y.

Структурное уравнение модели, в которой число экзогенных переменных, которые могут использоваться как инструментальные, больше, чем необходимо, является *сверхидентифицируемым*.

Наилучшим решением в данном случае является применение *двухшагового метода наименьших квадратов (ДМНК)* и построение инструментальной переменной, которая является комбинацией I_t, G_t.

Процедура ДМНК производится в несколько этапов.

1. На основе приведенной формы модели получают для сверхидентифицированного уравнения теоретические (расчетные) значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения.

2. Подставляя теоретические значения эндогенных переменных вместо их фактических значений в сверхидентифицируемое уравнение и применяя обычный МНК, определяют его структурные коэффициенты.

ДМНК можно рассматривать как способ конструирования наилучшей из возможных комбинаций инструментальных переменных в случае, когда в уравнении имеется избыток экзогенных переменных, которые можно использовать как инструментальные для объясняющей эндогенной переменной.

6. СОДЕРЖАНИЕ, СУЩНОСТЬ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ

6.1. Объективная необходимость системного подхода при моделировании экономических явлений

Системный подход к изучению того или иного явления относится к общенаучным методам исследования. Он предполагает рассмотрение любого изучаемого явления как определенной системы составляющих его взаимодействующих элементов. Такой подход проявляется как соответствующий способ научного мышления, состоящий прежде всего в том, чтобы зафиксировать основные элементы изучаемого явления или процесса и исследовать их взаимодействия.

Основные понятия системного подхода: система, функция, структура, элемент, эконометрическая модельерджентность.

Система – это множество взаимосвязанных элементов, которым присуще новое качество, отсутствующее у отдельных элементов.

Элемент – это неразложимый в данной системе компонент сложных объектов и процессов.

Структура – относительно устойчивая фиксация связей между элементами системы, неизменяемая в отношении внешних преобразований.

Целостность системы – это ее относительная независимость от внешней среды и других систем.

Эконометрическая модельерджентность – это несводимость свойств системы к свойствам ее элементов.

Параметр – это оперативно выраженный элемент исследования системы, служащий формой локализации информации о свойствах и признаках этой системы.

Функция – это вид действия подсистемы, обеспечивающий целостность данной системы.

Основы системного анализа заложили труды Людвига фон Берталанфи и Уильяма Росса Эшби, а также работы американских ученых Норберта Винера и Анатоля Рапопорта. Все они в той или иной степени опирались на тектологию («Всеобщую организационную науку») русского ученого и философа Александра Александровича Богданова (Малиновского).

Логические основы системного анализа.

Системный анализ, представляя собой определенный способ научного мышления, имеет логические основы: понимание системы, т. е. того, что она собой представляет; научные представления о характере и механизмах функционирования систем; учет их разнообразия и выделение отдельных их видов; научные знания об эволюции систем и др. Разумеется, к логическим основам системного анализа относится и *система понятий*, в рамках которой осмысливаются сущность, содержание, функционирование и развитие систем. Следующий логический принцип системного исследования – *выявление источников развития изучаемой системы* (внутренних и внешних), что, в частности, предполагает исследование механизма воспроизводства данной системы, ее структуры и функций, а также механизма ее развития, появления у нее новых свойств и соответствующих способов адаптации к внешней среде – природной и социальной. Наконец, важным логическим основанием и в то же время методологическим принципом системного анализа является *учет многообразия систем*, в том числе социальных, выделение основных их видов по разным основаниям.

Цели системного анализа определяются пониманием его сути и содержания, обусловлены его логическими основами и заключаются в том, чтобы выявить и изучить основные элементы исследуемого явления или процесса как определенной системы. Это достигается с помощью анализа данного явления, мысленного разделения его на элементы и их изучения. При этом учитывается, что данные элементы проявляют себя только в их связях и взаимодействиях, заданных природой и характером данной системы. Отсюда другая цель: исследование содержания этих связей и взаимодействий и представление на уровне науки функционирования и развития рассматриваемого явления как целостной системы. Достигается это с помощью такого общенаучного метода исследования, как синтез. Благодаря ему, как уже упоминалось, выявляются эконометрические модельерджентные свойства системы, отсутствующие у ее элементов, но возникающие в процессе их взаимодействия, – тем самым достигается еще одна цель системного анализа явлений. Понятие «анализ» толкуется в данном случае расширительно, ибо включает в себя и синтез: подобное расширительное толкование метода анализа нередко встречается в литературе по системному анализу.

Как правило, системное исследование различных явлений и процессов преследует и другие цели: обнаружение внутренних источников их функционирования, основных направленностей развития явлений и процессов, объективных и субъективных сторон их существования и развития и др. При этом какая-то цель является основной и поэтому будет определять основную направленность данного исследования.

В конечном счете в процессе системного исследования формируется целая система его целей, принимающая вид так называемого дерева целей.

Пути и способы проведения исследований.

В начале исследования надо составить более или менее полное предварительное представление об изучаемом явлении или процессе на основе имеющейся информации о них, прежде всего научной. Это позволит яснее сформулировать основные и вытекающие из них иные цели исследования и при необходимости построить «дерево целей».

Затем необходимо выделить основные элементы изучаемых явлений и процессов и исследовать их взаимосвязи, чтобы составить целостное представление об этих явлениях и процессах. Следующий этап – выявление основополагающих факторов их функционирования и обнаружение внутренних и внешних источников их развития. Наконец, необходимо научно объяснить место и роль данного явления или процесса в функционировании и развитии той или иной сферы общественной жизни и общества в целом.

Выделяют различные этапы системного исследования природных и социальных явлений, на каждом из которых решаются определенные задачи. Что касается *способов* системного анализа, то они сводятся в основном к применению общенаучных методов исследования, в том числе анализа и синтеза, индукции и дедукции, эксперимента, аналогии, моделирования и др.

Задачи системного подхода:

1) определение сложности объекта;
2) определение целей исследования;
3) количественное определение изменяемых связей;
4) обобщение и формирование рациональных методов исследования;
5) разработка алгоритма построения систем;
6) исследование механизма оценки систем;
7) выработка организационных методов в проектировании и построении систем;
8) анализ информационных процессов;
9) организация сбора, обработки и управление информацией;
10) планирование деятельности и распределение полномочий.

Как уже отмечалось, моделирование явлений и процессов представляет собой их искусственное воспроизведение в модели, отражающей их основные свойства. Анализ самих таких моделей направлен на изучение с их помощью данного явления или процесса в целом, а также механизмов их функционирования и развития.

Модели системных исследований социальных процессов можно классифицировать по разным основаниям: модели, воспроизводящие причинно-следственные связи элементов экономического или политического процесса; модели жизненного цикла, фиксирующие основные этапы развития того или иного социального объекта (фирмы, акционерного общества и т. д., вплоть до жизненных циклов существования различных цивилизаций); модели волновой динамики развития экономики и др.

Системное моделирование экономических, политических и других процессов общественного развития осуществляется в виде идеальных моделей, логически воспроизводящих основные параметры и свойства указанных процессов. Такие модели могут быть выражены в виде схем, графиков, таблиц, математических формул, а также объясняющих их теоретических концепций.

Американские ученые Дж. Б. Мангейм и Р. К. Рич перечисляют этапы изучения политических процессов с помощью их математического моделирования.

Первый этап построения модели системного анализа – индуктивный: отбор наблюдений, относящихся к процессу, который предстоит моделировать.

Второй этап – переход от определения проблемы к построению неформальной модели, представляющей собой набор «инструментов» (допущений, принципов анализа), которые позволяют объяснить отобранные наблюдения; исследователи строят несколько неформальных моделей и пытаются определить, какая из них лучше отображает изучаемую проблему.

Третий этап – переход от неформальных моделей к формальным, в которых все допущения сформулированы в математической форме.

Четвертый этап – этап математической обработки формальной модели, который является решающим в математическом моделировании. Математический анализ этой модели предполагает выявление следствий действия моделируемого процесса; он представляет собой дедуктивное ядро, математического моделирования социальных процессов, заключающееся в поиске нетривиальных и непредвиденных выводов из правдоподобных допущений.

Далее следует вернуться к первоначальной стадии моделирования, чтобы проверить, соответствуют ли полученные выводы тому, что изначально ожидалось от модели, имеют ли эти выводы смысл в свете эконометрической модели эмпирических наблюдений, можно ли получить с помощью данной модели другие имеющие научное значение выводы, можно ли эту модель сделать более общей, чтобы исследовать с ее помощью более широкий круг социальных явлений.

Из изложенного можно сделать вывод: не переоценивая роли моделей системного анализа в исследовании общественных явлений, с их помощью можно получить достаточно содержательную информацию о структуре и функционировании указанных явлений, в том числе социально-экономических и политических процессов, носящих как устойчивый, так и неустойчивый, а также вполне определенный или же вероятностный характер.

6.2. Алгоритм симплексного метода

Симплексный метод является универсальным экономико-математическим методом. Для его использования условия задачи необходимо представить в виде уравнений и неравенств, количественно описывающих особенности функционирования изучаемого объекта.

Существенным достоинством метода является его универсальность, т. е. возможность использования для решения любых задач, условия которых записаны в виде системы уравнений и неравенств. Наряду с этим симплекс-метод обладает тем достоинством, что при приближении полупространства, выражающего целевую функцию, к экстремальной крайней угловой точке, он позволяет пропускать целый ряд промежуточных крайних угловых точек.

Метод получил свое название из геометрической интерезультативной показательретации условий задачи. Они позволяют получить многогранник решений или симплекс, крайняя угловая точка которого, будучи равной значениям переменных, превращает функцию в максимум или минимум.

Имеется несколько вариантов алгоритма симплекс-метода: обычный, m-метод (искусственного базиса) и др.

Рассмотрим вариант, позволяющий осуществлять наиболее простые вычисления.

Алгоритм симплекс-метода включает несколько этапов:

1) подготовка информации (включает введение переменных и формирование ограничений);

2) преобразование ограничений и запись их в матрицу;

3) поиск опорного решения;

4) поиск оптимального решения.

К примеру, имеем следующую экономико-математическую задачу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \le A_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m; \end{cases}$$

$$F = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n \to \max.$$

Преобразование ограничений связано, в первую очередь, с превращением неравенств в уравнения. Если при этом ограничения приведены к типу $\le$, то процедура вычислений значительно упрощается. Для этого ограничения типа $\ge$ умножим на (–1).

Превращение неравенств в уравнения связано с введением дополнительных переменных. В ограничениях типа $\le$ дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, в ограничениях типа $\ge$ – величину превышения ресурсов над минимумом потребности в них.

В уравнения дополнительные переменные не вводятся (или вводятся равными нулю):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \le A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + y_2 \le A_2; \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - ... - a_{3n}x_n + y_3 \le -A_3; \\ ....; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + y_m \le A_m. \end{cases}$$

При этом всякое решение осуществляется из допущения, что $x_j = 0,$ тогда

$$y_1 = A_1;$$
$$y_2 = A_2;$$
$$y_3 = A_3;$$
$$y_m = 0, \;\; 0 = A_m.$$

Решение получаем поиском опорного и оптимального решений.

Опорное решение получим при значениях переменных, когда ограничения задачи выполняются. Признаком выполнения ограничений является отсутствие 0-значений среди базисных переменных и отрицательных свободных членов.

При этом переменные, исходя из значений которых начинаем решение, будут базисными.

В первой симплексной таблице (табл. 6.1) такими базисными будут дополнительные переменные, т. е. вектор дополнительных переменных. Остальные переменные, обозначающие вектор-столбцы, будут небазисными. В табл. 6.1 небазисными будут основные переменные.

Т а б л и ц а 6.1. **Симплексная таблица № 1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные				
		x_1	x_2	x_3		x_n
y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
y_2	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
y_3	$-A_3$	$-a_{31}$	$-a_{32}$	$-a_{33}$		$-a_{3n}$
………………………………………………………………						
0	A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}
F	0	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$		$-\lambda_n$

Если в столбце дополнительных переменных есть 0, то это свидетельствует об искаженности базиса, т. е. отсутствии опорного решения. Таким образом, полученная запись при $x_j = 0$ свидетельствует, что базисное решение отсутствует по двум признакам, а именно:

- имеются отрицательные свободные члены;
- имеются 0-значения среди базисных переменных.

Всю информацию при допущении, что $x_j = 0$ заносим в таблицу.

Табл. 6.1 содержит $m + 2$ строк (где m – число строк ограничений) и $n + 2$ столбцов (где n – число небазисных переменных).

Коэффициенты целевой функции в табл. 6.1 записываются с противоположным знаком.

Нахождение опорного решения предполагает замену базисных переменных небазисными или поиск нового базиса. Чтобы исключить 0 с вектора базисных переменных необходимо в 0-строке найти такой коэффициент, от деления на который коэффициента A_m получим наименьшее положительное частное. Для этого вектор-столбец свободных членов делим на соответствующие коэффициенты столбцов x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Допустим, что при делении на коэффициенты первого столбца, т. е. $\frac{A_i}{a_{i1}}$ отношение $\frac{A_m}{a_{m1}} > \frac{A_2}{a_{21}}$. Это означает, что требование не выполняется. В другом случае (при $\frac{A_i}{a_{i2}}$) $\frac{A_m}{a_{m2}} > \frac{A_2}{a_{21}}$. Допустим, что при делении $\frac{A_i}{a_{in}}$ отношение $\frac{A_m}{a_{mn}}$ меньше всех других значений.

Тогда коэффициент a_{mn} можно принять за разрешающий.

Он указывает на то, что 0-значение и коэффициент x_n поменяются местами. Эта замена означает, что целевая функция (или полупространство F) переместилась параллельно самой себе и поэтому значение коэффициентов изменяется. Замена значений требует вычислений, которые всегда осуществляются по одним и тем же правилам.

Для записи формул, по которым определяются коэффициенты новой симплексной таблицы (табл. 6.2), введем условные обозначения, в частности, a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j. При этом F-строка будет иметь значение $i + 1$, а столбец свободных членов $j = 0$.

Допустим, что коэффициент a_{rk} – разрешающий, т. е. стоит в строке r и столбце k при $r \in i, k \in j$. При делении значений столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца k частное от деления A_i на a_{rk} было наименьшим.

Т а б л и ц а 6.2. **Симплексная таблица № 2**

Базисные переменные	Свободные члены B_i	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	0
y_1	B_1	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{1n}
y_2	B_2	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{2n}
y_3	$–B_3$	$–b_{31}$	$–b_{32}$	$–b_{33}$	$–b_{3n}$
………………………………………………………………					
x_n	B_m	b_{m1}	b_{m2}	b_{m3}	b_{mn}
F	F_1	$–z_1$	$–z_2$	$–z_3$	$–z_n$

Условимся, что коэффициент следующей таблицы будем обозначать со штрихом, т. е. a'_{ij}.

Правила:

1. Новый коэффициент (вместо разрешающего) равен обратному от него, т. е. $a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}} (a_{rk} \neq 0)$ или в данном случае $\frac{1}{a_{mn}}$.

2. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента равны коэффициентам предыдущей таблицы, деленным на разрешающий коэффициент с противоположным значением:

$$a'_{rk} = \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \text{ (при } i \neq r \text{)},$$

т. е. в данном случае $\frac{a_{in}}{a_{mn}}$ при $i \neq m$.

3. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента равны коэффициентам предыдущей таблицы этой строки, деленным на разрешающий коэффициент:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \text{ (при } j \neq k \text{) или } \frac{a_{mj}}{a_{mn}} \text{ при } j \neq n.$$

4. Остальные коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента, определяются по правилу прямоугольника, т. е. в числителе от произведения коэффициентов главной диагонали, среди которых находится разрешающий, вычитаем произведение побочной диагонали и результат делим на разрешающий коэффициент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rk} - a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}} = \frac{a_{ij}a_{rk}}{a_{rk}} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{rj} = a_{ij} + a'_{ik}a_{rj}$$

$$\text{или } a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik} = a_{ij} + a'_{rj} a_{ik}, \text{ (при } i \neq r, j \neq k \text{) } a_{rk} \neq 0.$$

Перебросив 0-значения из базисных значений в небазисные, получим в n-мерном пространстве m независимых векторов. Затем вычеркиваем 0-столбец, который в дальнейших расчетах участия не принимает. Просматривая столбец свободных членов, находим среди них отрицательные члены. Чтобы получить опорное решение, превращаем отрицательные свободные члены в положительные. Для этого базисные переменные с отрицательными свободными членами необходимо перевести в небазисные. При этом делаем столько шагов (таблиц), сколько имеется отрицательных свободных членов. За основу принимаем любую строку с отрицательным свободным членом. Лучшим вариантом является та строка, среди коэффициентов которой имеется больше единиц или целых чисел. Случается, что все свободные члены являются отрицательными и им соответствуют отрицательные коэффициенты в каком-то из столбцов. В этом случае опорное решение можно получить за один шаг, взяв в качестве разрешающего коэффициента отрицательный коэффициент, от деления на который получается наибольшее положительное частное. Таким образом, за один шаг все отрицательные свободные члены будут превращены в положительные.

С точки зрения геометрической интерезультативной показательретации (выпуклых множеств) это будет означать, что из мнимого многогранника решений мы переместились на реальный многогранник, но находимся не в самой лучшей выпуклой угловой точке.

Чтобы найти разрешающий коэффициент, делим значения столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбцов небазисных переменных.

Если $\frac{-B_3}{-b_{31}} = \min k$, то получим меньшее значение, чем от деления других частных $\frac{B_i}{b_{i1}} > \frac{-B_3}{-b_{31}}$. Допустим, что в данном случае частное $\frac{-B_3}{-b_{31}}$ меньше всех других. Следовательно, коэффициент ($-b_{31}$) является разрешающим.

Меняем местами x_1 и y_3, после чего проводим расчеты по приведенным выше четырем правилам (табл. 6.3).

Т а б л и ц а 6.3. **Симплексная таблица № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_3	x_2	x_3
y_1	C_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y_2	C_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
x_1	C_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}
……………………………………………………………………………………………..				
x_n	C_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}
F	F_2	$-z_1$	$-z_2$	$-z_3$

В этой таблице содержится опорное решение. Оно получено при следующих значениях переменных:

$$y_1 = C_1, y_2 = C_2, x_1 = C_3, x_n = C_m, y_3 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

После того как было получено опорное решение (т. е. все ограничения выполняются), находим оптимальное, признаком которого является наличие положительных значений коэффициентов целевой функции при ее решении на максимум и отрицательных – на минимум.

Чтобы найти оптимальное решение, выбираем разрешающий столбец. Им будет тот, в F-строке которого стоит наибольшее по модулю отрицательное значение при решении задачи на максимум и наибольшее положительное – на минимум.

Допустим, что $\left|-z_2\right| > \left|-z_1, -z_3\right|$. Следовательно, вектор-столбец $-z_2$ является разрешающим. При этом разрешающим элементом является тот коэффициент, от деления свободного члена на который будет получено наименьшее положительное частное, т. е. $\dfrac{c_i}{c_{i2}} = \min k.$

Допустим, что от деления c_3 на c_{32} было получено наименьшее положительное частное. Следовательно, x_2 и x_1 меняются местами, и мы находим новое решение по четырем правилам.

Вычисления будем продолжать до тех пор, пока в F-строке не получим положительные значения (при решении задачи на максимум) или отрицательные (при решении задачи на минимум).

Затем целесообразно проверить выполнение требований каждого из ограничений. Для этого переменные подставляются в каждое из ограничений. Если нарушения отсутствуют, то расчеты верны, если присутствуют – имеется ошибка в арифметических действиях.

6.3. Методика корректировки оптимального решения по базисным и небазисным переменным

Поскольку экономические объекты отличаются динамичностью, то изменяется и соответствующая информация (изменяются ресурсы, технологии и, следовательно, окупаемость ресурсов). В связи с этим полученное ранее оптимальное решение может уже не быть таковым и потребовать нового решения, т. е. увеличить или уменьшить размеры отрасли, ввести новые или исключить ранее выгодные отрасли. Чтобы избежать повторного решения задачи, достаточно произвести корректировку ее прежнего оптимального решения. Для этого используем информацию последней симплексной таблицы. В ней на основе коэффициентов пропорциональности следует произвести необходимые изменения. При этом коэффициентами пропорциональности называют коэффициенты симплекс-таблицы (начиная со второй), которая количественно выражает взаимосвязи переменных между собой и с ресурсами.

Обратимся к последней симплексной табл. 6.4.

Таблица 6.4. **Последняя симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены, B	Небазисные переменные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	800	2	–0,066	0,66	0,026
x_2	200	–1	0,066	0,34	–4,4
y_3	2000	–300	–50	–100	0,032
x_4	420	0,56	–0,017	–0,85	0,02
F	780000	200	26,7	136	9,3

Корректировку оптимального решения осуществляем по формуле

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - a_{ij}\Delta x_j(\Delta y_i), \tag{6.1}$$

где $x_j^k(y_i^k)$ – значения основных (дополнительных) переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – значения основных (дополнительных) переменных до корректировки;

j – номер столбца, участвующего в корректировке;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности (вектор-столбца, участвующего в корректировке);

$\Delta x_j (\Delta y_i)$ – величина корректировки по основной или дополнительной переменной.

Корректировка может производиться по небазисным и базисным переменным, а среди них – по основным и дополнительным переменным.

Корректировка по небазисным переменным.

Корректировка по основным небазисным переменным (переменные, не вошедшие в план, в данном случае x_3). При изменении цен или технологий не вошедшие в план (т. е. невыгодные) отрасли могут стать выгодными и их следует ввести в базис. Введение переменных предполагает изменение размеров других отраслей, использование ресурсов и экономических резервов.

Методика корректировки оптимального решения.

1. Из небазисных основных переменных выбираем те, по которым наметилось наибольшее возрастание эффекта или наиболее существенные изменения в технологии.

2. Находим максимальную величину корректировки по формуле $\max \Delta x_j = \min \frac{A_i}{a_{ij}}$, где $\max \Delta x_j$ – минимальное положительное частное от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем величине Δx_j значение, не превышающее максимально допустимую величину, т. е. $\Delta x_j \le \min \frac{A_i}{a_{ij}}$.

4. По общей формуле находим новое решение.

В данном примере среди небазисных имеется одна основная переменная x_3. Тогда

$$\max \Delta x_3 = \min \left\{ \begin{matrix} \frac{800}{0,66} = 1200 \\ \frac{200}{0,34} = 600 \end{matrix} \right\} = 600.$$

Допустим, что возможности хозяйства, исходя из наличия семян, потребности рынка или новых договорных поставок таковы, что Δx_3 должно быть равно 100.

Тогда новое решение соответственно будет иметь вид

$$\Delta x_3 = x_3 = 100;$$

$$x_1^k = 800 - 0,66 \cdot 100 = 734;$$

$$x_2^k = 200 - 0,34 \cdot 100 = 766;$$

$$x_3^k = 2000 - (-100) \cdot 100 = 12000;$$

$$x_4^k = 420 - (-0,86) \cdot 100 = 506;$$

$$F^f = 780000 - 136 \cdot 100 = 766400.$$

Если проверить его по ограничениям, то получится, что объемы ресурсов используются полностью.

Корректировка по небазисным дополнительным переменным **(y_i).**

Ресурсы уменьшаются, если $\Delta y_i = y_i > 0$. Например, имеем ограничение по использованию пашни $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$. $\sum x_1, x_2, x_3$ была максимальной и равняется 1000, при этом $y_1 = 0$. Если y_1 возрастал, то величина справа и слева от него уменьшилась, т. е. ресурс уменьшился.

Методика корректировки решения.

1. Выбираем дополнительную переменную, стоящую в ограничении по использованию того ресурса, который уменьшился или будет уменьшаться.

Причинами уменьшения ресурса могут быть: разгосударствление и приватизация, вследствие чего ресурсы пашни и фондов бывшего хозяйства уменьшаются; создание фермерских хозяйств в рамках многоотраслевых хозяйств; выделение фермерских хозяйств из кооперативов, акционерных предприятий.

2. Максимальную величину определяем так же, как и в предыдущем случае.

3. В рамках возможного Δy_i придаем значение, которое определяет величину уменьшения ресурса.

4. Новое решение определяем по основной формуле корректировки.

Допустим, что создается фермерское хозяйство площадью 150 га, т. е. $\Delta y_i = y_i = 150$. Тогда в кооперативе с площадью пашни 1000 га происходит уменьшение ресурса.

Ресурсы увеличиваются, если $\Delta y_i = y_i \le 0$.

Причинами увеличения ресурсов являются: объединение нескольких кооперативов (кооператив приобрел фонды); увеличилась площадь землепользования фермерских хозяйств; увеличилась численность работников и т. д.

Методика корректировки следующая:

1) находим ресурс, по которому возможно увеличение;

2) находим максимальную величину корректировки $\max \Delta y_i = \min \left| -\frac{A_i}{a_{ij}} \right|$.

Она равна минимальному по модулю отрицательному частному от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку;

3) придаем Δy_i значение корректировки со знаком «–», меньшее по модулю, чем максимально возможная величина;

4) используя основную формулу, осуществляем корректировку.

Допустим, что в кооперативе может увеличиться площадь пашни, т. е. $y_1 < 0$: $\frac{800}{2} = 400$, $\frac{200}{-1} = -200$, $\frac{2000}{-300} = -6,6$, $\frac{420}{0,56} = 750$, $\max \Delta y_i = -6,6$.

Допустим также, что фермерское хозяйство взяло в аренду 5 га пашни. Тогда $\Delta y_i = -5$.

Значения остальных переменных получаем по изложенной выше методике, т. е. подставляя значение $\Delta y_i = y_i = -5$.

Корректировка по базисным переменным.

1. Определяем небазисные переменные, которые будут участвовать в корректировке. Выбираем основные переменные в случае, когда в результате корректировки не должно произойти уменьшение какого-то ресурса.

Необходимость корректировки по базисным переменным может диктоваться тем, что изменяются ранее отработанные технологии или подходы к развитию отдельных отраслей.

Например, ранее работники АПК ориентировались на то, чтобы площадь зерновых не превышала 50 %, а часть зерна при этом закупали.

Потребность в валюте вынуждает наращивать площади сенокосов и пастбищ для увеличения производства кормов, а оставшуюся часть пашни (до 10 %) использовать для производства зерна.

Другой пример – необходимость соблюдения экологической безопасности. Поскольку технология очистки отходов животноводческих комплексов далека от совершенства, то вместо возведения крупных животноводческих комплексов предпочтение отдают строительству средних. Этому способствует и то обстоятельство, что животноводство надо развивать на основе собственных кормов.

Однако при этом может потребоваться увеличение площади зерновых или уменьшение поголовья животных.

2. По данным общей формулы корректировки находим, какой должна быть величина $\Delta x_j(\Delta y_i)$ с тем, чтобы базисная переменная $x_j^k(y_i^k)$ приобрела новое значение: $x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - a_{ij}\Delta x_j(\Delta y_i)$, $j = 1$.

Задаем значение $x_j^k(y_i^k)$ и определяем величину $\Delta x_j(\Delta y_i)$:

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}}.$$

3. Находим максимальную величину корректировки по небазисной переменной по формуле

$$\max \Delta x'_j(\Delta y'_i) = \min \frac{A_i}{a_{ij}}.$$

Тогда:

а) если $\Delta x'_j(\Delta y'_i) > \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможная величина превышает требуемую $\Delta x_j(\Delta y_i)$, то корректировку осуществляют, используя один столбец;

б) если $\Delta x'_j(\Delta y'_i) < \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможное значение меньше требуемой величины, то в корректировке используют не менее двух вектор-столбцов дополнительных переменных.

При этом на первом этапе $\Delta x_j(\Delta y_i)$ принимают в размере $\Delta x'_j(\Delta y'_i)$, $\Delta x_j(\Delta y_i) = \Delta x'_j(\Delta y'_i)$.

Например, корректировку необходимо провести, чтобы $x_j^k = x_j = 700$. Используя небазисную переменную x_k, можем осуществлять корректировку, после которой x_j может принять значение 650, т. е. $x_j = 650$.

На следующем этапе берем новую небазисную переменную, за счет которой обеспечим приращение x_j на 50 единиц.

6.4. Двойственные оценки

В условиях самоокупаемости и самофинансирования каждое предприятие стремится к приобретению ресурсов, обеспечивающих наращивание темпов производства и высокую окупаемость издержек.

Затраты на приобретение ресурсов предприятие будет сравнивать с результатами от использования этих ресурсов. Однако в каждом предприятии (в силу взаимозаменяемости ресурсов и различий в технологиях) объем отдельных видов ресурсов, необходимых для получения единицы продукции, не одинаков.

Для успешного достижения конечных результатов необходимо, в первую очередь, обеспечить высокую окупаемость лимитированных и незаменимых ресурсов.

Следовательно, с точки зрения достижения конечных результатов (прибыли) окупаемость отдельных ресурсов по хозяйству в стоимости произведенной продукции будет различной. Ресурсы, выгодные для приобретения одним предприятиям, будут не выгодны другим. Поэтому фермерским хозяйствам, кооперативам и др. необходимо владеть инструментом объективной оценки ресурсов в конкретных условиях функционирования объекта, что позволит соответствующим работникам принимать взвешенные решения.

Таким инструментом являются двойственные или объективно обусловленные оценки. Двойственные оценки, рассчитанные по регионам, есть оптимальные цены на ресурсы в условиях равновесия спроса и предложения. Таким образом, двойственные оценки в условиях рынка могут стать важнейшим инструментом государства для экономического вмешательства в механизм хозяйствования.

Ненулевые двойственные оценки имеют ресурсы, которые лимитированы, не избыточны. Если ресурс избыточен, то он замораживает денежные средства предприятия и имеет нулевую двойственную оценку, хотя хозяйственная ценность этого ресурса в первую очередь для предприятий, испытывающих потребность в нем, значительна. При изменении технологии, ценовых и других характеристик возможно изменение потребности в подобном ресурсе и его запасы могут быть полностью использованы, а двойственная оценка примет ненулевое значение.

Двойственные оценки имеют ту же единицу измерения, что и целевая функция задачи. Поэтому целевая функция, на основе которой определяются двойственные оценки, должна соответствовать целям работы предприятий в условиях самоокупаемости и самофинансирования.

Двойственные оценки получают как при решении обычной (прямой) задачи, так и при решении специальной, двойственной или транспонированной задачи. Однако при составлении и решении прямой задачи главная цель, которую мы преследуем, состоит в определении значений переменных задачи. Поэтому ограничения задачи составляют таким образом, чтобы количественно описать все условия, оказывающие влияние на функционирование каждой переменной (обозначающей отрасль и т. д.).

При составлении прямой задачи возможно объединение ресурсов (например, труд годовой и в том числе труд механизаторов), ибо такое объединение чаще всего не оказывает влияние на результаты решения задачи. Полученная при решении прямой задачи двойственная оценка является дополнительной количественной характеристикой оптимального плана.

При определении двойственных оценок на основе двойственной задачи предъявляются более строгие требования к ограничениям. Например, при записи ограничений по труду следует отдельно записать ограничения по ручному труду и труду механизированному. Ограничения двойственной задачи должны как можно полнее характеризовать использование всех (или почти всех) ресурсов, факторов, взаимосвязей, определяющих процесс функционирования изучаемого объекта.

Методика обоснования и использования двойственных экономико-математических оценок.

Обоснование двойственных оценок осуществляют в двойственной или транспонированной задаче, которую получают на основе прямой.

Допустим, что имеем задачу или экономико-математическую модель

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m;\\
&F_{\max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.
\end{aligned}
$$

В общем виде ее можем записать:

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i\ ,\ i = 1, ..., m\ ,$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j\ \ [\text{при}\ x_j \ge 0].$$

Для построения двойственной задачи вводятся двойственные оценки. Их будет столько же, сколько ограничений (u_1, u_2, u_m). Здесь u_1 показывает, на сколько единиц возрастет целевая функция, если первый ресурс увеличится на единицу сверх величины A_1. Таким образом, двойственная оценка по смысловому содержанию противоположна знаку ограничения. Если знак «≤», то она предполагает прибавку (увеличение) F-значения (если ресурс возрастает на единицу сверх величины A_i). Если же знак ограничения «≥» и ресурс A_i уменьшится на единицу, то двойственная оценка свидетельствует об уменьшении значения F.

Методика построения двойственной задачи.

1. Коэффициентами строки двойственной задачи становятся коэффициенты столбца прямой задачи. При этом знаки ограничений меняем на противоположные. Если в прямой задаче ограничения имеют разные знаки, то следует привести их к одним (тем, которых больше).

2. Свободными членами двойственной задачи являются коэффициенты F-строки прямой задачи.

3. Коэффициентами F-строки двойственной задачи являются свободные члены прямой задачи. При этом цель решения двойственной задачи противоположна цели прямой задачи. Двойственная задача будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \ge \lambda_1;\\
&a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}x_m \ge \lambda_2;\\
&..;\\
&a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \ge \lambda_n;\\
&F_{\min} = A_1u_1 + A_2u_2 + ... + A_mu_m;\\
&u_1 \ge 0;\ \ u_2 \ge 0;\ \ \dots, u_m \ge 0.
\end{aligned}$$

В общем виде $\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \ge \lambda_j$, $j \in J_0$, $F_{\min} = \sum_{i \in i_0} A_i u_i$.

Первое ограничение обозначает то, что расход первого ресурса a_{11} на единицу отрасли x_1, умноженный на оценку первого ресурса, плюс расход второго ресурса на единицу первой отрасли, умноженный на оценку второго ресурса u_2, и т. д., плюс расход m-го ресурса на единицу первой отрасли, умноженный на оценку m-го ресурса u_m, будут не меньше коэффициента целевой функции на единицу первой отрасли x_1.

Двойственные оценки определяют значение каждого ресурса в конечных результатах предприятия, обозначенных целевой функцией.

Содержание двойственных оценок вытекает из основных теорем двойственности.

Из первой теоремы двойственности следует, что максимум целевой функции прямой задачи равен минимуму целевой функции двойственной задачи, т. е.

$$\max\left\{\sum_{j\in J_0}\lambda_j x_j\right\}=\min\sum_{i\in I_0}A_i u_i.$$

Это означает, что оценка всей продукции прямой задачи в двойственной задаче равна общей оценке ресурсов, затраченных на ее производство. Отсутствие такого равенства свидетельствует о том, что данный план не оптимален.

Из второй теоремы двойственности вытекают следующие требования:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{если } u_1>0, \text{ то } \sum\limits_{j\in J_0}a_{ij}x_j=A_i, i\in I_0\\ \text{если } \sum\limits_{j\in J_0}a_{ij}x_i<A_i, \text{ то } u_i=0, i\in I_0\end{array}\right\},$$

т. е. если оценка единицы ресурса вида i положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью, если же оценка равна нулю, то используется не полностью:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{если } x_j>0, \text{ то } \sum\limits_{i\in I_0}a_{ij}u_i=\lambda_j, j\in J_0\\ \text{если } \sum\limits_{i\in I_0}a_{ij}u_i>\lambda_j, \text{ то } x_j=0, j\in J_0\end{array}\right\},$$

т. е. если отрасль включена в оптимальный план, то производство ее продукции по оценкам оправдано, так как общий расход ресурсов на единицу продукции отрасли в оценках оптимального плана равен цене продукта отрасли.

Если же отрасль убыточна, то она отсутствует в оптимальном плане, так как оценка ресурсов, затрачиваемых на единицу продукции отрасли, больше цены продукции единицы отрасли.

Иногда может быть рассчитан такой план, в котором $x_j = 0$, а соответствующее ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство. Получается, что вид продукции не вошел в оптимальный план, а по его оценкам производство данного вида продукции рентабельно. Это возможно при наличии альтернативных вариантов плана. Значение целевой функции при этом не изменяется.

Из рассмотренных положений вытекают основные свойства двойственных оценок.

Первое свойство двойственных оценок связано с мерой дефицитности ресурсов, продуктов. Сущность его состоит в том, что если ограничение выполняется как строгое равенство, то оценка будет ненулевая; если же как неравенство типа >, < – нулевая.

Второе свойство связано с устойчивостью оценок. Если бы оценки были неустойчивы, т. е. менялись с изменением каждого параметра задачи, то они не представляли бы экономического интереса и потеряли свое значение в качестве средства экономико-математического анализа. Но для двойственных оценок характерна определенная устойчивость к изменению параметров правой части модели и неустойчивость к изменению технико-экономических коэффициентов и коэффициентов целевой функции.

Третье свойство двойственных оценок связано с мерой влияния ограничения на функционал.

Экономическое содержание оценок определяется содержанием критерия оптимальности и того фактора производства (или условия выпуска продукции), которое они оценивают. Единицу измерения оценки имеют ту же, что и функционал.

Нулевые оценки по ресурсам или продуктам свидетельствуют о том, что изменение объема ограничения на их единицу не повлияет на значение функционала, так как ресурс по оптимальному плану имеется в избытке, а продукт произведен сверх плана. Ненулевые оценки по ресурсам показывают то, насколько увеличивается (или уменьшается) функционал при увеличении или уменьшении ресурса, приходящегося на единицу продукции.

Таким образом, двойственные оценки позволяют определить конечный эффект от принятия того или иного решения по изменению исходных условий задачи.

Четвертое свойство связано с взаимозаменяемостью ресурсов или продуктов. При этом используется не абсолютная взаимозаменяемость, а относительная, т. е. та, которая влияет на значение критерия оптимальности. Взаимозаменяемость определяется по соотношению двойственных оценок.

Пятое свойство связано с мерой рентабельности отдельных способов затрат ресурсов. Это означает, что по способам, вошедшим в оптимальный план, затраты ресурсов в оценках оптимального плана равны запланированному эффекту.

На основе решения двойственной задачи можно получить решение прямой задачи.

При этом:

1. $F^{\text{Т}}_{\max}$ равно $F_{\min}$ и наоборот.

2. Небазисные дополнительные переменные $y_i^{\text{Т}}$ транспонированной задачи приравниваем к основным переменным прямой задачи при условии, что $i = j$ и эти значения равны положительным коэффициентам λ_i последней таблицы

$$y_i^{\text{Т}} = x_j^{\text{П}} = +\lambda_j^{\text{Т}}.$$

$y_1^{\text{Т}} = x_1^{\text{П}} = 937,5$ т. е. y_1 двойственной (транспонированной) задачи равно x_1 прямой и т. д.

$$y_2^{\text{Т}} = x_2^{\text{П}} = 112,5; \quad y_4^{\text{Т}} = x_4^{\text{П}} = 562,5.$$

3. Двойственные оценки приравниваются к дополнительным переменным прямой задачи при $i = j$ и эти значения равны положительным коэффициентам λ_i последней таблицы:

$$u_i = y_i^{\text{П}} = +\lambda_j^{\text{Т}}, \quad i = j.$$

В нашем случае $u_3 = y_3^{\text{П}} = 275$, $u_5 = y_5^{\text{П}} = 37,5$.

7. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА (МОБ)

7.1. Сущность и формализация МОБ

Теоретические основы рассматриваемого метода в оформленном виде были впервые представлены американским экономистом русского происхождения Василием Леонтьевым под названием метода «затраты – выпуск». Подобные модели называют также моделями Леонтьева, а в советской литературе их было принято называть межотраслевыми моделями или межотраслевыми балансами.

В анализе «затраты – выпуск» упор делается на количественные связи в экономике. Это «технологический срез» сложившегося в данный момент состояния общего экономического равновесия. Как писал В. Леонтьев в своей работе: *«Сей скромный труд описывает попытку применить экономическую теорию общего равновесия к эконометрическому модельпирическому изучению взаимосвязи между различными отраслями народного хозяйства, проявляющейся в ковариации цен, объемов производства, капиталовложений и доходов»*.

При данном подходе вся экономика разбивается на ряд отраслей (Леонтьев выделял 44 отрасли, в современных моделях их значительно больше), между которыми движутся потоки ресурсов, промежуточной и готовой продукции. Последствия изменения в конечном спросе или в условиях производства в одной отрасли изучаются через прослеживание количественной реакции всех взаимосвязанных отраслей.

Основные предпосылки анализа таковы:

1. В экономической системе производятся, потребляются и инвестируются n типов продуктов (товаров).

2. Каждая отрасль является «чистой», т. е. производит только один тип продукта. Различные отрасли производят различные типы продуктов. Таким образом, n отраслей и n типов продуктов находятся во взаимно однозначном соответствии.

3. Основным элементом модели является квадратная *матрица технологических коэффициентов* (или *матрица прямых затрат*) размерности $n \times n$: $A = (a_{ij})_{nxn}$. Числа a_{ij} (*коэффициенты прямых затрат*) показывают, сколько продукции отрасли i необходимо затратить для производства единицы продукции отрасли j.

Основное допущение модели заключается в том, что эти коэффициенты остаются постоянными вне зависимости от масштаба производства, т. е. предполагается постоянная эффективность от укрупнения масштаба производства. Кроме того, в процессе производства исключается взаимозаменяемость ресурсов, они должны находиться в строгой пропорции.

Как уже отмечалось ранее, за исключением редко встречающегося случая абсолютной незамещаемости одного фактора производства другим, сами технологические коэффициенты есть результат экономического выбора и зависят от цен. Общий равновесный анализ показывает, что любое изменение потребностей или технологии производства какого-либо товара изменит структуру относительных равновесных цен и тем самым приведет к изменению технологических коэффициентов.

Также можно рассчитать по межотраслевому балансу коэффициенты полных затрат. *Коэффициенты полных затрат* характеризуют суммарные затраты конкретного ресурса на единицу продукции анализируемой отрасли, которые были на всех стадиях производства ее продукции.

Введем обозначения. Пусть x_i – выпуск i-го продукта в единицу времени, например за год. Эта величина представляет собой валовой выпуск (валовой продукт). Он распадается на две части: производственное потребление во всех отраслях и конечное (непроизводственное) потребление.

Производственное потребление i-го продукта всеми отраслями равно $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Тогда конечное потребление i-го продукта обозначим c_i.

Полученная система уравнений и представляет собой МОБ:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i, i = \overline{1, n}. \qquad (7.1)$$

Ее можно представить в матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

x – вектор валового выпуска;

c – вектор конечного потребления (чистого выпуска);

A – матрица прямых затрат.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} -------- \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Тогда можно записать

$$X = AX + C. \tag{7.2}$$

Разновидности матричных балансовых моделей.

Величины x, a_{ij} и c_i могут быть представлены в натуральных или стоимостных единицах измерения, в соответствии с этим различают:

1) *натуральный МОБ*;

2) *стоимостный МОБ.*

Данные модели могут применяться как на уровне народного хозяйства, так и на уровне отдельного предприятия.

В зависимости от объекта исследования различают:

1) матричную модель народного хозяйства в целом (государства, республики);

2) матричную модель межрегионального баланса (Северо-восточный регион);

3) балансовые модели на уровне отдельных предприятий (матричные модели техпромфинплана).

Их можно рассчитать исходя из вариантов:

1. Когда задается уровень валовой продукции, то рассчитываются все технологические коэффициенты по производящим и потребляющим отраслям.

2. Когда задается уровень конечной продукции (вектор), рассчитывается вектор валовой продукции и все технологические коэффициенты.

Отметим важную особенность системы, вытекающую из прикладного характера задачи: *все элементы матрицы А и векторов Х и С должны быть неотрицательными.*

Такие, матрицы и векторы будем называть *неотрицательными*. Если же все элементы матрицы (вектора) неотрицательны и хотя бы один из них положителен, то такую матрицу (вектор) будем называть *положительной*.

7.2. Продуктивность модели МОБ

МОБ представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными, которая является хорошо изученным объектом линейной алгебры. Однако одна особенность этой системы вызывает интерес со стороны математиков.

По очевидным экономическим соображениям и коэффициенты, и МОБ должны быть неотрицательными. Отсюда возникает вопрос: каковы условия существования неотрицательного решения ($x_i \geq 0$) при заданных $c_i \geq 0$ и $a_{ij} \geq 0$. С экономической точки зрения разрешимость системы в неотрицательных величинах означает работоспособность или продуктивность МОБ.

Определение 1. Матрицу A называют *продуктивной,* если:

1) она неотрицательна;

2) для любого неотрицательного вектора C уравнение МОБ (с этой матрицей A) имеет неотрицательное решение X.

В таком случае и МОБ называют *продуктивной*.

Для уравнения МОБ разработана теория исследования решения и его особенностей. Укажем некоторые ее основные моменты.

Приведем без доказательства важную теорему, позволяющую устанавливать продуктивность матрицы.

Теорема 1. Пусть A – неотрицательная матрица. Ели хотя бы для одного положительного вектора C уравнение Леонтьева имеет положительное решение X, то матрица A продуктивна.

Иными словами, если все элементы матрицы неотрицательны, то достаточно установить наличие положительного решения системы хотя бы для одного положительного вектора C, чтобы матрица A была продуктивной.

Преобразуем систему уравнений баланса в матричной форме, используя единичную матрицу E:

$$\begin{aligned} & X = AX + C \Leftrightarrow EX = AX + C \\ & \Leftrightarrow EX - AX = C \\ & \Leftrightarrow (E - A)X = C. \end{aligned}$$

Если матрица $E - A$ обратима (т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$), то для любого C существует единственное решение X последнего уравнения, получаемое умножением обеих частей этого уравнения слева на матрицу $(E - A)^{-1}$:

$$X = (E - A)^{-1} C. \qquad (7.3)$$

Матрицу $(E - A)^{-1}$ называют *матрицей полных затрат.*

Если обозначить матрицу $(E - A)^{-1} = B$, то ее элементы $в_{ij}$ будут иметь следующую экономическую интерезультативную показательретацию: если выпуск конечного продукта j нужно увеличить на 1, то валовый выпуск продукта i должен быть увеличен на $в_{ij}$. Например, для увеличения производства автомобилей необходимо увеличить расход электроэнергии. Но в то же время для этого требуется и больше стали, для производства которой также нужна электроэнергия, и т. д. То есть происходит цепная реакция, которую и характеризуют $в_{ij}$.

Существует несколько критериев продуктивности матриц. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности.

Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ *существует и неотрицательная*.

Второй критерий продуктивности. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

7.3. Табличное представление МОБ

Особое место в балансовом методе занимает *межотраслевой баланс*. Он представляет шахматную таблицу, в которой в основной части строками являются отрасли производства продукции, а столбцами – те же отрасли, но которые рассматриваются уже потребляющими продукцию всех отраслей. В каждый таким образом образуемый квадрант заносятся величины, которые, если рассматривать по строке, характеризуют производство и распределение по отраслям продукции при использовании определенного количества продукции своей отрасли и других отраслей. Если рассматривать шахматку по столбцам, то каждая величина в отдельности и в комплексе выражает в абсолютном и относительном исчислении процесс производства и использования произведенной продукции.

Есть примеры разработки межотраслевого баланса на макроэкономическом уровне, охватывающего 17 отраслей и 14 сфер услуг. В настоящее время такой баланс иногда называется *симметричной таблицей «Затраты – выпуск»*, в которой объемы производства и объемы потребления приводятся в стоимостном выражении, хотя по народному хозяйству периодически разрабатывались межотраслевые балансы в стоимостном, натуральном и условно-натуральном выражении.

Рассмотрим табличное представление модели межотраслевого баланса. Для упрощения представления информации введем следующее обозначение: $x_{ij} = a_{ij}x_j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$.

Величина x_{ij} показывает объем продукции i-й отрасли, используемый j-й отраслью. С учетом принятых обозначений приведем таблицу межотраслевого баланса в стоимостном выражении (табл. 7.1).

Каждая строка в межотраслевом балансе представляет балансовое уравнение. В одной части (первый квадрант) распределение произведенной продукции по отрасли, в правой части (втором квадранте) – конечное потребление продукции. Если число отраслей, производящих продукцию, и количество отраслей, потребляющих продукцию, будет $n(i = 1, 2, ..., n)$, то балансы будут следующие:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + ... + x_{1j} + ... + x_{1n} = X_1 - c_1; \\ &x_{21} + x_{22} + ... + x_{2j} + ... + x_{2n} = X_2 - c_2; \\ &...; \\ &x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nj} + ... + x_{nn} = X_n - c_n, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где X_1, X_2, …, X_n – объем производства продукции соответственно в первой, второй, …, n-й отраслях;

c_1, c_2, …, c_n – конечное потребление продукции соответственно первой, второй, …, n-й отраслей;

x_{ij} – объем потребления i-й продукции (i-й строки), в j-й отрасли (j-го столбца) ($n = m$).

В столбцах межотраслевого баланса отражается структура материальных затрат и чистой продукции каждой отрасли. Допустим, 1-я отрасль – это производство мяса, 2-я – перерабатывающая промышленность. Тогда величина x_{11} показывает стоимость мяса, израсходованного внутри 1-й отрасли для собственных производственных нужд. Величина x_{12} отражает затраты в производстве мяса. В целом же столбец x_{11}, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1} характеризует структуру материальных затрат 1-й отрасли за отчетный год в разрезе отраслей-поставщиков.

В балансе отражены не только материальные затраты, но и чистая продукция отраслей. Так, чистая продукция 1-й отрасли характеризуется v_1 – чистым доходом (прибылью). Итог материальных затрат и чистого дохода равен, очевидно, валовой продукции отрасли (например, для 1-й отрасли – величине x_1).

Т а б л и ц а 7.1. **Таблица межотраслевого баланса**

Отрасли-поставщики	Отрасли-потребители		Промежуточный спрос	Конечный спрос	Валовой выпуск
	1	2 … n			
1	x_{11}	$x_{12} \dots x_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	c_1	x_1
2	x_{21}	$x_{22} \dots x_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	c_2	x_2
… … …	… … …		… … …	… … …	… … …
n	x_{n1}	$x_{n2} \dots x_{nn}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	c_n	x_n
Материальные затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$ $\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$		
Чистый доход	v_1	$v_2 \dots v_n$		$\sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{i=1}^{n} c_i$	
Валовой выпуск	x_1	$x_2 \dots x_n$			$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Таким образом, можно записать:

$$x_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{n1} + v_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{i1} + V_i. \qquad (7.5)$$

То же соотношение для любой отрасли имеет следующий вид:

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j. \qquad (7.6)$$

Если рассматривать модель по строкам межотраслевого баланса, то здесь представлено распределение годового объема продукции каждой отрасли материального производства $x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1j} + c_1 =$ $= \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + c_1$, тогда для любой производящей отрасли:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i. \qquad (7.7)$$

Если сравнить правую и левую части уравнений (7.6) и (7.7), то можно отметить, что у них присутствует общий член x_{ij}. Тогда можно записать выражение

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i. \qquad (7.8)$$

Выражение (7.8) показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип – это единство материального баланса, представленного выражением, как единства вещественного и стоимостного состава национального дохода.

Таблица-шахматка состоит из трех частей (квадрантов), различных по своему экономическому содержанию.

Квадрант I – промежуточная продукция, показывает распределение материальных затрат по всем производящим отраслям.

Квадрант II – конечная продукция, которая вышла из сферы производства и попала в сферу сбыта. В развернутом виде ее можно представить как продукцию, идущую на личное потребление, на общественные нужды, а также на восполнение ресурсов и экспорт.

Квадрант III – характеризует национальный доход со стороны его стоимостного состава как сумму чистого дохода всех отраслей материального производства. Данные этого квадранта необходимы для глубокого экономического анализа.

Квадрант IV – отражение конечного распределения и использования национального дохода. Он находится на пересечении столбцов конечной продукции и строк национального дохода.

В целом модель отражает балансы отраслей материального производства, баланс всего общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый баланс, баланс доходов и расходов населения. В балансе отражено единство материально-вещественного и стоимостного состава национального дохода.

8. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

8.1. Общие сведения

Теория массового обслуживания изучает процессы, в которых, с одной стороны, постоянно возникают запросы на выполнение каких-либо работ, а с другой – происходит постоянное удовлетворение этих запросов. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем составляет систему массового обслуживания (СМО).

Система массового обслуживания (СМО) – это совокупность техники, каналов, орудий, лиц обслуживания, на которые в случайные или детерминированные моменты времени поступают заявки на обслуживание. Например, механизаторы, доярки, рабочие линии молокозавода.

Оптимизация и оценка эффективности СМО состоит в нахождении средних суммарных затрат на обслуживание каждой заявки и нахождение средних суммарных потерь от необслуженных заявок.

СМО состоит из определенного числа обслуживающих каналов и предназначена для выполнения заявок с разным характером распределения момента времени на обслуживание.

Моделирование СМО предполагает:

1) построение эконометрических моделей, связывающих параметры СМО (число каналов, их производительность и т. п.) с показателями эффективности;

2) оптимизацию данных показателей с целью получения максимальной эффективности.

Рассмотрим отдельные элементы СМО.

Требование (заявка, клиент) – это каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы в теории МО. Требования поступают в систему обслуживания из источника. Выполнение работы по удовлетворению поступившего требования называется обслуживанием. Объекты, занимающиеся этими операциями, – это обслуживающие аппараты (приборы, устройства, каналы, сервис и т. п.). Каждая СМО состоит из некоторого числа каналов обслуживания (одного или нескольких).

Время обслуживания – это период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание (время от начала обслуживания до его завершения). Период от момента поступления требования в систему и до начала обслуживания – это время ожидания обслуживания.

Следовательно, время ожидания обслуживания в совокупности со временем обслуживания составляет время пребывания требования в системе.

Максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно, определяет *пропускную способность системы обслуживания*. Если она равна единице – это однолинейная СМО, больше единицы – многолинейная. Поток требований, поступающих на систему обслуживания, – входящий; поток требований, покидающих обслуживающую систему, – выходящий.

Таким образом, предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы (число каналов, их производительность, характер потока заявок) с показателями эффективности обслуживания.

Изучение очередей в СМО позволяет определить критерии функционирования обслуживающей системы, среди которых наиболее значимыми являются среднее время ожидания в очереди и средняя длина очереди. Данные показатели используются затем для выбора надлежащего уровня обслуживания.

Можно построить множество моделей систем массового обслуживания, варьируя различными операционными характеристиками.

По числу каналов обслуживания СМО делятся:

а) на одноканальные;

б) многоканальные.

Одним из классификационных признаков является поведение требования, поступившего на вход системы, когда все каналы заняты. В соответствии с этим СМО бывают:

а) системы с отказами (потерями);

б) системы с ожиданием (очередью).

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему необслуженными и теряются. Среди систем с ожиданием различают чистые и смешанные (с ограничением). СМО с ожиданием называется чистой, когда требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов. В данном случае время пребывания в очереди или системе, а также длина очереди не ограничиваются.

Смешанные СМО могут быть следующих видов:

а) с ограниченной длиной очереди (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней);

б) с ограниченным временем ожидания (т. е. допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней);

в) с ограничением на общее время пребывания требований в них;

г) с ограничением на длину очереди и время пребывания в очереди (здесь требование покидает систему, если оно застало все каналы занятыми и очередь максимально допустимой длины, а также, если оно постояло в очереди в среднем дольше некоторой величины);

д) с ограничением на длину очереди и время пребывания требований в системе.

Следующим признаком классификации систем массового обслуживания является организация потока требований (или количество источников требований). В этом случае СМО бывают:

а) разомкнутые (когда источник требования находится вне системы). По-другому их называют с неограниченным входящим потоком или с неограниченным числом источников требований.

б) замкнутые (когда источник находится в самой системе). Их еще называют системами с ограниченным потоком требований или с ограниченным числом источников требований.

Следующим признаком классификации является дисциплина обслуживания, т. е. правило отбора требований, поступающих в каналы обслуживания. Другими словами, это способ занятия канала обслуживания или способ выбора требования из очереди. По этому признаку СМО делятся на системы без приоритета и системы с приоритетами.

Системы массового обслуживания без приоритета могут быть:

а) с упорядоченным обслуживанием. Наиболее распространенным является выбор требований в порядке их поступления в очередь: «первым пришел – первым обслуживаешься», т. е. *FIFO* – от английского *first in, first out*. Иногда требования поступают в каналы обслуживания в соответствии с правилом: «последним пришел – первым обслуживаешься», т. е. *LIFO* – от английского *last in, first out*;

б) с неупорядоченным обслуживанием. В такой системе действует случайный выбор требований на обслуживание.

Системы массового обслуживания с приоритетом бывают:

а) с абсолютным приоритетом (обслуживание одного требования может прерваться при поступлении другого, обладающего преимуществами в обслуживании);

б) с относительным приоритетом (начавшееся обслуживание не может быть прервано до его окончания).

На основе моделей массового обслуживания можно разрабатывать экономические рекомендации по реорганизации СМО для повышения эффективности их работы, а также определять оптимальные показатели вновь создаваемых систем массового обслуживания.

8.2. Модели массового обслуживания в принятии решений

В системе массового обслуживания различают два потока – поток заявок и поток обслуживания – со следующими характеристиками:

λ – интенсивность входящего потока, т. е. среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени. Данный параметр определяет скорость, с которой приходят заявки;

μ – интенсивность обслуживания заявок одним каналом при непрерывной его работе.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких СМО, процесс функционирования которых является марковским. Речь идет о том, что все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими. Простейший поток случайных событий обладает тремя свойствами:

- ординарность. Практически это означает невозможность одновременного поступления двух и более требований, т. е. требования поступают в СМО независимо друг от друга;
- стационарность. Суть этого свойства состоит в том, что вероятностные характеристики стационарного потока требований не изменяются со временем;
- отсутствие последействия, которое соответствует тому, что появление в потоке очередного события не зависит от того, когда появлялись в нем предшествующие события.

Математически доказано, что простейший поток требований с известным параметром λ описывается законом Пуассона: $P_k\left(t\right)=\dfrac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, $t>0$, где $P_k\left(t\right)$– вероятность того, что на произвольно выбранном участке времени продолжительностью t поступит ровно k требований.

На рис. 8.1 схематически представлена специализированная система обслуживания пуассоновского типа, в которой параллельно функционируют несколько идентичных средств обслуживания.

На рис. 8.1 видно, что ожидающее требование выбирается из очереди для обслуживания на первом свободном канале. Число требований, находящихся в системе обслуживания, включает те, которые уже обслуживаются, и те, что находятся в очереди.

Важнейшей характеристикой, определяющей пропускную способность СМО, является время обслуживания, которое, как правило, случайная величина. Наибольшее распространение в теории принятия решений получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Функция распределения для этого закона имеет вид: $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, т. е. вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины *t*, определяется данной формулой.

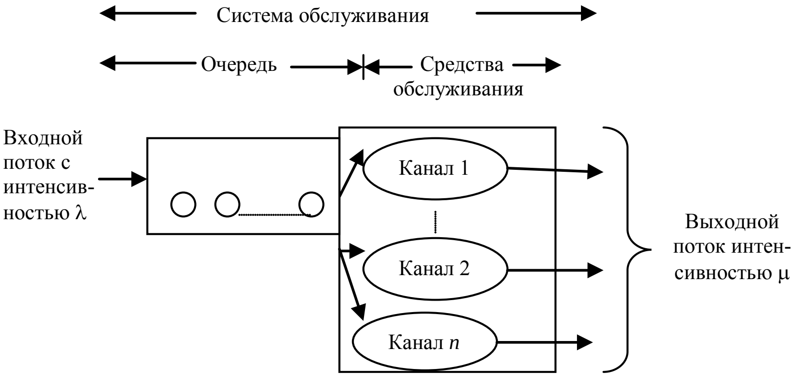


Рис. 8.1. Схема многоканальной СМО

При этом интенсивность обслуживания μ является величиной, обратной среднему времени обслуживания $\overline{t}_{\text{об}}$:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}}.$$

Типичная постановка задачи СМО обычно включает заданный входящий поток требований, известные дисциплину обслуживания и закон распределения времени обслуживания. При рассмотрении общих систем массового обслуживания предполагается, что система функционирует в течение достаточно большого интервала времени, по истечении которого в ее работе наступает стационарный режим. Теоретически установившийся режим наступает при $t \to \infty$, а вероятностные характеристики такой СМО уже не зависят от времени. Поэтому система значений вероятностей состояний, соответствующих стационарному режиму работы СМО, называется финальными вероятностями.

Для оценки эффективности обслуживания в зависимости от условий задачи и намеченных целей используются различные показатели:

- среднее количество требований, которое может обслужить СМО в единицу времени;
- вероятность того, что все каналы свободны или заняты;
- средняя длина очереди и среднее время ожидания;
- коэффициенты загрузки и простоя каналов обслуживания;
- вероятность иметь в очереди в данный момент не более определенного числа требований и др.

При определении оптимальных параметров СМО в качестве выбранного критерия эффективности могут быть: количество каналов обслуживания, приоритет в обслуживании заявок и т. д. Часто применяется и стоимостной критерий, отражающий величину издержек, связанных с функционированием системы в единицу времени. Изменяя условия функционирования СМО, меняется и функция издержек (для исследователя важно найти ее наименьшее значение).

Анализ характеристик работы СМО различного вида может быть проведен на основе расчета вероятностей состояний системы массового обслуживания.

8.3. Задачи СМО с отказами (потерями)

Системы массового обслуживания с отказами или потерями распространены достаточно широко. Особенностью их функционирования является то, что всякое требование, поступившее в систему в некоторый момент времени, либо сразу обслуживается, либо теряется, если в момент его поступления все обслуживающие каналы заняты.

Рассмотрим пример. Информационная служба торгового предприятия дает справки по телефонной линии о наличии фруктов, поступивших из Молдовы. В среднем за 1 мин происходят 3 запроса, а средняя продолжительность одного разговора составляет 0,25 мин. Требуется определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими.

Математической моделью телефонной линии торгового предприятия является одноканальная СМО с отказами. Параметры данной системы следующие:

интенсивность входящего потока $\lambda = 3$; среднее время обслуживания $\overline{t}_{\text{об}}$ = 0,25; интенсивность потока обслуживания $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = 4.$ Найдем вероятность отказа запроса по формуле

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{3}{3+4} = 0,429, \text{ или } 42,9\ \%.$$

Значит, в установившемся предельном режиме из каждых 100 запросов в среднем 43 получают отказ. Вероятность того, что канал свободен, составляет 0,57, а вероятность того, что канал занят, – 0,43. Это связано с тем, что интенсивность входящего потока меньше интенсивности обслуживания (производительности канала).

Далее найдем:

- относительная пропускная способность СМО

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,429 = 0,571;$$

- абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda Q = 3 \cdot 0,571 = 1,713.$$

Из расчета следует, что случайный характер поступления телефонных звонков и случайный характер длительности разговоров привели к такой ситуации, что абсолютная пропускная способность (1,713 разговора в 1 мин) почти в 2,3 раза меньше производительности информационной службы.

Рассмотрим следующий пример. Одна из консультационных фирм предлагает частным предпринимателям свои услуги по правильному ведению экспортно-импортных операций. В фирме постоянно работают 4 консультанта. При этом соблюдается следующее условие: если предприниматель заходит в консультационный отдел, когда все работники заняты, то он сразу уходит в конкурирующую фирму, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающих в консультационный центр за 1 ч, составляет 6 человек. Среднее время, затрачиваемое консультантом на обслуживание одного предпринимателя, составляет 20 мин. Необходимо определить основные характеристики функционирования СМО.

Математической моделью консультационной фирмы является многоканальная СМО с отказами. Приведем исходные данные задачи к единой системной единице времени (здесь возьмем 1 ч) и рассмотрим параметры имеющейся модели:

- общее число каналов обслуживания $n = 4$;

- интенсивность входящего потока $\lambda = 6$ чел.-ч;

- среднее время обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 20$ мин, или 0,33 ч;

- интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,33} = 3$ чел.-ч;

- интенсивность нагрузки системы требования $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2$ (среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки);

- количество занятых каналов k.

Получим выражения для вероятностей любых состояний системы, связывая их с количеством требований k (числом занятых каналов). Поскольку система с потерями, то $k \le n$, а число всех возможных состояний равно $n+1$. Предельные вероятности состояний системы (формулы Эрланга) для данной СМО имеют следующий вид:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1};$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, 1 \le k \le n.$$

Используя их, получим значения для вычисления характеристик эффективности СМО с потерями.

Итак, вероятность отсутствия требований в системе

$$P_0 = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right]^{-1} = \frac{1}{7} = 0,143.$$

Это означает, что в среднем 14,3 % всего времени работы все 4 консультанта одновременно будут свободны.

Далее определим вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{2^4}{4!} \cdot 0,143 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,143 = 0,095.$$

Вероятность того, что клиент получил отказ, равна вероятности того, что все четыре консультанта фирмы заняты. Данная величина показывает, что из каждых 100 посетителей 9,5 получат отказ (т. е. 9,5 % потенциальных клиентов уходят из-за ограниченного количества консультантов).

Относительная пропускная способность системы (или вероятность обслуживания требования) равна:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0{,}095 = 0{,}905,$$

т. е. из 100 обращающихся предпринимателей 90 будут обслужены.

Абсолютная пропускная способность составит:

$$A = \lambda Q = 6 \cdot 0{,}905 = 5{,}43 \text{ обслуживаний в час.}$$

Среднее число занятых каналов находим по формуле

$$\bar{N}_{\text{з}} = \frac{A}{\mu} = \rho Q.$$

$$\bar{N}_{\text{з}} = 2 \cdot 0{,}905 = 1{,}81.$$

Дополнительно рассчитываются такие показатели, как коэффициенты использования каналов $(K_и)$, простоя каналов $(\text{К}_{\text{П}})$, среднее число простаивающих каналов $(\bar{N}_{\text{П}})$ по формулам

$$K_и = \frac{\bar{N}_{\text{з}}}{n};\ \text{К}_{\text{п}} = 1 - K_и;\ \bar{N}_{\text{п}} = n - \bar{N}_{\text{з}}.$$

Итак, $K_и = \dfrac{1{,}81}{4} = 0{,}453$, т. е. в среднем каждый консультант будет занят 45,3 % рабочего времени; $\text{К}_{\text{П}}$ = 1 – 0,453 = 0,547; $\bar{N}_{\text{п}} = 4 - 1{,}81 = 2{,}19$.

8.4. Одноканальная СМО с очередью (ожиданием)

Постановка задачи сводится к тому, что в канал обслуживания поступает простейший поток требований с определенной интенсивностью. Если в момент поступления требования средство обслуживания свободно, начинается обслуживание. Если же канал занят, то вновь прибывшее требование становится в очередь за теми, которые поступили раньше и еще не начали обслуживаться. Длительность обслуживания представляет случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону.

Рассмотрим пример. Молочный комбинат открыл несколько торговых точек для продажи конечных продуктов собственного изготовления. Введенный в эксплуатацию магазин «Буренка» (в соседнем региональном центре) имеет один кассовый аппарат. Установлено, что в течение часа открывшуюся торговую точку посещают 24 человека. Значит, интенсивность входного потока покупателей равна $\lambda = 0{,}4$ человека в 1 мин, причем поток считаем простейшим. Среднее время обслуживания покупателя подчинено экспоненциальному закону и составляет 0,5 мин $\left(\overline{t}_{об} = 0{,}5\right)$. Определим важнейшие характеристики СМО.

Математической моделью рассматриваемой задачи является одноканальная СМО с ожиданием (очередью). Найдем следующие параметры:

- интенсивность обслуживания $\mu = \dfrac{1}{\overline{t}_{об}} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2;$

- интенсивность нагрузки системы $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}2.$

В случае одноканальной системы условие, при котором очередь не возрастает бесконечно, имеет вид $\rho < 1$ или $\lambda < \mu$, т. е., чтобы очередь не росла бесконечно, необходимо, чтобы интенсивность обслуживания была выше интенсивности входящего потока.

Рассчитаем характеристики эффективности СМО при неограниченном входящем потоке:

- вероятность того, что обслуживающий канал свободен составляет

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Этот показатель определяет коэффициент простоя кассового аппарата, т. е. в среднем 80 % времени продавец не занят обслуживанием покупателей;

- среднее число требований, находящихся в системе, $\overline{N}_с = \dfrac{\rho}{1-\rho} =$ $= \dfrac{0{,}2}{1-0{,}2} = 0{,}25$ покупателей продуктов (в очереди и на обслуживании);

- среднее число требований, находящихся в очереди $\overline{r} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$ или $\overline{r} = \overline{N}_{\text{с}} - \rho$; $\overline{r} = 0,25 - 0,2 = 0,05$ покупателей в очереди за покупками (средняя длина очереди);

- среднее время пребывания требования в очереди (или время ожидания обслуживания) $\overline{t}_{\text{ож}} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$; $\overline{t}_{\text{ож}} = \dfrac{0,2}{2(1-0,2)} = 0,12$ мин в среднем покупатель находится в очереди;

- среднее время пребывания требования в системе $\overline{t}_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$ или $\overline{t}_{\text{сист}} = \overline{t}_{\text{ож}} + \overline{t}_{\text{об}}$; $\overline{t}_{\text{сист}} = 0,12 + 0,5 = 0,62$ мин покупатель находится в данной СМО.

Таким образом, в данной системе массового обслуживания наблюдается незначительное время ожидания в очереди. Однако руководство магазина установило, что в ближайшем будущем в районе расположения торговой точки будет сдан в эксплуатацию жилой дом, что может способствовать притоку покупателей. Низкий уровень обслуживания при наличии конкурентов может привести к потере потенциальных покупателей, а поэтому поставлена задача о возможности установления другого кассового аппарата в магазине, если среднее время ожидания обслуживания превысит 5 мин. Необходимо определить, как должна измениться интенсивность входного потока покупателей, чтобы возникла такая необходимость.

Зная, что $\overline{t}_{\text{ож}} = 5$ мин, то подставим данные в формулу $\overline{t}_{\text{ож}} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$; $5 = \dfrac{\rho}{2(1-\rho)}$, так как $\mu = 2$. Получим $\rho = \dfrac{10}{11} = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Следовательно, интенсивность входного потока покупателей должна быть равна $\lambda = \mu\rho = 2 \cdot \dfrac{10}{11} \approx 1,8$ человека в 1 мин, чтобы среднее время ожидания достигло 5 мин. Если средняя скорость входящего потока превысит 1,8, то с учетом заранее установленного качества обслуживания $(\overline{t}_{\text{ож}} \le 5)$ в магазине необходимо установить второй кассовый аппарат.

9. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

9.1. Общие сведения

В научных исследованиях аграрной экономики особое внимание уделяется такому аспекту повышения эффективности работы предприятий, как грамотное управление имеющимися запасами. Во всех сферах АПК важно поддерживать рациональный уровень запасов (сырья, полуфабрикатов, готовых изделий). Затраты на хранение слишком больших запасов уменьшают прибыльность организации; поддержание запасов на слишком низком уровне связано с риском возникновения дефицита и остановкой производства. Для компромиссного решения данной проблемы применяют математические методы и модели теории управления запасами.

Запас – это все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. В народном хозяйстве различают: а) запасы средств производства (производственные, госрезервы, незавершенное производство); б) запасы предметов потребления (товарные, госрезервы и др.). Если рассматривать совокупные запасы на пути технологической цепи «поставщик – потребитель», то их можно разделить на две основные части: товарные и производственные.

Товарные – это часть совокупных запасов, которые находятся в сфере обращения. Они формируются в различных звеньях оптовой и розничной торговли, на складах предприятий-изготовителей, на снабженческих и сбытовых базах. К производственным относится часть совокупных запасов, находящаяся в руках производителей и вступившая (или готовая вступить) в процесс непосредственного производства. Под ними подразумевается продукция производственно-технического назначения.

Основные причины создания оптимального объема запасов для любой организации АПК таковы: а) необходимо обеспечить непрерывность и бесперебойность процессов производства; б) существует периодичность выпуска различных видов продукции поставщиками, а также их транспортировка к потребителю партиями; в) в большинстве объектов происходит несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Следовательно, товарные и производственные запасы являются необходимым условием нормальной работы каждой организации, а их текущий уровень может оказаться одним из решающих факторов успешной деятельности предприятия.

Существует ряд обстоятельств, по которым запасы как неизбежные издержки создаются в минимальном количестве:

- из-за сокращения затрат на их содержание;
- из-за упущенного дохода, который мог бы быть получен при вложении «омертвленных» в запасе финансовых средств в развитие объекта.

В самом деле, затраты на хранение слишком больших запасов могут свести к минимуму доходность, так как для их финансирования из оборота отвлекаются денежные ресурсы. Размер этих затрат, связанных с «омертвлением» капитала, предположительно равен средней рыночной ставке ссудного процента. Такой процент за инвестированный капитал платит организация, если использует банковский кредит для финансирования запасов. Если же запас финансируется за счет собственных средств, то предприятие несет в таком же объеме потери потенциального дохода, который оно могло бы получить, если бы ссудило вложенные в запас денежные средства под проценты.

В то же время поддержание запасов на слишком низком уровне ведет к проблемам срыва производства, а также выполнения заказов покупателей и клиентов.

Следовательно, важно найти наилучшее соотношение между следующими требованиями: а) с одной стороны, минимизация общих издержек, связанных с доставкой и хранением запасов; б) с другой стороны, надежное обеспечение спроса на хранимый запас. Поэтому в общем аспекте задача управления запасами должна отвечать на следующие два вопроса: 1) какое количество хранимого запаса заказывать?; 2) когда заказывать?

Совокупность правил, по которым принимаются эти решения, и есть стратегия управления запасами, оптимизация которой основана на использовании различных математических моделей. Их составление предполагает наличие такой информации:

- о затратах системы управления запасами;
- о характере спроса;
- о порядке пополнения запаса;
- о критерии оптимизации.

Существуют четыре основных вида затрат, которые оказывают влияние на выбор решения по управлению запасами:

1) *на приобретение;*
2) *на оформление заказа;*
3) *на хранение запасов;*
4) *вследствие дефицита (нехватки запасов).*

Затраты на приобретение определяются ценой единицы приобретаемой продукции (хранимого запаса). Эта цена может быть постоянной или со скидкой, которая зависит от величины партии (объема заказа).

Затраты на оформление заказа (накладные расходы) представляют собой постоянные издержки на подготовку одного заказа. Считается, что они не зависят от объема заказа и связаны с расходами по содержанию персонала, занимающегося определением потребности, заключением договоров на поставку, непосредственной закупкой необходимых запасов. К этой же группе расходов следует отнести почтово-телеграфные, канцелярские, командировочные затраты, учитываемые при размещении заказа, а также транспортные расходы, не зависящие от размера партии. Иногда в данную категорию включают издержки по переналадке оборудования перед выпуском очередной партии товара (при условии серийного производства однородной продукции).

Затраты на хранение запасов обычно представляют собой расходы по содержанию складских помещений. К ним относятся: оплата обслуживающего персонала; аренда, амортизация и содержание зданий, сооружений, оборудования; расходы на отопление, освещение, вентиляцию и установку специальных установок, обеспечивающих нормальный режим хранения. В эту группу издержек входят расходы по учету и инвентаризации, затраты по недостаче, из-за естественной убыли при хранении и т. д. Рассматриваемая категория затрат зависит от величины запасов и рассчитывается как сумма издержек на единицу товара за определенный период времени. Обычно общие складские издержки могут составлять порядка 25–50 % стоимости хранимых материалов.

Затраты вследствие дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции (возможно из-за несвоевременных поставок). Они включают как потенциальные потери прибыли, так и более субъективную стоимость, связанную с утратой доверия клиентов. Прибыль организации при дефиците может снизиться за счет простоя производственных мощностей и трудовых ресурсов; переналадки производственного процесса; замены дефицитных материалов другими, более дорогими; выпуска продукции в сверхурочное время после ликвидации причины простоя; штрафа за нарушение сроков поставки.

Важным фактором, определяющим формулировку и решение задачи управления запасами, является потребность в материальных ресурсах, или характер спроса. Под спросом понимается совокупность требований на товары. Он может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (описанным вероятностным распределением), что приводит к постановке детерминированных и стохастических моделей.

Среди разновидностей детерминированных моделей различают: а) статические (объем спроса на хранимую продукцию или запас является постоянным во времени); б) динамические (объем спроса является функцией времени). Кроме того, исходя из характера потребности, возможна реализация таких стохастических моделей управления запасами, в которых спрос за рассматриваемый период либо является непрерывной случайной величиной, либо дискретной (т. е. описывается дискретной плотностью распределения).

Особое внимание при решении данного класса задач уделяется порядку пополнения запасов (или сроку выполнения заказа). Речь идет об интервале времени между моментом размещения заказа и его поставкой. Изучаемый процесс осуществляется по разным вариантам. Одним из них является мгновенная, т. е. экстренная, поставка. Если же в системе управления запасами предусматривается срок выполнения заказа, то задача называется моделью с задержкой поставок относительно момента подачи требования. В этом случае новые заказы размещаются тогда, когда их уровень опускается до заранее определенного значения, называемого точкой заказа товара.

Критерий оптимальности является интегрирующим показателем для оптимизации любой системы управления запасами. Поэтому в качестве целевой функции в математических моделях чаще всего используют минимум суммарных затрат, связанных с заготовкой и содержанием запасов.

9.2. Модель оптимального размера заказа

Любая экономическая задача управления запасами – это совокупность математических соотношений и уравнений, описывающих рассматриваемый процесс при тех или иных допущениях. Существуют различные системы регулирования запасов в зависимости от исходных параметров. Рассмотрим классическую задачу экономичного размера заказа, которую называют моделью оптимальной партии поставки. Она используется для оценки объема заказа на определенный товар и включает в себя следующую систему предположений:

а) спрос на товар известен и является постоянным, т. е. определенным, детерминированным. Пусть υ – спрос (потребность), т. е. общий объем поставок товара за период t;

б) нулевой цикл заказа предполагает, что товары будут поставлены без задержки, т. е. заказ выполняется экстренно. При этом отклонения в ту или иную сторону в поступлении заказанной партии недопустимы, а время доставки принимается нулевое;

в) уровень запасов снижается равномерно в соответствии с равномерно поступающими требованиями. Когда все запасы исчерпаны, происходит поставка новой партии товара. Пусть Q – объем заказа (количество единиц);

г) неизменность цены приобретения, т. е. расходы на приобретение единицы товара постоянны, обозначим их P;

д) дефицит недопустим. Товар должен быть всегда в наличии и потребности покупателей немедленно удовлетворяются.

Исходя из описанных предпосылок, графически представим изменение уровня запасов I конкретного товара (рис. 9.1).

На графике показано, что уровень запаса снижается с постоянной скоростью от Q до 0. Когда он достигает нулевой отметки, мгновенно происходит поступление новой партии товара и уровень запасов немедленно восстанавливается до величины Q. Далее уровень запасов опять все время снижается, и цикл снова повторяется. На графике выделен средний уровень запасов данного товара I, который равен половине размера заказа $\left(I = \dfrac{Q}{2}\right)$. Также показана длина цикла t, т. е. интервал времени между поставками $\left(t = \dfrac{Q}{\upsilon}\right)$.

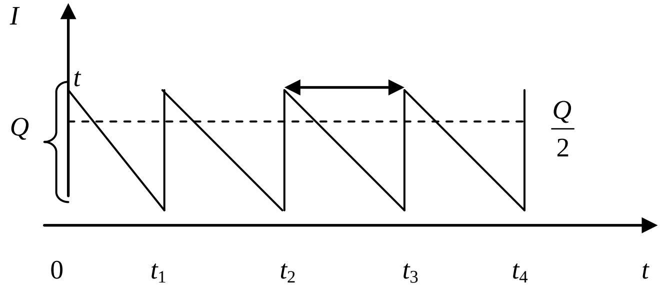


Рис. 9.1. Динамика изменения запасов во времени

Для построения функции затрат требуется ввести два стоимостных параметра: K – затраты на оформление, связанные с размещением заказа (стоимость заказа одной партии товара); S – затраты на хранение (издержки на единицу складируемой продукции в единицу времени).

Рассмотрим пример. Строительная фирма получила заказ на возведение ряда объектов в агропромышленной сфере. Исходя из объема предстоящих работ потребность в цементе составит 4000 ц в год ($\upsilon = 4000$). Затраты на оформление одной партии цемента равны 80 у. д. е. в виде административных расходов независимо от заказанного количества ($K = 80$). Ежегодные затраты на хранение, по расчетам планово-экономического отдела, будут составлять 4 у. д. е. на 1 ц цемента ($S = 4$). Данный показатель специалисты определили следующим образом. Цена покупки 1 ц цемента составляет 16 у. д. е. ($P = 16$), а затраты на хранение единицы этого товара, по оценкам экономистов, равны 25 % в год от стоимости запасов в объеме 1 ц цемента ($i = 0{,}25$). Таким образом, ежегодные затраты $S = iP$. Требуется определить оптимальную стратегию заказа цемента.

Решение задачи связано с построением модели, где описываются общие затраты в системе управления запасами. Они складываются из стоимости на приобретение товара, расходов на организацию заказа и хранение запасов. С точки зрения анализа основной модели управления запасами нас не интересуют затраты на приобретение, которые постоянны (на оптимальный размер заказа они не повлияют). Поэтому проанализируем те суммарные издержки, которые складываются из затрат на оформление заказа в единицу времени и затрат на хранение запаса в единицу времени. В данном примере мы выберем период, равный одному году.

Ежегодная стоимость оформления заказа зависит от затрат на оформление одной партии (K) и числа (n) поставок или заказов за анализируемый период $\left(n = \dfrac{\upsilon}{Q}\right)$. Ежегодная стоимость хранения запасов определяется затратами на хранение единицы продукции в год (S) и средним размером запаса ($\frac{Q}{2}$). Из этого следует, что целевую функцию модели можно записать следующим образом: $C = \left(K\dfrac{\upsilon}{Q} + \dfrac{Q}{2}S\right) \to \min$.

Таким образом, для того, чтобы определить оптимальный размер заказа, необходимо только сравнить затраты, связанные с организацией и хранением заказа.

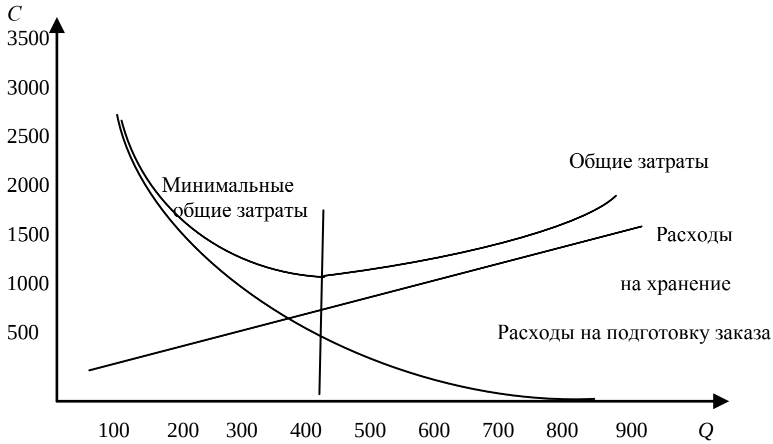


Рис. 9.2. Издержки запасов в зависимости от размера заказа

На графике, представленном на рис. 9.2, видно, как изменяются издержки в зависимости от размера заказа: 1) расходы на хранение прямо пропорциональны величине партии поставки (размеру заказа); 2) расходы на организацию обратно пропорциональны величине партии поставки (размеру заказа). Минимальное значение общих затрат находится при равенстве этих двух видов издержек (точка пересечения их на графике соответствует оптимальному размеру заказа).

Нетрудно заметить, что если размер заказа невелик, то расходы на организацию являются доминирующими – в этом случае заказы подаются часто, но на небольшое количество продукции. Если размер заказа является достаточно большим, основной компонентой становятся издержки хранения – делается небольшое число заказов, размер которых достаточно велик.

Значение оптимального размера заказа, которое определялось с помощью графического метода, можно рассчитать и по математической формуле. Стандартный метод дифференциального исчисления позволяет определять искомую величину из ранее приведенной целевой функции. Для этого приравняем к нулю первую производную по Q (необходимый признак экстремума):

$$\frac{dC}{dQ} = -\frac{K\upsilon}{Q^2} + \frac{S}{2} = 0.$$

Отсюда оптимальный размер партии заказа равен

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{S}}.$$

Так как $\dfrac{d^2C}{dQ^2} > 0$ (достаточный признак экстремума) для всех $Q > 0,$ то значение Q^* доставляет функции абсолютный минимум.

Для нашей задачи: $Q^* = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 80 \cdot 4000}{4}} = 400.$ Полученный результат говорит о том, что для минимизации затрат размер заказа должен составить 400 ц цемента. Оптимальный интервал между поставками должен быть равен $t^* = \dfrac{Q^*}{\upsilon}$ (в задаче $t^* = \dfrac{400}{4000} = 0{,}1$ года). Учитывая, что в году 365 дней, время между заказами партии цемента будет составлять примерно 37 дней.

Оптимальное число поставок: $n^* = \dfrac{\upsilon}{Q^*} = \dfrac{1}{t^*}.$ Для задачи $n^* = 10,$ это говорит о том, что периодичность поставок цемента должна быть равна 10 раз в год.

При этом минимальный размер суммарных затрат при оптимальных параметрах системы управления однономенклатурными запасами составит:

$$C^*_{\min} = \frac{K\upsilon}{\sqrt{\dfrac{2K\upsilon}{S}}} + \frac{S}{2}\sqrt{\frac{2K\upsilon}{S}} = \sqrt{2KS\upsilon} = SQ^*.$$

В рассматриваемом примере $C^*_{\min} = \sqrt{2 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 4000} = 1600$, или $C^*_{\min} = 4 \cdot 400 = 1600.$

Любое отклонение объема поставки цемента от оптимальной величины ведет к увеличению затрат. Например, при действующей системе фактическая поставка партии цемента строительной фирме составляла 100 ц (Q = 100). Значит, годовые затраты по формированию поставок и содержанию запасов были равны: $C = 80 \cdot \dfrac{4000}{100} + \dfrac{100}{2} \cdot 4 = 3400$ у. д. е.

Если сравнить их с полученными при работе системы управления запасами в оптимальном режиме (3400–1600), то можно сделать вывод о том, что принятие оптимальной стратегии принесет фирме экономию в количестве 1800 у. д. е.

Кроме того, нужно иногда учитывать и тот факт, что в реальной ситуации оптимальный показатель служит в качестве ориентира того, какой размер заказа наиболее экономичен. При этом окончательная партия поставки может определяться с учетом и других факторов. Например, перевозка осуществляется цементовозами, грузоподъемность которых равна 7 т цемента в расчете на один автомобиль. Исходя из этого, необходимо для поставки цемента заказать 6 машин. В этом случае наиболее экономичная партия будет составлять 420 ц (6 · 70).

9.3. Модель с определением точки заказа

В реальных производственных ситуациях пополнение запаса в большинстве случаев не может произойти мгновенно в момент размещения заказа, как предполагалось ранее. Для обеспечения бесперебойного снабжения следует также учитывать срок выполнения заказа L (т. е. время от момента размещения заказа до момента появления товара у потребителя). Во многих задачах существует положительный срок выполнения заказа (временное запаздывание). В этой ситуации точка возобновления заказа имеет место, когда уровень запаса опускается до $L\upsilon$ единиц. Следовательно, точка заказа есть минимальный уровень наличных запасов, при котором необходимо разместить новый заказ, чтобы избежать дефицита.

Приведенные допущения предполагают, что срок выполнения заказа L меньше продолжительности цикла заказа (оптимального интервала времени между поставками) t^*, что в общем выполняется не всегда. В противном случае находят эффективный срок L_e выполнения заказа следующим образом:

$$L_e = L - mt^*,$$

где m – наибольшее целое, не превышающее $\dfrac{L}{t^*}$.

Стратегия управления запасами при этом формулируется следующим образом: заказывать Q^* единиц продукции, как только уровень запаса снижается до $L_e\upsilon$ единиц.

Рассмотрим пример. Завод производит сельскохозяйственную технику для поставок на рынки ближнего зарубежья. Для этих целей он имеет потребность в комплектующих изделиях в количестве 90 шт. в день. Подразделение, занимающееся коммерческими операциями, заказывает эти изделия с определенной периодичностью. Стоимость размещения заказа на поставку комплектующих составляет 90 у. д. е. Расходы на хранение изделий на складе оцениваются в 0,02 у. д. е. в день. Срок выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равен 17 дней. Требуется определить оптимальную стратегию заказа комплектующих изделий.

На основании приведенных данных имеем: υ = 90 шт. в день; K = 90 у. д. е. за заказ; S = 0,02 у. д. е. за хранение одного изделия в день; L = 17 дней.

Простейшая модель с определением точки заказа предполагает проведение определенных расчетов.

1. Нахождение оптимального размера партии поставки по формуле Уилсона (Q^*) и расчет оптимального интервала (t^*).

В данной задаче оптимальный объем заказа составит: $Q^* = \sqrt{\dfrac{2K\upsilon}{S}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 90 \cdot 90}{0,02}} = 900,$ а соответствующая длина цикла будет равна: $t^* = \dfrac{Q^*}{\upsilon} = \dfrac{900}{90} = 10.$

2. Расчет точки размещения заказа (r).

В данной задаче срок выполнения заказа (L = 17 дней) превышает продолжительность цикла t^* = 14 дней, поэтому необходимо вычислить L_e. Число целых циклов, заключенных в L, равно: m = (наибольшее целое $\le \dfrac{L}{t^*}$) = (наибольшее целое $\le \dfrac{17}{10}) = 1.$

Таким образом: $L_e = L - mt^* = 17 - 1 \cdot 10 = 7$ дней. Поэтому точка повторного заказа имеет место при уровне запаса: $L_e\upsilon = 7 \cdot 90 = 630$ изделий.

В общем виде для нахождения точки размещения заказа используют и такую формулу:

$$r = L\upsilon - \left[\frac{L}{t^*}\right] Q^*,$$

где $\left[\dfrac{L}{t^*}\right]$ – целая часть числа.

В задаче: $r = 17 \cdot 90 - \left[\frac{17}{10}\right] \cdot 900$ = 1530 – 1 · 900 = 630.

Оптимальная стратегия заказа комплектующих изделий может быть сформулирована так: необходимо заказать 900 изделий, как только уровень их запаса уменьшается до 630 шт.

3. Нахождение минимального начального запаса (I_0).

В данной задаче для обеспечения бездефицитной работы необходимо иметь минимальный начальный запас, величина которого $I_0 = L\upsilon$ = 1530.

4. Расчет минимальных суммарных издержек системы $(C^*_{\min})$.

В данной задаче дневные расходы, связанные с содержанием запаса в соответствии с оптимальной стратегией, равны:

$$C^*_{\min} = SQ^* = 0,02 \cdot 900 = 18 \text{ у. д. е.}$$

9.4. Решение задачи управления запасами со скидкой на количество

В некоторых случаях цена на какой-либо товар не является постоянной и может зависеть от объема покупки (при ярмарочной торговле, международных аукционах) или размещенного заказа. Многие поставщики предлагают определенные скидки на большие заказы, т. е. при оптовых закупках цены снижаются. Речь идет о том, что продукция может быть приобретена со скидкой, если объем заказа Q превышает некоторый фиксированный уровень g. Таким образом, стоимость единицы продукции p (при двухуровневой системе скидок) определяется как

$$p = \begin{cases} p_1, \text{если } Q \le g, \\ p_2, \text{если } Q > g, \end{cases}$$

где $p_1 > p_2$.

При решении задачи и рассмотрении вопроса о том, пользоваться или нет предлагаемыми скидками, необходимо рассчитать связанные с этим дополнительные затраты и возможную экономию. Заказы на более крупные партии продукции могут:

а) с одной стороны, повлечь за собой увеличение стоимости запасов (стоимость заказов и издержки хранения);

б) с другой стороны, происходит своего рода компенсация затрат за счет снижения закупочной цены.

Общие затраты в единицу времени (т. е. стоимость приобретения, издержки на подготовку заказов и расходы на хранение) рассчитываются следующим образом:

$$C(Q)=\begin{cases} C_1(Q)=\upsilon p_1+\dfrac{K\upsilon}{Q}+\dfrac{Q}{2}S, Q\le g, \\ C_2(Q)=\upsilon p_2+\dfrac{K\upsilon}{Q}+\dfrac{Q}{2}S, Q> g. \end{cases}$$

Рассмотрим пример. Коммерческая торговая фирма имеет устойчивый спрос на 900 импортных калькуляторов в год. Стоимость покупки единицы товара составляет 8 у. д. е., а затраты на хранение единицы изделия, по оценкам экономистов, равны 15 % от средней стоимости запасов год. Затраты на размещение одного заказа в виде административных расходов составляют 10 у. д. е. (независимо от заказанного количества). Зарубежный поставщик предлагает, что цена на калькулятор может быть снижена на 6 % (до 7,5 у. д. е.) при поставке крупной партии товара. В данном случае скидка возможна при заказе 300 ед. и более. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами.

Имеем: υ = 900; K = 10; S = 8 · 0,15 = 1,2; p_1 = 8; p_2 = 7,5; g = 300. Вычислим оптимальный размер заказа при первоначальной цене покупки товара:

$$\tilde{Q}=\sqrt{\frac{2K\upsilon}{S}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 900}{1,2}}=123.$$

Годовые затраты при таком размере заказа складываются из стоимости приобретения, расходов на хранение и на подготовку заказов C_1 (Q): $900\cdot 8+\dfrac{123}{2}\cdot 1,2+10\cdot\dfrac{900}{123}\approx 7200+74+74\approx 7348.$

Среднегодовые издержки работы системы можно также найти по формуле

$$L^*=p(\upsilon+iQ^*),$$

где i – коэффициент издержек хранения запасов: 8(900 + 0,15 · 123) ≈ ≈ 7348.

Так как полученное значение $\tilde{Q}$ = 123 меньше, чем нижняя граница интервала предоставления первоначальной скидки (g = 300), то рассчитаем затраты при условии размещения заказов на 300 ед. товара при 6%-ной скидке на цену покупки:

- стоимость приобретения: $\upsilon p_2 = 900 \cdot 7{,}5 = 6750$;
- расходы на хранение: $\frac{Q}{2}S = \frac{300}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}15 = 169$;
- расходы на подготовку заказов: $K\frac{\upsilon}{Q} = 10 \cdot \frac{900}{300} = 30$.

Общие годовые затраты будут равны 6750 + 169 + 30 = 6949. Следовательно, оптимальная стратегия управления запасами предполагает, что затраты фирмы будут минимизированы при размещении заказов в размере 300 шт. калькуляторов и получении при этом 6%-ной скидки.

9.5. Модель управления запасами при вероятностном спросе

Все рассмотренные ранее модели основывались на предположении, что спрос является постоянным. Однако некоторые системы управления запасами содержат элемент неопределенности, так как спрос изменяется во времени, т. е. его среднее значение колеблется в течение года. Учет вероятностной природы спроса предполагает существование постоянного резервного (буферного) запаса на протяжении всего планового периода. Его размер устанавливается таким образом, чтобы обеспечить колеблемость спроса и требуемый уровень обслуживания. При этом исходят из того, что вероятность истощения запаса в течение периода выполнения заказа (интервала между моментом размещения заказа и его поставкой) не должна превышать наперед заданной величины.

Для данной модели экономичного размера заказа с учетом вероятностной природы спроса введем обозначения:

L – срок выполнения заказа; X_L – случайная величина, представляющая величину спроса на протяжении срока выполнения заказа; μ_L – средняя величина спроса на протяжении срока выполнения заказа; σ_L – среднеквадратическое отклонение величины спроса на протяжении срока выполнения заказа; B – размер резервного запаса; α – максимально возможное значение вероятности нехватки или истощения запаса (дефицита) на протяжении срока выполнения заказа.

Основным предположением при построении модели является то, что величина спроса X_L на протяжении срока выполнения заказа L является распределенной случайной величиной со средним μ_L и стандартным отклонением σ_L. При этом L должно быть равно эффективному времени выполнения заказа (L_e).

Вероятностное условие, которое определяет размер резервного запаса B, имеет вид: $P\{X_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$.

При этом важно знать, что любую нормально распределенную случайную величину можно привести к стандартному виду путем замены: $Z = \dfrac{X_L - \mu_L}{\sigma_L}$.

Величина спроса на протяжении срока выполнения заказа L обычно описывается плотностью распределения вероятностей, отнесенной к единице времени. В частности, если спрос за единицу времени является нормально распределенной случайной величиной со средним υ и стандартным отклонением σ, то общий спрос на протяжении срока выполнения заказа L будет иметь распределение $N(\mu_L, \sigma_L)$, где $\mu_L = \upsilon L_e$ и $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L_e}$ (формула для σ_L получена на основании того, что значение L_e является целым числом или же округлено до целого).

Рассмотрим пример. Дневной спрос на импортное пиво в фирменном магазине АПК является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием υ = 50 бутылок и среднеквадратическим отклонением σ = 5 бутылок. Стоимость хранения бутылки пива в магазине составляет S = 0,05 у. д. е. в день. Размещение нового заказа каждый раз обходится торговому предприятию в K = 45 у. д. е. Поставщик обычно устанавливает восьмидневный срок для выполнения заказа.

Необходимо разработать оптимальную стратегию управления запасами для магазина, предполагая, что вероятность истощения запаса пива на протяжении срока выполнения заказа не превышает $\alpha = 0{,}05$.

Вначале найдем оптимальный объем заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot 50}{0{,}05}} = 300 \text{ бутылок.}$$

Длина цикла составляет: $t^* = \frac{Q^*}{\upsilon} = \frac{300}{50} = 6$ дней. Срок выполнения заказа равен 8 дням и превышает продолжительность цикла (6 дней), поэтому вычислим эффективное время выполнения заказа.

$$L_e = L - mt^* = 8 - 1 \cdot 6 = 2 \text{ дня.}$$

Следовательно:

$$\mu_L = \upsilon L_e = 50 \cdot 2 = 100 \text{ шт.}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L_e} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 7{,}07 \text{ ед.}$$

По таблице нормального распределения находим (α = 0,05):

$$Z = \frac{X_L - \mu_L}{\sigma_L} = \frac{X_L - 100}{7{,}07} = 1{,}64.$$

Далее получаем X_L = 1,64 · 7,07 + 100 = 111,59. Размер резервного запаса вычисляется так: $B \geq 7{,}07 \cdot 1{,}64 \approx 12$ бутылок. Значит, оптимальная политика управления запасами магазина с объемом резерва B = 12 состоит в заказе 300 бутылок пива, как только объем запаса уменьшается до 112 шт.

10. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

10.1. Общие сведения

Планирование сложных процессов в агропромышленном комплексе приводит к большому количеству практических задач, которые можно сформулировать и решить как сетевые модели. На основе таких моделей разработано множество методов сетевого планирования и управления (СПУ), которые позволяют составить рациональный план решения производственной задачи в кратчайшие сроки и с минимальными потерями. Каждый из методов дает возможность своевременно оценивать узкие места и вносить необходимые коррективы в управленческие решения. Они базируются на применении следующих алгоритмов:

- алгоритм нахождения минимального остовного дерева;
- алгоритм нахождения кратчайшего пути;
- алгоритм определения максимального потока;

- алгоритм минимизации стоимости потока в сети с ограниченной пропускной способностью;

- алгоритм нахождения критического пути.

Мы рассмотрим наиболее известные методы СПУ: метод критического пути (сокращенно *CPM*) и метод оценки и обзора программы (сокращенно *PERT*). Диапазон их применения весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют многие организации. Для того чтобы составить план работ по осуществлению любой задачи или проекта, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Такой является сетевая модель, реализация которой включает следующие этапы:

- расчленение проекта на ряд отдельных работ (процессов, операций), их отношения предшествования, а также оценка продолжительности выполнения каждой работы;

- составление сетевого графика проекта;

- сетевой анализ для возможного пересмотра плана выполнения работ с целью его оптимизации.

Таким образом, в сетевой модели происходит моделирование совокупности взаимосвязанных работ и событий, отображающих процесс достижения определенной цели. Ее основные понятия: работа, событие, путь.

Работа – это выполнение некоторого мероприятия (например, определенной технологической, транспортной или складской операции). К их числу относятся следующие виды:

- действительная работа (связана с затратами времени и расходом ресурсов, например, сборка изделия);

- ожидание (процесс, не требующий затрат труда, например, сушка изделия после покраски);

- фиктивная работа (не требует времени и ресурсов, а лишь указывает на то, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой).

При графическом представлении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключенных в скобки чисел (i, j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Каждая работа имеет определенную продолжительность $t\ (i, j)$. Продолжительность фиктивной работы равна нулю и изображается на графике пунктирными стрелками.

Событиями называются начальные и конечные точки работы (например, начало или окончание производственной операции). Они не имеют протяженности во времени, обозначаются одним числом и при графическом представлении изображаются кружком. Обычно выделяют исходное, промежуточное и завершающее события.

Сетевая модель обладает следующими основными свойствами:

- ни одно событие не может происходить до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;
- ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие;
- ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ. Особое внимание уделяется полному пути, т. е. любой непрерывной технологической последовательности работ от исходного события до завершающего. В сетевой модели их может быть несколько. Длиной пути является сумма продолжительности составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называют критическим ($L_{\text{кр}}$), его продолжительность – $t_{\text{кр}}$.

10.2. Сетевой график проекта

Сетевую модель в графическом изображении называют сетевым графиком. Чтобы составить сетевой график, необходимо иметь следующую информацию:

а) перечень требуемых мероприятий;

б) взаимозависимость мероприятий, т. е. их очередность;

в) продолжительность каждого мероприятия, требуемого в соответствии с проектом.

Рассмотрим пример. Освоение рынков стран Ближнего Востока показало, что завод автосельхозмаша должен заняться изготовлением нового вида продукции для его экспортных поставок. Для выполнения данного проекта будут задействованы два филиала предприятия, которые должны выполнить следующие мероприятия. Прежде всего в филиалах одновременно проводят необходимые подготовительные операции. Затем подразделения выполняют первоначальные производственные технологические работы независимо друг от друга. После окончания предварительных технологических работ предусматривается, что второй филиал продолжает работу, а первый филиал, прежде чем ее продолжить, передает второму филиалу часть изготовленных узлов. Во втором филиале они соединяются с узлами, подготовленными здесь к этому времени.

После соединения узлов часть из них транспортируется в первый филиал, где производится завершение операции. Второй филиал в это время выполняет завершение своей работы. По окончании работ все узлы сельскохозяйственного изделия доставляются к месту сборки и соединяются в конечный готовый продукт. На основании схемы выполнения проекта составляем перечень работ, а также их продолжительность (табл. 10.1).

Таблица 10.1. **Продолжительность работ при реализации проекта по выпуску нового вида продукции**

Работа	(i, j)	Содержание работы	Предшествующие работы	Продолжительность, ч
A_1	(1, 2)	Подготовительные операции в 1-м и 2-м филиалах	–	5
A_2	(2, 3)	Предварительная технологическая операция в 1-м филиале	A_1	9
A_3	(2, 4)	Предварительная технологическая операция в 2-м филиале	A_1	5
A_4	(3, 5)	Передача части изготовленных узлов изделия из 1-го филиала во 2-й филиал	A_2	13
A_5	(3, 6)	Выполнение последующих технологических операций в 1-м филиале	A_2	5
A_6	(4, 5)	Выполнение последующих технологических операций в 2-м филиале	A_3	25
A_7	(5, 6)	Передача части изготовленных узлов изделия из 2-го филиала в 1-й филиал	A_4, A_6	5
A_8	(5, 7)	Выполнение завершающей технологической операции в 1-м филиале	A_3, A_6	5
A_9	(6, 7)	Выполнение завершающей технологической операции в 2-м филиале	A_5, A_7	9
A_{10}	(7, 8)	Доставка изготовленных узлов изделия к месту сборки, его комплектация и проверка готового изделия	A_8, A_9	5

Сетевой график, составленный по этим мероприятиям, показан на рис. 10.1.

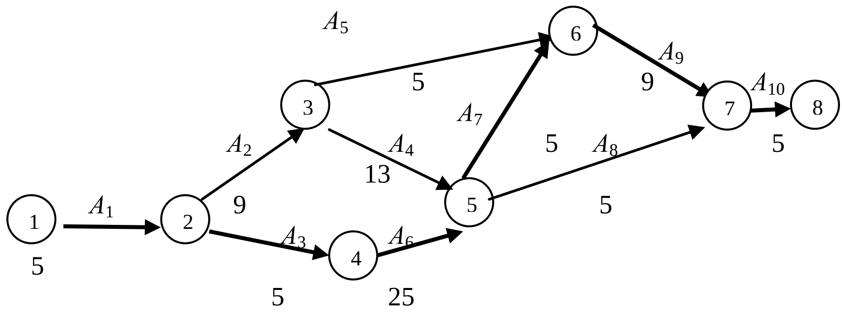


Рис. 10.1. Сетевой график выпуска нового вида продукции

На нем работы, обозначенные стрелками, имеют буквенное обозначение, причем указана продолжительность каждого мероприятия. Исходным событием является 1, ставя это число в левую часть графика (в кружок), а последнее событие 8 ставим в крайний правый кружок, разместив между ними промежуточные события. Нумерация кружков почти произвольна. Однако сетевой график должен быть упорядочен. Поэтому при присвоении номеров кружкам соблюдают правило: по каждой работе номер кружка, обозначающего ее начало, должен быть меньше номера окончания работы. Другими словами, в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо – от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами.

Рассмотрим различные полные пути данного графика, где начало совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим. В этом проекте их 5 (табл. 10.2).

Т а б л и ц а 10.2. **Полные пути сетевого графика**

Номер	Направление пути	Продолжительность, ч
$L(1)$	1-2-3-6-7-8	33
$L(2)$	1-2-3-5-6-7-8	46
$L(3)$	1-2-3-5-7-8	37
$L(4)$	1-2-4-5-6-7-8	54
$L(5)$	1-2-4-5-7-8	45

Можно убедиться в том, что путь $L(4)$ имеет наибольшую продолжительность, поэтому и является критическим ($L(4) = L_{кр}$), а на графике он обозначается жирной линией. Его продолжительность составляет 54 ч, т. е. для проведения комплекса работ по выполнению проекта понадобится 54 ч. Быстрее комплекс выполнить нельзя, так как для достижения завершающего события критический путь надо пройти обязательно.

10.3. Метод критического пути

Анализ методом критического пути заключается в определении того маршрута в сетевом графике, который особым образом влияет на общую продолжительность. Работы критического пути не имеют гибкости, если проект должен закончиться в срок. Значит, чтобы завершить весь проект согласно графику, критические работы должны начинаться вовремя и заканчиваться в пределах отведенного времени. Любые отклонения неизбежно повлияют на общую продолжительность.

При анализе сетевого графика рассмотрим такие временные параметры (табл. 10.3), как сроки свершений и резервы событий, а также сроки выполнения работ и их резервы времени.

Изучим содержание и расчет указанных параметров. Как уже отмечалось, событие не может наступить прежде, чем свершатся все предшествующие ему события и не будут выполнены все предшествующие работы.

Таблица 10.3. **Временные параметры сетевого графика**

Элемент сети, характеризуемый параметром	Наименование параметра	Условное обозначение параметра
Событие i	Ранний срок свершения события Поздний срок свершения события Резерв времени события	$t_р(i)$ $t_п(i)$ $R(i)$
Работа (i, j)	Ранний срок начала работы Ранний срок окончания работы Поздний срок начала работы Поздний срок окончания работы Полный резерв времени работы	$t_{рн}(i, j)$ $t_{ро}(i, j)$ $t_{пн}(i, j)$ $t_{по}(i, j)$ $R_п(i, j)$
Простой (j)	Свободный резерв времени работы Независимый резерв времени работы	$R_с(i, j)$ $R_н(i, j)$

Ранний срок исходного события равен нулю: $t_р(1) = 0$. Ранний срок свершения последующего события определяется как сумма раннего срока свершения предыдущего события и продолжительности работы:

$$t_{\text{р}}(j) = t_{\text{р}}(i) + t(i, j). \tag{10.1}$$

Если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i, то ранний срок свершения события j находят по формуле

$$t_{\text{р}}(j) = \max_{i,\, j}\left[t_{\text{р}}(i) + t(i, j)\right]. \tag{10.2}$$

Следовательно, при определении ранних сроков свершения событий следует двигаться по сетевому графику слева направо и использовать формулы (10.1) и (10.2).

Итак, для $i = 1$ $t_{\text{р}}(1) = 0$. Для $i = 2$ $t_{\text{р}}(2) = t_{\text{р}}(1) + t(1,2) = 0 + 5 = 5$ (так как для события 2 существует только одно событие). Для $i = 3$ $t_{\text{р}}(3) = t_{\text{р}}(2) + t(2, 3) = 5 + 9 = 14$. Для $i = 4$ $t_{\text{р}}(4) = t_{\text{р}}(2) + t(2, 4) = 5 + 5 = 10$.

Так как для события 5 имеется два предшествующих ему события, т. е. два предшествующих пути, то:

$$t_{\text{р}}(5) = \max\{t_{\text{р}}(3) + t(3, 5);\ t_{\text{р}}(4) + t(4, 5)\} = \max\{14 + 13;\ 10 + 25\} = 35.$$

Аналогично:

$$t_{\text{р}}(6) = \max\{t_{\text{р}}(3) + t(3, 6);\ t_{\text{р}}(5) + t(5, 6)\} = \max\{14 + 5;\ 35 + 5\} = 40.$$
$$t_{\text{р}}(7) = \max\{t_{\text{р}}(5) + t(5, 7);\ t_{\text{р}}(6) + t(6, 7)\} = \max\{35 + 5;\ 40 + 9\}.$$

В итоге $t_{\text{р}}(8) = t_{\text{р}}(7) + t(7, 8) = 49 + 5 = 54$, т. е. длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 8.

$$t_{\text{кр}} = t_{\text{р}}(8) = 54 \text{ ч}.$$

Для расчета поздних сроков свершения событий необходимо двигаться по сети в обратном направлении, т. е. справа налево.

Для завершающего события поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку:

$$t_{\text{р}} = t_{\text{п}}(8) = 54 \text{ ч}.$$

Поздний срок свершения предыдущего события будет определяться как разность позднего срока свершения последующего события и продолжительности работы:

$$t_{\text{п}}(i) = t_{\text{п}}(j) - t(i, j). \tag{10.3}$$

Если нескольким событиям j предшествует свершение одного события i, то поздний срок свершения события i находим так:

$$t_п(i) = \min_{i,j}[t_п(j) - t(i, j)]. \qquad (10.4)$$

Используя формулы (10.3) и (10.4), найдем:

Для i = 7 $t_п(7) = t_п(8) - t(7, 8) = 54 - 5 = 49$, так как для события 7 существует одно последующее событие.

Для i = 6 $t_п(6) = t_п(7) - t(6, 7) = 49 - 9 = 40$.

Для i = 5 $t_п(5) = \min\{t_п(6) - t(5, 6); t_п(7) - t(5, 7)\} = \min\{40 - 5; 49 - 5\} = 35$, так как для события 5 существует два последующих события.

Для i = 4 $t_п(4) = t_п(5) - t(4, 5) = 35 - 25 = 10$.

Для i = 3 $t_п(3) = \min\{t_п(5) - t(3, 5); t_п(6) - t(3, 6)\} = \min\{35 - 13; 40 - 5\} = 22$.

Для i = 2 $t_п(2) = \min\{t_п(3) - t(2, 3); t_п(4) - t(2, 4)\} = \min\{22 - 9; 10 - 5\} = 5$.

Для i = 1 $t_п(1) = t_п(2) - t(1, 2) = 5 - 5 = 0$.

Резерв времени события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения: $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$.

Внесем полученные данные в табл. 10.4.

Резерв времени события $R(3) = 8$ означает, что время свершения события 3 может быть задержано на 8 ч без увеличения общего срока выполнения проекта. Анализируя табл. 10.4, видим, что не имеют резервов времени события 1, 2, 4, 5, 6, 7 и 8, которые и образуют критический путь (см. рис. 10.1).

Т а б л и ц а 10.4. **Временные параметры событий для сетевого графика**

Номер события	Сроки свершения события, ч		Резерв времени $R(i)$
	ранний $t_р(i)$	поздний $t_п(i)$	
1	0	0	0
2	5	5	0
3	14	22	8
4	10	10	0
5	35	35	0
6	40	40	0
7	49	49	0
8	54	54	0

Таким образом, для того чтобы определить длину критического пути, вовсе не обязательно перебирать все полные пути сетевого графика. Для этого можно найти ранний срок наступления завершающего события сетевого графика.

Теперь перейдем к параметрам работ. Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события, т. е.: $t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i)$.

Тогда ранний срок окончания работы будет равен: $t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t(i, j)$.

На основе перечисленных аналитических формул внесем рассчитанные показатели в табл. 10.5 (колонки 4 и 5).

Т а б л и ц а 10.5. **Временные параметры работ для сетевого графика**

Работа	Шифр (i, j)	t (i, j)	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работ			$К_Н$
			$t_{\text{рн}}$ (i, j)	$t_{\text{ро}}$ (i, j)	$t_{\text{пн}}$ (i, j)	$t_{\text{по}}$ (i, j)	$R_{\text{п}}$ (i, j)	$R_{\text{с}}$ (i, j)	$R_{\text{н}}$ (i, j)	
A_1	(1, 2)	5	0	5	0	5	0	0	0	1
A_2	(2, 3)	9	5	14	13	22	8	0	0	0,73
A_3	(2, 4)	5	5	10	5	10	0	0	0	1
A_4	(3, 5)	13	14	27	22	35	8	8	0	0,73
A_5	(3, 6)	5	14	19	35	40	21	21	13	0,40
A_6	(4, 5)	25	10	35	10	35	0	0	0	1
A_7	(5, 6)	5	35	40	35	40	0	0	0	1
A_8	(5, 7)	5	35	40	44	49	9	9	9	0,36
A_9	(6, 7)	9	40	49	40	49	0	0	0	1
A_{10}	(7, 8)	5	49	54	49	54	0	0	0	1

Заполнение таблицы начинается с колонки 4. Для работ, начинающихся событием 1, никакая другая работа не предшествует и наиболее раннее время начала равно 0. В данном проекте такая работа только одна – (1, 2), поэтому в колонку 4 в соответствующую ей строку проставим 0, а в колонку 5 ставим 0 + 5 = 5.

Для заполнения следующих строк колонки 4, т. е. строк, начинающихся с номера 2, просматриваем заполнение строки колонки 5, содержащие работы, которые оканчиваются на этот номер (максимальное значение переносится в колонку 4 обрабатываемых строк). Цифру 5 из колонки 5 переносим в колонку 4 для всех работ, начинающихся с номера 2, т. е. в две последующие строки с цифрами (2, 3), (2, 4).

Далее для каждой из этих работ путем суммирования их значений по колонкам 3 и 4 найдем значение колонки 5:

$$t_{\text{ро}}(2, 3) = 9 + 5 = 14;$$
$$t_{\text{ро}}(2, 4) = 5 + 5 = 10.$$

Аналогично находим данные для всех остальных строк. Далее покажем, как рассчитывается поздний срок окончания работы: $t_{по}(i, j) = t_п(j)$, т. е. поздний срок окончания завершающей работы совпадает с ранним сроком окончания завершающей работы и равен критическому пути.

Поздний срок начала работы определяется как разность между поздним сроком окончания работы и ее продолжительностью: $t_{пн}(i, j) = t_п(j) – t(i, j)$.

Для расчета этих параметров необходимо заполнить колонки 7 и 6 таблицы, двигаясь снизу вверх. Вначале просматриваются строки, оканчивающиеся на номер последнего события, и из колонки 5 выбирается максимальная величина (в нашей задаче одна строка и эта величина равна 54). Данная цифра записывается в колонку 7 по всем строкам, оканчивающимся на номер последнего события. Затем находятся показатели для колонки 6, т. е. имеем $t_{пн}(7, 8) = 54 – 5 = 49$. Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер события, которое непосредственно предшествует завершающему событию (т. е. 7). Для определения колонки 7 этих строк (работы (6, 7), (5, 7)) изучаются все строки колонки 6, лежащие ниже и начинающиеся с номера 7. Среди них выбирается минимальная величина, которая переносится в колонку 7 по обрабатываемым строкам. В нашем проекте она одна (7, 8), поэтому заносим во все строки указанных работ число 49. Расчеты для остальных строк проводятся аналогично.

Среди резервов времени работ выделяют следующие разновидности. Полный резерв времени показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится:

$$R_п(i, j) = t_п(j) – t_р(i) – t(i, j).$$

Содержание колонки 8 можно также получить находя разность колонок 6 и 4 или 7 и 5.

Свободный резерв времени – это запас времени, на который можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Свободным резервом времени можно пользоваться для предотвращения случайностей, которые могут возникнуть в ходе выполнения работ. Показатель рассчитывается так:

$$R_с(i, j) = t_р(j) – t_р(i) – t(i, j).$$

Например, свободный резерв времени работы (3, 6) найдем так:

$$R_с(3, 6) = t_р(6) – t_р(3) – t(3, 6) = 40 – 14 – 5 = 21,$$

т. е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 21 ч может быть задержано выполнение работы (3, 6) и предшествующих ей работ.

Независимый резерв времени – это запас времени, полученный для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки. Независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы и рассчитывается так:

$$R_н(i, j) = t_р(j) – t_п(i) – t(i, j)$$
$$\text{или } R_н(i, j) = R_п(i, j) – R(i) – R(j).$$

Например, независимый резерв времени работы (3, 6) определим следующим образом:

$$R_н(3, 6) = t_р(6) – t_п(3) – t(3, 6) = 40 – 22 – 5 = 13,$$

т. е. на 13 ч может быть увеличена продолжительность данной работы без изменения резервов времени всех остальных работ. Таким образом, работы, лежащие на критическом пути, резервов времени не имеют (он равен для них нулю).

И наоборот, допустим, для работы (5, 7) все виды резерва времени одинаковы (9 ч), что говорит о том, что продолжительность этой работы можно увеличить до 9 ч без ущерба для общих сроков проекта, а также сроков других работ.

Дополнительным показателем, который можно просчитать для данного сетевого графика, является коэффициент напряженности:

$$К_н(i, j) = 1 - \frac{R_п(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

где $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Для работ критического пути $К_н = 1$. Для других работ:

$$К_н(2, 3) = 1 – [8 : (54 – (5 + 5 + 9 + 5)] = 0{,}73;$$
$$К_н(3, 5) = 1 – [8 : (54 – (5 + 5 + 9 + 5)] = 0{,}73;$$
$$К_н(3, 6) = 1 – [21 : (54 – (5 + 9 + 5)] = 0{,}40;$$
$$К_н(5, 7) = 1 – [9 : (54 – (5 + 5 + 25 + 5)] = 0{,}36.$$

Коэффициент напряженности изменяется от 0 до 1, причем чем ближе он к 1, тем сложнее выполнить работу в установленный срок. Учитывая этот показатель, все работы могут быть разделены на 3 группы:

- напряженные ($К_н(i, j) > 0,8$;
- подкритические ($0,6 < К_н(i, j) < 0,8$;
- резервные ($К_н(i, j) < 0,6$.

Следовательно, оптимизация сетевого графика будет выражаться в перераспределении ресурсов с ненапряженных работ на критические с целью ускорения их выполнения. Тем самым продолжительность критического пути, а значит, и время выполнения проекта в целом будут сокращены. Таким образом, можно утверждать, что в рассматриваемом сетевом графике оптимизация проекта возможна в основном за счет двух резервных работ: (3, 6) и (5, 7).

11. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

11.1. Общие сведения и основные понятия

Моделируя различные процессы в народном хозяйстве, часто встречаются случаи, когда интересы участвующих сторон противоположны. Такие ситуации называют конфликтными. Поэтому при решении задач приходится использовать ***математические методы и модели теории игр***.

Возникновение данного направления научных исследований относится к 1944 г., когда вышла в свет монография Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Известно, что игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике агропромышленного комплекса. Математическая теория игр занимается выработкой рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций (когда сталкиваются интересы конкурирующих сторон). В итоге разрабатываются предложения по наилучшим вариантам поведения, которые обеспечивали бы оптимальный результат. В качестве выигрыша могут выступать эффективность использования дефицитных ресурсов, себестоимость, прибыль и т. д.

Рассмотрим основные категории применяемых моделей. *Игра* – это совокупность мероприятий, состоящая из ряда действий сторон. Участвующие стороны являются *игроками*. *Стратегия* – это свод правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации в зависимости от сложившейся обстановки.

Решение экономико-математических задач требует соблюдения правил игры, т. е. системы условий, регламентирующих возможные варианты действий сторон. Игра состоит из этапов или ходов, заключающихся в выборе игроком одного из предусмотренных правилами вариантов поведения. Очевидно, что, выбирая ту или иную стратегию, каждый из игроков стремится удовлетворить свои интересы: первый – обеспечить себе максимально возможный выигрыш, а второй – минимально возможный проигрыш.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько стратегий, то такая стратегия называется смешанной, а ее элементы – чистыми стратегиями. Другими словами, смешанная стратегия есть комбинация чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одного из игроков, выраженный в количественной форме. Оптимальной стратегией будет та, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный выигрыш.

Следовательно, каждая формализованная игра характеризуется:

1) количеством субъектов, которые называются игроками;

2) возможным для каждого из игроков набором действий, называемых стратегиями;

3) функциями выигрыша, отражающими степень удовлетворения интересов каждого из игроков;

4) результатом игры, к которому приводят выбранные игроками стратегии.

Существуют различные виды задач, классифицировать которые можно с учетом следующих признаков. В игре могут сталкиваться интересы двух (игра парная) или нескольких (игра множественная) противников. В зависимости от взаимоотношений участников различаются игры бескоалиционные (некооперативные) и коалиционные (кооперативные). По характеру выигрышей различают игры: а) с нулевой суммой; б) с ненулевой суммой. В зависимости от количества стратегий игры бывают конечные или бесконечные. По виду функции выигрыша можно выделить матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные игры. По количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода) и многоходовые, которые в свою очередь бывают позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с полной и неполной информацией.

В некоторых игровых задачах в сфере экономики приходится принимать решения в условиях, когда одна сторона не является сознательно действующим противником. В подобных ситуациях, вызванных несознательным противодействием противоположного игрока, принятие оптимальных управленческих рекомендаций основывается на теории статистических решений. Поэтому игры, где в качестве одного игрока выступает природа, называются статистическими.

Хотя существует достаточно большое количество задач игрового моделирования, вначале рассмотрим их ход решения на примере конечной парной антагонистической игры (как наиболее простой и теоретически разработанной). Специфика подобной типичной задачи в том, что здесь имеется игра двух лиц с нулевой суммой, в которой одна сторона проигрывает столько, сколько выигрывает другая.

11.2. Парная матричная игра

Изучим подробнее парную игру, для постановки которой требуется:

а) некоторая операция или целенаправленное действие, в которых участвуют две стороны A и B с противоположными интересами;

б) правила игры, регламентирующие результаты, к которым приводят возможные варианты действий сторон;

в) результаты действий сторон (выигрыши), выражающиеся в количественной форме a_{ij} (математическое ожидание выигрыша стороны A, сделавшей свой ход i при j-м ходе стороны B).

У каждого из двух игроков A и B имеется конечное число возможных действий (чистых стратегий) с числом m и n соответственно. Условие игры записывают в форме платежной матрицы (а игру называют прямоугольной, или матричной). Представим ее в общей форме в табл. 11.1.

Таблица 11.1. **Схема платежной матрицы**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Такое представление матричной игры означает, что если игрок A использует стратегию i, а игрок B – стратегию j, то платеж игроку A за счет B составит a_{ij}. Выигрыши могут выражаться и отрицательными числами. При $a_{ij} < 0$ игрок A платит игроку B сумму $|a_{ij}|$. Это означает, что в подобном случае фактически выигрывает игрок B.

Существует ряд методов решения матричных игр. Если матрица игры имеет одну из размерностей, равную двум ($2 \times n$ или $m \times 2$), то решение может быть получено графически. Не вдаваясь в подробности его описания, рассмотрим другой способ.

Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку A максимальный выигрыш, а игроку B – минимальный проигрыш. Поэтому стратегия игрока A называется оптимальной, если при ее применении его выигрыш не уменьшается, какими бы стратегиями не пользовался игрок B. Оптимальной для игрока B будет стратегия, при использовании которой его проигрыш не увеличивается, какие бы стратегии не применял игрок A. Известно, что в теории игр основополагающим является принцип осторожности, в соответствии с которым каждый игрок, считая своего партнера по игре разумным противником, выбирает свои стратегии исходя из предположения, что соперник не упустит ни единой возможности использовать любую его ошибку в своих интересах.

Решение задачи таково. Предположим, что игроку A надлежит сделать свой выбор. Анализируя платежную матрицу (см. табл. 11.1), нужно найти для каждой чистой стратегии минимальное значение α_i ожидаемого выигрыша, а затем из всех найденных значений – наибольшее (а также соответствующую ему чистую стратегию). Ее называют максиминной, поскольку такая стратегия отвечает следующей величине:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Данная величина называется нижней чистой ценой игры, или максимином.

В свою очередь игрок B, стремясь минимизировать проигрыш, при выборе наиболее предпочтительной стратегии поступает так: сначала для каждой чистой стратегии находится максимально возможный проигрыш, а затем среди этих значений выбирается минимальное, которое и укажет приемлемую стратегию. В данном случае верхняя чистая цена игры, или минимакс, равен:

$$\beta = \min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

Следовательно, максимин показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок A, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока B. С другой стороны, минимакс показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока B при правильном выборе им своих чистых стратегий независимо от действий игрока A.

Таким образом, правильно используя чистые стратегии, игрок A обеспечит себе выигрыш не менее α, а игрок B в результате правильного применения своих чистых стратегий не позволит игроку A выиграть больше, чем β. Если $\alpha = \beta$ то такая игра имеет седловую точку, а ее решение лежит в области чистых стратегий: оптимальными будут максиминная и минимаксная стратегии, а ценой игры (υ) – седловой элемент платежной матрицы. Если игрок B отклонится от своей минимаксной стратегии, его проигрыш может только увеличиться. Аналогично отклонение игрока A от своей максиминной стратегии ведет к уменьшению его выигрыша. Значит, наиболее предпочтительные стратегии в игре с седловой точкой обладают свойством устойчивости, создают ситуацию равновесия. Она может возникнуть в игре тогда, когда каждый из игроков выбирает свою оптимальную стратегию и получает соответственно максимальный гарантированный выигрыш и минимальный гарантированный проигрыш, величины которых совпадают.

11.3. Статистические игры

Чаще всего при решении экономических задач существует проблема выбора оптимального решения в условиях неопределенности и в условиях риска. При этом моделируется ситуация в виде игровой схемы, где существует неизвестность поведения противоположной стороны под влиянием случайных факторов. Такие ситуации называются играми с природой (или статистическими играми). Здесь два игрока: а) природа, т. е. вся совокупность внешних обстоятельств, безразличная к результату игры; б) статистик, как сознательный игрок. Термин «природа» может приобретать различное наполнение: климатические условия при выборе посева сельскохозяйственных культур на определенных участках; уровень спроса при определении вывоза продуктов на продовольственные рынки; степень обеспеченности ресурсами и др.

Статистические игры являются частным видом парных матричных игр. Игрок A может использовать m стратегий: A_1, A_2, ..., A_m. Природа также обладает множеством состояний: $П_1$, $П_2$, …, $П_п$. Из прежнего опыта статистику могут быть известны возможные состояния природы, а иногда и вероятности Q_i, с которыми природа реализует их.

Решение статистической игры может находиться либо в смешанных стратегиях, либо в чистых (их мы рассмотрим более детально). Поскольку природа не является заинтересованной стороной, имеется возможность оценить последствия применения своей чистой стратегии A_i в зависимости от любого состояния природы $П_j$. Таким образом, для каждой пары стратегий (A_i; $П_j$) можно рассчитать выигрыши a_{ij} игрока A, а все показатели игры записать в виде платежной матрицы.

На основании платежной матрицы составляется матрица рисков, которая позволит более четко выявить преимущество одной стратегии по сравнению с другой при данном состоянии природы. Если статистик пользуется чистой стратегией A_i при состоянии природы $П_j$, то его риском r_{ij} называется разность между максимальным выигрышем $(\max\limits_i a_{ij})$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем a_{ij}, который он получит, используя стратегию A_i, не зная, какое из состояний $П_j$ природа реализует.

При решении задач различают две ситуации: а) если вероятности состояний природы неизвестны, то речь идет о проблеме выбора в условиях неопределенности; б) если вероятности состояний природы известны, то соответственно – в условиях риска. Для каждой из ситуаций существуют свои критерии, т. е. математическое обоснование выбора наилучшей стратегии.

Если в задаче отсутствует информация о вероятностях, с которыми реализуются стратегии природы, то, имея ситуацию неопределенности, используют следующие критерии.

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного основания и основан на гипотезе равновероятности. Согласно ему считается, что, поскольку распределение вероятностей состояний природы неизвестно, нет причины считать их различными. Следовательно, вероятности всех состояний природы равны между собой:

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = \frac{1}{n}.$$

Оптимальной по критерию Лапласа считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш статистика при равенстве всех априорных вероятностей:

$$\max_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Критерий Вальда – это максиминный критерий крайнего пессимизма. Основан на консервативном осторожном поведении статистика, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших. Речь идет о том, что извлекается самый маленький результат a_{ij} из каждой строки таблицы и выбирается та из них, в которой находится наибольшее из этих чисел. Исходя из этого, игрок выбирает такую чистую стратегию A_i, при которой обеспечивается максимум минимального выигрыша, т. е. максиминную стратегию, при которой выигрыш – нижняя чистая цена игры:

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа, как и предыдущий, является критерием крайнего пессимизма, потому что статистик исходит из предположения, что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм максиминного критерия Вальда путем замены платежной матрицы матрицей риска и рекомендует в качестве оптимальной выбирать ту чистую стратегию A_i, при которой минимизируется величина максимального риска:

$$r = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Речь идет о том, что, определив максимальный выигрыш, небезынтересно знать разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем при выбранной стратегии. Эту разность называют риском. Риск статистика при применении им стратегии A_i при состоянии природы Π_j равен:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

$$\beta_j = \max a_{ij},$$

находя максимальный элемент j-го столбца.

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Исходя из субъективных соображений, в данный критерий вводится некоторый коэффициент λ. В области чистых стратегий оптимальной по Гурвицу считается стратегия, найденная из условия

$$\max_i \left[\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right],$$

где $0 \le \lambda \le 1$.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (крайнего пессимизма). Если $\lambda = 0$, то получаем критерий крайнего оптимизма, ибо рассчитываем на наилучшее из наилучших условий. Если λ принять близкой к 1, то это позволяет говорить о желании подстраховаться в данной ситуации, когда о состоянии природы ничего не известно.

12. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

12.1. Анализ эффективности инвестиционных проектов

Денежные средства сначала вкладываются в предпринимательскую деятельность, а затем возвращаются, принося инвестору определенную прибыль. В группу основных показателей коммерческой эффективности инвестиций, где используют временной фактор, входят такие, как чистая текущая стоимость, внутренняя норма доходности, индекс доходности, простой и динамический срок окупаемости проекта. Применяемые параметры имеют одну важную особенность – используемые при их расчете расходы и доходы рассредоточены во времени, а поэтому необходимо приводить их к одному (базовому) моменту. Причина заключается в неодинаковой ценности денежных средств во времени, т. е. рубль, вложенный сегодня в инвестиции, не тождественен рублю через год, два и т. д. Разное отношение к одной и той же денежной сумме вызвано не столько возможными инфляционными процессами, сколько тем, что вложенный в любое коммерческое предприятие рубль, включая и помещение его на депозитный счет в банке, способен через определенный период времени превратиться в большую сумму за счет полученного дохода (процентов).

Таким образом, затраченный сегодня рубль стоит дороже, чем через год (т. е. в будущем), под воздействием таких факторов, как инфляция, процентный доход и риск (например, кредитор может не выполнить своего обязательства или проект по ряду причин оказался не настолько эффективным, как это ожидалось). Для измерения текущей и будущей стоимости проекта используют специальный прием, называемый дисконтированием. Метод дисконтирования денежных потоков инвестиционного проекта получил широкое распространение в рыночной экономике, где дисконтируются так называемые свободные денежные потоки.

Начнем изложение этого метода с банковских депозитов. Пусть i – эффективная банковская процентная ставка для периода капитализации. Если P – это начальный капитал, положенный в банк при процентной ставке i, то в конце периода капитализации наращенная сумма составит $P\,(1 + i)$.

Например, начальный капитал составляет 1500 у. д. е., а процентная ставка для периода капитализации равна 11 %. Тогда капитал в конце периода капитализации (начальный капитал плюс наросший процент) составит 1500 (1 + 0,11) = 1665 у. д. е.

Если в начале второго периода капитализации наращенную сумму опять положить в банк при той же процентной ставке, что и в первом периоде капитализации, то в конце второго периода капитализации наращенная сумма составит $\left[P(1+i)\right](1+i) = P(1+i)^2$.

Например, если 1500 у. д. е. положены в банк на три года при годовой процентной ставке 11 %, то сумма, наращенная к концу третьего года, составит $1500\,(1 + 0{,}11)^3 = 2051{,}45$ у. д. е.

Если обозначим сумму, наращенную за n периодов капитализации, символом S, то имеет место формула

$$S = P\,(1 + i)^n. \tag{12.1}$$

В формуле (12.1) коэффициент аккумуляции $(1 + i)^n$ показывает денежную сумму, нарастающую за n периодов капитализации при начальном капитале 1 у. д. е. Обозначим его символом α. В предыдущих расчетах $\alpha = (1 + 0{,}11)^3 = 1{,}36763$. Это значит, что при годовой эффективной процентной ставке 11 % с одной денежной единицы, положенной в банк, за три года нарастает 1,36763 у. д. е.

Из формулы (12.1) вытекает, что $P = S / (1 + i)^n$, т. е., для того, чтобы сумма, наращенная через n периодов капитализации, составила S у. д. е., нужно положить в банк $S / (1 + i)^n$ у. д. е. в начале срока. Такой начальный капитал называется текущей ценностью (или приведенной стоимостью) суммы S. Обозначим его символом PV:

$$PV = \frac{S}{(1+i)^n}. \tag{12.2}$$

Например, для того чтобы сумма, наращенная за четыре года при годовой эффективной процентной ставке 11 %, составила 1500 у. д. е. в начале срока, нужно положить в банк:

$$PV = 1500 / (1 + 0{,}11)^4 = 988{,}096 \text{ у. д. е.}$$

Процесс нахождения текущей ценности называется дисконтированием. Из формулы (12.2) вытекает, что коэффициент дисконтирования $(1 + i)^{-n}$ (обозначим его символом δ) показывает, какую сумму нужно положить в банк для того, чтобы через n периодов капитализации наращенная сумма составила 1 у. д. е. В рассмотренном выше примере $\delta = (1 + 0{,}11)^{-4} = 0{,}65873$.

12.2. Экономико-математическая модель формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов

Часто при выборе инвестиционных проектов у руководителей организаций АПК возникают различные задачи. Первый тип задач – это выбор вариантов вложений для достижения одной и той же цели – лучшего экономического эффекта. В таких задачах могут быть различные инвестиционные вложения, обеспечивающие разные результаты при функционировании проекта. Второй тип задач – это выбор вариантов инвестирования для достижения различных целей, у каждой из которых имеется своя потребность в инвестиционных вложениях и свои возможности получения дивидендов, доходов, прибылей и пр.

В методическом плане обе задачи практически одинаковы с точки зрения отбора лучшего варианта вложений. По своему характеру они относятся к задачам сравнительной экономической эффективности вложений, при решении которых из множества вариантов нужно отобрать для реализации только один, обладающий наилучшими показателями эффективности с позиций интересов инвестора. При этом постановка некоторых экономико-математических задач связана с использованием отдельных ограниченных ресурсов.

Например, имеется возможность реализации n инвестиционных проектов. Эффективность i-го инвестиционного проекта характеризуется чистой текущей стоимостью проекта NPV_i $(i = \overline{1,n})$. Первональные инвестиции, необходимые для реализации i-го инвестиционного проекта, составляют $I_0^i \ (i=\overline{1,n})$. Размер имеющихся в распоряжении финансовых ресурсов равен I_c.

Пусть x_i – решение о реализации либо отклонении i-го инвестиционного проекта, принимающее следующие значения:

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \ i\text{-й инвестиционный проект отклоняется;} \\ 1, \text{ если } \ i\text{-й инвестиционный проект реализуется.} \end{cases}$$

Таким образом, структурная экономико-математическая модель формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов может быть сформулирована в следующем виде:

максимум доходности портфеля инвестиционных проектов –

$$F = \sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i \to \max;$$

при ограничении на финансовые ресурсы –

$$\sum_{i=1}^{n} I_0^i x_i \le I_c;$$

при ограничении на значения переменных –

$$x_i = 0 \cup 1, \ i = \overline{1,n}.$$

В случае рассмотрения конкретной ситуации система ограничений может быть расширена.

Во-первых, при использовании дополнительных ресурсов для реализации инвестиционных проектов математическое выражение данного типа ограничений аналогично ограничению по финансовым ресурсам.

Во-вторых, в случае исключения одновременной реализации некоторых инвестиционных проектов (например, для проектов 1 и 2) математическое выражение, описывающее это условие, будет иметь вид

$$x_1 + x_2 \le 1.$$

13. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В СФЕРЕ ФИНАНСОВОЙ И КРЕДИТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИЙ

13.1. Понятие кредитного риска. Модели и методы его оценки

В любой сфере деятельности наряду с возможностью получить прибыль всегда существует опасность потерь (риск). Система банковских рисков включает значительное число их видов, представленное в различных классификациях. Основным банковским риском является кредитный риск.

Кредитный риск – это риск невозврата (неплатежа) или просрочки платежа по банковской ссуде. Управление этим риском – ключевой фактор, определяющий эффективность деятельности банка. На величину кредитного риска могут оказывать влияние как макро-, так и микроэкономические факторы. Особенно важно иметь эффективную систему управления кредитным риском в условиях финансового кризиса, жесткой конкуренции среди множества кредитных учреждений и банковских продуктов, а также нестабильности и несовершенства банковского законодательства.

По источникам возникновения кредитный риск можно разделить на 2 группы:

- *внешний риск* (обусловлен надежностью контрагента) – риск контрагента, страновой риск, риск концентрации портфеля;
- *внутренний риск* (риск кредитного продукта) – риск невыплаты основной суммы долга и процентов по нему, риск замещения заемщика, риск обеспечения кредита.

Основными причинами возникновения риска невозврата ссуды являются: банкротство; неплатежеспособность; реструктуризация задолженности; отказ от уплаты долга; отказ; досрочное наступление срока исполнения обязательства; дефолт по облигациям.

По предмету исследования выделяют два основных альтернативных подхода к оценке и управлению кредитными рисками:

«внутренний» подход, в котором банк на основе собственных методик оценивает как ожидаемое значение, так и волатильность будущих потерь вследствие кредитного риска;

«рыночный» подход, который нацелен на определение стоимости кредитного риска, устанавливаемой финансовым рынком. Обычно эта оценка выражается в виде разницы в доходности (кредитного спреда)

по инструментам, связанным с кредитным риском, по сравнению с доходностью по безрисковым (государственным) облигациям или займам.

«Внутренний» подход предполагает, что ожидаемые потери являются функцией вероятности дефолта, стоимости продукта или инструмента, подверженного риску дефолта, и той части этой стоимости, которая будет безвозвратно потеряна в случае дефолта. В той мере, в какой ожидаемые (средние) потери являются прогнозируемыми, они должны рассматриваться как нормальные, регулярно повторяющиеся издержки данного вида деятельности и напрямую относиться на ее себестоимость, т. е. должны включаться в цену кредитного продукта.

Особенностью *«рыночного»* подхода является то, что кредитный спред включает в себя указанные выше составляющие кредитного риска, т. е. в нем проблематично выделить ту часть, которая соответствует ожидаемым потерям, и оставшуюся часть, которая взимается как компенсация волатильности потерь. Столь же затруднительно выделить в величине кредитного спреда «вклады», вносимые в нее вероятностью дефолта и уровнем безвозвратных потерь в случае дефолта. Изменения рыночного спреда в рамках этого подхода прогнозируются на довольно короткие периоды времени (дни или недели). Учет портфельных эффектов осуществляется по аналогии с оценкой рыночного риска в виде показателя *VaR* – по наблюдаемым на рынке корреляциям между кредитными спредами. Размер капитала под покрытие потерь вследствие кредитного риска определяется аналогично рыночному риску.

Для количественной оценки кредитоспособности существует множество методов, которые учитывают ряд ключевых коэффициентов, раскрывающих структуру капитала, текущую, быструю и абсолютную ликвидности и позволяют оценить вероятность дефолта компании. Так, количественные методы оценки риска разделяют:

а) на коэффициентный анализ;

б) нейросетевое моделирование;

в) рейтинговые системы;

г) комплексную оценку риска;

д) статистические модели (1 – параметрические модели; 2 – скоринговые модели);

е) экспертные методы;

ж) прочие методы оценки кредитного риска.

Все вышеперечисленные методы позволяют оценить перспективную степень кредитоспособности компании – вероятность наступления дефолта. Но ни один метод не совершенен – у каждого есть свои преимущества и недостатки, описанные в табл. 13.1.

Т а б л и ц а 13.1. **Особенности методов оценки риска банкротства**

Название метода оценки риска банкротства	Сущность метода	Преимущества	Недостатки
1	2	3	4
Нейросетевое моделирование (Neural Networks)	Математическая модель, построенная по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей, т. е. выполняется обучение нейронных сетей на тренировочных примерах и находятся коэффициенты связи между нейронами	Независимость нейронных сетей от свойств входных данных; простота моделирования; отсутствие проблемы размерности – нейронные сети могут выявлять зависимости даже при большом количестве переменных	Сложность построения сети для конкретной задачи – нет стандартной схемы, что вынуждает в каждом случае выполнять конструирование сначала; сложность интерпретации результатов обучения вследствие невозможности объяснения значений параметров элементов сети в терминах решаемой задачи
Коэффициентный анализ (Ratio Analysis)	Данный метод базируется на данных финансовой отчетности и включает в себя расчет одного или нескольких показателей	Простота и оперативность анализа; выявление тенденций в изменении финансового состояния компании	Множественность предлагаемых наборов коэффициентов; высокая чувствительность к качеству анализируемых данных; отличие методологий, используемых при формировании бухгалтерской отчетности, в частности различные методы оценки активов обусловливают различные значения финансовых показателей

Окончание табл. 13.1

1	2	3	4
Рейтинговые системы (Rating Systems)	Рейтинг кредитоспособности состоит из ряда компонентов (иногда интегральных), полученных экспертным путем либо с помощью простейших математических операций над данными отчетности	Комплексный и системный подход к оценке вероятности дефолта благодаря тщательному изучению компании во всех аспектах позволяет легко сравнивать между собой компании, которым присвоен рейтинг	Несвоевременность рейтингового анализа, так как рейтинг составляется после публикации бухгалтерской отчетности предприятия и итоговое мнение экспертного агентства выносится через определенное время (3–4 мес); субъективизм получаемой оценки в результате широко практикуемого экспертного подхода при переводе качественных характеристик в количественные и при присвоении весов критериям в рейтинговой формуле
Статистические модели (Statistical models)	Разрабатываются с помощью применения различных статистических методов классификации (дискриминантный анализ, логит/пробит модели, регрессионный анализ и т. д.)	Высокая точность прогнозирования; простота интерпретации результатов анализа	Зависимость точность прогноза от выбора наиболее дескриптивных переменных – финансовых коэффициентов; снижение статистической надежности прогнозирования относительно отдаленного будущего
Экспертные методы (Expert Methods)	Экспертами выбирается совокупность частных критериев, характеризующих различные аспекты финансовой устойчивости	Возможность оценки не только вероятности банкротства предприятия, но и в целом финансового положения компании; простота и оперативность анализа	Субъективность анализа; множественность предлагаемых наборов коэффициентов

13.2. Модели оценки кредитного риска (скоринговые модели)

Наиболее популярными в практике прогнозирования банкротства являются скоринговые модели благодаря высокой точности прогнозирования и простоте интепретации результатов.

Скоринг представляет собой математическую (статистическую) модель, с помощью которой на базе кредитной истории уже имеющихся клиентов банк определяет вероятность возврата кредита в назначенный срок. Скоринг выделяет те характеристики, которые определяют степень надежности потенциального клиента.

Скоринговые модели хороши своей объективностью (минимальным влиянием человеческого фактора на принятие решения), высокой степенью автоматизации (возможностью обработки большого потока заявок в режиме реального времени) и адаптируемостью.

Многие ученые занимались развитием методики расчета вероятности банкротств на основе анализа финансовых показателей компаний. Это такие исследователи, как Ч. Л. Мервин, В. Б. Хикман, Э. И. Альтман, Р. Мойер, Р. Таффлер, Г. Тишоу и др. Одними из наиболее известных и получивших большое распространение являются методики прогнозирования банкротства, представленные в работах Эдварда Альтмана и Джеймса Олсона, опубликованные в 1968 г. и 1980 г. соответственно. Данные ученые разработали модели оценки вероятности дефолта предприятия с помощью множественного дискриминантного анализа и логистического регрессионного анализа.

Модель Эдварда Альтмана.

Альтман разработал на базе множественного дискриминантного анализа модель оценки кредитоспособности. В общем виде это была первая скоринговая модель, которая опиралась на подход, основанный на определении «расстояния до дефолта», известный в иностранной литературе как «distance to default approach».

Основываясь на данных успешно действующих и обанкротившихся предприятий США, американский экономист рассчитал коэффициент вероятности банкротства z. Данный показатель позволяет разделить хозяйствующие субъекты на нормально функционирующие и потенциальные банкроты. Эдвард Альтман построил двухфакторную, пятифакторную и семифакторную модели. Наиболее популярной является пятифакторная модель.

При построении модели Эдвард Альтман исследовал 22 аналитических коэффициента, характеризующих финансовое состояние

33 обанкротившихся американских промышленных фирм в период с 1946 по 1965 гг., и сравнил их с такими же показателями 33 успешно работающих предприятий тех же отраслей и аналогичных масштабов. Из этих показателей Альтман отобрал 5 наиболее значимых для прогнозирования вероятностей банкротства и построил пятифакторную модель, которая широко используется и в настоящее время:

$$z = 1,2x_1 + 1,4x_2 + 3,3x_3 + 0,6x_4 + x_5, \qquad (13.1)$$

где z – дискриминантная функция, значения которой диагностируют наличие кризисной ситуации;

x_1 – отношение оборотного капитала к сумме всех активов предприятия;

x_2 – уровень рентабельности активов (отношение чистой прибыли к средней сумме используемых активов);

x_3 – уровень доходности активов (отношение чистого дохода к средней сумме используемых активов);

x_4 – коэффициент отношения собственного капитала к объему заемных средств;

x_5 – отношение выручки от реализации продукции к средней стоимости активов.

В зависимости от полученного значения индекса кредитоспособности z производится оценка вероятности наступления банкротства по определенной шкале:

а) если $z < 1,81$, вероятность наступления банкротства очень велика;

б) если $1,81 < z < 2,675$, вероятность наступления банкротства средняя;

в) если $2,675 < z < 2,99$, вероятность наступления банкротства низкая;

г) если $z > 2,99$, вероятность наступления банкротства ничтожна.

***Дискриминантные модели оценки кредитного риска*.**

***Модели, основанные на регрессии*.** Наблюдения делятся на две группы: с дефолтом и без дефолта. Показателю z^i i-го наблюдения ($i = \overline{1, N}$) присваивается некоторое значение для наблюдений с дефолтом (одно и то же значение для всех наблюдений с дефолтом) и некоторое другое значение для наблюдений без дефолта (одно и то же значение для всех наблюдений без дефолта).

Таким образом,

$$z^i = \begin{cases} a, \text{ в случае дефолта;} \\ b, \text{ в случае отсутствия дефолта.} \end{cases}$$

Замечание. Выбор значений a и b не играет роли.

Предполагается, что имеет место уравнение регрессии:

$$z^i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^i + \varepsilon^i, \; i = \overline{1, N}, \tag{13.2}$$

где k – вид показателя;

x_k^i – значение k-го показателя z^i i-го наблюдения;

β_k, $k = \overline{0, n}$ – коэффициенты регрессии;

ε^i – случайное отклонение.

С помощью значений x_k^i и z^i методом наименьших квадратов определяются оценки $\beta_k{}^{/}$ коэффициентов β_k (т. е. решается задача $\sum_{i=1}^{N} (\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^i - z^i)^2 \to \min$.

Затем для каждого наблюдения находятся прогнозные значения z^i по формуле

$$z^i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^i. \tag{13.3}$$

Обозначим через N_1 количество наблюдений с дефолтом, через I_1 – множество индексов i для наблюдений с дефолтом, через N_2 – количество наблюдений без дефолта, через I_1 – множество индексов i для наблюдений без дефолта.

В каждой из двух групп находятся средние значения $\overline{z}_1$ и $\overline{z}_2$ прогнозных значений z^i:

$$\overline{z}_l = \frac{1}{N} \sum_{i \in I_l} z^i, \; l = \overline{1, 2}. \tag{13.4}$$

Для потенциального заемщика находится прогнозное значение показателя z по формуле

$$z = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k, \tag{13.5}$$

где x_k – значение k-го показателя потенциального заемщика.

Потенциального заемщика относят к той группе (с дефолтом или без дефолта), для которой значение показателя z потенциального заемщика «ближе» (в некотором смысле) к среднему значению $\overline{z}^l$ группы. Для определения «близости» z к $\overline{z}^l$ может использоваться, например, следующая мера:

$$D(z, \overline{\overline{Z_l}}) = \left| \frac{z - \overline{\overline{Z_l}}}{\sigma_l} \right|. \tag{13.6}$$

Здесь σ_l – выборочное стандартное отклонение показателя z для группы l, т. е.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i \in I_l} (z - \overline{\overline{z_i}})^2}, \quad l = \overline{1,2}. \tag{13.7}$$

Таким образом, потенциального заемщика относят к первой группе (с большим кредитным риском), если $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) < D(z, \overline{\overline{Z_2}}),$ а ко второй группе (с малым кредитным риском), если $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) > D(z, \overline{\overline{Z_2}}).$

Для определения, к какому значению $\overline{z}^l$ ближе z, удобно использовать так называемое граничное значение $z_{\text{гр}}$ показателя z. Это значение «равноудалено» от $\overline{z}_1$ и $\overline{z}_2$, т. е. оно находится из следующего уравнения:

$$D(z_{\text{гр}}, \overline{z}_1) = D(z_{\text{гр}}, \overline{z}_2) . \tag{13.8}$$

Если, например, для определения близости используется формула (13.6), граничное значение $z_{\text{гр}}$ находится по формуле

$$z_{\text{гр}} = \frac{\sigma_1 \overline{z}_2 + \sigma_2 \overline{z}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{13.9}$$

В случае когда $\overline{z}_1 < \overline{z}_2$, $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) < D(z, \overline{\overline{Z_2}})$, тогда и только тогда, когда $z < z_{\text{гр}}$, а $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) > D(z, \overline{\overline{Z_2}})$ тогда и только тогда, когда $z > z_{\text{гр}}$, потенциального заемщика относят к первой группе (с большим кредитным риском), если $z < z_{\text{гр}}$, а ко второй группе (с малым кредитным риском), если $z > z_{\text{гр}}$.

В случае когда $\overline{z}_1 > \overline{z}_2$, $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) < D(z, \overline{\overline{Z_2}})$, тогда и только тогда, когда $z > z_{\text{гр}}$, а $D(z, \overline{\overline{Z_1}}) > D(z, \overline{\overline{Z_2}})$ тогда и только тогда, когда $z < z_{\text{гр}}$, потенциального заемщика относят к первой группе (с большим кредитным риском), если $z > z_{\text{гр}}$, а ко второй группе (с малым кредитным риском), если $z < z_{\text{гр}}$.

Частным случаем описанной выше дискриминантной модели является ***модель Альтмана***. В этой модели прогнозное значение z для потенциального заемщика находится по формуле

$$z = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}99x_5. \tag{13.10}$$

Здесь $x_1, ..., x_5$ следующие финансовые показатели потенциального заемщика:

x_1 – отношение оборотного капитала к активам (оборотный капитал – это разница между краткосрочными активами и краткосрочными обязательствами);

x_2 – отношение нераспределенной прибыли к активам (нераспределенная прибыль – это прибыль до выплаты дивидендов);

x_3 – отношение прибыли до выплаты налогов и процентов к активам;

x_4 – отношение рыночной стоимости собственного капитала учетной стоимости долгосрочных обязательств;

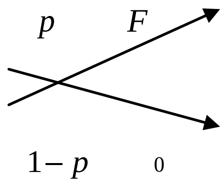
x_5 – отношение выручки к активам.

Граничное значение $z_{\text{гр}}$ в модели Альтмана равно 1,81. Если прогнозное значение z для потенциального заемщика меньше 1,81, то потенциального заемщика относят к группе с высоким кредитным риском.

13.3. Временная структура кредитного риска

Качество облигаций определяется кредитным риском. Чем выше кредитный риск, тем хуже качество облигаций, и тем выше должна быть доходность облигаций.

Пусть на рынке имеется бескупонная облигация с номинальной стоимостью F денежных единиц. Предположим, что номинал облигации либо выплачивается полностью в момент погашения, либо не выплачивается никогда. Обозначим через p вероятность выплаты номинала. Тогда $1 - p$ – это вероятность дефолта.



Размер ожидаемого платежа в момент погашения облигации равен pF.

Пусть цена облигации в текущий момент времени равна P. Обозначим через r эффективную доходность. Эффективная доходность r находится из следующего уравнения:

$$\frac{F}{1+r} = P.$$

Следовательно, $r = \frac{F}{P} - 1.$ В расчете на 1 д. е., вложенную в облигации данного вида, обещанный платеж составит $1+r$ д. е., а ожидаемый платеж – $p(1+r)$ д. е.

Пусть на рынке также имеются безрисковые бескупонные облигации с номинальной стоимостью F, срок погашения которых совпадает со сроком погашения рассмотренных выше облигаций. Напомним, что безрисковые облигации – это облигации, вероятность дефолта платежей которых равна нулю. Для таких облигаций ожидаемый платеж в момент погашения совпадает с номиналом F.

Пусть F – цена безрисковой облигации в текущий момент времени. Обозначим через r эффективную доходность безрисковых облигаций. Эффективная доходность r находится из следующего уравнения:

$$\frac{F}{1+r} = P.$$

Следовательно, $r = \frac{F}{p} - 1.$

Определим вероятность дефолта p с помощью доходностей r и $\bar{r}$. Для простоты предположим, что инвесторы нейтральны по отношению к риску, т. е. для них имеет значение только размер ожидаемого платежа. В этом случае должно выполняться равенство

$$p(1+r) = 1+\bar{r}. \tag{13.11}$$

Действительно, если $p(1+r) > 1+\bar{r},$ то нейтральные к риску инвесторы будут избавляться от безрисковых облигаций и покупать рискованные облигации, что приведет к снижению цены на безрисковые облигации и увеличению цены на рискованные облигации, и, следовательно, доходность безрисковых облигаций увеличится, а рискованных облигаций – уменьшится. В случае если $p(1+r) < 1+\bar{r},$ будет наблюдаться обратная картина. Поэтому в конечном счете, доходности r и $\bar{r}$ примут значения, для которых справедливо равенство (13.11).

Из равенства (13.11) вытекает, что

$$p = \frac{1+\bar{r}}{1+r}. \tag{13.12}$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – временная структура чистых доходностей рискованных облигаций, а $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \ldots, \overline{r_n}$ – временная структура чистых доходностей безрисковых облигаций. В расчете на 1 д. е., вложенную в рискованные бескупонные облигации со сроком погашения в конце периода k, обещанный платеж составит $(1+r_k)^k$ д. е., а ожидаемый платеж составит $p_k(1+r_k)^k$ д. е., где p_k – вероятность выплаты в конце периода k. В расчете на 1 д. е., вложенную в безрисковые бескупонные (возможно синтетические) облигации со сроком погашения в конце периода k, обещанный платеж составит $(1+\overline{r_k})^k$ д. е. Следовательно, в случае когда инвесторы нейтральны к риску, справедливо равенство

$$p_k(1+r)^k = (1+\overline{r_k})^k. \qquad (13.13)$$

Отсюда следует, что

$$p_k = \frac{(1+\overline{r_k})^k}{(1+r_k)^k}. \qquad (13.14)$$

В случае когда на рынке отсутствуют рискованные бескупонные облигации, формулу (13.14) можно получить другим способом.

Пусть чистые доходности рискованных облигаций получены с помощью n облигаций с невырожденной матрицей платежей:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k^i}{(1+r_k)^k} = P^i, \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (13.15)$$

Здесь C_k^i – k-й платеж облигации i-го вида, P^i – цена облигации i-го вида.

В случае, когда инвесторы нейтральны к риску, должны выполняться следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k c_k^i}{(1+\overline{r_k})^k} = P_i, i = \overline{1,n}. \qquad (13.16)$$

Равенства (13.16) означают, что цена инвестиционной стратегии, состоящей в покупке и продаже безрисковых облигаций и выплачивающей платежи $p_k C_k^i$, $k = \overline{1,n}$, должна быть равной цене P^i рискованной облигации i-го вида.

Из уравнений (13.15) и (13.16) следуют равенства (13.14). Действительно, подставив формулы (13.14) в равенства (13.16), получим равенства (13.15).

Найдем условные вероятности выплаты и дефолта в периоде k при условии, что платежи были выплачены во всех предшествующих периодах. Обозначим такую условную вероятность через q_k. В соответствии с определением условной вероятности, вероятность q_k равна отношению вероятности выплаты платежей в периодах с первого по k-й к вероятности выплаты платежей в периодах с первого по $(k-1)$-й.

Предположим, что для рискованных облигаций платежи в каждом периоде могут быть выплачены только в том случае, когда были выплачены платежи во всех предшествующих периодах. Тогда вероятность выплаты платежей в периодах с первого по k-й равна вероятности p_k выплаты платежа в период k, а вероятность выплаты платежей в периодах с первого по (k – 1)-й равна вероятности p_{k-1} выплаты платежа в периоде k – 1. Следовательно, в этом случае

$$q_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}. \tag{13.17}$$

13.4. Теория инвестиционного портфеля и ее использование для оценки кредитного риска

Формирование инвестиционного портфеля связано с подбором определенной совокупности объектов инвестирования для осуществления инвестиционной деятельности. Суть портфельного инвестирования состоит в улучшении возможностей инвестирования путем придания совокупности объектов инвестирования тех инвестиционных качеств, которые недостижимы с позиции отдельно взятого объекта, а возможны лишь при их сочетании. Структура инвестиционного портфеля отражает определенное сочетание интересов инвестора. Таким образом, инвестиционный портфель выступает как инструмент, посредством которого достигается требуемая доходность при минимальном риске и определенной ликвидности.

Соотношение риска и доходности. Доходность и риск являются взаимосвязанными категориями. Наиболее общими закономерностями, отражающими взаимную связь между принимаемым риском и ожидаемой доходностью деятельности инвестора, являются следующие:

- более рискованным вложениям, как правило, присуща более высокая доходность;
- при росте дохода уменьшается вероятность его получения, в то время как определенный минимально гарантированный доход может быть получен практически без риска.

Под *инвестиционным портфелем* понимается целенаправленно сформированная совокупность вложений в инвестиционные объекты, соответствующая определенной инвестиционной стратегии. В зависимости от направленности избранной инвестиционной политики и особенностей осуществления инвестиционной деятельности определяется система специфических целей, в качестве которых могут выступать:

- максимизация роста капитала;
- максимизация роста дохода;
- минимизация инвестиционных рисков;
- обеспечение требуемой ликвидности инвестиционного портфеля.

Цели формирования инвестиционного портфеля в существенной степени являются альтернативными. Рост рыночной стоимости капитала связан с определенным снижением текущего дохода инвестиционного портфеля. Приращение капитальной стоимости и увеличение дохода ведут к повышению уровня инвестиционных рисков. Задача достижения требуемой ликвидности может препятствовать включению в состав инвестиционного портфеля объектов, которые обеспечивают рост капитальной стоимости или получение высокого дохода, но характеризующихся, как правило, весьма низкой ликвидностью. В связи с альтернативностью рассмотренных целей инвестор при формировании инвестиционного портфеля определяет их приоритеты или предусматривает сбалансированность отдельных целей исходя из направленности разработанной инвестиционной политики.

Учет приоритетных целей при формировании инвестиционного портфеля лежит в основе определения соответствующих нормативных показателей, которые служат критерием при отборе вложений для инвестиционного портфеля и его оценке. В зависимости от принятых приоритетов инвестор может установить в качестве такого критерия, например, предельные значения прироста капитальной стоимости, дохода, уровня допустимых инвестиционных рисков или ликвидности. Вместе с тем в составе инвестиционного портфеля могут сочетаться объекты с различными инвестиционными качествами, что позволяет получить достаточный совокупный доход при консолидации риска по отдельным объектам вложений.

Портфель ценных бумаг характеризуется рядом особенностей. К положительным можно отнести более высокую степень ликвидности и управляемости, к отрицательным – отсутствие в ряде случаев возможностей воздействия на доходность портфеля, повышенные инфляционные риски.

В соответствии с целью инвестирования формирование портфеля ценных бумаг может осуществляться на основе различного соотношения дохода и риска. В зависимости от выбранного соотношения осуществляется отбор ценных бумаг, обладающих соответствующими инвестиционными свойствами. Портфели ценных бумаг, построенные по принципу диверсификации, предполагают комбинацию из достаточно большого количества ценных бумаг с разнонаправленной динамикой движения курсовой стоимости (дохода).

Следует отметить, что поскольку в реальной хозяйственной практике предприятия функционируют в рамках одной хозяйственной системы с присущими ей закономерностями и взаимосвязями, при моделировании возможно более безрискового портфеля следует анализировать не только качества отдельных видов ценных бумаг, но и корреляцию между ними. При этом в соответствии с портфельной теорией наименьший риск достигается в случае формирования портфеля из акций, движение курсов которых демонстрирует отрицательную корреляцию.

Эффективный инвестиционный портфель – портфель, который обладает максимальной ожидаемой доходностью при заданном уровне риска. Или наоборот: обеспечивает минимальный риск при заданной доходности.

Оптимальный портфель – это лучший для инвестора портфель из нескольких эффективных портфелей.

Принципы формирования инвестиционного портфеля:

- определение целей инвестирования, стратегии и типа портфеля;
- достижение приемлемой для инвестора доходности;
- обеспечение ликвидности;
- страхование от рисков и стабильность в получении дохода;
- достижение оптимального соотношения между доходностью и риском, в том числе путем диверсификации и обновления структуры портфеля.

Диверсификация – использование в инвестиционном портфеле нескольких доходных финансовых инструментов.

Оценка инвестиционных решений может осуществляться на основе различных методов. Выбор того или иного метода оценки инвестиционных объектов и формирования инвестиционного портфеля определяется конкретной целевой установкой инвестора. Сформированный с учетом всех рассмотренных факторов портфель ценных бумаг подлежит совокупной оценке по критериям доходности, риска и ликвидности, которая должна показать, соответствуют ли его основные характеристики заданному типу портфеля. При необходимости усиления целевой направленности портфеля по отдельным критериям в него вносятся определенные коррективы.

Отбор объектов инвестирования по критерию доходности играет наиболее существенную роль в процессе инвестиционного анализа в связи с высокой значимостью этого фактора в системе оценок. При постановке задачи линейного программирования оптимизация инвестиционного портфеля сводится к задаче нахождения такой комбинации инвестиционных объектов, которая обеспечила бы максимально возможный уровень доходности при заданных ограничениях. В качестве критериального показателя доходности, который должен быть максимизирован, следует использовать показатель суммарного чистого приведенного дохода инвестиционного портфеля, отражающий совокупный эффект инвестиций. В качестве ограничений могут быть заданы нестрогие неравенства:

- общий объем инвестиций по объектам в составе инвестиционного портфеля не должен превышать объем инвестиционных ресурсов, выделенных для финансирования инвестиций;
- минимальная внутренняя норма доходности по объектам в составе инвестиционного портфеля должна быть не меньше стоимости предполагаемых инвестиционных ресурсов или установленной инвестором нормы дисконта;
- максимальный срок окупаемости по объектам в составе инвестиционного портфеля не должен быть больше установленного предприятием ограничения;
- прочие показатели, существенные для инвестора.

Отбор инвестиционных объектов по критерию ликвидности осуществляется исходя из оценки двух параметров: времени трансформации инвестиций в денежные средства и размера финансовых потерь инвестора, связанных с этой трансформацией. Оценка ликвидности по времени трансформации измеряется, как правило, количеством дней, необходимых для реализации на рынке того или иного инвестиционного объекта.

Для оценки ликвидности инвестиционных объектов по времени трансформации инвестиционного портфеля в целом следует осуществить классификацию инвестиций по степени ликвидности, выделив:

- реализуемые инвестиции, включающие быстрореализуемые и среднереализуемые инвестиции;
- слабореализуемые инвестиции, включающие медленно реализуемые инвестиции и трудно реализуемые инвестиции.

Оценка ликвидности производится на основе расчета доли легкореализуемых инвестиций в общем объеме инвестиций, доли слабореализуемых инвестиций в общем объеме инвестиций и коэффициента соотношения ликвидности реализуемых и слабореализуемых инвестиций.

При больших значениях доли реализуемых инвестиций в их общем объеме и коэффициента соотношения ликвидности реализуемых и слабореализуемых инвестиций инвестиционный портфель считается более ликвидным. Подбор высоколиквидных объектов инвестирования при прочих равных условиях обеспечивает инвестору возможность повышения гибкости управления инвестиционным портфелем путем реинвестирования средств в более выгодные активы, выхода из неэффективных проектов и т. д.

Оценка инвестиционного портфеля по критерию риска производится с учетом коэффициентов риска и объемов вложений в соответствующие виды инвестиций. Вначале по каждому виду инвестиций рассчитываются конкретные значения показателей риска, затем рассчитывается совокупный риск инвестиционного портфеля.

Инвестиционные портфельные риски делятся на два вида:

1) *систематический (недиверсифицируемый) риск*;

2) *несистематический (диверсифицируемый) риск*.

Систематический риск обусловлен внешними макроскопическими причинами, не зависящими от конкретных ценных бумаг. Систематический риск невозможно уменьшить путем диверсификации. Основными составляющими систематического риска являются:

- страновой риск – риск вложения средств в страну с неустойчивой экономической политикой, низким инвестиционным рейтингом;
- мировые рыночные риски. Падение фондовых индексов на крупнейших мировых биржах может привести к падению национальных биржевых индексов;
- экономические риски. Колебание цен на сырьевые ресурсы или возможные затруднения с их реализацией вызывают кризисные явления в экономике страны;
- региональный риск – риск вложения средств в регионе с низким инвестиционным рейтингом и неустойчивой экономикой;
- процентный риск – риск потерь инвесторов в связи с изменением процентных ставок на рынке;
- политический риск – риск политической нестабильности;
- валютный риск – риск изменения курса иностранной валюты;
- рыночные риски. Владельцы ценных бумаг несут риск уменьшения стоимости их инвестиционных вложений;
- операционный риск связан с потерями из-за сбоя в информационных сетях.

Несистематический риск – риск, связанный с конкретными ценными бумагами. Этот вид риска может быть снижен за счет диверсификации, он включает:

- селективный риск – риск неверного выбора ценных бумаг;
- риск ликвидности – затруднение с реализацией ценных бумаг по адекватной цене;
- отзывной риск – связан с правом на отзыв облигаций;
- риск эконометрической модельитенты – зависит от финансового состояния эконометрических модельитентов ценных бумаг, включенных в портфель. Сложный риск. В него входят:

а) бизнес – риск, который отражает неопределенность будущего потока доходов из-за неопределенности экономического и финансового положения компании;

б) эконометрическая модельитента вследствие изменения условий ведения бизнеса (для нефтедобывающей компании – изменчивость цен на нефть) отражает неопределенность, возникающую из-за способа, которым компания финансирует свои инвестиции;

в) временной риск – неподходящее время покупки (продажи) ценной бумаги;

г) портфельный риск – риск существенного ухудшения качества портфеля ценных бумаг.

Под доходностью r финансового актива (инвестиционного портфеля) в течение некоторого периода времени $(t_0, t_1]$ будем понимать

$$r = \frac{A + P^1 - P^0}{P^0}. \tag{13.18}$$

Здесь P_0 и P_1 – рыночные цены финансового актива соответственно в начальный t_0 и конечный t^1 моменты времени;

A – суммарный платеж, выплачиваемый финансовым активом в течение промежутка времени $(t_0, t_1]$.

Замечание 1. Если финансовый актив – акция, то A – суммарный дивиденд, выплачиваемый акцией в течение промежутка времени $(t_0, t_1]$. Если финансовый актив – облигация, то A – суммарный купонный платеж, выплачиваемый облигацией в течение промежутка времени $(t_0, t_1]$.

Замечание 2. Из формулы (13.18) следует, что доходность r удовлетворяет следующему уравнению:

$$P^0 = \frac{A + P^1}{1 + r}. \qquad (13.19)$$

Следовательно, доходность финансового актива r равна внутренней доходности инвестиционного проекта, который состоит:

- в покупке финансового актива по цене P^0 в момент времени t_0;

- получении платежа A и продаже актива по цене P^1 в момент времени t_1.

Замечание 3. Из формулы (13.19) следует, что

$$A + P^1 = P^0(1 + r). \qquad (13.20)$$

Следовательно, доходность финансового актива r равна банковской эффективной процентной ставке, такой, при которой начальный капитал, равный P^0 в момент времени t_0, обеспечивает наращенную сумму, равную $A + P^1$, в момент времени t_1.

В большинстве случаев в начальный момент времени t_0 цена финансового актива P^1 (в конечный момент времен t_1) неизвестна. Часто то же самое можно сказать и о платеже A. Следовательно, в таких случаях доходность финансового актива r за промежуток времени $(t_0, t_1]$ неизвестна в начальный момент времени t_0.

Считается, что P^1 A, а следовательно, и r – случайные величины в теоретико-вероятностном смысле.

В теории инвестиционного портфеля основными характеристиками финансового актива (инвестиционного портфеля) являются ожидаемая доходность $\overline{r}$ и стандартное отклонение σ доходности финансового актива:

$$\overline{r} = E[r], \qquad (13.21)$$

$$\sigma = \sqrt{E[(r - \overline{r})^2]}. \qquad (13.22)$$

Дадим обоснование того, что σ можно использовать в качестве меры финансового риска.

Естественно считать, что финансовый риск описывается вероятностью $P\{r < \overline{r} - \delta\}$, где δ – некоторое положительное число. В случае когда доходность r подчиняется нормальному закону распределения, легко показать, что вероятность $P\{r < \overline{r} - \delta\}$ увеличивается при увеличении σ. То же самое справедливо и для широкого класса других распределений доходности финансового актива.

Следовательно, чем больше значение σ, тем больше риска у доходности финансового актива (инвестиционного портфеля).

Одним из понятий, используемых в измерении отраслевого риска (так же как и риска, связанного с компанией), является *систематический риск*, т. е. уровень колебаний, или отклонения, в результатах деятельности отрасли по отношению к результатам деятельности рынка или всей экономики. Эта разновидность риска, обозначаемая в статистическом анализе греческой буквой бета β, может быть определена для каждой отрасли, соотнося данные об индустрии с одной или несколькими переменными величинами рынка. Очевидно, что этот процесс требует обширной и надежной базы данных, собранной за значительный период времени. Индустрия с показателем $\beta = 1$ имеет колебание результатов, равное рыночному, в то время как менее изменчивая отрасль покажет результат < 1, а более колеблющаяся > 1. Очевидно, что, чем выше показатель β, тем выше риск, связанный с этой отраслью.

14. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ВО ВНЕШНЕЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

14.1. Основные сведения о внешнеэкономических связях. Модель внешнеэкономических связей и ее свойства

Внешнеэкономические связи (ВЭС) предусматривают взаимодействие всех секторов и отраслей экономики, фаз процесса национального воспроизводства, в значительной мере обеспечивая его сбалансированность и эффективность, и в то же время представляют собой подсистему мирового хозяйства.

Это целый комплекс различных направлений, форм, методов и средств перемещения материальных, финансовых и интеллектуальных ресурсов между странами. ВЭС являются одной из наиболее сложных сфер экономики любой страны, обеспечивающей ее приобщение к мировой науке и технике, промышленности и культуре.

Среди важнейших форм ВЭС следует выделить внешнюю торговлю; кредитные взаимоотношения; научно-техническое сотрудничество с зарубежными государствами; межгосударственные связи в сфере услуг; валютно-финансовые операции.

Главным направлением ВЭС является *внешняя торговля*. Она включает продажу товаров другим странам и приобретение там нужных товаров. К внешней торговле относятся и оплачиваемые услуги в связи с совершением внешнеторговых сделок купли-продажи товаров. Объем внешней торговли данной страны представляет собой сумму оборотов по экспорту (реэкспорту) и импорту (реимпорту).

Экспорт – продажа и вывоз товаров за границу для передачи их в собственность иностранному контрагенту. *Реэкспорт* – вывоз товаров, ранее ввезенных из-за границы, без их переработки.

Импорт – закупка и ввоз иностранных товаров для последующей реализации на внутреннем рынке страны-импортера. *Реимпорт* – ввоз из-за границы отечественных товаров, не проданных на аукционе, забракованных и т. д., не подвергнутых там переработке.

Прогнозы внешнеэкономических связей занимают особое место в системе прогнозов социально-экономического развития страны. Цель прогнозирования внешней торговли – определение возможных форм и интенсивности участия страны в международном разделении труда и оценке экономических последствий ВЭС.

Центральное место занимает прогноз внешней торговли, в процессе которого определяются: совокупный объем внешнеторгового оборота; объем и товарная структура экспорта и импорта как по всем, так и по отдельным странам; спрос и предложение на отдельные товары и товарные группы на конкретных рынках; динамика и уровень цен мирового рынка в разрезе товарной номенклатуры, принятой для прогноза; внутренние издержки на товары, которые вовлекаются в сферу международного оборота.

Прогнозирование внешней торговли может быть пассивным (инерционным) и активным (целевым).

Пассивное прогнозирование полностью опирается на сложившиеся в прошлом закономерности развития, и на их основе определяются будущие тенденции и пропорции формирования производства и внешней торговли.

Активное прогнозирование и планирование представляет собой обоснование альтернативных путей перехода от сложившихся тенденций к новым. Оно исходит из конкретных целей развития внешней торговли и экономики в целом, из объективной необходимости интеграции в мировое хозяйство.

Прогнозирование и планирование внешней торговли осуществляется на основе итеративных расчетов. На каждом этапе следует уточнять прогнозные показатели на основе корректировки и получения дополнительной информации, характеризующей развитие отраслей народного хозяйства и их связей с мировой экономикой.

На *первой стадии* формируются цели развития ВЭС, устанавливается подчиненность целей, определяются цели верхнего и нижнего уровней.

На *второй стадии* разрабатывается инерционный прогноз для выявления тенденций и пропорций развития, экстраполированных на перспективу, а также для получения аналитического материала и оценки реальности поставленных целей в развитии ВЭС.

Третья стадия предполагает конструирование целевого прогноза, задачей которого является разработка ряда вариантов перспективного развития ВЭС, которые обеспечивают повышение эффективности общественного производства при действии внутренних и внешних факторов.

При прогнозировании ВЭС целесообразно использовать синтез интуитивных и формализованных методов.

Методы неформализованного анализа и прогноза основываются на экспертных оценках. Они используются как на начальной стадии разработки прогнозов, так и на заключительных этапах оценки возможных вариантов развития ВЭС и выбора наиболее достоверного варианта прогноза.

При математическом описании процесса развития международных экономических связей учитываются следующие *факторы* экономического и социально-политического характера:

- количество и качество трудовых ресурсов;
- наличие топливно-энергетических и сырьевых ресурсов, производственных мощностей и инвестиций;
- научно-технический потенциал;
- структура народнохозяйственных потребностей;
- степень развития внутринационального разделения труда;
- состояние внешних торговых рынков;
- уровень и пропорции цен мирового рынка;
- соотношение спроса и предложения на внешних рынках.

В мировой практике для прогнозирования экспорта и импорта нашли широкое применение трендовые модели; функции экспорта и импорта (многофакторные модели); комплексные эконометрические модели; модели межотраслевого баланса; матричные модели международной торговли; оптимизационные модели.

В планах внешней торговли находят отражения объем, товарная и географическая структура экспорта и импорта. План экспорта и импорта товаров включает следующие разделы: план экспорта (импорта) по странам; план поставки товаров для экспорта; план поставки товаров отраслям народного хозяйства из импортных поступлений; план поставки по экспорту и импорту в счет обязательств по договорным соглашениям. Предприятиям устанавливается государственный заказ на поставки продукции на экспорт (по соглашениям). В планах выделяются поставки по экспорту и импорту по странам ближнего и дальнего зарубежья.

Трендовые модели ($y = a + b_t$ и др.) экстраполируют тенденции изменения показателей, выявленные в прошлом и настоящем, на будущее. Эти модели используются на стадии составления инерционного прогноза.

Нередко экстраполяция тренда оказывается единственным математическим методом прогнозирования внешнеэкономических показателей. Это может быть обусловлено двумя обстоятельствами: незнанием характера причинно-следственных связей между прогнозируемыми параметрами и факторами, определяющими их динамику, отсутствием информации, на основе которой можно составить прогноз независимых переменных, предопределяющих поведение исследуемого показателя. Экстраполировать показатели можно лишь тогда, когда есть уверенность в том, что зафиксированная в тренде тенденция сохраняется в будущем.

Метод экстраполяции временного ряда с использованием функциональных уравнений с одной независимой переменной t (время) пригоден для кратко- и среднесрочного прогнозирования внешнеторговых параметров. Наилучшие результаты этот метод дает при прогнозировании агрегированных показателей. Надежность прогноза укрупненных показателей экономисты обычно связывают с тем, что в агрегате происходит выравнивание (взаимное погашение отклонений) различных тенденций, определяющих общую динамику показателя.

Наиболее приемлемым для прогнозирования экспорта и импорта на краткосрочный период является метод экспоненциального сглаживания с регулируемым трендом.

Функции экспорта и импорта (многофакторные модели). Эти функции широко применяются в зарубежных странах для прогнозирования экспорта и импорта. Они прошли экспериментальную и практическую проверку. Функции описывают зависимости между динамикой экспорта (импорта) и показателями материального производства страны, мировой торговли, мировых цен и др.

В общем виде функцию экспорта (импорта) можно представить как функцию многих переменных:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{14.1}$$

где y – объем экспорта (импорта) товаров;

$x_1, x_2, ..., x_n$ – факторы (независимые переменные), от которых зависит величина экспорта (импорта), т. е. значение рассматриваемой функции.

Конкретные формы моделей экспорта (импорта) представляют собой разнообразные математические функции и могут использоваться для прогнозирования экспорта (импорта) в целом, а также для предсказания динамики развития внешней торговли группами товаров и отдельными товарами. С помощью функций можно получить количественную характеристику зависимости внешней торговли от целого ряда факторов: объема производства продукции, объема инвестиций, эффективности экспорта (импорта), соотношения спроса и предложения на внешнем рынке и т. д.

Проведение прогнозных расчетов внешнеторговых показателей с помощью такого рода моделей включает следующие этапы:

1. Определение товарно-географической номенклатуры внешнеторговых показателей.
2. Составление и анализ динамических рядов показателей.
3. Подбор и экономический анализ факторов, влияющих на исследуемые показатели.
4. Разработка гипотез о виде функциональной зависимости, расчет параметров уравнения регрессии и экономико-статистический анализ полученных результатов.
5. Расчет прогнозных значений показателей.

Товарная номенклатура внешней торговли может быть представлена различными показателями в зависимости от целей прогноза: сводными показателями экспорта (импорта); показателями внешней торговли на уровне отрасли; показателями, относящимися к какому-либо виду товара.

Важным этапом формирования модели является отбор факторов. Они должны достаточно полно объяснять динамику исследуемого показателя. Между факторами, включаемыми в модель, не должно быть тесной связи – мультиколлинеарности. При построении функции экспорта для торговли между отдельными странами наиболее адекватным набором факторов является следующий:

• экспортные возможности страны-экспортера (ВВП, если моделируется объем совокупного экспорта страны; объем валовой продукции отдельных отраслей или объемы производства отдельного продукта, если моделируется экспорт отдельной товарной группы или отдельного товара);

• спрос на экспортируемую продукцию на мировом рынке, т. е. потребности стран-импортеров. При этом должен учитываться объем производства товаров у импортера, аналогичных экспортируемым, и объем продаж данных товаров на международном рынке;

• конкурентоспособность продукции (уровень качества товара, например, оценка в баллах, цена, динамика доли данного товара в группе товаров);

• эффективность экспортируемых товаров (цены данного товара или товарной группы при торговле на том или ином рынке, которые определяют, выгодно или невыгодно для экспортера продавать товар, а для импортера – покупать его);

• курс валюты.

Для получения надежных прогнозных расчетов экспорта необходимо осуществлять прогноз факторов (внешнего спроса на товары, экспортных цен, предложения и др.). Внешний спрос на экспорт зависит от внешних доходов и относительных цен. Экспортные цены основываются на динамике цен внешних рынков, внутренние – на издержках производства. Возможные объемы экспорта могут определяться на основе анализа внутреннего предложения. Прогнозные расчеты включают две стадии: прогнозирование внутреннего производства и определение той части выпуска, которая будет экспортироваться. Ценовые стимулы играют важную роль на обеих стадиях. Соотношение цены, по которой товары могут быть проданы за границу (мировая цена в национальной валюте), и внутренней цены влияет на долю предложения продукции, которая идет на экспорт.

Функции импорта специфицируются иначе. Роль импорта в рамках национального воспроизводственного процесса заключается в обеспечении потребности народного хозяйства в том или ином продукте. Это обусловливает его моделирование в зависимости от факторов, отражающих динамику национального производства и его эффективности. К важнейшим факторам, которые должны учитываться при построении функции импорта, следует отнести:

• потребности страны в импортируемой продукции;

• внешнеторговые цены на импортируемые товары, определяющие динамику эффективности импорта. Причем целесообразно учитывать не значение внешнеторговых цен, а их соотношение с внутренними ценами на ввозимые товары. Это обусловливается необходимостью не только учета их влияния на формирование потоков, но и оценки целесообразности наращивания импорта или развития импортозамещающих производств. Цены за импорт (в иностранной валюте) должны определяться на основе анализа мирового рынка и тенденций в странах, являющихся конкурентными торговыми партнерами;

• курс валюты.

На уровень импорта могут оказывать влияние и другие факторы: доступность кредита; количественные ограничения; тарифы, влияющие на цены импортируемых товаров; наличие иностранной валюты.

Существенным моментом в прогнозных расчетах является выбор математической формы связи между экспортом (импортом) и включенными в модель факторами.

Регрессионные уравнения могут использоваться для осуществления прогнозных расчетов на макро- и микроуровнях. На макроуровне прогнозируются сводные показатели экспорта и импорта, агрегированные показатели на уровне отраслей, товарных групп или стран. На микроуровне прогнозируется экспорт (импорт) отдельных товаров.

Рассмотрим конкретные формы внешнеторговых функций, используемых в экономическом анализе и прогнозе.

Широко известна модель, предложенная голландским экономистом Я. Тинбергеном, которая была применена для определения потенциальной величины товарооборота группы стран. При расчете потенциального объема внешней торговли использовалась степенная функция, в которой экспорт из одной страны в другую ставился в зависимость от трех факторов:

1) валового национального продукта экспортирующей страны;

2) валового национального продукта страны-импортера;

3) расстояния между странами.

Модель состоит из одного уравнения и имеет следующий вид:

$$E_{ij} = a_0 Y_i^{a_1} Y_j^{a_2} S_{ij}^{a_3}, \qquad (14.2)$$

где E_{ij} – совокупный экспорт из i-й страны в j-ю;

Y_i – ВНП i-й страны;

Y_j – ВНП j-й страны;

S_{ij} – расстояние между i-й и j-й странами;

a_0 – постоянная;

a_1 – эластичность экспорта в зависимости от ВНП страны-экспортера;

a_2 – эластичность экспорта в зависимости от ВНП страны-импортера;

a_3 – эластичность экспорта в зависимости от расстояния между странами.

Комплексные эконометрические модели отражают зависимость между изменением макроэкономических показателей воспроизводства (ВВП, инвестиций) и внешнеторговым оборотом. Они позволяют предвидеть динамику внешней торговли в зависимости от изменения внутринациональных макроэкономических показателей. Эти модели могут использоваться для составления целевых прогнозов в агрегированном виде.

Модели межотраслевого баланса позволяют учитывать связь между изменениями в объеме и структуре ВЭС и развитием отдельных отраслей национального производства. Межотраслевые модели дают возможность согласовывать прогноз ВЭС с отраслевыми прогнозами, выяснять обеспеченность ресурсами проектов развития внешней торговли, межгосударственной отраслевой специализации, кредитного сотрудничества, а также потребность отраслей экономики в импортной продукции.

Матричные модели международной торговли. Для согласования прогнозных показателей, полученных с помощью рассмотренных выше методов, используется принцип двойной пропорциональности (метод RAS). Результаты прогноза объема и структуры экспорта и импорта группируются в специальные матрицы. Матричные модели международных товарных потоков, получившие распространение в последние годы, обычно используются для разработки взаимосвязанных прогнозов развития ВЭС нескольких стран торговых партнеров.

В строках матрицы указываются страны-импортеры, а в столбцах – прогнозируемые группы товаров. Таким образом, в каждой из строк матрицы содержатся показатели распределения экспорта в страну по всем товарным группам, а в каждом из столбцов показывается распределение экспорта товаров определенной группы по странам. Окаймляющие векторы (столбец и строка) характеризуют соответственно совокупный экспорт в страну и совокупный экспорт определенной товарной группы во все страны. Аналогично строится матрица импорта.

Совокупный экспорт i-й страны (E_{it}) и совокупный импорт j-й страны (M_{jt}) в период t определяются по формулам

$$E_{it} = \sum_{j=1}^{m} E_{ijt}, i = \overline{1,n}, \tag{14.3}$$

$$M_{jt} = \sum_{j=1}^{n} E_{ijt}, j = \overline{1,m}, \tag{14.4}$$

где E_{ijt} – экспорт i-страны в j-страну-импортер в году t.

Разработка матриц прогноза экспорта и импорта осуществляется в несколько этапов.

При расчетах и анализе результатов на каждом из этапов наряду с экономико-математическими методами используются экспертные оценки.

На первом этапе сначала прогнозируются окаймляющие векторы матрицы экспорта и импорта (столбец и строка), затем элементы матрицы, каждый из которых представляет собой поток товаров между странами.

В связи с тем что прогноз векторов и внутренних элементов матрицы осуществляется автономно друг от друга, возникает необходимость согласования конкретных экспортом (импортом). Процедура согласования заключается в корректировке элементов матрицы на основе прогнозных значений окаймляющих векторов. Данный принцип реализуется с помощью математического алгоритма согласования методом двойной пропорциональности (путем одновременного изменения совокупного экспорта и импорта под влиянием спроса и предложения).

Следует заметить, что этот метод может дать наилучшие результаты при прогнозировании в тех случаях, когда рассматриваемые в матрице страны имеют налаженные устойчивые торговые отношения и в рассматриваемом периоде не предвидится серьезных экономических и политических изменений (создание новых торгово-экономических группировок и т. д.). В нестабильной экономической ситуации матричные модели международной торговли целесообразно использовать при краткосрочном прогнозировании. Причем следует составлять матрицы по группе стран (страны СНГ и др.) с выделением основных товарных групп.

Матричные модели могут быть использованы на первоначальных этапах прогнозирования с целью получения агрегированных показателей мировой торговли и предварительного определения укрупненной географической структуры экспорта и импорта стран.

Оптимизационные модели. В процессе управления внешнеэкономическими связями, их прогнозирования и планирования встречаются ситуации, при которых должно быть принято самое выгодное решение с учетом различных критериев и определенных ограничивающих условий. Эти задачи решаются с использованием оптимизационных моделей. На их основе создается возможность проведения вариантных расчетов в связи с изменением ограничений по ресурсам, сдвигами в пропорциях развития национального производства и мирового рынка, изменением целей и гипотез развития.

В качестве критериев оптимальности могут использоваться:

- максимум валютной выручки (прибыли);
- максимум покрытия импортной потребности;
- минимум затрат.

Оптимизационные модели могут применяться для прогнозирования:

- рациональной структуры внешней торговли;
- товарной и региональной структуры оборота предприятий, способствующей повышению рентабельности;
- оптимального соотношения между собственным производством, экспортом и импортом отдельных товаров.

В большинстве случаев в международных отношениях речь может идти о товарах и региональной структуре внешней торговли, т. е. должен быть получен ответ на вопрос, какие и в какую страну должны быть экспортированы и импортированы товары. На основе этого формируются переменные величины модели. В зависимости от ситуации определяется основной критерий, который формируется как целевая функция. В качестве ограничивающих условий используются производственные мощности, возможности сбыта и закупки продукции и др. С помощью оптимизационных моделей решается проблема размещения в территориальном аспекте экспорта и определение наиболее выгодных рынков закупок импортных товаров.

В качестве целевой функции применяется максимизация экономического эффекта от экспорта и импорта продукции:

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{m}(P_{\text{э}it}-P_{\text{в}i})x_{\text{э}li}+\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{m}(P_{\text{в}i}-P_{\text{и}li})x_{\text{и}lt}\rightarrow \max. \qquad (14.5)$$

Система ограничений:

• экспорт и импорт i-го товара не должны превышать потенциальные возможности:

$$\sum_{l=1}^{L} x_{\text{э}li} \le Q_{\text{э}i};\ i = \overline{1, m}; \tag{14.6}$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{\text{и}li} \le Q_{\text{и}i};\ i = \overline{1, m}. \tag{14.7}$$

• экспорт и импорт i-го товара не должны превышать спрос и предложение на внешнем рынке:

$$0 \le x_{\text{э}li} \le Y_{li};\ i = \overline{1, m};\ l = \overline{1, L}; \tag{14.8}$$

$$0 \le x_{\text{и}li} \le Z_{li};\ i = \overline{1, m};\ l = \overline{1, L}, \tag{14.9}$$

где $P_{\text{э}li}$ – внешнеторговая цена экспортируемого i-го товара на l-м рынке;

$P_{\text{в}i}$ – цена i-го товара на внутреннем рынке;

$P_{\text{и}li}$ – внешнеторговая цена i-го импортируемого товара на l-м рынке;

$x_{\text{э}li}$ – искомое количество экспортируемого i-го товара на l-й рынок;

$x_{\text{и}li}$ – искомое количество импортируемого i-го товара с l-го рынка;

$Q_{\text{э}i}$ – потенциальный экспорт i-товара;

$Q_{\text{э}i}$ – потенциальный импорт i-го товара;

Y_{li} – спрос на экспортируемый i-й товар на l-м рынке;

Z_{li} – предложение i-го товара на l-м рынке.

Ряд параметров, используемых в моделях оптимизации (состояние спроса и предложения, цены мировых товарных рынков и др.), должны прогнозироваться с помощью других моделей, например функций внешней торговли.

При долгосрочном прогнозировании укрупненных показателей ВЭС могут быть использованы динамические оптимизационные модели, в которые вводится период t и дополнительные ограничения по ресурсам.

Степень агрегированности показателей, получаемых с помощью экономико-математических моделей, зависит от длительности периода, на который разрабатывается прогноз. Чем длиннее период прогнозирования, тем более агрегированные показатели расчетов по моделям могут быть получены.

Прогнозирование ВЭД на микроуровне. В рыночных условиях предприятия имеют возможность самостоятельно осуществлять внешнеторговую деятельность, участвовать в международных экономических и научно-технических связях.

Прогнозные расчеты позволяют вырабатывать эффективные варианты достижения целей их развития.

Результатом прогноза является совокупность внешнеэкономических, технических показателей и показателей эффективности функционирования предприятия.

Наличие научно обоснованных прогнозов развития внешнеторговой деятельности предприятия, знание конъюнктуры, требований и перспектив развития международных рынков, учет этого в производственно-сбытовой деятельности предприятия позволяют путем маневра ресурсами обеспечить наилучшие условия выхода на рынок при экспорте своей продукции и наибольшую эффективность импорта необходимых товаров. Прогноз сбыта – это та ось, вокруг которой вращается все планирование бизнеса. Главная задача – определить, что и в каком количестве предприятие может поставлять на мировой рынок.

На основе прогнозных расчетов планируются квоты продаж, оцениваются возможности своих территорий, определяется потребность в рабочей силе, распределяется сбытовой бюджет между рекламой, персоналом и продвижением товаров, определяются объемы закупок материальных ресурсов и решаются другие задачи.

В зарубежных странах варианты прогноза ВЭД предприятия формируются с помощью методов экспертных оценок и формализованных методов. Выбор наиболее эффективного варианта прогноза осуществляется на основе расчетов эффективности.

Разработка надежных прогнозов требует соответствующего информационного обеспечения. Оно должно включать в себя комплекс исходных данных, необходимых для анализа и выработки решений, сформированных в информационные массивы. В зарубежных странах информация хранится в статистических финансово-экономических банках данных. Широкое распространение получают полнотекстовые банки данных, содержащие отчеты об исследованиях, прогнозы и результаты обследований товарных рынков, конъюнктуры отдельных стран и фирм.

14.2. Экономическое обоснование и эффективность принимаемых решений

Особое значение имеет оценка эффективности внешнеэкономической деятельности предприятия в современных условиях, когда хозяйственная самостоятельность и независимость неизбежно должны привести к повышению ответственности и обоснованности принимаемых управленческих решений.

Экономическое обоснование принимаемых решений по управлению внешнеэкономической деятельностью предприятий производится путем расчета различных показателей экономической эффективности. Всю систему показателей экономической эффективности ВЭД можно разделить на две группы.

1. *Показатели эффекта,* определяемые как абсолютные величины, выражаются в соответствующих денежных единицах как разница между результатами и затратами.

2. *Показатели эффективности,* определяемые на основе отношения результатов к затратам, как правило, относительны и выражаются в относительных единицах: %, руб/руб., долл/долл., долях единицы и др.

Под *затратами* следует понимать денежную, стоимостную оценку привлекаемых производственных ресурсов: стоимость сырья, материалов, энергии, трудовых ресурсов, услуг сторонних организаций, обязательные отчисления в различные государственные фонды и другие затраты, без которых сделка, операция была бы не осуществлена.

Под *результатами* следует понимать денежную, стоимостную оценку полученной выгоды для предприятия: денежные средства за поставленную продукцию, выполненные работы и услуги, стоимость полученного товара, работ, услуг и т. д.

При расчете показателей важно соблюдать следующие принципиальные методологические положения:

• принцип наиболее полного учета всех составляющих затрат и результата. Неполный учет затрат и полученных результатов может исказить выводы об оценке эффективности того или иного мероприятия, решения;

• принцип сравнения с базовым вариантом. Все познается в сравнении, в том числе и эффективность. За базовый вариант может быть принято положение дел до принятия решения, один из вариантов принятия решения или состояние дел на рынке, у конкурента. Неправильный выбор базы сравнения также может привести к искажению оценок;

• принцип приведения затрат и результатов в сопоставимый вид. Сравниваемые показатели должны быть сопоставимы. Например, следует приводить их в сопоставимый вид по объему, качеству, периоду времени и другим параметрам;

• принцип приведения разновременных затрат и результатов к одному моменту времени. Соблюдение данного принципа – одно из важнейших положений теории оценки эффективности. Методы приведения разновременных затрат к одному моменту времени достаточно хорошо разработаны в экономике.

Конкретный расчет показателей эффективности будет в значительной степени зависеть от вида операции на внешнем рынке, ее целей, условий и других особенностей конкретной сделки. Рассмотрим общие положения и примеры расчета показателей эффективности применительно к различным видам операций на внешнем рынке.

Экономическая эффективность экспорта. Показатель экономического эффекта от экспорта товаров, продукции, работ или услуг определяется следующим образом:

$$ЭЭ_{ЭКС} = О_{ВФ} + В_{Р} – З_{ЭКС}, \tag{14.10}$$

где $ЭЭ_{ЭКС}$ – показатель экономического эффекта экспорта, руб.;

$О_{ВФ}$ – рублевый эквивалент отчислений в валютный фонд предприятия, рассчитываемый пересчетом валютной выручки (за вычетом подлежащей обязательной продаже государству) в рубли по курсу на дату поступления валюты, руб.;

$В_{Р}$ – рублевая выручка от обязательной продажи части валюты государству, руб.;

$З_{ЭКС}$ – полные затраты предприятия на экспорт, которые включают: затраты на производство и реализацию продукции (реклама, маркетинг, транспорт, страхование, пошлины, сборы и др.).

По экономическому содержанию показатель эффекта соответствует понятию прибыли.

Показатель *экономической эффективности экспорта* рассчитывается следующим образом:

$$Э_{экс} = \frac{О_{вф} + В_{р}}{З_{экс}}, \tag{14.11}$$

где $Э_{ЭКС}$ – показатель экономической эффективности экспорта, руб/руб.

Экономический смысл показателя эффективности состоит в том, что он показывает, какое количество выгоды, результата имеется на каждый рубль затрат. Необходимым условием эффективности экспорта является то, чтобы этот показатель был > 1.

Для принятия более обоснованного решения по экспорту продукции показатель эффективности экспорта $Э_{ЭКС}$ сравнивается с показателем *эффективности производства и реализации продукции на внутреннем рынке* $Э_{ВН}$:

$$Э_{ВН} = \frac{О_{экс}}{С_{П.экс} + З_{р.ВН}}, \tag{14.12}$$

где $Э_{ВН}$ – показатель эффективности производства и реализации продукции на внутреннем рынке, руб/руб.;

$О_{ЭКС}$ – объем экспорта во внутренних ценах, руб.;

$С_{П.\ ЭКС}$ – производственная себестоимость экспортных товаров (затраты на производство);

$З_{Р.\ ВН}$ – затраты на реализацию экспортной продукции внутри страны, руб.

Необходимым условием эффективности экспорта является выполнение соотношения

$$Э_{ЭКС} > Э_{ВН} > 1. \tag{14.13}$$

Экономическая эффективность импорта. Экономическая эффективность импорта рассчитывается по-разному в зависимости от целей осуществления импорта: для собственного потребления или для реализации на внутреннем рынке.

Экономический эффект импорта для внутреннего потребления (использования) импортируемой продукции, т. е. самим покупателем, может быть рассчитан следующим образом:

$$ЭЭ_{ИМП\ 1} = З_И – ЦП_{ИМП}, \tag{14.14}$$

где $ЭЭ_{ИМП\ 1}$ – показатель экономического эффекта от импорта продукции для собственного использования, руб.;

$З_И$ – полные затраты на приобретение (изготовление) и пользование продукцией (альтернативной, импортной), руб.;

$ЦП_{ИМП}$ – цена потребления импортного товара (продукции), т. е. все затраты за весь период службы импортного товара, продукции, руб.

$$З_И = Ц_{П.\,В} + Э_{Р.\,В}, \qquad (14.15)$$

где $Ц_{П.\,В}$ – цена покупки (затраты на изготовление) продукции по базовому варианту (альтернативной продукции или аналогичной импортной), включающая все расходы, связанные с ее приобретением (изготовлением), руб.;

$Э_{Р.\,В}$ – эксплуатационные расходы за весь период службы продукции, альтернативной или аналогичной импортной, которые включают стоимость потребляемого сырья, материалов, стоимость топлива и энергии, стоимость ремонтов, замены запчастей, заработную плату рабочих со всеми отчислениями, занятых обслуживанием, и другие аналогичные расходы, руб.

$$ЦП_{ИМП} = Ц_{П.\,И} + Э_{Р.\,И}, \qquad (14.16)$$

где $Ц_{П.\,И}$ – цена покупки (приобретения) импортного товара, включающая все расходы (цена контракта, пошлины, сборы, транспорт, страховка, оплата услуг посредников и др.), связанные с приобретением товара на внешнем рынке, руб.;

$Э_{Р.\,И}$ – эксплуатационные расходы за весь период службы импортного товара (продукции), которые включают стоимость потребляемого сырья, материалов, стоимость топлива и энергии, стоимость ремонтов и запасных частей, заработную плату рабочих со всеми отчислениями и другие аналогичные расходы, связанные с эксплуатацией, руб.

Экономический смысл показателя экономического эффекта, рассчитываемого по формуле (14.14), в том, что он показывает, какую прибыль будет иметь импортер, если приобретет импортную продукцию вместо приобретения (изготовления) продукции, альтернативной импортной.

Если $ЦП_{ИМП} > З_И$, то абсолютное значение этого показателя говорит о той прибыли, которую может иметь потенциальный импортер, если он вместо импортной продукции приобретет (изготовит) продукцию, альтернативную импортной; или, что то же самое, абсолютное значение этого показателя говорит о размере убытка, который будет иметь импортер, если он все же приобретет импортную продукцию вместо приобретения (изготовления) продукции, аналогичной импортной.

Показатель экономической эффективности импорта продукции для собственного использования рассчитывается следующим образом:

$$ЭЭ_{ИМП2} = \frac{З_{ИМП}}{ЦП_{ИМП}}. \quad (14.17)$$

Необходимым условием эффективного импорта в этом случае является $Э_{ИМП\,2} > 1$. Экономический смысл данного показателя состоит в том, что он показывает, во сколько раз импортная продукция (товар) эффективнее продукции, альтернативной импортной.

Экономическая эффективность импорта с целью продажи импортируемого товара на внутреннем рынке может быть рассчитана следующим образом:

$$ЭЭ_{ИМП\,3} = Ц_{р.\,и} - Ц_{П.\,И}, \quad (14.18)$$

где $ЭЭ_{ИМП\,3}$ – показатель экономического эффекта импорта, руб.;

$Ц_{р.\,и}$ – цена реализации импортных товаров за вычетом расходов, связанных с реализацией (реклама, маркетинг, транспорт и др.), руб.;

$Ц_{П.\,И}$ – цена покупки (приобретения) импортных товаров, включающая все расходы, связанные с их приобретением (цена контракта, пошлины, транспорт, страховка, оплата услуг посредников и др.), руб.

Экономический смысл показателя эффекта от импорта товаров, рассчитываемого по формуле (14.18), состоит в том, что он показывает, какую прибыль будет иметь импортер от закупки и реализации на внутреннем рынке импортных товаров.

Показатель *экономической эффективности импорта и реализации товара на внутреннем рынке* рассчитывается по формуле

$$ЭЭ_{ИМП4} = \frac{Ц_{Р.\,И}}{Ц_{П.\,Н}}. \quad (14.19)$$

Экономический смысл показателя эффективности импорта $Э_{ИМП\,4}$, рассчитываемого по формуле (14.19), состоит в том, что он показывает, сколько рублей выручки получает импортер на каждый рубль затрат, связанных с импортом. Необходимым условием эффективного импорта является соотношение $Э_{ИМП\,4} > 1$.

15. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В СФЕРЕ УСЛУГ

15.1. Оценка результативности управления на предприятиях сферы услуг в условиях нестабильной экономической среды

Исходя из принципов функционирования хозяйствующих субъектов и характерных черт развития экономики в современных условиях стратегия управления предприятием должна быть высокоэффективной, т. е. приносить максимальную прибыль в результате достижения запланированных целей по удовлетворению потребностей общества в производимой предприятием продукции и предоставляемых услугах при минимальных издержках. Анализ управленческой литературы, посвященный вопросу стратегического управления и планирования хозяйственной деятельности, показывает тот факт, что в целом нет достаточно четко разработанной методики выбора стратегии, так как предприятие должно само вырабатывать критерии выбора стратегии. Каждое предприятие, действующее в рыночной экономике, уникально по своим характеристикам. Следовательно, и содержание стратегического бизнес-планирования является процессом уникальным, а его формы и методы не могут браться в качестве эталона для других предприятий. Таким образом, каждое предприятие, использующее стратегическое управление и стратегическое планирование, имеет свои подходы к выбору стратегии.

Выбор оптимальной стратегии следует проводить с учетом условий, в которых она может реализоваться. В связи с этим возникает необходимость анализа особенностей формирования и выбора стратегии. Результаты исследований этого процесса показывают, что сам процесс представляет собой сложное динамическое явление, которому присуще наличие не только случайной и детерминированной составляющих, но и составляющей, связанной с неопределенностью развития окружающей среды автотранспортного предприятия.

Свое отражение фактор неопределенности находит в изменении продолжительности и уровня действия стратегии в зависимости от прогноза развития обстановки на тот или иной период времени, от экономической и политической обстановки, колебаний спроса и предложения на тот или иной вид услуги, объема предоставляемых услуг тем или иным субъектом, рентабельности предприятий, противодействия конкурентов, межличностных отношений.

Учет указанных выше особенностей приводит к тому, что математическое описание процесса выбора стратегии должно основываться на моделях, учитывающих недостаточность и неполноту информации о рыночной обстановке и необходимости принятия решения в условиях риска и неопределенности. Его реализация связана с разработкой адекватной действительности модели, учитывающей достаточное количество существенных и различных по своей природе факторов, влияющих на конечный результат стратегии.

В теории принятия решений различают *три основных типа информационных ситуаций*, которые могут возникнуть при выборе стратегии управления предприятием:

1. *Принятие решений в условиях определенности*. Эти условия характеризуются наличием четкой, детерминированной связи между принятым решением и полученным результатом. В этом случае результирующий показатель и ограничения зависят только от стратегии предприятия и фиксированных значениях детерминированных факторов.

2. *Принятие решений в условиях риска.* В этих условиях каждая стратегическая альтернатива может привести к одному из множества возможных исходов, причем каждый из них имеет определенную вероятность своего появления. Значение результирующего показателя в этом случае зависит как от стратегий и детерминированных факторов, так и от случайных факторов с известными законами распределения.

3. *Принятие решений в условиях неопределенности.* В данном случае результирующий показатель, кроме стратегий и фиксированных параметров, также зависит от случайных факторов с полностью неизвестными законами распределения или влиянием неопределенных факторов, для которых известно лишь множество возможных значений. В результате влияния неопределенных факторов каждая стратегия оказывается связанной с множеством возможных исходов, вероятности которых либо неизвестны, либо известны с недостаточной для принятия решения точностью, либо вовсе не имеют смысла.

15.2. Процедура построения модели оценки функций управления как основы системного моделирования управления на предприятиях сферы услуг

Концептуальную основу в моделировании составляет процедура определения вида и характера связи между исследуемыми факторами, степени влияния того или иного управляемого фактора на непосредственный результат (определение тесноты связи) и в итоге – осуществления нормативных расчетов и определения нормативных показателей факторных признаков, которые необходимо получить (достичь) для обеспечения роста результативного признака на заданную величину. Проводится построение и анализ многофакторных статистических моделей, выражающих корреляционную зависимость экономического результата функций управления от внешних и внутренних факторов (условий), а также определяется вклад факторных признаков в общий уровень управления.

Анализ корреляционных связей позволяет определить те внешние и внутренние факторы, которые оказывают наиболее существенное влияние на экономический результат исследуемого показателя, позволяет определить вид связи между ними и выбрать наилучший из них, оценить тесноту этой связи, т. е. установить степень влияния на изменение результативного показателя каждого отобранного фактора и всей их совокупности.

Для исследования корреляционных связей между факторными и результативными признаками следует применять регрессионно-корреляционный анализ (РКА), так как он является тем формальным методом, который наиболее адекватен задаче исследования взаимосвязей по степени своей практической разработанности и простоте.

Приоритетность применения метода экономико-математического моделирования объясняется тем, что в процессе его использования сформируется искусственный объект, изучение которого выявляет новую информацию о существенных характеристиках процессов и взаимосвязей элементов объекта.

В целом процесс построения модели включает следующие этапы:

- определение состава показателей, характеризующих состояние функций и инфраструктурных компонентов управления, и их расчет;
- отбор коэффициентов, наиболее тесно коррелирующих с изменением состояния функций и инфраструктурных компонентов управления в пространстве и во времени (табл. 15.1);
- расчет весовых показателей для каждого коэффициента, которые определяются по двум критериям: возможность приведения коэффициентов к единому масштабу значений и степень корреляции между состоянием функций и инфраструктурных компонентов управления и уровнем коэффициентов;
- построение модели и определение критериальных параметров (экстремальных значений) для ее оценки.

Т а б л и ц а 15.1. **Интегральное значение коэффициентов, характеризующих функции управления**

Интегральные коэффициенты	Интегрируемые показатели
1	2
1. Коэффициент степени соответствия управленческих решений реальным условиям (К1)	1. Доля управленческих решений адекватных внешним условиям в общем объеме управленческих решений
2. Коэффициент утверждения управленческих решений (К2)	2. Доля утверждаемых управленческих решений в общем объеме разрабатываемых управленческих решений
3. Коэффициент оснащенности труда при осуществлении управления (К3)	3. Доля рабочих мест управленческого персонала, оснащенных всеми необходимыми для выполнения функций ресурсами в общем объеме рабочих мест, связанных с управлением
4. Уровень обеспечения оптимального морально-психологического климата в коллективе, реализующем функции управления (К4)	4. Удельный вес управленческого персонала, реализующего функции управления, удовлетворенного морально-психологическим климатом предприятия, в общей численности управленческого персонала
5. Коэффициент рациональности разделения и кооперации выполняемых функций управления (К5)	5. Соотношение числа управленческого персонала, имеющего в должностных инструкциях утвержденные функции по управлению, и общего числа управленческого персонала
6. Коэффициент исполнительной дисциплины управленческого персонала (К6)	6. Доля задач, поставленных и решенных по управлению, к общему объему поставленных задач
7. Показатель неопределенности деятельности управления (реализации отдельных функций) (К7)	7. Отношение показателя нерегулируемых функций к общему количеству функций, выполняемых управленческим персоналом
8. Коэффициент рациональности применяемых методов труда при осуществлении управления (реализации отдельных функций) (К8)	8. Доля работ, связанных с управлением (реализацией отдельных функций), выполненных с использованием рациональных методов труда, в общем объеме работ по управлению (реализации отдельных функций)
9. Коэффициент материальной компенсации труда сотрудников управленческого персонала (К9)	9. Удельный вес реализованных решений по материальному стимулированию труда сотрудников управленческого персонала в общем объеме управленческих решений по стимулированию труда сотрудников управленческого персонала
10. Коэффициент моральной компенсации труда сотрудников управленческого персонала (К10)	10. Удельный вес реализованных решений по моральному стимулированию труда сотрудников управленческого персонала в общем объеме решений по стимулированию труда сотрудников управленческого персонала

Окончание табл. 15.1

1	2
11. Уровень удовлетворенности сотрудников управленческого персонала признанием их труда высшим руководством (К11)	11. Удельный вес числа сотрудников управленческого персонала, удовлетворенного признанием своего труда руководством, в общем количестве сотрудников управленческого персонала
12. Уровень удовлетворенности сотрудников управленческого персонала общественным признанием их личности (К12)	12. Удельный вес числа сотрудников управленческого персонала, удовлетворенных общественным признанием своего труда, в общем объеме сотрудников управленческого персонала
13. Коэффициент количественного контроля, связанного с управлением (К13)	13. Доля контролируемых решений по управлению, подлежащих количественной оценке, в общем объеме решений по управлению
14. Коэффициент качественного контроля, связанного с управлением (К14)	14. Доля контролируемых решений по управлению, подлежащих качественной оценке, в общем объеме решений по управлению
15. Уровень самоконтроля персонала, связанного с управлением (К15)	15. Удельный вес решений по управлению, реализованных в рамках самоконтроля, в общем объеме решений, предполагающих самоконтроль

Для учета новых экономических тенденций рекомендуется систематически уточнять модель на основе мониторинга фактически полученных показателей и переменных, добавляя их или заменяя ими данные оперативные базы, на основе которых строится модель.

Системное моделирование управления в своей основе предполагает построение модели оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления и позволяет провести детальное и точное (на основе математических расчетов) исследование уровня реализуемых функций управления, выявить наличие недостатков или резервов в инфраструктурных компонентах; с другой стороны – позволяет определить, есть ли зависимость между уровнем реализации функций и обеспечивающих их компонентов и следует ли учитывать при проведении анализа влияние инфраструктурных компонентов на уровень реализации функций управления.

Оптимальный уровень реализуемых функций управления на предприятиях сферы услуг мы рассматриваем как суммирующий показатель уровней обеспечивающих компонентов, составляющих инфраструктуру процесса управления, следовательно, и функций управления. Детализированное выражение зависимости представим в виде формулы

$$y = f(\text{К}1, \text{К}2, ..., \text{К}n), \tag{15.1}$$

где К1, К2, ..., Кn – интегральные значения компонентов.

Построение модели оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления требует определения количественных значений уровня обеспечивающих компонентов процесса реализации функций управления. Определение данных показателей основано на расчете интегральных коэффициентов инфраструктурных компонентов.

Необходимо отметить, что проводить мониторинг на основе моделирования оценки следует каждый квартал в течение года с целью осуществления своевременных корректирующих мероприятий процесса управления. При малом числе наблюдений, используемых для проведения корреляционного анализа, достоверность выводов резко снижается.

Для оценки уровня реализации функций управления следует рассчитывать интегральные значения коэффициентов, характеризующих состояние каждой функции управления в отдельности. Примеры коэффициентов представлены в табл. 15.1.

Уровень реализации функций управления, рассчитанный экспертным путем по группам показателей внутри блоков с использованием весовых коэффициентов, характеризуется как суммарный уровень использования потенциала составляющих его компонентов. При этом необходимым условием осуществления последовательных расчетных операций при построении модели является предварительное определение наличия или отсутствия тренда в динамическом ряду параметров, характеризующих уровень реализации функций управления в каждом из обозначенных периодов. Следовательно, по данной методике следующим этапом в построении модели оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления, на наш взгляд, будет определение наличия тренда и характера зависимости между изучаемыми показателями. Выявление тенденции основывается на использовании метода средних уровней.

Разработка модели оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления требует определения вида зависимости между уровнем реализации функций в управлении и состоянием обеспечивающих компонентов. Для выбора вида зависимости воспользуемся следующими методами выбора формы кривой:

- визуальным (на основе графического отображения данной зависимости);

- методом характеристик приростов исследуемого показателя.

Метод характеристик приростов показателей уровня реализуемой функции в управлении предполагает расчет их абсолютных приростов.

Определение характера зависимости является вторым этапом в поиске причинных связей между явлениями. На его основе строят факторную регрессионную модель оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления. Регрессионную модель представим в виде следующего уравнения:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + t, \qquad (15.2)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – интегральные коэффициенты обеспечивающих компонентов процесса реализации функций управления, определенных на основе эконометрических данных;

t – включает в себя все неучтенные факторы, меняющие свое значение от периода к периоду;

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ – параметры.

Параметры модели оценки уровня взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления определяют методом наименьших квадратов.

Для оценки роли влияния инфраструктурных компонентов на уровень реализуемых функций управления, а также определения тесноты связи между данными категориями целесообразно воспользоваться методом разложения изменчивости по факторам.

Анализ уровня регрессии позволит нам оценить роль исследуемого факторного признака в формировании результативного. Для этого определяют долю фактора в общей изменчивости результативного показателя через вычисление общей дисперсии $\sigma^2_{\text{общ}}$:

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \sum \frac{Y_i^2}{n - Y^2_{\text{ср}}}, \qquad (15.3)$$

где $\sum Y_i^2$ – сумма квадратов фактических значений уровня реализуемых функций управления;

$Y^2_{\text{ср}}$ – среднее значение показателя уровня реализуемых функций управления;

n – число наблюдений.

Все вышеприведенные статистические взаимосвязи позволяют определить достоверность оценок используемых показателей.

Таким образом, представленная экономико-математическая модель оценки степени взаимосвязи функций и инфраструктурных компонентов управления составляет основу системного моделирования управления и позволяет количественно определить уровень реализации отдельной функции управления, а также оценить степень положительного и негативного влияния инфраструктурных компонентов управления на уровень реализации исследуемой функций. Использование предложенной модели при проведении комплексной оценки управления позволяет поэтапно исследовать процесс управления, максимально точно оценивать уровень реализации функций управления, своевременно выявлять отклонения и недостатки в процессе управления, позволяет определить необходимые корректирующие мероприятия и основные направления совершенствования процесса управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белько, И. В. Эконометрика. Практикум: учеб. пособие / И. В. Белько, Е. А. Криштапович. – Минск: Изд-во Гревцова, 2011. – 224 с.

2. Гладилин, А. В. Эконометрика: учеб. пособие / А. В. Гладилин, А. Н. Герасимов, Е. И. Громов. – 2-е изд., стер. – Москва: КНОРУС, 2008. – 227 с.

3. Гладилин, А. В. Практикум по эконометрике: учеб. пособие / А. В. Гладилин, А. Н. Герасимов, Е. И. Громов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2011. – 326 с.

4. Дайитбегов, Д. М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике / Д. М. Дайитбегов. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М: Вузовский учебник, 2011. – 578 с.

5. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учеб. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных; под ред. А. В. Сидорович; Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – 5-е изд., испр. – Москва: Дело и сервис, 2009. – 383 с.

6. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности предприятий АПК: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2009. – 264 с.

7. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели. Практикум: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2010. – 295 с.

8. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели в материально-техническом обеспечении АПК. Сборник задач: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2011. – 208 с.

9. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2008. – 368 с.

10. Ленькова, Р. К. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Р. К. Ленькова, Е. В. Гончарова. – Горки: БГСХА, 2011. – 220 с.

11. Мажукин, В. И. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие / В. И. Мажукин, О. Н. Королева. – 3-е изд. – Москва: Флинта: МПСИ, 2008. – 226 с.

12. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А. М. Гатаулин [и др.]; под ред. А. М. Гатаулина. – Санкт-Петербург: ООО «ИТК ГРАНИТ», 2009. – 432 с.

13. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учеб. пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников. – Изд., испр. и доп. – Москва: Вузовский учебник, 2008. – 364 с.

14. Практикум по эконометрике (+CD): учеб. пособие / И. И. Елисеева [и др.]; под. ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Финансы и статистика, 2008. – 344 с.

15. Стрикалов, А. И. Экономико-математические методы и модели: пособие к решению задач / А. И. Стрикалов, И. А. Печенежская. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 348 с.

16. Шафранская, И. В. Исследование операций: курс лекций для студентов / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2011. – 364 с.

17. Эконометрика: учеб. / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой. – Москва: Проспект, 2010. – 288 с.

18. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Р. И. Горбунова [и др.]; под ред. С. И. Макаровой. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: КноРус, 2009. – 239 с.

19. Экономико-математические методы и модели. Практикум: учеб. пособие / С. Ф. Миксюк [и др.]; под общ. ред. С. Ф. Миксюк. – Минск: БГЭУ, 2008. – 311 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Сазонова Светлана Петровна

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. Н. Минакова*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *Н. П. Лаходанова*

Подписано в печать 23.11.2022. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 12,09. Уч.- изд. л. 11,18.
Тираж 80 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.