МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Е. В. Карачевская

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Курс лекций
для студентов, обучающихся по специальности
1-74 01 01 Экономика и организация производства
в отраслях агропромышленного комплекса

Горки
БГСХА
2024

УДК 330.43:519.862.6(075.8)
ББК 65.050я73
К21

Рекомендовано методической комиссией
экономического факультета 21.11.2022 (протокол № 3)
и Научно-методическим советом БГСХА 30.11.2022 (протокол № 3)

Автор:
кандидат экономических наук, доцент *Е. В. Карачевская*

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор *А. Г. Ефименко*;
директор ОАО «Горецкая райагропромтехника» *Н. С. Сенчилова*

Карачевская, Е. В.
К21 Математическая экономика : курс лекций / Е. В. Карачевская. – Горки : БГСХА, 2024. – 83 с.
ISBN 978-985-882-471-6.

Приведен теоретический материал лекций для самостоятельного изучения некоторых разделов программы курса. Даны теоретические аспекты рассматриваемых тем.

Для студентов, обучающихся по специальности 1-74 01 01 Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса.

УДК 330.43:519.862.6(075.8)
ББК 65.050я73

ISBN 978-985-882-471-6

ВВЕДЕНИЕ

Современные достижения математики, ее численных методов и их проникновение во все области человеческой деятельности, а в последнее время бурное применение вычислительной техники привели к тому, что хороший экономист не может обойтись без свободного владения известными математическими методами и без применения их к экономическим процессам. Проникновение математики в область экономики привело к возникновению новых направлений и в экономике, и в математике. Количественные и качественные методы математики являются наилучшим вспомогательным аппаратом для получения ответов на основные вопросы экономики. Задача экономической теории, связанная с приведением в систему, истолкованием и обобщением поведения участников экономики в процессе производства, обмена и потребления, восходит к математическим проблемам оптимизации и принятия решения.

Математическая экономика учит строгости мышления и свободе суждений, и ее роль состоит в прояснении используемых предложений и в строгом выводе их следствий, но она не призвана диктовать экономические решения.

Освоение дисциплины «Математическая экономика» базируется на компетенциях, приобретенных ранее студентами при изучении дисциплин «Высшая математика», «Экономическая теория», «Информационные технологии».

Учебная дисциплина относится к компоненту учреждения высшего образования вариативный модуль 1 «Аналитическая экономика».

Цель курса состоит в том, чтобы научить студентов процессу моделирования экономических явлений как на уровне микро-, так и на уровне макроэкономики, а также проведению анализа экономических задач, уделив основное внимание конструктивным методам, математическому подходу к исследованию различных экономических задач: в теории потребления, производства, при формировании равновесных и полуравновесных цен и т. п.

Основной задачей дисциплины является выработка навыков по применению математических методов, в особенности оптимизационных задач, при математическом моделировании экономических процессов, решении и анализе экономических задач.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЭКОНОМИКУ

1.1. Предмет и задачи курса, его связь с другими дисциплинами.
1.2. Основные этапы развития математической экономики.
1.3. Основные экономические институты и их задачи.

1.1. Предмет и задачи курса, его связь с другими дисциплинами

Математическая экономика долгое время считалась не самостоятельной дисциплиной, а частью общей экономической теории. И в настоящее время многие авторы обращают на это внимание. Однако достижения математики, ее численных методов и проникновение их во все области человеческой деятельности, а в последнее время бурное применение вычислительной техники привели к тому, что хороший экономист, будь он теоретиком или практиком, не может обойтись без свободного владения известными математическими методами и без применения их к экономическим процессам. Более того, проникновение математики в область экономики привело к возникновению новых научных направлений как в экономике, так и в самой математике. Поэтому это взаимообогащение двух областей человеческой деятельности и их интенсивное совместное развитие в последние годы дают полное право считать математическую экономику самостоятельной дисциплиной.

Под *математической экономикой (mathematical economics)* понимают дисциплину, в которой рассматриваются вопросы математического моделирования экономических процессов и применения математических методов к решению и анализу экономических задач.

Переход к рыночной экономике невозможен без специалистов, хорошо подготовленных как в экономике, так и в математическом отношении.

Как свидетельствует экономическая теория, в экономике действуют устойчивые количественные закономерности, поэтому возможно их строго формализованное математическое описание.

Объект изучения математической экономики как учебной дисциплины – экономика и ее подразделения.

Предмет математической экономики – математические модели реальных экономических объектов.

Метод математической экономики – системный анализ экономики как сложной динамической системы.

Модель – это объект, который замещает оригинал, отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала. Модель, представляющая собой совокупность математических соотношений, называется математической.

Система – это совокупность взаимосвязанных элементов, совместно реализующих определенные цели. *Надсистема* – окружающая систему среда, в которой функционирует система. *Подсистема* – подмножество элементов, реализующих цели, согласованные с целями системы (например, подсистема может осуществлять часть целей системы).

Основная цель экономики – обеспечение общества предметами потребления, в том числе такими, которые создают условия для безопасности общества. Экономика состоит из элементов – хозяйственных единиц (предприятий, фирм, банков и т. п.).

Необходимо обратить внимание на две особенности экономики как объекта моделирования:

1. В экономике невозможны модели подобия, которые широко применяются в технике. Например, в гидротехнике широко используется следующий прием: строится точная копия гидроузла (например, в масштабе 1:1000) и на этой копии отрабатываются с необходимой корректировкой проектных решений все режимы работы гидроузла. Однако нельзя построить точную копию экономики в масштабе 1:1000 и на этой копии отрабатывать различные варианты экономической политики.

2. В экономике крайне ограничены возможности локальных экономических экспериментов, поскольку все ее части жестко взаимосвязаны друг с другом и, следовательно, чистый эксперимент невозможен.

Что же остается? Свой прошлый опыт, опыт других стран, прямые эксперименты со всей экономикой и математическое моделирование.

Опыт других стран и отечественный опыт трудно переоценить, но далеко не всегда он напрямую может быть перенесен в условия данной конкретной экономической ситуации.

Прямые эксперименты с экономикой имеют как положительную, так и отрицательную стороны. Положительная сторона состоит в том, что сразу видны краткосрочные результаты проводимой экономической политики. Отрицательная же сторона заключается в том, что невозможно напрямую предвидеть средне- и долгосрочные последствия принимаемых решений.

Предвидеть их возможно лишь на основе концептуальных моделей развития экономики, опирающихся на прошлый опыт. В свою очередь, концептуальные модели и составляют фундамент математических моделей.

Разработка математических моделей чрезвычайно трудоемка, гораздо труднее достаточно адекватной реальности модели. Следует напомнить, что модель Кейнса, отражающая возможности рыночной экономики адаптироваться к возмущающим воздействиям, была построена лишь под впечатлением жестоких ударах тяжелейшего кризиса 1929–1933 гг. Однако применение этой модели для выхода из послевоенного кризиса в Германии и Японии было весьма успешным и получило название «экономическое чудо».

Таким образом, для выработки правильных экономических решений необходим скрупулезный учет как всего прошлого опыта, так и результатов, полученных по концептуальным и математическим моделям, наиболее адекватным данной экономической ситуации.

Полная математическая модель содержит пять групп уравнений:

1. *Уравнения эффективности* (критерий управления, целевая функция). Служат основой для оценки конкретных решений рассматриваемой проблемы. В большинстве случаев используется несколько уравнений эффективности.

2. *Уравнения связи.* Показывают зависимость выходных параметров от входных (управляемых и неуправляемых) переменных системы. Если зависимости не меняются с течением времени, объект считается стационарным. В большинстве систем эти зависимости меняются. Для них выделяют интервалы такой длины, на которой объект может считаться стационарным. Учет нестационарности системы усложняет математическую модель.

3. *Уравнения ограничений*. Показывают допустимые пределы изменения входных и выходных переменных системы. Могут быть записаны в форме равенств (ограничения типа баланса) или неравенств (ограничения на пределы изменения переменных). В качестве ограничений в организационных системах могут быть не технологические ограничения, а директивные указания (например, план работы), социально-трудовые ограничения – ограничения продолжительности смены, условий труда и др.

4. *Уравнения адаптации*. Выражают основанное на учете ранее встретившихся удачных вариантов поведения системы стремление воссоздать удачные варианты в похожих условиях или хотя бы минимизировать расхождение между ними.

5. *Уравнения управления*. Определяют оптимальный закон (алгоритм) управления. В общем случае они показывают зависимость опти-

мальных управляемых параметров от выхода системы, цели управления и неуправляемых параметров. Поиск закона управления является конечным этапом оптимизации поведения системы.

Упрощенная модель. Всегда в рамках анализа исследователь должен дать исчерпывающую формулировку задачи, если даже очевидно, что в такой постановке она не поддается решению. Обеспечив полную формулировку, можно затем принять ряд допущений, упрощающих модель. Исследователь лучше представит себе, как будет влиять любое из необходимых упрощений на адекватность модели.

Имитационная модель (оценочная модель) содержит соотношения связи и ограничения и включает подсчет (но не оптимизацию) целевой функции. Одновременно с построением модели необходимо выбрать или разработать численный метод решения. Для этого нужно решить:

1) использовать имитационное моделирование или метод оптимизации;
2) учитывать случайности или нет;
3) учитывать нелинейность некоторых соотношений или достаточно ограничиться их линейной аппроксимацией;
4) использовать существующие методы решения или разработать новый.

На основе высокого уровня развития экономической науки, глубокого понимания закономерностей функционирования экономики и умения практически использовать это понимание в экономико-математическом моделировании (ЭММ) можно значительно усовершенствовать систему управления народным хозяйством.

1.2. Основные этапы развития математической экономики

Считается, что исторически впервые методы математического моделирования применены лейб-медиком короля Людовика XV доктором Ф. Кенэ (1694–1774) в 1758 г., когда он опубликовал первый вариант работы «Экономические таблицы» (второй вариант «Арифметическая формула» опубликован в 1766 г.). В этих работах он сделал попытку описать процесс общественного воспроизводства с применением математических методов исследования. Однако и эти исследования, и более поздние, в XIX в., сделанные К. Марксом при изучении закономерностей изменения прибавочной стоимости, прибыли, процессов простого и расширенного воспроизводства, были попытками применить математические методы в политической экономии и играли второстепенную роль.

Более углубленное применение математических методов в экономике началось с работы французского ученого (математика, философа, историка, экономиста) О. Курно «Исследование о математических принципах теории богатств», вышедшей в 1838 г. Именно его считают родоначальником математической экономики. К концу XIX в. складывается самостоятельное математическое направление в экономике. Видными представителями этого направления были Г. Госсен (1810–1859) в Германии, У. Джевонс (1835–1882) в Англии, Л. Вальрас (1834–1910) в Швейцарии, К. Менгер (1840–1921), Ф. Визер (1851–1926) в Австрии, Г. Кассель (1866–1944) в Швеции, Ф. Эджворт (1845–1926) в Англии, В. Парето (1848–1923) в Италии, В. К. Дмитриев (1868–1913) в России и др. Заметим, что многие их них относятся к так называемой неоклассической школе, проповедующей теорию предельной полезности (маржинализм, marginal utility – предельная полезность). Суть этой теории заключается в том, что конкуренция устанавливает равновесие между производством и потреблением. Наиболее видным представителем неоклассической школы был Л. Вальрас, чья теория общего конкурентного равновесия в течение многих лет была основным движущим фактором в развитии математической экономики. Согласно этой теории, основной критерий развития экономики – максимизация прибыли для производителя и полезности для потребителя.

Следует отметить и известного русского экономиста В. К. Дмитриева, основная работа которого «Экономические очерки. Опыт органического синтеза трудовой ценности и теории предельной полезности» опубликован в 1904 г. В исследованиях он сделал некоторые выводы, которые в 30-е годы XX в. были получены на основе анализа модели «затраты – выпуск» В. Леонтьевым, известным американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии, русским по происхождению.

Наконец, необходимо обратить внимание и на исследования известного русского ученого (математика, статистика, экономиста) Е. Е. Слуцкого (1880–1948), чей труд «К теории сбалансированного бюджета потребителя», опубликованный в Италии в 1915 г., можно считать основополагающим в теории спроса.

В XX в. продолжалось бурное внедрение математических методов в экономические процессы. Представляют интерес работы по построению и использованию *производственных функций* (ПФ). И хотя еще в начале века были предложены первые ПФ для анализа сельскохозяйственного производства США, однако возникновение теории ПФ принято относить к 1928 г. и связывать с именами американских ученых – математика Ч. Кобба и экономиста П. Дугласа, которые опубликовали статью «Теория производства». В ней сделана попытка на основе данных по обрабатывающей промышленности США за 1899–1922 гг. эмпирическим путем определить влияние затрачиваемого капитала и трудовых ресурсов на объем выпускаемой продукции. В настоящее время ПФ Кобба – Дугласа широко применяется в научной литературе; кроме того, имеется обширная литература по другим видам ПФ.

В 1928 г. В. Рамсей предложил *модель долгосрочного роста,* которой предвосхитил проблемы оптимального роста, особенно широко исследуемые в настоящее время.

1932 г. ознаменован появлением *многосекторной модели расширяющейся экономики Дж. фон Неймана,* которая положила начало *магистральной теории.*

Как уже было сказано выше, неоценимый вклад в развитие математической экономики внес В. Леонтьев. В 1936 г. он опубликовал основные идеи модели «затраты – выпуск», основанные на модели экономического равновесия Л. Вальраса. В модели имеется лишь одно ограничение – на трудовые ресурсы. Цены же формируются таким образом, что дают нулевую прибыль, прибавочная стоимость отсутствует, а весь доход идет на зарплату. Если добавить ограничения и на капитал, то в его структуре появляется норма процента.

В 1936 г. появляется работа Д. М. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег», положившая начало кейнсианского направления в экономической науке, направленного против основ классической и неоклассической теорий равновесия. Его последователи разработали ряд макроэкономических моделей, в частности, это модели экономического роста Е. Домара и Р. Харрода.

В эти же годы появляются работы, посвященные доказательству существования решения систем уравнений общего равновесия. Эти вопросы до настоящего времени находятся в центре внимания экономико-математических исследований. Можно назвать ряд ученых, с чьими именами связаны доказательства существования общего равновесия для различных математических моделей экономики: А. Вальд, Мак Кензи, К. Эрроу, Г. Дебре, Х. Никайдо, Х. Удзава, С. Карлин.

Важное место в развитии математической экономики занимают работы советских ученых. В первую очередь следует назвать Л. В. Канторовича, чья работа «Математические методы организации и планирования производства», опубликованная в 1939 г., положила начало новому направлению в математической экономике – линейному программированию. Дальнейшее развитие экономико-математические методы получили в работах Д. Хикса, П. Самуэльсона, Х. Хоутэккера, Д. Гейла, Р. Солоу, В. Л. Макарова, А. М. Рубинова, В. Л. Полтеровича и др.

В последние годы сформировались новые направления в математике – линейное программирование, теория оптимального управления, динамическое программирование, теория игр и др., – которые нашли широкое применение в экономических исследованиях.

В настоящем издании не концентрируется внимание на политической борьбе между представителями разных школ в математической экономике. Каждый из них отстаивал ту или иную точку зрения на развитие экономических процессов, будь то модель плановой или децентрализованной экономики. Каждая из моделей имеет право на существование и свою ценность. Поэтому здесь рассматриваются различные модели безотносительно от политических пристрастий их авторов.

1.3. Основные экономические институты и их задачи

Слова «*экономия*», «*экономика*» и производные от них в переводе с греческого имеют смысл науки о ведении домашнего хозяйства. Отсюда основное содержание экономической науки составляют вопросы рационального (или оптимального) ведения хозяйства на различных уровнях: от самой мелкой хозяйственной единицы (отдельного индивидуума или семьи) до всей экономики страны в целом.

Для любой хозяйственной единицы основная задача – оптимальное (наиболее выгодное) распределение ограниченных ресурсов для достижения поставленных целей. В связи с этим задача рационального ведения хозяйства с математической точки зрения может рассматриваться как некоторая задача оптимизации: найти такие значения некоторых переменных (доступных ограниченных ресурсов), которые доставляют максимум (или минимум) некоторой функции (математический идентификатор поставленной цели).

В зависимости от решаемой задачи рационального ведения хозяйства любая хозяйственная единица может выступать в той или иной роли. Таким образом, вся экономика любой страны состоит из множества организаций (иногда их называют ***экономическими институ-***

тами, чаще – ***участниками экономики***). Обычно выделяют четыре наиболее типичных участника экономики: это – потребители, производители (фирмы), профессиональные союзы и правительственные организации. В настоящем курсе рассматриваются лишь первые два участника, от деятельности которых в основном зависит развитие экономики любой страны.

Под ***потребителями*** *(consumers)* (в узком смысле – ***домашними хозяйствами***) понимаются отдельные лица или группы лиц, объединенные единым доходом и единой целью: рациональное распределение имеющегося дохода на потребление. Простейшим примером потребителя может служить отдельная семья. В более широком понимании в качестве потребителя рассматривают и хозяйственную единицу, производящую некоторую продукцию и решающую задачу рационального распределения доступных ей ресурсов при ограниченном наличии имеющихся у нее денежных средств (дохода) для покупки ресурсов.

Под ***производителем*** *(producer)*, в узком смысле – ***фирмой*** *(firm)*, понимаются предприятия, производящие товары для продажи их другим производителям или потребителям и решающие задачу получения максимальной прибыли. Таким образом, примером производителя может быть любое предприятие, производящее какую-либо продукцию, продаваемую затем на рынке товаров.

Как видно из приведенных выше понятий, наряду с потребителями и производителями (фирмами) первичным объектом реальной экономики и, следовательно, любой простейшей математической модели экономики является товар, при отсутствии которого действия участников экономики теряют смысл. Под ***товаром*** *(commodity, goods)* в экономической литературе понимается любое ***благо*** *(goods)* или ***услуга*** *(service)*, которые предназначены для продажи. Таким образом, фирма производит товары и продает их потребителям или другим фирмам.

Исходя из вышесказанного, экономику в целом можно рассматривать как науку о рациональной деятельности различных участников экономики, а ***математическую экономику*** – как *науку о математическом моделировании экономических процессов и применении математических методов для решения задач рационального ведения хозяйства различными участниками экономики.*

2. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Основы теории производственных функций.

2.2. Основные характеристики производственных функций. Геометрическая интерпретация показателей производственных функций.

2.3. Производственная функция Кобба – Дугласа.

2.1. Основы теории производственных функций

Существует много определений производственных функций (ПФ), но все они сводятся к одному – математическому описанию зависимости между какими-либо результатами и факторами производства.

Исследователи по разным критериям выделяют несколько типов производственных функций.

1. По наличию условия оптимальности:

– мажоритарные (описывают оптимальный производственный процесс при данных затратах факторов производства). Иногда еще эти ПФ называют детерминистскими или идеальными [3; 5];

– дескриптивные (описывают существующий производственный процесс). В некоторых источниках они называются эконометрическими или реальными [3; 5].

2. По учету неопределенности:

– стохастические (учитывают условие неопределенности);

– детерминированные (не учитывают условие неопределенности).

Дескриптивные производственные функции строятся путем обработки статистических данных о соотношении затрат производства и выпуска товара. В таких функциях существует предположение о том, что сложившиеся процессы производства оптимальны и модель в таком случае строится в основном для прогнозирования. Мажоритарные производственные функции являются своеобразными оптимизационными задачами без заданных в явном виде условий оптимизации. Вид и параметры таких функций определяются путем обобщения решений оптимизационных задач при меняющихся параметрах. Например, производственная функция отрасли получается в результате решения серии задач оптимального развития отрасли при меняющихся объемах ресурсов. Такие функции чаще строятся для анализа производственных процессов.

«Процесс построения производственной функции включает этапы экономико-математического моделирования, в том числе выделение существенных факторов, включаемых в модель, выбор вида функции (математической модели), нахождение числовых значений параметров с помощью корреляционного и регрессионного анализа» [8].

В прикладных исследованиях основное внимание уделяется частным видам общей производственной функции, так как построение и анализ общей производственной функции представляют собой исключительно трудную задачу.

Производственная функция $y_j = f_j(x_j)$, $x_j = (x_{1j}, \ldots, xm_j)$ характеризует максимально возможный объем выпуска продукта j в зависимости от затрат всех m-х видов ресурсов. Каждой точке x_j соответствует единственный максимальный выпуск y_j. Если бы не существовало сложных, комплексных процессов производства, позволяющих выпускать сразу несколько видов продукции, то множество производственных возможностей можно было бы представить в следующем виде:

$$\begin{cases} y_j \le f_j(x_j), \; j \in N, \\ \sum\limits_{j \in N} x_{i_2 j} \le r_{i_2}, \; i_2 M_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Наличие технологических процессов, выпускающих комплексно несколько видов товаров, не позволяет использовать производственную функцию $y_j = f_j(x_j)$, но при этом не препятствует использованию функции (2.1) для технологических процессов с производством одного вида товара.

Кроме уже указанных критериев классификации производственных функций следует упомянуть еще и о критериях по типу ресурсов:

1) производственные функции со взаимозаменяемыми ресурсами;

2) производственные функции со взаимодополняемыми ресурсами.

Предположение о взаимозаменяемости ресурсов в производственной функции $y_j = f_j(x_j)$ означает, что один и тот же объем выпуска продукции может быть достигнут при разных комбинациях использования ресурсов, отличающихся величиной затрат одних ресурсов от других.

Существует два свойства производственных функций со взаимозаменяемыми ресурсами [3]:

1. Если $x = 0$, то и $y = 0$.

2. Если $xA \ge xB$, то $f(xA) \ge f(xB)$, причем если $xA > xB$, то $f(xA\ ) \ge f(xB)$. Из этого, в частности, следует, что $y > 0$ при $x > 0$.

В том случае, когда увеличение производственных затрат какого-либо ресурса s сверх величины x'_s приводит к уменьшению объема производства, надо непосредственно использовать x_s', а излишек $x_{sj} - x_s' > 0$ оставить в резерв. Если $y = 0$ при положительных затратах многих ресурсов, но при $x_s = 0$, то это означает, что ресурс s абсолютно необходим для производства хотя бы в малых количествах (например, труд, электроэнергия и т. п.).

2.2. Основные характеристики производственных функций. Геометрическая интерпретация показателей производственных функций

Рассмотрим основные характеристики производственных функций. Эффективность системы характеризуется соотношением затрат и ресурсов.

Для качественной оценки используется три типа показателей:

– средние;

– предельные;

– эластичность.

1. ***Средняя производительность i-го ресурса***

$$AP_i = \frac{f(x)}{x_i}, \; i = 1, 2, ..., m. \tag{2.2}$$

Показывает объем продукции, приходящийся на каждую единицу затрат соответствующего ресурса.

2. ***Предельная производительность (предельный продукт) i-го ресурса***

$$MP_i = \frac{df(x)}{dx_i}, i = 1, 2, ..., m. \tag{2.3}$$

Показывает, какой дополнительный выпуск продукции приходится на каждую дополнительную единицу затрат соответствующего ресурса при условии, что затраты других ресурсов не изменяются, т. е. выражает вклад ресурса в прирост продукции.

3. ***Эластичность выпуска по i-му ресурсу*** (отношение предельной производительности i-го ресурса к его средней производительности):

$$E_i(f(x)) = \frac{df(x)}{dx_i} \div \frac{f(x)}{x_i}. \tag{2.4}$$

Показывает (приближенно), на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты *i*-го ресурса увеличатся на 1 % при неизменных объемах других ресурсов.

4. ***Эластичность производства***

$$\sum_{i=1}^{m} E_i(f(x)) = \varepsilon(x). \qquad (2.5)$$

Показывает (приближенно), на сколько процентов изменится выпуск при изменении масштаба производства на 1 %.

Если $\varepsilon(x) > 1$, то имеет место возрастающая эффективность от укрупнения масштабов производства в точке *x*; если $\varepsilon(x) < 1$ – убывающая, если $\varepsilon(x) = 1$ – постоянная.

Значит, эластичность производства связана со степенью однородности ПФ.

5. ***Предельная норма технической замены (замещения) фактора j-го фактором i-м***

$$h_{ij}(x) = -\frac{df(x)}{dx_j} \div \frac{df(x)}{dx_i} = -\frac{Mf_i(x)}{Mf_j(x)}. \qquad (2.6)$$

Показывает, что одного и того же выпуска можно достичь, используя различные сочетания ресурсов. Этот показатель равен обратному соотношению их ***предельных производительностей*** $-\dfrac{Mf_i(x)}{Mf_j(x)}$ и показывает (приближенно), на сколько единиц необходимо увеличить затраты фактора *i* при неизменном выпуске, если затраты фактора *j* уменьшатся на единицу. Минус показывает, что при увеличении затрат одного ресурса необходимо уменьшить затраты другого ресурса.

6. ***Эластичность замещения ресурсов в точке x***

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{d(x_i / x_j)}{dh_{ij}(x)} \cdot \frac{h_{ij}(x)}{(x_i / x_j)}. \qquad (2.7)$$

Показывает, на сколько процентов должно измениться соотношение затрат *i*-го вида, чтобы при этом предельная норма замещения изменилась на 1 % при неизменном выпуске.

Показатель $\sigma_{ij}(x)$ характеризует взаимозаменяемость факторов.

Если $\sigma_{ij}(x) = +\infty$ – факторы считаются полностью взаимозаменяемыми.

Если $\sigma_{ij}(x) = 0$ – факторы считаются полностью незаменяемыми.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию ПФ, зависящей от объемов двух потребляемых ресурсов: $q = f(x_1, x_2)$.

Анализ таких функций позволяет легко перейти к общему случаю, когда количество ресурсов может быть любым. Кроме того, производственные функции двух аргументов широко используются в практике, когда исследователя интересует зависимость объема выпуска продукта от важнейших факторов – затрат труда (L) и капитала (K): $q = f(L, K)$.

График функции двух переменных невозможно изобразить на плоскости. Производственную функцию вида $q = f(x_1, x_2)$ можно представить в трехмерном декартовом пространстве, две координаты которого (x_1 и x_2) откладываются на горизонтальных осях и соответствуют затратам ресурсов, а третья координата (q) откладывается на вертикальной оси и соответствует выпуску продукта (рис. 2.1, *а*). Если затраты одного ресурса зафиксировать, то получим кривую выпуска. На графике кривая выпуска представляет собой вертикальный срез, параллельный одной из осей x_1, x_2 и перпендикулярный другой оси. На рис. 2.1, *а* на срезе ресурс x_2 зафиксирован на уровне x_2*.

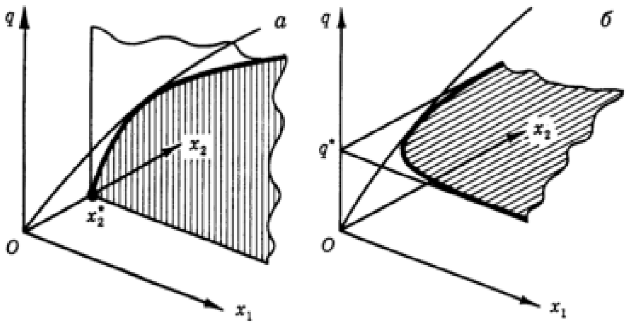
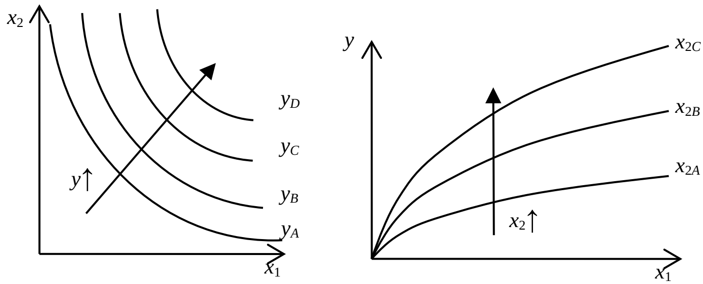


Рис. 2.1. График производственной функции для двух ресурсов: на срезе *а* – кривая выпуска; *б* – изокванта

На практике трехмерными графиками пользоваться неудобно, поэтому вместо них используют *карту изоквант* или *семейство кривых выпуска* (рис. 2.2).



а *б*

Рис. 2.2. Карта изоквант (*а*) и семейство кривых выпуска (*б*)
для изображения производственной функции на плоскости

Изокванта (греч. *isoz* – одинаковый и лат. *quantum* – количество) – линия, обозначающая разные сочетания ресурсов, которые обеспечивают одинаковый выпуск продукции. Она является горизонтальным срезом трехмерного графика.

Основные свойства изоквант:

1) изокванты никогда не пересекаются друг с другом;

2) большему выпуску соответствует более удаленная от начала координат изокванта;

3) если необходимы абсолютно все ресурсы, то изокванты не имеют общих точек с осями координат;

4) изокванты имеют отрицательный наклон, так как при увеличении затрат одного ресурса объем производства можно сохранять на том же уровне при меньших затратах другого ресурса.

Нетрудно заметить, что производственная функция во многом похожа на функцию полезности в теории потребления, изокванта – на кривую безразличия, карта изоквант – на карту безразличия. И дело тут не в простом сходстве. По отношению к ресурсам фирма ведет себя как потребитель, и производственная функция характеризует именно эту сторону производства – производство как потребление. Тот или иной набор ресурсов полезен для производства постольку, поскольку он позволяет получить соответствующий объем выпуска продукта. Можно сказать, что значения производственной функции выражают полезность для производства соответствующего набора ресурсов. В отличие от потребительской полезности эта полезность имеет вполне определенную количественную меру – она определяется объемом производимой продукции.

То обстоятельство, что значения производственной функции относятся к технически эффективным вариантам и характеризуют наибольший выпуск продукции при потреблении данного набора ресурсов, также имеет аналогию в теории потребления. Потребитель может по-разному использовать приобретаемые блага. Полезность покупаемого набора благ определяется таким способом их использования, при котором потребитель получает наибольшее удовлетворение.

Однако при всех отмеченных чертах сходства потребительской полезности и полезности, выражаемой значениями производственной функции, это совершенно разные понятия. Потребитель сам, исходя только из своих собственных предпочтений, определяет, насколько полезен для него тот или иной продукт, покупая или отвергая его. Набор производственных ресурсов в конечном счете окажется полезным в той мере, в какой будет одобрен потребителем тот продукт, который произведен с использованием этих ресурсов.

2.3. Производственная функция Кобба – Дугласа

Впервые данная функция была предложена Кнутом Викселлем (Knut Wicksell, 1851–1926). В 1928 г. Чарльз Кобб (Charles Cobb, 1875–1949) и Пол Дуглас (Paul Douglas, 1892–1976) проверили эту функцию на конкретных статистических данных. Они опубликовали статью под названием «Теория производства», в которой эмпирическим путем моделировали объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США в течение периода с 1899 по 1922 г. Они допустили упрощенное видение экономики, в котором объем производства определяется только объемом затраченного труда и суммой вложенного капитала. Несмотря на то, что существует множество других факторов, влияющих на экономические показатели, модель Кобба – Дугласа оказалась точной.

Наиболее известной неоклассической производственной функцией является модель Кобба – Дугласа, выражающая зависимость объема производства Q от затрат капитала (материальных ресурсов) K и затрат труда (нематериальных ресурсов) L:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}. \tag{2.8}$$

Здесь A, α, β – числовые параметры.

Средние производительности (*капиталоотдача и производительность труда*) определяются по формулам:

$$AQ_K = AK^{\alpha-1}L^{ß};\qquad(2.9)$$

$$AQ_L = AK^{\alpha}L^{ß-1}.\qquad(2.10)$$

Предельная производительность капитала и труда равны:

$$MQ_K = AK^{\alpha-1}L^{ß} = AQ_K;\qquad(2.11)$$

$$MQ_L = ßAK^{\alpha}L^{ß-1} = ßAQ_L.\qquad(2.12)$$

Частные эластичности вычисляются следующим образом:

$$\mathrm{E_K} = \alpha\,,\ E_L = \beta\,.\qquad(2.13)$$

Таким образом, параметры α и β равны частным эластичностям модели и определяют **отдачу при изменении масштаба производства**:

$E = \alpha + \beta = 1$ – постоянная отдача от масштаба;

$E = \alpha + \beta > 1$ – возрастающая отдача от масштаба;

$E = \alpha + \beta < 1$ – убывающая отдача от масштаба.

При возрастающей отдаче от масштаба увеличение затрат труда и капитала на 1 % дает прирост производства более чем на 1 %, а при убывающей – наоборот, менее чем на 1 %.

Для построения **изоквант** выразим из функции Кобба – Дугласа L через K:

$$L = \left(\frac{Q}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}.\qquad(2.14)$$

Таким образом, изокванты функции Кобба – Дугласа имеют вид гиперболы, а кривые выпуска являются степенными функциями со степенью меньше 1 (рис. 2.3).

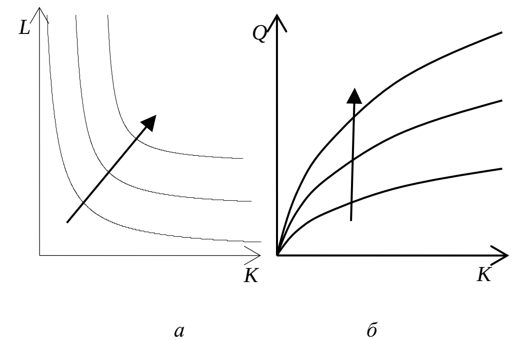


Рис. 2.3. Изокванты (*а*) и кривые выпуска (*б*) производственной функции Кобба – Дугласа

Изокванты показывают, что любой выпуск продукции может быть обеспечен при любых достаточно малых затратах одного фактора, лишь бы хватало других факторов. В частности, при любом достаточно малом вложении капитала можно достичь любого уровня выпуска при достаточно большом наличии трудовых ресурсов. В этом заключается один из недостатков производственной функции Кобба – Дугласа.

Как видно из рис. 2.3, *б*, производительность неограниченно растет с ростом фондовооруженности, но реально производительность всегда ограничена. В этом состоит второй недостаток производственной функции Кобба – Дугласа. Третьим недостатком с экономической точки зрения является равенство $\sigma = 1$.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ФИРМЫ

3.1. Сущность классической задачи фирмы.

3.2. Долгосрочный и краткосрочный варианты постановки оптимизационной задачи.

3.3. Описание структурной модели на примере предприятий мясомолочной промышленности.

3.1. Сущность классической задачи фирмы

Переходя непосредственно к сущности классической задачи фирмы, вспомним, что же такое фирма.

Фирма – это организация, комбинирующая ресурсы для производства и реализации товаров и услуг. Выделяют:

- индивидуальные фирмы (принадлежат одному лицу);
- партнерства (принадлежат двум и более лицам);
- корпорации (принадлежат акционерам).

Рост фирмы позволяет ее владельцам использовать положительный эффект масштаба (снижение издержек производства на единицу продукции).

В то же время крупной фирме сложнее перестроить работу при стремительных изменениях рыночной конъюнктуры.

Иногда фирму определяют как формальную организацию, ведущую дела на предприятии.

Предприятие – это относительно самостоятельный хозяйственный субъект, созданный для производства продукции, выполнения работ и услуг.

Как мы видим, понятия «фирма» и «предприятие» не тождественны. Фирма может владеть несколькими предприятиями, а предприятие может принадлежать нескольким фирмам (совместное предприятие). Однако следует отметить, что цель деятельности как фирмы, так и предприятия совпадает, так же как и вектор их деятельности.

Следовательно, отметим:

с юридической (организационно-правовой) точки зрения предприятие – это самостоятельный субъект хозяйственной деятельности с правами юридического лица, которое на основании имеющихся ресурсов осуществляет производство и реализацию продукции, оказывает услуги и выполняет работы;

с организационно-экономической – предприятие – это организационно-экономическая единица, представляющая собой объединение работников в единую кооперацию труда для масштабной производственно-хозяйственной деятельности;

с социально-экономической – предприятие – это трудовой коллектив, объединенный общностью целей и задач, единством экономических интересов;

с технико-экономической – предприятие – это комплекс средств производства, обладающих технологическим единством и взаимосвязью отдельных стадий производственного процесса, в ходе которого идет производство благ и оказание услуг.

Принципы деятельности фирм:

- экономическая свобода, самостоятельность в решении экономических задач;
- ориентация деятельности на коммерческий успех;
- материальная заинтересованность в результатах;
- хозяйственный риск и материальная ответственность;
- поиск новых, нестандартных решений.

Высшая цель фирмы – получение дохода и прибыли.

Другие цели:

- экономия ресурсов;
- качество продукции;
- рост производительности труда;
- снижение затрат на единицу продукции и др.

Функция фирм:

- создание ценностей;
- обеспечение конкурентных преимуществ на рынке;
- выбор правильной рыночной стратегии.

Таким образом, задача фирмы как организации, производящей затраты производственных ресурсов для изготовления продукции, сводится к определению количества выпускаемой продукции и необходимых для этого затрат.

Фирма должна решить свою задачу оптимальным образом. При этом оптимальность можно понимать неоднозначно. Это может быть, например, достижение необходимого уровня выпуска с наименьшими затратами или получение максимального дохода без превышения заданного уровня издержек.

Фирма должна решить свою задачу наилучшим (т. е. оптимальным) образом. При этом оптимальность можно понимать двояко: либо как получение наибольшей прибыли (с учетом имеющихся возможностей фирмы относительно затрат ресурсов), либо как достижение необходимого (фиксированного) уровня выпуска с наименьшими затратами. Фирма может поставить перед собой только одну из этих целей. В противном случае задача будет некорректной, т. е. нереализуемой. Действительно, нельзя осуществить наибольший выпуск при наименьших затратах. В теории многокритериальной оптимизации этот факт устанавливается строго.

В рамках данной темы мы ограничимся задачей получения наибольшей прибыли.

3.2. Долгосрочный и краткосрочный варианты постановки оптимизационной задачи

Итак, будем считать, что цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем выбора вектора затрат при заданных ценах на затраты, с последующим производством, отражаемого производственной функцией, и реализации продукции по заданной цене.

При постановке экономико-математической задачи обычно учитывают следующие особенности развития фирмы (предприятия):

1) производственная среда;
2) регламентирующая среда;
3) потребительская среда.

Моделирование производственной среды направлено на учет условий, связанных с заготовкой и покупкой основных видов сырья; с распределением сырья для получения конкретных видов конечных продуктов с соблюдением применяемых технологий, стандартов качества продукции, дифференциации ассортимента с освоением выпуска новых видов изделий. В производственной системе особое внимание придается технической и технологической подготовке проводимых процессов, для чего в задаче количество выпускаемой готовой продукции и полуфабрикатов увязывается с возможностями предельной загрузки оборудования.

Моделирование регламентирующей среды направлено на учет директивных показателей, определяемых на вышестоящем уровне (исполнительными органами, управлениями, концернами, министерствами и т. д.). К ним относятся объемы государственного заказа, количество выделяемых ресурсов (сырье, материалы, оборудование) из бюджета в счет выполнения комплексных целевых программ и др. Для отдельных отраслей перерабатывающей сферы учитывается регламентирование по рентабельности производства продукции с установлением предельных оптово-отпускных цен на продукты. Перспективное моделирование должно предусматривать свободу ценообразования в рыночной экономике, т. е. возможное колебание цен на сырье и продукты.

Несомненно, что нужно учесть и математически описать факторы потребительской среды (спрос населения, каналы торговой сети). Информация может быть получена путем маркетинговых исследований емкости потребительского рынка, на основе анкетного опроса населения (покупателей). В конечном итоге определяется уровень удовлетворения спроса на продукты в разрезе ассортимента, количества и качественных характеристик.

Таким образом, разработка оптимальной программы развития предприятия направлена на учет технических, технологических, маркетинговых и финансовых условий, что позволит обеспечить ее адекватность реальным процессам производства.

С точки зрения временного промежутка (горизонта планирования) можно различить задачи двух типов – задачу текущего производства (краткосрочная задача) и задачу перспективного развития (долгосрочная задача).

Краткосрочная задача ставится на один производственный цикл – от начала производства товара до момента выхода фирмы со своим товаром на рынок. Здесь решается задача рационального использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей, сырья, расходов на заработную плату. Поэтому математические модели краткосрочной задачи фирмы представляют собой оптимизационные задачи с ограничениями.

Долгосрочная задача охватывает период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращивания или сокращения основных фондов, изменения структуры производства, определения долгосрочных инвестиций, страховок и др. Эти затраты непосредственно не зависят от объема текущего выпуска. Поэтому математические модели долгосрочной задачи фирмы являются задачами безусловной оптимизации.

Для моделирования задач необходимо формализовать такие понятия, как затраты, выпуск, цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы.

Долгосрочная задача. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому модель задачи имеет вид:

$$p(x_1, ..., x_m) = pf(x_1, ..., x_m) - \sum_k^m w_k x_k \to \max;$$

$$x_k \geq 0, k = 1... m,$$

где p – цена выпускаемой продукции;

w_k – цена k-го вида ресурса;

x_k – вид ресурса;

$(x_1, \ldots, x_m)$ – вид ресурса.

Это задача безусловной максимизации прибыли. Здесь постоянные затраты не учтены, так как они не влияют на максимизацию функции по переменным затратам.

Краткосрочная задача. Эта задача планируется с учетом наличных на данный период запасов ресурсов, поэтому ее модель строится на условную оптимизацию:

$$p(x_1, ..., x_m) = pf(x_1, ..., x_m) - \sum_k^m w_k x_k \to \max;$$

$$x_k \geq 0, k = 1... m$$

при ограничениях, учитывающих наличие существующих ресурсов.

3.3. Описание структурной модели на примере предприятий мясомолочной промышленности

В базовую ЭММ входят следующие группы ограничений.

1. По объему заготавливаемого сырья

$$x_i = Q_i + \overline{x}_i, i \in I_0,$$

где x_i – количество поступившего сырья вида i;

Q_i – гарантированные поставки сырья вида i;

$\overline{x}_i$ – дополнительно закупаемый объем сырья вида i;

i – номер вида исходного сырья (ресурса, продукта);

I_0 – множество видов сырья.

2. По максимальному количеству приобретаемого сырья

$$\overline{x}_i \le \overline{Q}_i,\ i \in I_0,$$

где $\overline{Q}_i$ – максимальный объем сырья вида i, закупаемый сверх договорных (государственных) поставок.

3. По распределению имеющегося сырья

$$x_i = \sum_{p \in P_0} x_{ip},\ i \in I_0,$$

где p – номер направления (способа) использования сырья;

P_0 – множество направлений (способов) использования сырья;

x_{ip} – количество сырья вида i, используемого способом вида p.

4. По использованию основных ресурсов

$$\sum_{i^0 \in I_1} a_{ii^0} x_{ii^0} \le A_i,\ i \in I_2,$$

где i^0 – номер вида конечного продукта;

I_1 – множество видов конечных продуктов;

a_{ii^0} – расход ресурса вида i на выпуск единицы продукта вида i^0;

x_{ii^0} – количество готовых продуктов вида i^0, полученных в результате переработки сырья вида i;

A_i – наличие ресурсов вида i;

I_2 – множество видов ресурсов.

5. По использованию сырья для производства конечных продуктов:

$$\text{а)}\ \sum_{i^0 \in I_3} k_{ii^0} x_{ii^0} \le x_{ip},\ i \in I_0,\ p \in P_1;$$

$$\text{б)}\ k_{ii^0} x_{ii^0} \le x_{ip},\ i \in I_0,\ i^0 \in I_3,\ p \in P_1,$$

где k_{ii^0} – показатель расхода сырья вида i на единицу конечного продукта вида i^0;

I_3 – множество видов конечных продуктов, входящих в однородную группу;

P_1 – множество способов (направлений) переработки сырья.

6. По выпуску отдельных продуктов или их ассортиментных групп с учетом загрузки производственных линий, цехов и участков:

$$\text{а) } \bar{M}_{ii^0} \le x_{ii^0} \le M_{ii^0},\ i \in I_0,\ i^0 \in I_1;$$

$$\text{б) } \sum_{i^0 \in I_3} x_{ii^0} \le M_{ii'},\ i \in I_0,\ i' \in I_4;$$

$$\text{в) } \sum_{p \in P_2} x_{ip} \le M_i,\ i \in I_0,$$

где $\bar{M}_{ii^0}$, M_{ii^0} – соответственно минимальная и максимальная мощность линии для получения продукта вида i^0 из сырья вида i;

i' – номер группы продуктов;

I_4 – множество групп выпускаемых конечных продуктов;

P_2 – множество способов переработки сырья для производства продуктов однородной группы;

$M_{ii'}$ – максимальная мощность цеха для изготовления группы продуктов вида i' из сырья вида i;

M_i – максимальная мощность производственного участка для получения продуктов при переработке сырья вида i.

7. По балансу производства и реализации готовых продуктов

$$x_{ii^0} = \sum_{k \in K_0} x_{i^0 k},\ i^0 \in I_1,\ i = 1,$$

где k – номер канала реализации;

K_0 – множество каналов реализации;

$x_{i^0 k}$ – количество готовых продуктов вида i^0, реализуемых по каналу вида k.

8. По предельным объемам сбыта

$$\bar{D}_{i^0 k} \le x_{i^0 k} \le D_{i^0 k},\ i^0 \in I_1,\ k \in K_0,$$

где $\bar{D}_{i^0 k}$, $D_{i^0 k}$ – соответственно минимальный и максимальный объем конечного продукта вида i^0 для сбыта по каналу вида k.

Целевая функция – максимизация прибыли перерабатывающего предприятия (выручка за вычетом затрат на заготовку сырья и его переработку, а также издержек по сбыту продуктов) – имеет следующий вид:

$$F_{\max} = \sum_{i^0 \in I_1} \sum_{k \in K_0} V_{i^0k} x_{i^0k} - \sum_{i \in I_0} c_i x_i - \sum_{i^0 \in I_1} \sum_{i=1} c_{ii^0} x_{ii^0} - \sum_{i^0 \in I_1} \sum_{k \in K_0} c_{i^0k} x_{i^0k},$$

где V_{i^0k} – выручка от реализации единицы конечного продукта i^0 при сбыте по каналу вида k;

c_i – затраты на заготовку единицы сырья вида i;

c_{ii^0} – затраты на производство единицы готового продукта вида i^0 в результате переработки сырья вида i;

c_{i^0k} – затраты на сбыт единицы готового продукта вида i^0 при реализации по каналу вида k.

Рассмотрим фрагмент составления развернутой экономико-математической задачи на примере оптимизации производства и сбыта конечных продуктов молокоперерабатывающего предприятия.

1. Соотношение по объему заготавливаемого молока:

$$x_1 = 40836 + x_{23},$$

где x_1 – количество поставляемого молока, т;

x_{23} – количество закупаемого молока вне сырьевой зоны (у населения, у молочных заводов, в том числе на давальческих основах), т;

40836 – количество заготовок молока согласно договорам по предприятиям и объектам сырьевой зоны, т. На молочный завод поступит 30323 т молока от коллективных хозяйств и 10513 т молока от сельскохозяйственных унитарных предприятий.

2. Ограничение по максимальному количеству закупаемого молока:

$$x_{23} \leq 3500,$$

где 3500 – максимальное количество молока, которое может быть дополнительно закуплено, т.

3. По распределению сырья:

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \ldots,$$

где x_2 – количество молока после первичной обработки, т;

x_3, x_4, x_5, x_6 – соответственно объем молока для переработки в масло (сладкосливочное, любительское, крестьянское), сыр, молочные консервы, мороженое, т.

Планируется, что сырье будет перерабатываться не только на данном заводе. От 3 до 5 % общего объема молока после первичной обработки поступит на молочный комбинат областного центра по цене 200 у. д. е. за 1 т. В этом случае вводятся математические ограничения по объему молока после первичной переработки:

$$x_2 \geq 0{,}03x_1; \;\; x_2 \leq 0{,}05x_1.$$

4. Соотношение по использованию производственных ресурсов (например, электроэнергии):

$$100(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 62x_{14} + \ldots \leq 512000,$$

где x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} – соответственно количество выпускаемого масла (сладкосливочного, любительского, крестьянского), сыра, т;

100, 62 – соответственно расход электрической энергии на производство 1 т каждого вида конечного продукта, кВт · ч;

512000 – плановый объем электроэнергии, кВт · ч.

Подобные ограничения записываются также для других основных ресурсов: по расходу пара (т); по расходу холода (тыс. ккал) и т. д.

5. По использованию молока для производства конечных продуктов:

а) по расходу сырья для выпуска масла:

$$23{,}6x_{11} + 22{,}4x_{12} + 20{,}8x_{13} \leq x_3;$$

б) по расходу сырья для выпуска сыра:

$$10{,}3x_{14} \leq x_4,$$

где 23,6, 22,4, 20,8, 10,3 – соответственно расход молока (т) для производства 1 т масла (сладкосливочного, любительского, крестьянского) и сыра.

Аналогичные ограничения можно записать для других продуктов.

6. По выпуску продуктов (или загрузке сырьем) с учетом мощности производственных линий, цехов и участков:

а) по производству сыра:

$$x_{14} \leq 1500,$$

где 1500 – максимальная мощность линии для получения сыра, т;

б) по производству масла:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 950,$$

где 950 – максимальная мощность цеха по производству масла, т;

в) по участку цельномолочной продукции (ЦМП):

$$x_7 + x_8 \leq 9800,$$

где x_7, x_8 – количество сырья, направленного на производство молока пастеризованного и кефира, т;

9800 – максимальная мощность производственного участка для получения цельномолочных продуктов (в пересчете на молоко), т.

7. По балансу производства и реализации молочных продуктов (например, сыра):

$$x_{14} = x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22},$$

где x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22} – соответственно реализация сыра по различным каналам: областному молочному заводу и столичному хладокомбинату, белорусским и иностранным коммерческим предприятиям, т.

Такие же ограничения записываются в разрезе других молочных продуктов.

8. По предельным объемам сбыта (например, сыра):

$$x_{19} \geq 210; x_{19} \leq 300; x_{20} \leq 250; x_{21} \geq 200,$$

где 210 и 300 – соответственно предельные поставки сыра областному и городскому молочному заводу, т;

250 – максимальный объем продажи продукта столичному хладокомбинату, т;

200 – минимальное количество сыра для белорусских предприятий (горпищепромторгу, облпотребсоюзу и др.), т.

Аналогичные ограничения можно записать для других продуктов.

Целевая функция – максимизация прибыли перерабатывающего предприятия:

$$F_{\max} = 2310x_{19} + 2315x_{20} + \ldots - 200x_1 - 134x_{14} - 52x_{19} - 53x_{20} - \ldots,$$

где 2310 и 2315 – цена 1 т сыра при реализации его областному городскому молочному заводу и столичному хладокомбинату, у. д. е.;

200 – стоимость 1 т закупаемого сырья, у. д. е.;

134 – затраты на переработку молока для получения 1 т сыра, у. д. е.;

52 – затраты на сбыт 1 т сыра при его реализации областному городскому молочному заводу, у. д. е.;

53 – затраты по реализации 1 т сыра при его реализации столичному хладокомбинату, у. д. е.

В некоторых постановках критерием оптимальности экономико-математической задачи может быть максимум выручки от реализации выпускаемых молочных продуктов.

Запись условий экономико-математической модели по мясоперерабатывающему предприятию имеет общее содержание, присущее объектам молочной промышленности, однако иногда отличается рядом особенностей, которые рассмотрим более подробно. Разработка экономико-математической задачи осуществляется по группам ограничений на основе системы переменных и исходной информации.

Первые две группы ограничений – по заготавливаемому и приобретаемому сырью:

1) по количеству поступившей говядины (т):

$$x_1 = 600 + x_3,$$

где x_1 – объем говядины;

600 – гарантированные, согласно договорам, поставки говядины;

x_3 – дополнительно закупаемый объем говядины у фермерских хозяйств;

2) по покупке говядины у населения (т):

$$x_3 \le 15,$$

где 15 – максимальное количество дополнительно закупаемой говядины.

Аналогично записываются условия по количеству свинины (на основании договоров-контрактов на поставку сырья с предприятиями, производящими животноводческую продукцию). Здесь необходимо иметь в виду, что возможно приобретение крупного рогатого скота следующих категорий: тощий; нижесредней, средней, высшей упитанности. Подобные категории характерны также при закупке свиней. Исходя из этого различаются выход мяса и качественные характеристики основного сырья, т. е. говядина высшего, первого, второго сорта, жирная; свинина нежирная, полужирная, жирная; шпик (боковой, хребтовый). Более детальное изучение приводит к рассмотрению поставок мяса овец (баранина), мяса второстепенных животных (козы, лошади, кролики), мяса птицы (кур, уток, гусей, индеек, цесарок).

Следующая группа ограничений – по распределению имеющегося сырья:

3) по распределению говядины (т):

$$x_1 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + \dots,$$

где x_5 – количество говядины для производства полуфабрикатов крупнокусковых;

x_6 – количество говядины для производства вареной колбасы;

x_7 – количество говядины для производства полукопченой колбасы № 1;

x_8 – количество говядины для производства полукопченой колбасы № 2;

x_9 – количество говядины для производства мясного фарша.

Аналогично записываются условия по распределению свинины и других видов мясного сырья. Ограничения, связанные с использованием трудовых, материальных и других ресурсов, имеют типичное содержание для любого перерабатывающего предприятия.

Далее рассмотрим соотношения по использованию сырья для производства конечных продуктов. Так, условие по расходу говядины для выпуска вареной колбасы имеет вид:

$$0{,}667x_{21} \le x_6,$$

где 0,667 – расход говядины (т) для производства 1 т вареной колбасы;

x_{21} – количество выпускаемой вареной колбасы, т.

Однако в некоторых задачах данная группа ограничений может быть заменена однородными условиями. Покажем это на примере, в котором известна информация по отдельным выпускаемым продуктам (табл. 3.1).

Таблица 3.1. **Экономические показатели выпуска готовых продуктов**

Наименование выпускаемых колбас	Сырье несоленое по рецептуре, кг на 100 кг		Расход сырья на 1 т продукта, т		Коэффициент выхода продукта на единицу сырья	
	Говядина	Свинина	Говядина	Свинина	Говядина	Свинина
Колбаса полукопченая № 1	40	60	0,513	0,769	1,95	1,30
Колбаса полукопченая № 2	45	55	0,529	0,647	1,89	1,55
Колбаса вареная	70	30	0,667	0,286	1,50	3,50

Согласно техническим условиям дана рецептура для полукопченой колбасы № 1, полукопченой колбасы № 2, вареной колбасы. Выход полукопченой колбасы № 1 составляет 78 % от массы несоленого сырья. Для полукопченой колбасы № 2 и колбасы вареной этот показатель соответственно равен 85 и 105 %. Поэтому расход говядины на 100 кг продукта, например колбасы вареной, рассчитывается так: 70 : 1,05 = 66,7 кг, что соответствует 0,667 т говядины на 1 т конечной продукции. Коэффициент выхода продукта на единицу сырья является обратной величиной к рассчитанному показателю. Рассматривая данный пример для колбасы вареной, покажем это: 1,50 = 1 : 0,667; 3,50 = = 1 : 0,286.

В данном примере показаны два основных вида сырья несоленого (говядина, свинина), хотя для других мясных продуктов возможно использование следующих компонентов: шпик, крахмал, мука пшеничная, молоко сухое цельное или обезжиренное и т. д. Таким образом, исходя из этих особенностей, запишем ограничение № 5 рассмотренной ранее структурной экономико-математической модели так:

5. По производству мясных продуктов с использованием основного сырья:

$$d_{ii^0} x_{ip} = x_{ii^0},\ i \in I_0,\ i^0 \in I_1,\ p \in P_1,$$

где d_{ii^0} – коэффициент выхода конечного продукта вида i^0 на единицу сырья вида i.

Детализируем данное математическое соотношение – по производству колбасы вареной с использованием говядины:

$$1{,}50x_6 = x_{21},$$

где 1,50 – коэффициент выхода колбасы вареной (т) на 1 т говядины.

Аналогично записывается условие по производству колбасы вареной с использованием свинины, а также подобные ограничения для других видов мясных продуктов.

Следующая группа ограничений – по выпуску однородной группы продуктов и их отдельных видов с учетом загрузки производственных мощностей завода:

а) по производству колбас полукопченых:

$$x_{22} + x_{23} \leq 95,$$

где x_{22}, x_{23} – соответственно количество выпускаемой полукопченой колбасы № 1 и полукопченой колбасы № 2, т;

95 – максимальная мощность цеха по выпуску колбас полукопченых, т;

б) по производству колбас вареных:

$$x_{21} \leq 50,$$

где 50 – максимальная мощность линии по выпуску колбас вареных, т;

в) по участку для выпуска полуфабрикатов из говядины:

$$x_5 + x_9 \leq 200,$$

где 200 – максимальная мощность производственного участка для получения полуфабрикатов (в пересчете на мясо), т.

Рассмотрим фрагмент записи группы ограничений по балансу производства и реализации готовых продуктов:

г) по выпуску и сбыту полукопченой колбасы № 1:

$$x_{22} = x_{28} + x_{36},$$

где x_{28} – количество колбасы, реализуемой в фирменном магазине, т;

x_{36} – количество колбасы для сбыта управлению торговли, т.

Аналогичные ограничения записываются по балансу производства и распределения других видов мясных изделий. Далее изучим запись математических соотношений по предельным объемам сбыта однородной группы продуктов и их отдельных видов:

а) по минимальному количеству продажи полукопченой колбасы № 1 в фирменном магазине:

$$x_{28} \geq 20,$$

где 20 – минимальное количество полукопченой колбасы № 1, реализуемой в фирменном магазине, т;

б) по максимальному количеству продажи полукопченой колбасы № 1 для управления торговли:

$$x_{36} \leq 35,$$

где 35 – максимальное количество полукопченой колбасы № 1, реализуемой через управление торговли, т.

Таким образом, записываются ограничения по другим мясным продуктам. Максимизация целевой функции (прибыли перерабатывающего завода) имеет вид:

$$F_{\max} = 3{,}5x_{28} + 3{,}7x_{36} + \ldots - 1{,}2x_1 - 0{,}21x_{22} - 0{,}08x_{28} - 0{,}11x_{36} - \ldots,$$

где 3,5 и 3,7 – розничная и отпускная цена 1 т полукопченой колбасы № 1 при сбыте в фирменном магазине и для управления торговли, у. д. е.;

1,2 – стоимость 1 т закупаемой говядины, у. д. е.;

0,21 – затраты на переработку сырья для получения 1 т полукопченой колбасы № 1, у. д. е.;

0,08 – затраты на сбыт 1 т полукопченой колбасы № 1 при ее реализации в фирменном магазине, у. д. е.;

0,11 – затраты по реализации 1 т полукопченой колбасы № 1 для управления торговли, у. д. е.

В некоторых постановках экономико-математических задач целевой функцией может быть максимум денежной выручки от реализуемых продуктов:

$$F_{\max} = \sum_{i^0 \in I_1} \sum_{k \in K_0} V_{i^0 k} x_{i^0 k},$$

где $V_{i^0 k}$ – цена реализации единицы конечного продукта i^0 при сбыте по каналу вида k;

$x_{i^0 k}$ – количество готовых продуктов вида i^0, предназначенных для реализации по каналу вида k.

4. ПРЕДПОЧТЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ. ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

4.1. Пространство товаров.
4.2. Отношение предпочтения. Аксиомы.
4.3. Функция полезности. Аксиомы. Свойства.
4.4. Функция полезности для задачи производственного потребления.
4.5. Предельная (маргинальная) полезность.
4.6. Законы Госсена.
4.7. Норма, предельная норма замещения двух товаров.
4.8. Функция полезности для задачи личного потребления.

4.1. Пространство товаров

Согласно основной задаче теории потребления, в математической модели поведение потребителя связано с выбором набора товаров из некоторого доступного ему множества товаров, который был бы наиболее полезным для потребителя. Товар – продукт деятельности, предназначенный для продажи или обмена. Пусть имеется конечное число m различных товаров. Будем предполагать, что любой товар обладает свойством произвольной делимости, хотя на самом деле не все их виды можно делить (например, станки, мосты, здания и т. п.). Тогда, если обозначать через x_i количество i-го товара (в соответствующих единицах измерения), а через $x = (x_1, ..., x_m)$ – набор закупаемых потребителем товаров, то x представляет собой точку m-мерного евклидова пространства R^m. Ясно, что с физической точки зрения $x_i > 0$ ($x_i > 0$, если i-й товар закупается, $x_i = 0$ – если не закупается). Таким образом, ***пространством товаров*** *(commodity space, consumption set)* в математической модели теории потребления является неотрицательный ортант m-мерного евклидова пространства:

$$R_+^m = \{x = (x_1, ..., x_m) : x_i \geq 0,\ i = 1, m\}.$$

Пусть $X \subseteq R_+^m$ – некоторое множество из пространства товаров, доступное для потребителя (***набор товаров***). Тогда *основная задача потребления (consumption problem)* состоит в выборе точки $x \in X$, наиболее предпочтительной с точки зрения потребителя. В общей теории потребления для сравнения наборов товаров вводят понятие отношения предпочтения и на основе аксиом, которым удовлетворяет это отношение, определяют функцию полезности, как индикатор полезности *(utility)* наборов товаров.

В пространстве товаров можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число, но нельзя вычитать, так как рискуем получить отрицательное количество какого-либо товара. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т. е. товары устроены наподобие сахарного песка, а не авианосцев). Набор товаров можно трактовать, как корзину, в которой лежат эти товары в соответствующем количестве. Аналогично интерпретируются и операции с наборами товаров. Решение потребителя о покупке определенного набора товаров математически – выбор конкретной точки в пространстве.

4.2. Отношение предпочтения. Аксиомы

Одним из основных элементов – участников экономики – является домашнее хозяйство, определяемое как некоторая группа индивидуумов, выступающая как единое целое, распределяющая свой доход на покупку и потребление товаров и услуг. В общем, участник экономики, рассматриваемый с этой точки зрения, называется потребителем. Проблема рационального поведения потребителя заключается в решении вопроса о том, какие количества товаров или услуг он хочет и может приобрести при заданных ценах и его доходе. Специально отметим, что существуют разные точки зрения на роль индивидов-потребителей. В неоклассической экономической теории эта роль является основной, определяющей. Вся остальная экономика вырастает из желаний и потребностей такого индивида.

Пусть X – произвольное непустое множество. ***Бинарным отношением*** на множестве X называется любое подмножество G ***декартова квадрата*** $X \times X = \{(x, y): x \in X, y \in X)\}$, т. е. любое подмножество упорядоченных пар элементов из X. Если $(x, y) \in G$, то говорят, что элемент x находится в отношении G к элементу y. Существуют различные обозначения бинарного отношения. Ниже указаны некоторые из них.

Пусть $X \subseteq R_+^m$ – некоторое выпуклое множество, на котором определены интересы потребителя. Каждый потребитель имеет свои предпочтения. Будем считать, что на множестве X задано бинарное отношение $\geq$, которое называют ***отношением предпочтения*** *(preference relation).*

Запись $x \geq y$ означает, что с точки зрения потребителя набор товаров x *предпочтительнее* набору y или же оба набора *равнозначны* $(x, y \in X)$.

Запись $x \sim y$ – оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения.

Запись $x \succ y$ – набор x строго предпочтительнее набору y.

Считается, что отношение предпочтения должно удовлетворять следующим условиям.

Аксиома 1 (рефлексивности): $x \geq x \; \forall \; x \in X$. Рефлексивность означает, что любой набор товаров равноценен сам себе.

Аксиома 2 (транзитивности). Из $x \geq y$, $y \geq z$ следует, что $x \geq z$ $\forall x, y, z \in X$.

Свойство транзитивности, которым обладают отношения предпочтения и слабого предпочтения, не совсем очевидно, не очень наглядно и не сразу осознается потребителем, но если ему объяснить, что получится, если его система предпочтений не транзитивна, то он согласится, что свойство транзитивности должно быть и произведет необходимую переоценку привлекательности для него тех или иных наборов товаров.

Аксиома 3 (совершенства). Для любой пары $\forall x, y \in X$ $x, y \in X$ либо $x \geq y$, либо $y \geq x$, либо и то и другое. Совершенность означает, что индивид в состоянии сравнить по привлекательности любые два набора товаров.

В последнем случае пишут $x \sim y$ и говорят, что набор x безразличен набору y. Для любого $x \in X$ множество $I_X = \{y \in X\colon x \sim y\}$ называют ***множеством безразличия*** *(indifference set),* множества $P_x = \{y \in X\colon y \geq x\}$, $NP_X = \{y \in X\colon x \geq y\}$ – соответственно ***множествами предпочтений*** *(preference set)* ***и непредпочтений.***

Аксиома 4 (непрерывности). Для каждого $x \in X$ множества $P_x = \{y \in \mathrm{X}\colon y \succ x\}$ и $NP_X = \{y \in \mathrm{X}\colon x \succ y\}$ (строгого предпочтения и непредпочтения) открыты в X.

Запись $x \succ y$ означает, что набор x предпочтительнее набору y.

Заметим, что $I_x = P_x \cap NP_x$.

Аксиома 5 (ненасыщения). Для любых двух наборов x, $y \in X$ из условия $x \geq y$ следует, что x предпочтительнее y, причем если $x \geq y$ $(x \neq y)$, *то* $x \succ y$.

Эта аксиома означает, что если в наборе x количество каждого товара не меньше, чем в наборе y, причем хотя бы одного товара в наборе x больше, чем в наборе y, то набор x предпочтительнее набору y.

Точкой насыщения называется наиболее предпочтительный набор $x \in X$, т. е. такой, что $x \geq y \; \forall y \in X$. Аксиома 5 говорит, что не существует точки насыщения.

Аксиома 6 (выпуклости). Если $y \geq x$, то $\forall \alpha \in [0,1]$, выполняется соотношение $ay + (1 - a)\, x \geq x$. Это означает, если y предпочтительнее x, то любая их смесь предпочтительнее x.

Выпуклость означает, что лучше иметь комбинацию товаров, пусть в меньших количествах, чем просто только какой-то один из этих товаров (лучше иметь немножко соли, сахара, кофе, хлеба, чем одну только соль, один сахар, кофе, хлеб, хотя бы и в большем количестве).

4.3. Функция полезности. Аксиомы. Свойства

Отношение предпочтения в пространстве товаров является довольно громоздким инструментом с ограниченными возможностями. Оно является больше качественной категорией и не приспособлено для проведения количественных исследований. Поэтому целесообразно введение численного индикатора, который сопоставил бы каждому набору товаров $X \subseteq R_{+}^{m}$ некоторый показатель удовлетворенности $u(x) \subseteq R_{+}^{m}$. Чем выше этот показатель, тем выше степень удовлетворенности. Это приводит нас к следующему определению: функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется *функцией полезности*, представляющей собой отношение предпочтения $\geq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \geq y$.

Исторически понятие функции полезности предшествовало понятию отношения предпочтения. Экономисты XIX в. (У. Джевонс, К. Менгер, Л. Вальрас) предположили, что потребитель способен оценивать потребляемые им блага с точки зрения величины полезности, приносимой этими благами, причем целью потребителя является максимизация полезности. Полезность – это не объективное свойство благ, а субъективное отношение людей к благам (величину полезности может определить только сам потребитель, а полезность одного и того же блага для разных людей различна).

Даже полезность одинаковых порций одного и того же блага для потребителя может быть различной. Полезность от потребления этого блага (например, воды) зависит, по нашему предположению, лишь от количества потребляемых единиц данного блага (стаканов или глотков воды). Это утверждение можно записать следующим образом:

$$u_i = f(x_i), \tag{4.1}$$

где u_i – полезность, получаемая потребителем от потребления некоторого количества блага;

x_i – количество потребляемых единиц блага.

Свойства функции (4.1): во-первых, эта функция имеет возрастающий характер, т. е. каждая дополнительная единица блага увеличивает общую полезность (по крайней мере, до некоторой точки насыщения), а во-вторых, каждая следующая единица блага приносит меньшее увеличение общей полезности, чем предыдущая, т. е. приращение общей полезности (предельная полезность) уменьшается с увеличением количества потребляемых единиц блага.

Понятно, что функция (4.1) позволяет полностью описать систему предпочтений потребителя в том только случае, если все потребление ограничивается одним единственным благом (правда, тогда и задача выбора была бы весьма проста – потребитель приобретал бы этого блага так много, как это возможно, если бы только не достигал ранее точки насыщения).

К счастью, в действительности наши возможности выбора значительно богаче. Утолить жажду можно не только водой, но и чаем, кофе и пепси-колой, а выпить это можно с хлебом, пирожками, вареньем или конфетами, причем как сосуды для питья могут быть использованы эмалированная кружка, граненый стакан или фарфоровая чашка. Следовательно, потребитель должен определить общую полезность всего набора потребляемых им благ и максимизировать именно эту общую полезность. Первопроходцы теории полезности (У. Джевонс и др.) представляли себе полезность как простую сумму полезностей всех входящих в некоторый набор благ (при этом полезность, извлекаемая из потребления каждого отдельного блага, по-прежнему зависит лишь от объема потребления этого блага):

$$U = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n), \tag{4.2}$$

где U – общая полезность от всего набора потребляемых благ;

$u_1, u_2, ..., u_n$ – полезности от потребления благ 1, 2, …, n;

$x_1, x_2, ..., x_n$ – объемы потребления блага 1, 2, …, n.

Отметим, что такой подход покоится на неявной предпосылке о независимости полезностей отдельных благ. В самом деле, только при предположении о независимости полезности, например куска хлеба от количества съеденных бифштексов, можно рассматривать полезность хлеба и бифштексов отдельно, а потом складывать эти полезности друг с другом. В действительности многие товары взаимосвязаны в процессе потребления: некоторые могут потребляться совместно (взаимодополняющие товары), другие, напротив, служить удовлетворению одной и той же потребности (товары-заменители). Это обстоятельство вызвало резкую критику рассмотренного выше подхода к функции полезности (4.2). В результате развернувшейся дискуссии экономисты пришли к единому мнению: бессмысленно говорить о полезности трех пирожных, не зная, съедены ли они всухомятку, со стаканом кипятка или с чашкой кофе, так же как бессмысленно говорить о полезности стакана воды, не зная, сколько стаканов пепси-колы в распоряжении потребителя. Иными словами, необходимо рассматривать не полезность от потребления некоторого отдельно взятого товара, а полезность от всего набора потребляемых благ. Следовательно, функция полезности принимает вид

$$U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.3}$$

или (для упрощения записи)

$$U = f(X), \tag{4.4}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – набор благ 1, 2, ..., n.

Отказ экономистов от функций полезности (4.1) и (4.2) и переход к функции полезности (4.3) ярко обнажил еще одно весьма уязвимое место в ранней теории полезности. Эта теория основывалась на *кардиналистском* (количественном) подходе к полезности, предполагавшем теоретическую возможность измеримости полезности в ютилях. Большинство экономистов соглашались, что потребитель способен сравнивать различные наборы благ с точки зрения отношения предпочтения и безразличия, но предпосылка о том, что потребитель может с точностью сказать, сколько единиц полезности он получил от того или иного набора благ, казалась многим экономистам явно нереалистичной.

В противоположность кардиналистскому был выдвинут *ординалистский* (порядковый) подход, не предполагающий возможности измерения полезности и основанный на простой возможности сравнения и упорядочения потребителем товарных наборов с точки зрения их предпочтительности. Этот подход, требующий от теории поведения потребителя значительно менее жестких допущений, чем количественный подход, выглядел в глазах экономистов и более близким к реальности.

Выясним, всегда ли можно отношение предпочтения представить функцией полезности. Для ответа без доказательств примем теорему Дебре.

Теорема (Дебре). *Если множество X связно, то при выполнении аксиом* **1–4** *функция полезности существует.*

При использовании порядковой полезности для любого отношения предпочтения можно построить множество функций полезности. Например, мы можем использовать следующие функции полезности: $u(x) = ax + b$ или $u(x) = x^2$.

Для потребителя все эти функции полезности равнозначны. Он не в состоянии отдать предпочтение одной из них перед множеством возможных других, так как все они отражают одно и то же отношение предпочтения. Различие этих функций касается различных масштабов измерения полезности и не является принципиальным.

В терминах функции полезности аксиомы 5 и 6 можно перефразировать следующим образом.

Аксиома 5а (ненасыщения). Из $x \geq y$ следует $U(x) \geq U(y)$, причем, если $x \geq y$, $x \neq y$, то $U(x) \succ U(y)$.

Из этого определения видно, что в случае ненасыщаемости функция полезности не достигает своего максимума на множестве X: для любого $y \in X$ найдется $x \in X$, который имеет большую полезность, чем y. Мы можем сделать также вывод о том, что функция полезности является возрастающей на всей области определения.

Аксиома 6а (выпуклости). При любом $\forall \alpha \in R$ множество $\{x \in X$: $U(x) > \alpha\}$ является выпуклым. Аксиома 6а утверждает, что $U(x)$ – квазивогнутая функция *(quasi-concave function).*

Вспомним, что такое выпуклая и вогнутая функции и какова их взаимосвязь с выпуклыми множествами.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если для любых двух точек x_1 и $x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Функция $f(x)$ называется *строго выпуклой*, если это неравенство выполняется как строгое (рис. 4.1, *а*).

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *вогнутой*, если для любых двух точек x_1 и $x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Функция $f(x)$ называется *строго вогнутой*, если это неравенство выполняется как строгое (рис. 4.1, *б*).

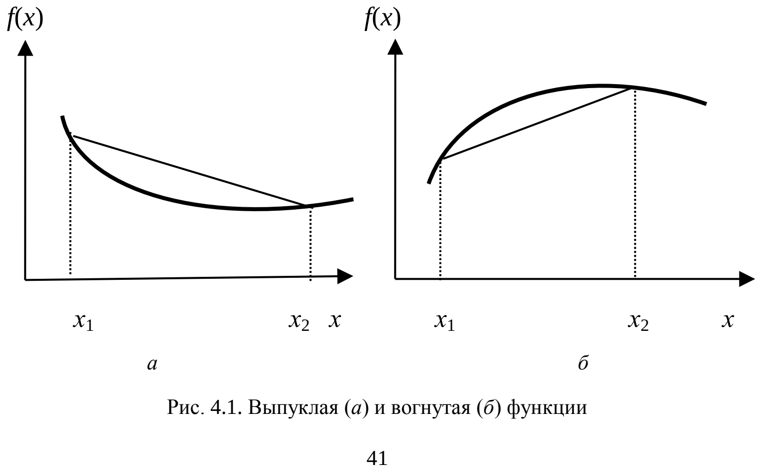


Рис. 4.1. Выпуклая (*а*) и вогнутая (*б*) функции

Выпуклость множества является необходимым, но недостаточным условием выпуклости или вогнутости функции $f(x)$. Необходимо, чтобы выполнялся ряд дополнительных условий (число которых достаточно велико, причем работы в этом направлении продолжаются и в настоящее время). В связи с этим используется понятие квазивыпуклости и квазивогнутости функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на непустом и выпуклом множестве R. Функция $f(x)$ *квазивыпукла*, если для любых x_1, $x_2 \in R$ и $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \max\ [f(x_1),\ f(x_2)].$$

Функция $f(x)$ называется *строго квазивыпуклой*, если это неравенство выполняется как строгое.

Пусть функция $f(x)$ определена на непустом и выпуклом множестве R. Функция $f(x)$ *квазивогнута*, если для любых x_1, $x_2 \in R$ и $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \min\,[f(x_1),\ f(x_2)]\,.$$

Функция $f(x)$ называется *строго квазивогнутой*, если это неравенство выполняется как строгое.

На рис. 4.2 приведены примеры квазивыпуклых и квазивогнутых функций.

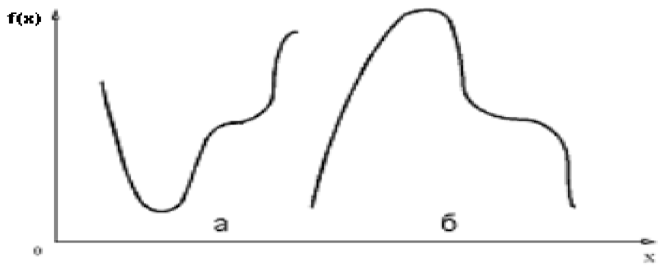


Рис. 4.2. Квазивыпуклая (*а*) и квазивогнутая (*б*) функции

Строго квазивыпуклые и квазивогнутые функции играют важную роль в нелинейном программировании, поскольку для них локальный минимум и локальный максимум являются глобальным минимумом и максимумом соответственно.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\frac{\partial u}{\partial x_i} \succ 0$ – с ростом потребления блага полезность растет; ($\frac{\partial u}{\partial x_i}$) – предельная полезность i-го продукта);

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_i} \prec 0$ – с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется (первый закон Госсена);

3) $\lim \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

4) $\lim \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.

4.4. Функция полезности для задачи производственного потребления

Ранее функция полезности введена аксиоматически, исходя из отношения предпочтения. Подойдем теперь к этому понятию с другой стороны.

Как известно из реальной жизни, любые продукты могут служить не только *потребительскими благами* (товарами) для отдельного индивидуума (или отдельной семьи), но и как *производственные факторы* (сырьевые ресурсы, *factors of production*) для фирмы (второго основного участника экономической системы). Например, сахар можно рассматривать как потребительское благо, если он покупается для употребления в пищу. С другой стороны, его можно рассматривать как сырьевой материал, если он приобретается кондитерской фабрикой для производства кондитерских изделий. В последнем случае сахар выступает в роли производственного фактора. В свою очередь, ту же кондитерскую фабрику мы можем рассматривать, с одной стороны, как потребителя товаров, если она решает задачу рационального использования сырьевых материалов (товаров) при ограниченных денежных средствах, имеющихся у нее (бюджете), с другой стороны, как производителя (фирму), если решается производственная задача выпуска продукции. Таким образом, любой продукт может выступать и как товар, и как производственный фактор, а любая производственная единица может выступать как в роли потребителя, так и в роли фирмы в зависимости от решаемой задачи. Будем рассматривать производственную единицу как потребителя, а используемые ею сырьевые материалы как товары.

Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию n типов и использует при этом m видов производственных факторов, которые, как сказано выше, выступают в данном случае в роли товаров. Введем обозначения: a_{ij} – количество i-го товара, необходимое для производства единицы j-й продукции; z_j – количество продукции j-го типа, планируемое для выпуска; d_{*j}, d_j^* – нижняя и верхняя границы выпуска; b_{*i}, b_i^* – нижняя и верхняя границы для закупаемого i-го товара (все величины заданы в соответствующих единицах измерения).

Совокупность $z = z(x) = (z_j(x),\ j \in J = \{1, ..., n\})$ назовем ***планом производства*** *(production plan)* для доступной совокупности товаров $x = (x_i,\ i \in I = \{1, ..., m\})$.

$$b_{*i} \le x_i \le b_i^*,\ i \in I, \tag{4.5}$$

если выполняются ограничения

$$\sum a_{ij} z_j \le x_i, i \in I; \tag{4.6}$$

$$d_{*j} \le x_i \le d_j^*,\ j \in J. \tag{4.7}$$

Множество планов обозначим $Z(x)$. В общей теории полезности, известной из различных литературных источников, не вводится модель потребителя – ее полномочным представителем служит функция полезности, которая, как правило, вводится аксиоматически, исходя из отношения предпочтения. С помощью этой функции оценивают полезность закупаемых товаров. Однако в общем случае отсутствуют четкие правила построения функции полезности, что затрудняет решение конкретных задач потребления. Определим функцию полезности с помощью модели потребителя.

Полезность набора x может оцениваться по-разному, в зависимости от цели производства. Предположим, что такой целью является получение максимальной прибыли $P(z/x)$, которая равна:

$$P(z/x) = R(z/x) - C(x), \tag{4.8}$$

где $R(z/x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j(x)$ – доход;

$C(x)=\sum_{i=1}^{m} p_i x_i$ – издержки;

c_j – цена единицы продукции j-го типа;

p_i – цена единицы товара i-го вида.

Функцию, равную максимальной прибыли для набора товаров x, т. е.

$$U(x)=\max P(z/x), b_* \le x \le b^*,\ \ z \in Z(x), \tag{4.9}$$

где $b_* = b_*[I]=(b_{*i}, i\in I), b^* = b^*[I]=(b_i^*, i \in I),$ будем называть ***функцией полезности производственного потребления*** *(utility function of production consumption)*. Она естественным образом вводит отношение предпочтения на множестве товаров в конкретной рассматриваемой задаче: набор товаров x^* предпочтительнее набору x тогда и только тогда, когда $U(x^*) \ge U(x)$.

Как отмечалось выше, введенная функция полезности характеризует полезность товаров для предприятия с точки зрения получаемой прибыли. Если в основу положить доход $R(z/x)$, то получим другую функцию полезности:

$$U(x)=\max R(z/x),\ b_* \le x \le b^*,\ \ z \in Z(x). \tag{4.10}$$

Для предприятия можно предложить и иные функции полезности.

4.5. Предельная (маргинальная) полезность

Теория предельной полезности базируется на том, что хотя потребности людей, вообще говоря, безграничны, потребность в определенном товаре может быть удовлетворена. Чем большее количество товаров приобретают потребители, тем меньше их стремление к приобретению дополнительных единиц этого же товара: например, потребность человека в автомобиле, если он его не имеет, может быть очень сильной; желание иметь вторую машину гораздо менее интенсивно; а что касается третьей или четвертой машины, то потребность в них очень слаба. Даже очень богатые семьи редко имеют больше четырех-пяти машин, несмотря на то что их доходы позволяют купить и содержать целый автомобильный парк.

Под предельной (маргинальной) величиной понимается численное значение дополнительного эффекта, обусловленного вовлечением в дело дополнительной единицы рассматриваемого фактора. Таким предельным понятиям в математике соответствует производная.

Если рассматривать $U(x)$ как полезность выбранного набора товаров x, то $MU_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ называют ***предельной (маргинальной) полезностью*** *(marginal utility)* i-го товара.

В общей теории полезности предполагается, что функция полезности удовлетворяет *условию ненасыщения* (или *ненасыщаемости*, аксиома 5а). Другими словами, потребитель ненасыщаем. В реальной жизни потребитель, как правило, насыщаем. Условие ненасыщаемости скорее нужно математикам лишь теоретически, для обоснования тех или иных математических выкладок. Поэтому для функций полезности дополнительно требуют *строгой вогнутости (strictly concavity)*, в результате чего для любого набора товаров x будем иметь: $MU_i\ (x) > 0$, $i = 1, m$.

Требование ненасыщаемости не выполняется. Для функции полезности (аксиома 6а) для каждого i, начиная с некоторого значения $\overline{x_i}$, происходит насыщение, т. е. увеличение потребления i-го товара для значений $x_i > \overline{x_i}$ при неизменном потреблении остальных товаров не ведет к увеличению полезности (дохода). Для функции полезности (аксиома 5а) аналогично: начиная с некоторого значения $\overline{x_i}$ происходит насыщение. Более того, увеличение потребления этого продукта при неизменном потреблении остальных продуктов становится вредным, поскольку, как было указано выше, полезность уменьшается (прибыль становится отрицательной, т. е. производство становится убыточным). *Таким образом, отказ от условия ненасыщения приводит к более реальным результатам с практической точки зрения.*

Заметим, что если $f(t)$ – неубывающая функция скалярного аргумента t, то, очевидно, $f(U(x))$ тоже будет функцией полезности, удовлетворяющей указанным выше свойствам. В связи с этим полезность набора товаров может измеряться как в конкретных единицах (*кардиналистское направление* в теории полезности), так и в относительных (*ординалистское направление*).

4.6. Законы Госсена

Итак, в количественной теории полезности предполагается, что потребитель может дать количественную оценку в ютилах полезности любого потребляемого им товарного набора. Формально это можно записать в виде функции общей полезности:

$$TU = F(QA, QB, ..., QZ), \tag{4.11}$$

где TU – общая полезность данного товарного набора;

QA, QB, QZ – объемы потребления товаров A, B, ..., Z в единицу времени.

Большое значение имеют предположения о характере функции общей полезности.

Зафиксируем объемы потребления товаров B, C, ..., Z. Рассмотрим, как изменяется общая полезность товарного набора в зависимости от объема потребления товара A (рис. 4.3).

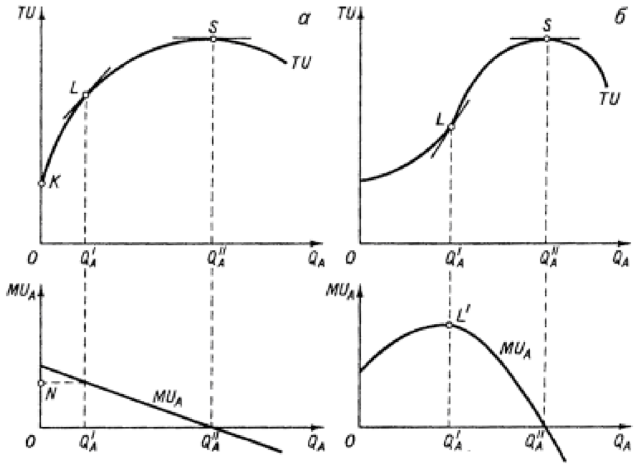


Рис. 4.3. Общая и предельная полезность

В верхней части рис. 4.3, *а* изображена эта зависимость. Длина отрезка OK равна полезности товарного набора при фиксированных нами объемах товаров B, C, ..., Z и при нулевом объеме потребления товара A. В количественной теории предполагается, что функция TU в верхней части рис. 4.3, *а* возрастающая (чем больше товара A, тем большую полезность имеет товарный набор) и выпуклая вверх (каждая последующая единица *A* увеличивает общую полезность товарного набора на меньшую величину, чем предыдущая). В принципе, эта функция может иметь точку максимума (*S*), после которой она становится убывающей.

В нижней части рис. 4.3, *а* изображена зависимость предельной полезности товара *A* от объема его потребления.

Геометрически значение предельной полезности (длина отрезка *ON*) равно тангенсу угла наклона касательной к кривой *TU* в точке *L*. Поскольку линия *TU* выпукла вверх, с увеличением объема потребления *A*-го товара угол наклона этой касательной уменьшается и, следовательно, понижается и предельная полезность товара. Если при некотором объеме его потребления функция общей полезности достигает максимума, то одновременно предельная полезность товара становится нулевой.

Принцип убывающей предельной полезности часто называют **первым законом Госсена**, по имени немецкого экономиста Г. Госсена (1810–1859), впервые сформулировавшего его в 1854 г. Этот закон содержит два положения. Первое констатирует убывание полезности последующих единиц блага в одном непрерывном акте потребления, так что в пределе достигается полное насыщение этим благом. Второе констатирует убывание полезности первых единиц блага при повторных актах потребления.

Принцип убывающей предельной полезности заключается в том, что с ростом потребления какого-то одного блага (при неизменном объеме потребления всех остальных) общая полезность, получаемая потребителем, возрастает, но возрастает все более медленно. Математически это означает, что первая производная функции общей полезности по количеству данного блага положительна, а вторая – отрицательна:

$$\frac{\partial TU(Q_i)}{\partial Q_i} \succ 0, \quad \frac{\partial^2 TU(Q_i)}{\partial Q_i^2} \prec 0. \qquad (4.12)$$

Однако принцип убывающей предельной полезности отнюдь не универсален. Во многих случаях предельная полезность последующих единиц блага сначала увеличивается, достигает максимума и лишь затем начинает снижаться. Такая зависимость характерна для небольших порций делимых благ. Вторая затяжка выкуриваемой утром сигареты, возможно, имеет для любителя большую полезность, чем первая, а третья большую, чем вторая.

Такая ситуация показана на рис. 4.3, *б*. В интервале от нуля до *Q'A* общая полезность возрастает быстрее, чем увеличивается объем потребления блага, растет и предельная полезность. В следующем интервале общая полезность растет медленнее, чем объем потребления, а предельная полезность снижается от максимального уровня (в точке *L'*) до нуля. Математически это означает, что на участке от нуля до *Q'A* и первая, и вторая частные производные функции общей полезности по объему потребления данного блага положительны:

$$\frac{\partial TU}{\partial Q_i} \succ 0, \ \frac{\partial^2 TU}{\partial Q_i^2} \succ 0. \qquad (4.13)$$

Таким образом, принцип убывающей предельной полезности, или первый закон Госсена, справедлив лишь в том случае, если вторая частная производная функции общей полезности отрицательна. Однако поскольку потребитель покупает на рынке не отдельные акты потребления, а определенные блага, мы можем считать, что для обращающихся на рынке товаров первый закон Госсена выполняется.

Для строго вогнутых дважды дифференцируемых функций полезности $U(x)$ матрица вторых производных $H(x)$ называется ***матрицей Гессе.*** Она будет отрицательно определенной. (Критерий Сильвестра: квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы строго положительны. Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки всех угловых миноров ее матрицы чередуются, причем минор порядка 1 отрицателен.)

Из отрицательной определенности матрицы $H(x)$, в частности, следует, что $\partial^2 U(x) / \partial x_j^2 \prec 0, \ j = \overline{1,n}$. Последнее означает, что *предельная полезность $MU_i(x)$ j-го товара уменьшается при увеличении его потребления*. Матрица Гессе также является квадратной симметрической матрицей. Матрица Гессе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_m} = H(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_m \partial x_1}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_m \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

Из **второго закона Госсена** следует, что увеличение цены какого-либо блага (при неизменных ценах на все прочие блага и том же доходе) ведет к падению соотношения предельной полезности от его потребления и цены.

Снижение предельной полезности означает меньшую готовность индивида платить за данное количество, т. е. более низкий спрос. Итак, линия предельной полезности является также линией спроса. Объемом спроса на какой-либо товар называют максимальное количество этого товара, которое согласно купить отдельное лицо, группа лиц или население в целом в единицу времени при определенных условиях.

Предположим теперь, что потребитель располагает некоторым доходом; цены на товары *A, B, ..., Z* не зависят от его поведения и равны соответственно *PA, PB, …, PZ*; товарного дефицита нет; все товары являются бесконечно делимыми (как, например, колбаса, сливочное масло и т. д.).

При этих предположениях потребитель достигнет максимума удовлетворения, если он распределит свои средства на покупку различных товаров таким образом, что:

1) для всех реально покупаемых им товаров *A*, *B*, *C*, ... имеет место

$$\frac{MU_A}{p_A} = \frac{MU_B}{p_B} = \frac{MU_C}{p_C} = ... = \lambda, \qquad (4.14)$$

где MU_A, MU_B, MU_C – предельные полезности товаров *A*, *B*, *C*;

λ – некоторая величина, характеризующая предельную полезность денег;

2) для всех непокупаемых им товаров *Y, Z*, ... имеет место

$$\frac{MU_Y}{p_Y} \le \lambda, \frac{MU_Z}{p_Z} \le \lambda. \qquad (4.15)$$

Равенство (4.14) показывает, что в оптимуме (максимум полезности при данных вкусах потребителя, ценах и доходах) полезность, извлекаемая из последней денежной единицы, потраченной на покупку какого-либо товара, одинакова, независимо от того, на какой именно товар она израсходована.

4.7. Норма, предельная норма замещения двух товаров

Рассмотрим проекцию линии пересечения гиперповерхности безразличия плоскостью $x_s = \overline{x_s}$, $s = 1, m, s \neq i, j$ ($\overline{x_s}$ – фиксированные числа) на плоскость двух товаров $0\ X_I, X_J$, получим линию безразличия. Вдоль линии безразличия полезность не меняется ($U(x)$ = const). Другими словами, будем считать, что потребление всех товаров, за исключением i-го и j-го, постоянно. Возникает вопрос: можно ли заменить i-й товар j-м и в каких количествах, чтобы полезность двух наборов была одинаковой?

Рассмотрим случай двух товаров x_1 и x_2. Итак, Δx_2 и Δx_1 – количества заменяемых друг на друга товаров. Величину Δx_2 / Δx_1 называют **нормой замещения** 1-го товара на 2-й.

Записывая отношение Δx_2 / Δx_1, всегда будем считать и числитель, и знаменатель малыми числами, описывающими *предельные* изменения по сравнению с исходным потребительским набором. По мере того как Δx_1 уменьшается, Δx_2 / Δx_1, как это видно из рис. 4.4, приближается к наклону кривой. Тогда пропорция измеряет ***предельную норму замещения*** товара 1 товаром 2.

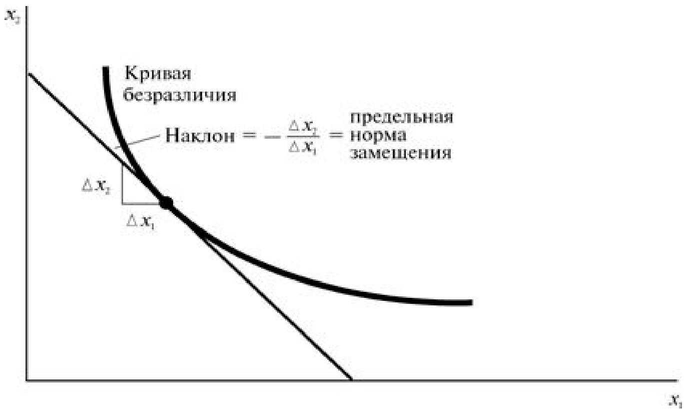


Рис. 4.4. Графическое представление предельной нормы замещения в случае двух товаров

Значит, ***предельная норма замещения*** – коэффициент, показывающий, в какой пропорции одно благо замещается на другое благо, при условии, что их общая полезность для потребителя остается без изменений. По мере сокращения блага его предельная норма замещения возрастает.

Поэтому отношение, определяющее *MRS*, всегда будет описывать наклон кривой безразличия – пропорцию, в которой потребитель готов заместить чуть большим потреблением товара 2 чуть меньшее потребление товара 1.

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta x_j} = -\frac{MU_j}{MU_i} = MRS, \qquad (4.16)$$

т. е. норма замещения *j*-го товара *i*-м равна обратному отношению их предельных полезностей, взятому с обратным знаком.

Слегка смущающим моментом в отношении *MRS* является то, что, как правило, это число *отрицательное*. Мы уже видели, что монотонные предпочтения подразумевают отрицательность наклона кривых безразличия. Поскольку *MRS* есть численная мера наклона кривой безразличия, она, естественно, будет отрицательным числом.

Из выражения (4.16) следует:

$$\Delta x_i = -\frac{MU_j}{MU_i} \Delta x_j. \qquad (4.17)$$

Итак, согласно уравнению (4.17) на тех участках линии безразличия, где $MU_j \cdot MU_i > 0$, увеличение потребления одного товара ведет к уменьшению потребления другого товара; там же, где $MU_j \cdot MU_i < 0$, наоборот, увеличение потребления одного товара ведет к увеличению потребления и другого. В случае, если $MU_j \cdot MU_i = 0$, товары не замещаемы.

Основные свойства MRS:

1. Предельная норма замещения товара x_2 товаром x_1 равна отношению их предельных полезностей, т. е. MU_1 к MU_2. Отрицательный знак в выражении означает, что чем больше одного товара (x_1), тем меньше другого товара (x_2) должно быть в потребительском наборе, с тем чтобы совокупная полезность осталась неизменной.

2. Если любые две точки на кривой безразличия сливаются в одну, то *MRS* равна тангенсу угла наклона касательной к кривой безразличия в данной точке.

3. Предельная норма замещения имеет значение только при движении по кривой безразличия, но никогда – при перемещении между кривыми.

4. Принцип убывания *MRS* не является универсальным и выполняется только для кривых безразличия стандартного вида.

4.8. Функция полезности для задачи личного потребления

Рассмотрим теперь случай личного потребления. Типичной задачей личного потребления является ***задача о диете*** *(nutrient problem).* Здоровая пища содержит n питательных веществ в определенных пропорциях. Обозначим через d_1, d_2, ..., d_n количество питательных веществ в единице такой пищи. Для ее приготовления используют m продуктов. Обозначим через $x = (x_1, ..., x_m)$ некоторый фиксированный набор продуктов. Известно, что в единице j-го продукта содержится a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Пусть z_j – количество j-го продукта, закупаемого для приготовления пищи объема λ. Тогда должны выполняться ограничения:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j \geq \lambda d_i, \ i \in I = \overline{1, n}\,; \tag{4.18}$$

$$0 \leq z_i \leq x_j, \ \ j \in J = \overline{1, m}. \tag{4.19}$$

Множество векторов $z = z(x) = (z_j, j \in J)$, удовлетворяющих ограничению (4.18), обозначим через $Z(x)$. Товарами здесь выступают закупаемые продукты x_j, $j \in J$. Ясно, что величина λ зависит от объема закупаемых продуктов z, т. е. $\lambda = \lambda(z / x)$.

Функцию

$$U(x) = \max \lambda(z / x), b_* \leq x \leq b^*, z \in Z(x) \tag{4.20}$$

назовем ***функцией полезности задачи личного потребления.***

При закупке продуктов потребитель может преследовать и другие цели. Тогда получим другую функцию полезности. Функция (4.20) того же типа, что и функция (4.21), поскольку ее значения определяются с помощью задачи линейного программирования.

В подробной записи функция (4.20) для каждого набора x имеет вид:

$$\begin{gathered} \lambda \to \max, \\ Az - \lambda d \geq 0, \\ 0 \leq z \leq x, \ \lambda \geq 0. \end{gathered} \tag{4.21}$$

В дальнейшем для сокращения объема материала будем рассматривать только задачу производственного потребления, как более сложную.

5. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПОТРЕБЛЕНИЯ

5.1. Бюджетное ограничение. Допустимое множество потребителя. Бюджетная линия.

5.2. Оптимальное поведение потребителя в неоклассическом случае и при ограниченном запасе товаров.

5.1. Бюджетное ограничение. Допустимое множество потребителя. Бюджетная линия

Экономическая теория поведения потребителя очень проста: экономисты полагают, что потребители выбирают лучший товарный набор, который могут себе позволить. Чтобы наполнить эту теорию конкретным содержанием, мы должны более точно описать, что именно подразумевается под лучшим и что именно подразумевается под могут себе позволить.

Начнем с рассмотрения понятия бюджетного ограничения. Предположим, что имеется некое множество товаров, в пределах которого потребитель может осуществлять свой выбор: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда цену всех товаров можно представить вектором $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Обозначим доход потребителя *K*. Стоимость набора товаров равна $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ или сокращенно *px*. Поскольку расходы на приобретение не могут превышать дохода, можно записать $px \le K$.

Множество $x = \left\{x \in R_+^n \perp px \le K\right\}$ называют допустимым множеством потребителя.

Множество $x = \left\{x \in R_+^n \perp px = K\right\}$ называют бюджетным множеством потребителя.

В реальной жизни существует много товаров, выступающих объектами потребления, однако для наших целей удобно рассмотреть случай всего двух товаров, поскольку тогда можно описать поведение потребителя в отношении выбора товаров графически.

Обозначим потребительский набор данного потребителя через (x_1, x_2). Это просто два числа, говорящие нам о том, сколько товара 1, x_1, и сколько товара 2, x_2, хочет потребить данный потребитель. Иногда удобно обозначать потребительский набор лишь одним символом, например, *X* – просто сокращенное обозначение указанного перечня двух чисел (x_1, x_2).

Предположим, что из наблюдений нам известны цены этих двух товаров (p_1, p_2), и та сумма денег, которую может израсходовать потребитель, K. Тогда бюджетное ограничение потребителя может быть записано в виде:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le K, \tag{5.1}$$

где p_1x_1 – сумма денег, расходуемая потребителем на товар 1;

p_2x_2 – сумма денег, расходуемая им на товар 2.

Бюджетное ограничение потребителя требует, чтобы сумма денег, затраченная на оба товара, не превышала общей суммы денег, которую может израсходовать данный потребитель. Доступными для потребителя наборами являются те, которые стоят не дороже K.

Предпосылка о наличии всего лишь двух товаров носит более общий характер, чем можно было бы поначалу подумать, поскольку часто можно считать один из товаров представляющим все другие товары, которые потребитель мог бы захотеть потребить. Бюджетная линия есть множество наборов, которые стоят в точности K:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = K. \tag{5.2}$$

Это товарные наборы, на которые полностью расходуется весь доход потребителя.

Бюджетное множество изображено на рис. 5.1. Жирной линией изображена бюджетная линия – наборы, стоящие в точности K, а под этой линией располагаются наборы, которые стоят строго меньше K.

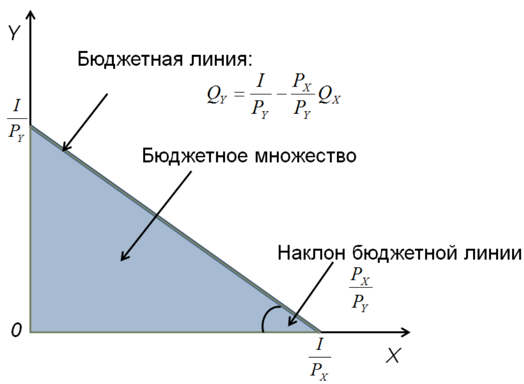


Рис. 5.1. Бюджетное множество потребителя

Можно преобразовать уравнение бюджетной линии:

$$x_2 = \frac{K}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \tag{5.3}$$

Это формула для прямой, пересекающей вертикальную ось в точке K / p_2 и имеющей наклон $-p_1 / p_2$. Данная формула показывает, сколько единиц товара 2 должен потребить потребитель, чтобы при потреблении x_1 единиц товара 1 бюджетное ограничение как раз удовлетворялось.

Приведем легкий способ нарисовать бюджетную линию при заданных ценах (p_1, p_2) и доходе m. Достаточно спросить себя, сколько товара 2 мог бы купить потребитель, если бы он истратил на него все свои деньги. Ответ: конечно, K / p_2. Теперь спросите, сколько товара 1 мог бы купить потребитель, если бы он истратил на него все свои деньги. Ответ: K / p_1. Таким образом, точки пересечения с горизонтальной и вертикальной осями показывают количества товаров, которые мог бы получить потребитель, если бы он истратил все свои деньги соответственно на товары 1 и 2. Чтобы провести данную бюджетную линию, достаточно нанести эти две точки на соответствующие оси графика и соединить их прямой линией.

Как изменяется бюджетная линия? При изменении цен и дохода изменяется и множество товаров, доступное потребителю. Как влияют эти изменения на бюджетное множество?

Вначале рассмотрим изменения дохода. Из уравнения (5.3) нетрудно увидеть, что возрастание дохода приведет к увеличению отрезка, отсекаемого бюджетной линией на вертикальной оси, не повлияв при этом на наклон этой линии. Таким образом, рост дохода будет иметь результатом *параллельный сдвиг* бюджетной линии *вовне* (рис. 5.2). Аналогично уменьшение дохода вызовет параллельный сдвиг бюджетной линии внутрь. Возрастание дохода вызывает параллельный сдвиг бюджетной линии наружу.

А что можно сказать об изменениях цен? Вначале рассмотрим возрастание цены товара 1, считая цену товара 2 и доход постоянными. Как видно из уравнения (5.3), возрастание p_1 не изменит точки пересечения бюджетной линии с вертикальной осью, но сделает бюджетную линию круче, поскольку p_1 / p_2 увеличится.

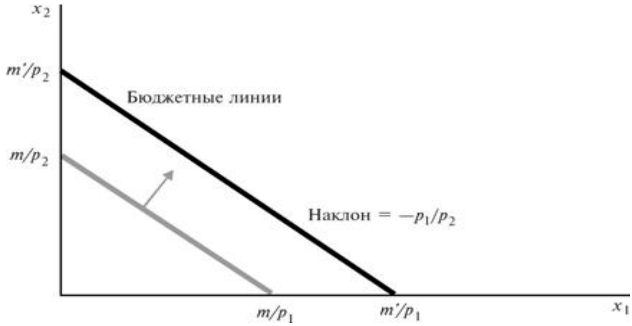


Рис. 5.2. Зависимость бюджетной линии от роста дохода

Другой способ посмотреть, как изменится бюджетная линия, состоит в том, чтобы прибегнуть к приему, описанному нами выше при проведении бюджетной линии. Если вы тратите все деньги на товар 2, то возрастание цены товара 1 не изменяет максимального количества товара 2, которое вы можете купить, следовательно, точка пересечения бюджетной линии с вертикальной осью не меняется. Но если вы тратите все деньги на товар 1 и он становится дороже, то потребление вами товара 2 должно сократиться. Следовательно, точка пересечения бюджетной линии с горизонтальной осью должна сдвинуться внутрь, в результате чего наклон бюджетной линии будет больше (рис. 5.3). Если товар 1 становится дороже, бюджетная линия становится круче.

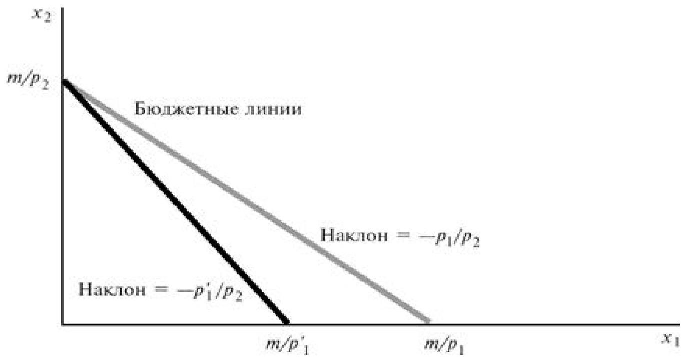


Рис. 5.3. Зависимость бюджетной линии от роста цены на товар x_1

Что происходит с бюджетной линией при одновременном изменении цен товара 1 и товара 2? Предположим, например, что мы удваиваем цены обоих товаров. В этом случае и точка пересечения бюджетной линии с горизонтальной осью, и точка ее пересечения с вертикальной осью сдвинутся внутрь, причем координаты новых точек будут равны координатам прежних точек, умноженным на 1/2, и поэтому бюджетная линия сдвигается внутрь также с коэффициентом 1/2. Умножение обеих цен на два – то же самое, что деление дохода на 2.

Это можно выразить и алгебраически. Предположим, что наша исходная бюджетная линия есть $p_1x_1 + p_2x_2 = K$.

Предположим далее, что обе цены возрастают в t раз. Умножение обеих цен на t дает $tp_1x_1 + tp_2x_2 = K$.

Но это уравнение – то же самое, что и $p_1x_1 + p_2x_2 = K / t$.

Таким образом, умножение обеих цен на постоянную величину t есть то же самое, что и деление дохода на эту постоянную величину t. Отсюда следует, что если умножить на t и цены обоих товаров, и доход, то бюджетная линия совсем не изменится.

Можно также рассмотреть одновременные изменения цен и дохода. Что произойдет, если цены обоих товаров возрастут, а доход снизится? Подумайте, что произойдет с точками пересечения бюджетной линии с горизонтальной и вертикальной осями. Если K уменьшается, а p_1 и p_2 растут, то соответствующие координаты обеих точек пересечения с осями K / p_1 и K / p_2 должны уменьшиться. Это означает, что бюджетная линия сдвинется внутрь. А что произойдет с наклоном бюджетной линии? Если цена товара 2 возрастет в большей степени, чем цена товара 1, так что $-p_1 / p_2$ уменьшится (по абсолютной величине), бюджетная линия станет более пологой; если же цена товара 2 возрастет в меньшей степени, чем цена товара 1, бюджетная линия станет более крутой.

Бюджетная линия обладает следующими свойствами:

1) имеет отрицательный наклон;

2) ее наклон равен обратному соотношению цен двух товаров:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{p_1}{p_2};$$

3) при постоянных ценах разным уровням дохода соответствует более высокая бюджетная линия. Таким образом, уровень бюджетной прямой отражает ограничение дохода, а ее наклон – соотношение цен.

5.2. Оптимальное поведение потребителя в неоклассическом случае и при ограниченном запасе товаров

Неоклассическая задача потребления состоит в выборе такого набора x товаров из допустимого множества X ($x \in X$), который был бы наиболее предпочтителен с точки зрения потребителя. Поскольку отношение предпочтения определяется функцией полезности, то наиболее предпочтительным будет тот набор x^0 товаров, полезность которого максимальна: $U(x^0) = \max U(x)$, $x \in X$. Таким образом, ***неоклассическая задача потребления*** состоит в максимизации функции полезности на допустимом множестве потребителя:

$$U(x) \rightarrow \max, \; p'x \le K, x \ge 0. \tag{5.4}$$

Вернемся к задаче производственного потребления. В качестве величины денежного дохода K можно рассматривать объем оборотных средств, имеющихся у предприятия, а в качестве допустимого множества потребителя будем рассматривать множество $X = \left\{ x \in R_+^m : \mathrm{p}' x \le K, b_* \le x \le b^* \right\}$, которое является компактным, если $p > 0$ и $X \ne \varnothing$.

Будем рассматривать функцию полезности, определяемую прибылью: $U(x) = \max P(z / x)$, $z \in Z(x)$, а параллельно (в скобках) – более простую, определяемую доходом $U(x) = \max R(z / x)$, $z \in Z(x)$.

Тогда задача типа (5.4) примет вид:

$$\begin{cases} c'z - p'x \rightarrow \max(c'z \rightarrow \max), \\ Az - x \le 0, \\ p'x \le K, \\ d_* \le z \le d^*, b_* \le x \le b^*. \end{cases} \tag{5.5}$$

Задача (5.5) – ***задача оптимального производственного потребления***. Как видим, она является задачей линейного программирования и может быть решена методами линейного программирования. Заметим, что для ее решения не обязательно знать явный вид функции полезности.

Опять рассмотрим задачу (5.4). Предположим, что $U(x)$ – строго вогнутая дважды непрерывно дифференцируемая функция. При $p > 0$ множество X является компактом и в силу свойств функции $U(x)$ задача имеет единственное решение x^0.

Если отказаться от строгой вогнутости функции $U(x)$, то решение x^0 может быть не единственным.

Задача (5.4) является задачей выпуклого программирования. Согласно теореме Куна – Таккера план x^0 оптимален в том и только том случае, если существует число $\lambda^0 > 0$, такое, что для функции Лагранжа $F(x, \lambda) = U(x) + \lambda(K - p'x)$ выполняются условия:

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = \frac{\partial U(x^0)}{\partial x} - \lambda^0 p \le 0; \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} x^0 = (\frac{\partial U(x^0)}{\partial x} - \lambda^0 p) x^0 = 0; \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = K - p'x^0 \ge 0; \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} \lambda^0 = (K - p'x^0)\lambda^0 = 0; \tag{5.9}$$

$$x^0 \ge 0, \lambda^0 \ge 0. \tag{5.10}$$

Из соотношений (5.6)–(5.7) следует: если $\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} \prec \lambda^0 p_j$, то $x_j^0 = 0, j = \overline{1, n}$ (товар не покупается), и, наоборот, если $\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} = \lambda^0 p_j$, то $x_j^0 \succ 0, j = \overline{1, n}$ (товар закуплен). По предположению $p > 0$. Тогда последние соотношения дают: $\frac{1}{p_j} MU_j(x^0) = \lambda^0 \forall j = \overline{1, n}$ таких, что $x_j^0 \succ 0$, т. е. *на оптимальном плане отношение маргинальной полезности к цене товара является постоянной величиной для всех закупаемых товаров и равно оптимальному множителю Лагранжа, который называют еще предельной полезностью денег. Она уменьшается с ростом дохода и возрастает с его уменьшением.*

Отсюда следует важный вывод о том, что *в оптимальном наборе отношение предельной полезности к цене одинаково для всех товаров*:

$$\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{p_2} = \ldots \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_n} \cdot \frac{1}{p_n}.$$

Этому можно дать простое логическое объяснение. Если полезность от расходования дополнительной денежной единицы на продукт питания выше, чем от денежной единицы на одежду, то потребитель может увеличить полезность за счет расходов на питание.

Это равенство можно переписать в другой форме:

$$\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_k} \div \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} = \frac{p_k}{p_j}, k,\ j = \overline{1,n}.$$

На оптимальном наборе x^0 закупаемых товаров отношение (оптимальных) предельных полезностей товаров равно отношению цен этих товаров.

Поскольку хоть один товар закупается, то $\lambda^0 > 0$, а тогда из соотношений (5.8)–(5.9) следует:

$$p'x^0 = K, \tag{5.11}$$

т. е. *при оптимальном плане весь бюджет израсходуется* (оптимальный план лежит на бюджетной линии).

К этому выводу можно прийти и логически. Если потребитель не полностью использует средства, которые имеются в его распоряжении, истратив остаток на покупку какого-либо товара, получим набор товаров, который (в силу аксиомы ненасыщаемости) будет иметь большее значение функции полезности, чем первоначальный.

Все выводы, сделанные для задачи производственного потребления, справедливы и для любых других задач с другими функциями полезности.

Рассмотрим случай, когда в задаче производственного потребления на x накладываются ограничения $b_* \le x \le b^*$, т. е. рассматривается задача

$$b_{*i} \le x_i \le b_i^*,\ i \in I,$$

если выполняются ограничения

$$\sum a_{ij} z_j \le x_i, i \in I;$$

$$d_{*j} \le x_i \le d_j^*,\ j \in J.$$

Товар i будем называть *дефицитным* (*scarce commodity*), если закупается весь его запас, имеющийся на рынке: $x_i^0 = b_i^*$, *недефицитным*, если $b_{*i} \le x_i^0 \le b_i^*$, и *малоиспользуемым (несущественным)*, если закупается лишь его минимальное количество, необходимое для функционирования производства: $x_i^0 = b_{*i}$.

По отношению к недефицитным товарам потребитель ведет себя как в неоклассическом случае.

Если i-й товар является дефицитным, тогда *предельная (оптимальная) полезность на денежную единицу для дефицитных товаров не меньше предельной (оптимальной) полезности на денежную единицу для недефицитных товаров.* В этом случае бюджет может быть полностью не израсходован. Однако увеличить полезность за счет закупки недефицитных товаров на оставшуюся неизрасходованную часть бюджета нельзя. В самом деле, так как это означает, что для недефицитных товаров $M^0U_i(x^0) = 0$ и увеличение потребления i-го товара при неизменном потреблении остальных не ведет к увеличению полезности. Это следует и из закона Госсена: так как при увеличении потребления i-го товара MU_i может только уменьшаться, то либо $MU_i = 0$ для всех $x_i > x_i^0$, либо $MU_i(x) < 0$ для $x_i > x_i^0$. А как было сказано, если $MU_i = 0$, то полезность не изменяется при увеличении потребления i-го товара, а если $MU_i(x) < 0$, то полезность уменьшается. Единственная возможность увеличить полезность товаров при полном расходовании бюджета – увеличение количества дефицитного товара на рынке.

Аналогично получим и для малоиспользуемых товаров. Остальные выводы те же, что и для дефицитных товаров. Заметим только, что при неполном использовании бюджета увеличение полезности за счет оставшихся денег может быть достигнуто лишь при уменьшении количества малоиспользуемого товара на рынке.

6. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

6.1. Простейшая макроэкономическая модель

Теория экономического роста является одним из наиболее сложных разделов экономической науки, посвященной исследованию рыночного хозяйства. Анализ экономического роста имеет особое значение в последние десятилетия. Повышение потребностей, исчерпание традиционных ресурсов, увеличение численности населения обусловливают решение двуединой задачи: экономического роста и эффективности экономики.

Экономический рост и есть увеличение объема создаваемых полезностей, а следовательно, повышение экономического благосостояния и жизненного уровня населения.

Экономический рост – одна из основополагающих проблем, стоящих перед всеми странами.

По его динамике судят о развитии национальных экономик, о жизненном уровне населения, о том, как решаются проблемы ограниченности ресурсов.

Экономический рост является важнейшей характеристикой общественного производства при любых хозяйственных системах.

Экономический рост означает, что на каждом данном отрезке времени в какой-то степени облегчается решение проблемы ограниченности ресурсов и становится возможным удовлетворение более широкого круга потребностей человека.

Экономический рост – длительная положительная динамика экономики, которая выражается в определенных итоговых, количественных показателях абсолютных или относительных изменений национальной экономики: темпах роста и объемах ВНП.

Экономический рост:

– отражает характер воспроизводства национальной экономики;

– проявляется в увеличении реального ВВП и показателях уровня и качества жизни населения;

– является составляющей макроэкономического развития в целом;

– требует выбора наиболее оптимальной модели.

Обеспечение долговременного экономического роста является приоритетом экономической политики государства.

Рассматривая экономику Республики Беларусь в целом в рамках аспекта экономического роста, отметим, что ключевой проблемой белорусской экономики на протяжении уже около 10 лет является слабый, особенно по меркам стран со средним уровнем дохода, рост выпуска. Первые признаки ухудшения потенциала роста стали наблюдаться еще в 2007 г., когда присущий первой декаде 2000-х гг. устойчивый темп роста около 7–8 % в год стал быстро ослабевать [7]. К 2015 г. упрочение этой тенденции привело к тому, что потенциал роста ослаб до 1,5–2,5 % в год [8].

Попытки «замаскировать» эту концептуальную проблему посредством предоставления краткосрочных экономических стимулов привели к нескольким валютным кризисам (в 2011 и 2015 гг.) [9], а также ввергли страну в рецессию в 2015–2016 гг. [8]. В результате фактический рост продолжал снижаться, а за последние 5 лет он был даже ниже потенциала: за период 2015–2019 гг. ВВП в Беларуси вырос лишь на 0,7 %. На основании этого можно констатировать, что белорусская экономика находится в состоянии стагнации.

Стагнация в последние годы привела к тому, что Беларусь из лидера роста в регионе Центральной Европы и Балтии (далее – ЦЕБ) стала одним из аутсайдеров, а уровень благосостояния по сравнению со странами ЦЕБ после 20 лет роста (в 1995–2014 гг.) стал снижаться (с 2015 г.). Например, на пике 2012–2014 гг. реальное благосостояние в Беларуси составляло около 77 % от среднего уровня по 11 странам ЦЕБ, тогда как к 2019 г. оно снизилось до уровня около 64 %. Последствия слабого роста не исчерпываются стагнацией благосостояния и ухудшением позиций в международных сопоставлениях. Дефицит роста в настоящее время может также формировать барьеры для будущего роста, негативно влияя на накопление человеческого капитала и актуализируя социальные вызовы. Например, на фоне растущей разбежки в доходах в последние годы ощутимо усилился миграционный отток в соседние страны, что для Беларуси чревато нехваткой человеческого капитала для будущего роста. Кроме того, отток квалифицированных специалистов в отдельных социально значимых отраслях, например здравоохранении, чреват и социальными вызовами.

Слабый рост может генерировать негативные структурные эффекты, а также «подрывать сверху» **макроэкономическую стабильность**. В конечном итоге они могут сформировать своеобразный порочный круг. Например, работы [2; 3] показывают, что ослабление роста может приводить к устойчивым изменениям в поведении на рынке труда со стороны как фирм, так и домашних хозяйств. Это, в свою очередь, порождает снижение равновесного уровня занятости. В результате рынок труда, а через него и вся экономика могут быть подвержены гистерезису [3], т. е. возможности будущего роста будут скованы. Также следствием слабого роста является снижение естественного уровня процентной ставки в экономике. Особенно чувствительным оно может быть, если усиливает уже существующий тренд, предопределенный негативным темпом прироста рабочей силы, вследствие либо демографических причин, либо структурных эффектов на рынке труда. Снижение естественной процентной ставки может изменить мотивацию как фирм, осуществляющих инвестиции, так и домашних хозяйств, осуществляющих сбережения. В результате экономика с такими структурными ограничениями может попадать в ловушку стагнации. Попытки выйти из вечной стагнации чреваты **нарушением макроэкономической стабильности**. Во-первых, снижающийся уровень естественной процентной ставки дезориентирует центральный банк, обусловливая избыточную жесткость или мягкость монетарной политики. Во-вторых, в условиях слабого потенциального роста у экономических властей велик соблазн пойти по иллюзорно легкому пути стимулирования спроса. Актуальность всего перечня указанных эффектов слабого роста пока не очевидна для Беларуси, но их симптомы постепенно проявляются и нарастают. Наилучшим выходом из такой ситуации является не противодействие симптомам, а устранение порождающей их причины – слабого экономического роста. Другими словами, Беларуси крайне необходимо преодолеть дефицит роста, обеспечив его высокий и устойчивый темп. Исходя из текущего статус-кво экономической среды, а также роли и места Беларуси в международных сопоставлениях, в качестве целевого для страны в ближайшие 10 лет уместно и целесообразно рассматривать темп роста в диапазоне 5–7 % в год.

Для анализа макроэкономической стабильности используются модели макроэкономического равновесия.

Макроэкономическое равновесие – это состояние национальной экономики, для которого характерна пропорциональность и сбалансированность взаимосвязанных экономических процессов.

Равновесие может быть частичным и общим.

Частичное равновесие – количественное соответствие (равенство) двух взаимосвязанных параметров или сторон экономики (например, производства и потребления; покупательной способности и наличия товаров; доходов и расходов и т. д.).

Общее равновесие – соответствие (согласование) развития всех сфер экономической системы: спрос и предложение не только товаров и услуг, но и рабочей силы, капитала – равновесие на всех рынках плюс влияние политических, социальных факторов.

Условия общего равновесия:

1. Соответствие общих целей и экономических возможностей.

2. Использование всех ресурсов страны при сохранении резервов мощностей, нормального уровня занятости.

3. Общая структура производства соответствует структуре потребления.

4. Равновесие на всех основных рынках.

Равновесие в статике – равновесие в текущий момент, случайно.

Равновесие в динамике – равновесие, часто возвращающееся в соответствии со своими законами.

Модель *AD-AS*, одна из самых распространенных, позволяет:

- выяснить условия макроэкономического равновесия;
- определить величину равновесного объема выпуска и равновесного уровня цен;
- объяснить колебания объема выпуска и уровня цен в экономике;
- показать причины и последствия изменения совокупного спроса и совокупного предложения;
- описать последствия разных вариантов экономической политики государства.

Совокупный спрос (*AD*) – это общее количество продукции, которое может быть куплено при данном уровне цен.

Величина совокупного спроса – то количество конечных товаров и услуг, на которые будет предъявлен спрос всеми макроэкономическими агентами при каждом возможном уровне цен.

В модели *AD-AS* кривая *AD* может пересечь кривую *AS* на трех известных нам отрезках (рис. 6.1).

Точка E_1 – это равновесие при неполной занятости без повышения уровня цен. Точка E_2 – это равновесие при небольшом повышении уровня цен. Точка E_3 – это равновесие при полной занятости, но с инфляцией.

Наиболее динамичным в экономике является совокупный спрос. Он быстрее улавливает те изменения, которые происходят в экономике.

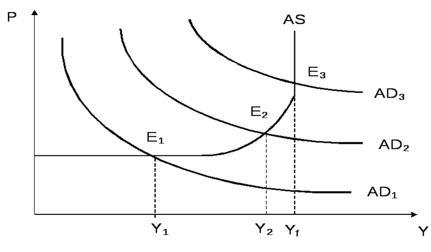


Рис. 6.1. Макроэкономическое равновесие в модели *AD-AS*

Изменение совокупного спроса, а значит, изменение точки равновесия отражается на объеме национального производства, занятости населения, уровне цен.

Рассмотрим возможные варианты увеличения совокупного спроса и их последствия на каждом из участков кривой *AS* (рис. 6.2).

Допустим, что кривые *AD* и *AS* пересекаются на кейнсианском участке (рис. 6.2, *а*). При росте совокупного спроса от AD_1 до AD_2 равновесие перейдет из точки E_1 в точку E_2. При этом значительно увеличится объем производства (с Y_1 до Y_2), а цены останутся на прежнем уровне, поскольку рост производства будет происходить за счет ранее неиспользуемых ресурсов.

При росте совокупного спроса на промежуточном участке (рис. 6.2, *б*) от AD_1 до AD_2 будет наблюдаться одновременный рост и реального объема производства (с Y_1 до Y_2), и уровня цен (с Pa_1 до Pa_2).

На классическом участке (рис. 6.2, *в*) рост совокупного спроса от AD_1 до AD_2 не будет приводить к увеличению реального объема производства, поскольку все факторы вовлечены в производство. Здесь производство достигает своего потенциального уровня *Y** при полной занятости ресурсов, поэтому любые попытки простимулировать совокупный спрос на этом участке приведут исключительно к росту цен (с Pa_1 до Pa_2).

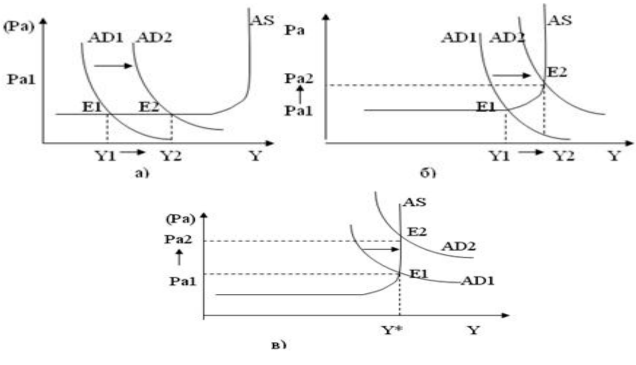


Рис. 6.2. Последствия увеличения совокупного спроса на участках:
а – кейнсианском; *б* – промежуточном; *в* – классическом

Сравнивая все три варианта макроэкономического равновесия, следует отметить, что, выбирая тип экономической политики, необходимо четко представлять себе, на каком участке кривой *AS* находится экономика страны, а следовательно, к рекомендациям какой школы будет тяготеть экономическая политика.

Следует учесть, что совокупный спрос может не только увеличиваться, но и уменьшаться. В таком случае срабатывает эффект храповика, рассматриваемый кейнсианской школой.

Храповик – это технический механизм, воплощающийся в движении колеса только в одном направлении – вперед, и не позволяющий ему вращаться назад.

Применительно к экономике эффект храповика означает увеличение уровня цен под влиянием увеличения совокупного спроса, однако при снижении совокупного спроса уровень цен не имеет обратного движения. Такая ситуация наблюдается в условиях несовершенной конкуренции, при господстве монополий, которые стараются не допускать снижения уровня цен на свою продукцию.

Проиллюстрируем это графически (рис. 6.3). В точке E_1 находится начальное макроэкономическое равновесие при уровне цен Pa_1 и реальном объеме производства Y_1 (оно может находиться далеко от уровня полной занятости).

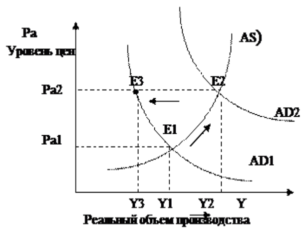


Рис. 6.3. Эффект храповика

При действии факторов, расширяющих совокупный спрос, новое макроэкономическое равновесие возникает при более высоком уровне цен Pa_2, но при более высоком уровне реального объема производства Y_2. Однако под воздействием определенных факторов совокупный спрос может понизиться и вернуться в положение AD_1, но экономика приходит не в точку E_1, а в точку E_3, что ухудшает исходную ситуацию, так как новый высокий уровень цен Pa_2 сочетается теперь с низким уровнем реального объема производства Y_3.

Эффект храповика может демонстрировать не только монополизм в области ценообразования, но и опасность непродуманного экономического роста.

6.2. Неоклассическая модель Солоу

Современные модели экономического роста сформировались на основе неоклассической и кейнсианской теорий.

Неоклассическая теория исходит из возможности наиболее оптимального использования производственных факторов в масштабе не только отдельного производства, но и макроэкономической системы. Неоклассический подход к пониманию экономического роста неоклассиков основывается на трех базовых постулатах: активной роли человека как субъективно-рационального фактора экономики; понимании равновесного развития экономики, обусловливаемого рынком; предельности равновесного состояния.

Для построения моделей, показывающих вклад отдельных факторов производства в конечный результат, используется производственная функция.

Модель Солоу – неоклассическая модель экономического роста Роберта Солоу, основанная на производственной функции Кобба – Дугласа, которая показывает, как возрастает объем производства, вызванный приростом на 1 % соответствующих факторов экономического роста.

Следует отметить, что модель Солоу первая и самая важная неоклассическая модель роста, которая реалистично описывает долгосрочные тенденции в развитых странах.

Модель Солоу заложила основу современной теории роста.

Модификации модели Солоу используются при разработке экономической политики многих стран и стратегий международных компаний.

Американский экономист Роберт Мертон Солоу родился в Бруклине, одном из городских районов Нью-Йорка. Его родители были из семей бедных иммигрантов и вынуждены смолоду зарабатывать на жизнь. Роберт был старшим из трех детей. Он и его сестры представляли первое поколение семьи, получившее высшее образование. Солоу был одним из лучших учеников в начальной и средней школе, но, по его собственному признанию, не отличался особым интеллектуальным развитием. В последнем классе средней школы под влиянием одного из учителей он обратился к чтению классиков французской и русской литературы XIX в. и проникся серьезными идеалами. После окончания средней школы, выдержав конкурсный экзамен, Солоу получил стипендию для обучения в Гарвардском университете, куда он прибыл в сентябре 1940 г. Вначале Солоу специализировался в области социологии и антропологии, а также прослушал начальный курс экономики. В конце 1942 г., когда Солоу исполнилось 18 лет, он оставил университет и вступил в вооруженные силы США. Некоторое время служил в Северной Африке и на Сицилии, в 1945 г. в составе англо-американских войск участвовал в освобождении Италии от фашистской оккупации.

После демобилизации из армии в августе 1945 г. Солоу вернулся в Гарвардский университет и продолжил учебу, почти случайно сделав выбор в пользу экономики. Ему повезло, что его наставником, а потом и другом стал В. Леонтьев, познакомивший Солоу с основами современной экономической теории и привившый вкус к научному исследованию.

В 1947 г. Солоу получил степень бакалавра, а в следующем году магистерскую степень. Под руководством В. Леонтьева в качестве ассистента-исследователя Солоу участвовал в построении модели «затраты – выпуск». Затем он заинтересовался статистикой и вероятностными моделями. Однако изучение статистики в Гарварде его не удовлетворяло, и по совету Ф. Мостеллера, работавшего в Отделе социальных отношений, 1949/50 учебный год Солоу провел в Колумбийском университете в качестве аспиранта. В течение этого года наряду с интенсивными учебными занятиями Солоу работал над тезисами докторской диссертации, в которых попытался смоделировать изменения в распределении заработной платы с использованием существующих методик определения норм занятости, безработицы и заработной платы. За эту работу Гарвардский университет удостоил Солоу в 1951 г. приза Дэвида А. Уэллса и чека в 500 долларов на завершение исследования. Однако Солоу больше не возвращался к этой работе, и тезисы остались неопубликованными, а чек – невостребованным.

В конце учебы в аспирантуре Колумбийского университета Солоу получил предложение на должность ассистента профессора статистики на экономическом факультете Массачусетского технологического института (МТИ) и с удовольствием принял его. В течение пяти лет он преподавал статистику и эконометрику, в 1954–1958 гг. работал ассистентом профессора экономики, а с 1958 по 1973 г. – профессором экономики МТИ. С 1973 г. Солоу является почетным профессором Массачусетского технологического института.

Большую исследовательскую работу Солоу всегда сочетал с преподавательской деятельностью. В 1968/69 учебном году в качестве приглашенного профессора он преподавал в Оксфордском университете. Солоу говорил, что если бы не было работы со студентами, он, вероятно, написал бы на 25 % больше научных работ. Но выбор был сделан, и Солоу, по его собственным словам, никогда не жалел об этом. Научные интересы Солоу главным образом связаны с анализом экономики как единого целого. Он специализировался в области общей экономической теории, макроэкономического анализа в теоретическом и прикладном плане. Основным вкладом Солоу в современную экономическую теорию является создание неоклассической модели экономического роста.

Проблема экономического роста, начиная, вероятно, с «Богатства народов» А. Смита, оставалась одной из стержневых для экономической науки. Когда во второй половине 1950-х гг. Солоу выступил с первыми статьями по теории роста, они были в первую очередь продиктованы его неудовлетворенностью работами своих предшественников в данной области. Более ранние модели роста, разработанные Е. Домаром, Р. Харродом, а также В. Леонтьевым и Дж. фон Нейманом, базировались на фиксированных коэффициентах и не принимали во внимание взаимодействия между капиталом и трудом. В модели, созданной Солоу, было определено соотношение этих факторов и показано их изменение в процессе экономического роста.

Свою модель экономического роста Солоу впервые изложил в 1956 г. в статье «Вклад в теорию экономического роста» ("A Contribution to the Theory of Economic Growth"). Это была математическая модель, выраженная в форме системы дифференциальных уравнений, которая показывала, как возросший основной капитал вызывает рост продукции на душу населения. По оценкам американских специалистов, никто из экономистов не использовал так искусно и просто в теории роста понятие «замещение труда капиталом». Солоу исходил из положения о том, что на сбережение идет определенная фиксированная часть национального дохода, выражаемая понятием «склонность к сбережениям». При наличии исправно функционирующих рынков труда и капитала сбережения в конечном счете взаимосвязаны с инвестициями, которые намерены сделать фирмы. Если норма сбережений достаточно высока, то увеличивается капиталоемкость, т. е. объем реального капитала на одного работающего. Если норма сбережений невысока, то капитал становится относительно более дорогим и капиталоемкость, определяемая ценами на факторы производства, будет падать. Солоу, однако, показал, что, если рассматривать продолжительный отрезок времени при данной неизменной технологии (т. е. при отсутствии технического прогресса), капитал, труд и объем производства имеют одинаковую норму роста. Это означало, что величина капитала, так же как и объем производимого продукта, приходящиеся на одного работающего, будут постоянными, поэтому и размер реальной заработной платы тоже будет неизменной величиной.

Таким образом, доказывалось, что увеличение сберегаемой доли дохода само по себе не может быть источником постоянного возрастания темпа экономического роста. Экономика с более высокой нормой сбережений может, разумеется, добиться большего объема производства на душу населения и более высокой реальной заработной платы. Однако при отсутствии технического прогресса темп роста останется прежним, несмотря на возросшую норму сбережений, и будет равнозначен росту предложения труда. Основной вывод Солоу заключался в том, что темпы экономического роста, рассмотренные на протяжении длительного периода времени, не зависят от темпов роста капиталовложений. В длительной перспективе, как показал Солоу, именно технологическое развитие становится фундаментальной предпосылкой для экономического роста. В модели Солоу постоянный технический прогресс и эффективное использование ресурсов являются определяющими факторами экономического роста.

Теоретическая модель Солоу нашла широкое применение в современном экономическом анализе. Первоначально служившая преимущественно инструментом анализа экономического роста, она в дальнейшем была расширена за счет введения в модель других производственных факторов. На модели Солоу, в частности, базировались некоторые из так называемых числовых моделей, используемых в анализе общего равновесия. Неоклассическая модель экономического роста, созданная Солоу, послужила основанием для разработки современной макроэкономической теории.

В своих последующих работах – статьях «Технические изменения и совокупная производственная функция» ("Technical Change and the Aggregate Production Function", 1957) и «Инвестиции и технический прогресс» ("Investment and Technical Progress", 1959) – Солоу дал эмпирические оценки роли различных производственных факторов в приросте национального продукта. Проделанный им анализ показал, что технические усовершенствования, взятые на протяжении длительного отрезка времени, в определенном смысле нейтральны, поскольку они не оказывали влияния на распределение прироста национального продукта между объемом заработной платы и доходом на капитал. Солоу пришел к выводу о том, что только небольшая доля исходного прироста продукта может быть объяснена возросшими затратами труда и капитала. Он доказал, что 7/8 роста американской экономики за период с 1909 по 1949 г. обеспечены за счет технического прогресса и лишь 1/8 – за счет капиталовложений. В статье «Инвестиции и технический прогресс» Солоу изложил новый метод эмпирического определения значения прироста основного капитала для экономического роста. Он показал, что технический прогресс проявляется прежде всего в капиталовложениях в машины и другой основной капитал, что должно учитываться в эмпирических оценках роли капитала в экономическом росте. Эта идея нашла выражение в так называемом урожайном подходе (vintage approach), согласно которому в каждый отдельный момент времени новые инвестиции связаны преимущественно с современной технологией и образующийся в результате процесса инвестирования капитал уже качественно не изменяется в течение всего оставшегося срока его службы (аналогичная идея была примерно в это же время выдвинута Л. Йогансеном в Норвегии). Отсюда следовал вывод о том, что принятие инвестиционных решений в определенной степени включает в себя учет будущих технологий. По сравнению с более ранними моделями результаты, полученные Солоу, имели гораздо большее значение для понимания роли дополнительных инвестиций в основной капитал в процессе роста производительности труда.

В 1958 г. совместно с Р. Дорфманом и И. Самуэльсоном Солоу опубликовал классический труд «Линейное программирование и экономический анализ» ("Linear Programming and Economic Analysis"), в котором была применена кривая Филлипса к экономике США.

Работы Солоу стимулировали проведение аналогичных исследований в других странах. В 1960–1970-е гг. он принимал активное участие в обсуждении роли основного капитала и труда в качестве факторов экономического роста. В 1961–1962 гг. Солоу входил в Экономический совет при президенте США.

Создание неоклассической модели экономического роста оказало влияние на разработку других разделов современной экономической теории. Модель Солоу использовалась в исследовании проблемы оптимальности сбережений, анализе состояния общественных финансов. Она применялась для оценки возможных воздействий изменений в налоговой политике на последующее экономическое развитие.

В 1970–1980-е гг. неоклассическая модель Солоу была успешно использована в изучении колебаний экономического цикла в рамках теории общего равновесия, а также при анализе рынка ценных бумаг.

Солоу внес существенный вклад и в другие области экономической теории, откликаясь на актуальные экономические проблемы. В начале 1970-х гг. в связи с процессами урбанизации он плодотворно занимался новыми для того времени направлениями, связанными с изучением проблем экономики городов и землепользования. Тогда же вышли его важные публикации, касающиеся роли природных ресурсов. Теория экономического роста изначально предполагала, что единственными лимитирующими факторами экономического роста являются труд, капитал и технология. В последующие годы, когда все большее значение стала приобретать проблема ограниченности природных ресурсов, Солоу обратился к изучению теории добычи природных ресурсов. В статьях «Экономика ресурсов и ресурсы экономики» ("The Economics of Resources and the Resources of Economics", 1974), «Справедливость с точки зрения поколений и ограниченные ресурсы» ("Intergenerational Equity and Exhaustible Resources", 1974), «Издержки добывающих отраслей в теории ограниченных ресурсов» ("Extraction Costs in the Theory of Exhaustible Resources", 1976) Солоу обосновывает вывод о том, что ключом к проблеме истощающихся природных ресурсов может быть гипотеза об эластичности взаимозаменяемости капитала и затрат природных ресурсов.

В последующие годы Солоу, продолжая преподавательскую и исследовательскую деятельность в МТИ, занимался различными аспектами макроэкономического анализа, в том числе проблемой занятости и анализом ее значения для стабилизационной политики. Он является признанным лидером целого направления современной экономической теории и одним из наиболее интеллектуально образованных экономистов нашего времени. Его отличает широта интересов и познаний не только в области экономики, но и в других социальных науках. Библиография работ Солоу за 1950–1987 гг. включает 165 публикаций в экономических журналах, монографиях и сборниках.

Премия памяти Альфреда Нобеля по экономике была присуждена Солоу в 1987 г. «за фундаментальные исследования в области теории экономического роста». В речи на презентации лауреата член Шведской королевской академии наук К. Г. Мёлер отметил, что «большой заслугой профессора Солоу является создание модели, с помощью которой может быть понята и проанализирована изменяющаяся реальность». В Нобелевской лекции Солоу изложил принципиальные положения неоклассической модели экономического роста.

Помимо Нобелевской премии профессор Солоу был награжден премией Дэвида А. Уэллса Чикагского университета (1951) и медалью

Джона Бейтса Кларка Американской экономической ассоциации (1961). Он являлся членом Эконометрического общества (в 1964 – президент), Американской экономической ассоциации (в 1979 – президент), американской Национальной академии наук (с 1972), Американского философского общества, Американской академии наук и искусств, а также почетным членом Британской академии наук и Национальной академии де Линчей (Италия). Он имеет почетные ученые степени университетов Чикагского, Йельского, Брауна, Тулейнского в Новом Орлеане, а также Уорикского (Англия), Парижского (Сорбонна), Женевского и ряда американских колледжей.

Допущения модели Солоу:

1. Рассматривается закрытая экономика без участия государства. При этом считается, что экономика достаточно большая, что экспорт и импорт не имеют существенного значения.

2. На рынке товаров идентичные предприятия производят гомогенное благо $Y(t)$, причем может производиться как средство производства $I(t)$, так и предмет потребления $C(t)$. Предприятия преследуют цель максимизации прибыли. Господствует совершенная конкуренция на рынке товаров. Цена блага $Y(t)$ постоянна и упрощенно принимается за единицу.

3. Домохозяйства предлагают свои факторы производства – труд $L(t)$ и капитал $K(t)$ – неэластично по цене. Господствует совершенная конкуренция на рынках факторов производства, и цены обоих факторов – реальная ставка оплаты труда $w(t)$, так же как и реальный процент $r(t)$ – доход фактора капитала, под которым в модели Солоу понимается процент на вложенный капитал, – являются гибкими.

4. Предложение труда растет с экзогенно заданной постоянной ставкой n. Ставка оплаты труда (доход фактора труда) является постоянной, так что n одновременно можно представить как темп роста населения.

5. Инвестиции $I(t)$ состоят из чистых инвестиций и амортизационных отчислений. Они, по определению, измеряют брутто-изменение основного капитала $K(t)$ во времени:

$$K(t) = I(t) - dK(t),$$

где d – экономическая норма амортизации, $d > 0$.

Размер инвестиций в неоклассической модели роста определяется на рынке товаров и капитала величиной агрегированных сбережений.

6. В любой момент времени сберегается постоянная часть национального дохода. Норма сбережения

$$S(t) = sY(t).$$

При этом предполагается, что $S = I$.

Исходя из допущений, преобразуем производственную функцию Кобба – Дугласа:

$$Y = K^{\alpha}(LA)^{1-\alpha},$$

где A – трудосберегающий технический прогресс;

LA – количество работников с постоянной эффективностью труда.

1. Нормы сбережения (s) и амортизации (δ) фиксированы и экзогенны.

2. Темпы роста численности (n) и технического прогресса (g) постоянны и экзогенны.

3. Все показатели берем в расчете на одного занятого.

Логика модели:

1. Доход расходуется на потребление и инвестиции:

$$Y = C + I.$$

В удельном выражении на единицу труда с постоянной эффективностью

$$y = c + i.$$

2. Инвестиции равны сбережениям:

$$I = S = sY.$$

В удельном выражении на единицу труда с постоянной эффективностью

$$i = sy,$$

где sy – сбережения этого года.

3. Модель динамики капитала

$$K = sY - \delta K,$$

где sY – капитал этого года;

δK – уже амортизированный капитал.

И мы перешли непосредственно к самой модели Солоу (рис. 6.4).

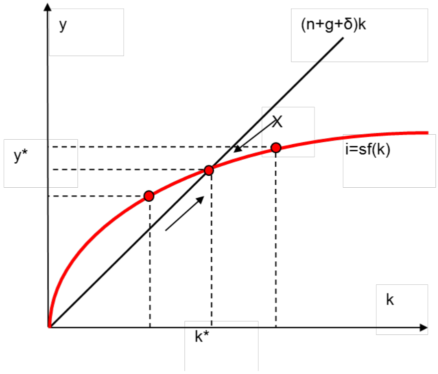


Рис. 6.4. Модель экономического роста по Солоу

Базовое дифференциальное уравнение модели Солоу (в удельном выражении, т. е. на работника)

$$k = sf(k) - (n + g + \delta)k,$$

где k – уровень фондовооруженности труда;

$sf(k)$ – рост инвестиций;

n – темп роста населения;

g – темп технического прогресса;

δ – норма амортизации.

4. Если инвестиции $sf(k)$ меньше $(n + g + \delta)k$, то капиталовооруженность труда с постоянной эффективностью падает, и наоборот.

Пусть ежегодно равномерно выбывает определенная доля капитала d (норма амортизации). Количество капитала, которое выбывает каждый год, равно dk. Выбывающая ежегодно часть капитала пропорциональна общим его запасам, что можно представить в графической форме (рис. 6.5).

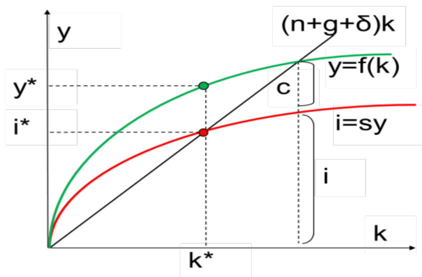


Рис. 6.5. Равновесный выпуск на работника

Уровень запаса капитала, при котором нетто-инвестиции равны экономической норме амортизации, называется устойчивым уровнем капиталовооруженности. Обозначим его k^*.

Поскольку в условиях равновесия инвестиции равны выбытию: $sf(k) = dk$, в случае отклонения от k^* (точка E_1) система придет в состояние динамики (динамическое приспособление к устойчивому состоянию).

Рост нормы сбережений с $s_1 s_2$ сдвинет кривую инвестиций от $s_1 f(k)$ к $s_2 f(k)$ (рис. 6.6).

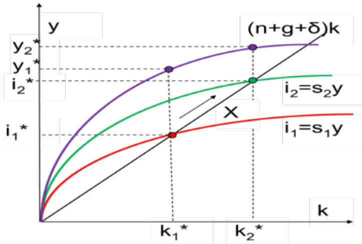


Рис. 6.6. Модель экономического роста по Солоу.
Рост нормы сбережения (s)

Это приведет в краткосрочном периоде к ускорению экономического роста до новой точки равновесия E_2.

Если начальное значение k_1 ниже k^*, то $sf(k) > dk$.

Если $k_2 > k^*$ – инвестиции меньше, чем амортизация. При отклонении системы от траектории равновесного развития экономика под воздействием эндогенных механизмов вернется на равновесную траекторию.

Увеличение нормы накопления с sy_1 до sy_2 сдвигает кривую инвестиций вверх. Теперь в точке прежнего устойчивого состояния инвестиции превышают выбытие. Экономика будет стремиться к достижению нового устойчивого состояния с большей капиталовооруженностью и производительностью труда (рис. 6.7).

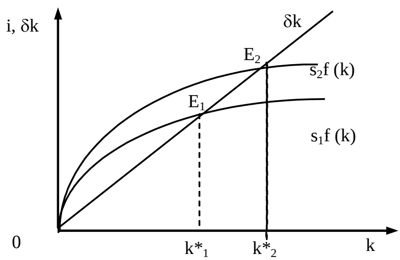


Рис. 6.7. Модель экономического роста по Солоу.
Рост нормы накопления

Рост населения сдвинет норму амортизации вверх, что приведет к снижению капиталовооруженности (рис. 6.8).

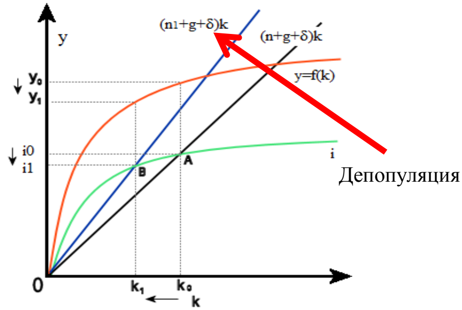


Рис. 6.8. Модель экономического роста по Солоу.
Рост населения (или НТП, или нормы амортизации)

Из изложенного можно сделать следующие выводы:

♦ рост нормы сбережений в краткосрочном периоде приводит к ускорению темпа роста национального дохода (от $k4^*$ до $k2^*$);

♦ в долгосрочном периоде устанавливается новое долгосрочное состояние равновесия, при этом уровень капиталовооруженности и производительности труда в расчете на одного работника увеличивается.

Рост населения страны увеличивается постоянным темпом. Благодаря гибкости цен на рынке факторов производства постоянно поддерживается полная занятость, т. е. численность занятых растет тем же темпом, что и численность населения в стране.

В этом случае запасы капитала могут изменяться, так как:

♦ инвестиции приводят к росту запасов капитала;

♦ часть капитала амортизируется, что приводит к уменьшению запасов капитала;

♦ часть капитала идет на вновь вовлекаемых работников.

В качестве главного условия экономического роста в модели Солоу выбран технический прогресс, который рассматривается как главное фактородобавляющее средство обеспечения благосостояния.

Условия экономического роста и критерии его оптимальности.

1. При устойчивом равновесном состоянии экономики темп экономического роста определяется темпом роста качества трудовых ресурсов.

2. Технологические условия изменения модели приводят к увеличению темпов экономического роста.

3. Уровень сбережений оказывает влияние на темпы роста в коротком периоде, а в долгосрочном периоде этого влияния может не быть.

4. Критерием оптимальности темпов экономического роста является максимизация среднедушевого потребления (золотое правило накопления).

Экономический рост может быть эффективным в том случае, если он приводит к максимальному из возможных уровней потребления.

Рассматривая Республику Беларусь в рамках модели Солоу, отметим, что с темпом экономического роста за последние 20 лет произошли необычные метаморфозы. В начале 2000-х гг. форсированное накопление капитала обеспечило стране транзитивный период ускоренного роста (около 8 % в год). Но позднее оно же, перерастая в инвестиционный фундаментализм, стало приводить к торможению роста, усиливая дефицит общефакторной производительности (ОФП). Дефицит ОФП, в свою очередь, обусловил финансовую нецелесообразность части инвестиций и вынудил существенно остудить инвестиционную активность. В результате потенциал роста значительно ослаб. В настоящее время по разным методологиям он находится в диапазоне 0–3,5 %, тогда как для Беларуси адекватными целями развития является рост 5–7 % в год. Для повышения темпа экономического роста и обеспечения его устойчивости стране необходимо изменить стратегию роста. Для этого целесообразно отказаться от целенаправленного и форсированного накопления капитала, а ключевым каналом роста должна стать эффективность – общая производительность факторов производства. Приоритетными направлениями для обеспечения повышения эффективности работы экономики видятся повышение качества макроэкономической среды, финансового посредничества, высшего образования, а также институциональный прогресс в области конкурентной среды и качества управления.

Золотое правило. Если экономика находится на уровне ниже уровня золотого правила, то необходимый для перехода к золотому правилу рост нормы сбережений на первоначальном этапе приводит к еще большему падению потребления, однако в будущем потребление будет гораздо больше. Отношение к такому развитию событий зависит от предпочтений текущего или будущего потребления.

Модель Солоу концентрирует внимание на накоплении капитала, хорошо согласуется с данными, но оказывается неспособной объяснить экономический рост и различия в доходах между странами.

Основной результат модели Солоу: накоплением капитала нельзя объяснить ни экономического роста, ни различий в доходах между странами.

Единственный фактор в модели Солоу, которым удается объяснить как рост, так и различия в доходах, – это технологии (их уровень и темп роста – технический прогресс).

Но модель его не объясняет, а лишь предполагает в качестве экзогенного. Значит, модель не объясняет рост, а лишь допускает его существование. Поэтому модель Солоу – это модель экзогенного роста.

Выводы:

1. Изменение сущности традиционного понимания экономического роста.

2. Взамен физического капитала постоянной составляющей становится социальный фактор.

3. Развитие уже понимается как накопление человеческого капитала в наиболее эффективной форме.

4. Каждому государству необходимо активно развивать и использовать интеллектуальные знания и способности.

5. Капитал и земля становятся пассивными факторами, а люди, обладающие общими и специальными знаниями, – активными факторами экономического роста.

6. Неоклассическая модель экономического роста имеет узкое практическое применение, так как в ней в качестве главного регулирующего и организующего механизма предлагается рынок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галочкин, В. Т. Эконометрика : учебник и практикум для вузов / В. Т. Галочкин. – Москва : Юрайт, 2023. – 293 с.

2. Дубина, И. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для вузов / И. Н. Дубина. – Москва : Юрайт, 2022. – 349 с.

3. Каштаева, С. В. Математическая экономика : учеб. пособие / С. В. Каштаева. – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2020. – 96 с.

4. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. – Москва : Юрайт, 2023. – 280 с.

5. Леньков, И. И. Моделирование управленческих решений : практикум / И. И. Леньков. – Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2020. – 110 с.

6. Моделирование систем и процессов : учебник для вузов / В. Н. Волкова [и др.] ; под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. – Москва : Юрайт, 2023. – 450 с.

7. Токарев, В. В. Методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. В. Токарев. – Москва : Юрайт, 2023. – 440 с.

8. Филатов, А. Ю. Математическая экономика. Практикум : учеб. пособие для вузов / А. Ю. Филатов. – Москва : Юрайт, 2023. – 169 с.

9. Эконометрика : учебник для вузов / И. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. – Москва : Юрайт, 2023. – 449 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Карачевская Елена Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Курс лекций

Редактор *Н. А. Матасёва*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *Е. В. Ширалиева*

Подписано в печать 15.03.2024. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,05.
Тираж 40 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.