

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Е. В. Равков, Г. И. Витко, М. Н. Авраменко

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
в сфере высшего образования Республики Беларусь
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений образования,
обеспечивающих получение общего высшего образования
по специальности 6-05-0811-01 Производство продукции
растительного происхождения*

Горки
Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия
2025

УДК 311.21(075.8)
ББК 60.6
Р13

*Рекомендовано методической комиссией
агротехнологического факультета 23.04.2024 (протокол № 8)
и Научно-методическим советом
Белорусской государственной сельскохозяйственной академии
24.04.2024 (протокол № 8)*

Авторы:

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *Е. В. Равков*;
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *Г. И. Витко*;
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *М. Н. Авраменко*

Рецензенты:

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *Е. В. Стрелкова*;
заведующий отделом патентной экспертизы
ГСХУ «Горецкая сортоиспытательная станция» *М. Н. Азаренко*

Равков, Е. В.

Р13 Основы научных исследований. Статистические методы обработки данных : учебно-методическое пособие / Е. В. Равков, Г. И. Витко, М. Н. Авраменко. – Горки : Белорус. гос. с.-х. акад., 2025. – 68 с.

ISBN 978-985-882-680-2.

Изложены основные теоретические положения научных исследований и алгоритм обработки данных методами вариационного, корреляционно-регрессионного и дисперсионного анализа. Содержится материал, необходимый для выполнения индивидуальных заданий на лабораторных занятиях, приводятся формы записи расчетов, обработки и анализа полученных данных.

Для студентов учреждений образования, обеспечивающих получение общего высшего образования по специальности 6-05-0811-01 Производство продукции растительного происхождения.

**УДК 311.21(075.8)
ББК 60.6**

ISBN 978-985-882-680-2

© Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия, 2025

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное совершенствование методов эксперимента и измерительной техники в биологической науке и сельском хозяйстве привело к тому, что агрономическая наука вышла из разряда наук описательных и больше приближается к точным наукам. Однако в силу большой изменчивости объектов в этих областях знания невозможно проводить даже самые простые эксперименты без использования математических методов обработки опытных данных.

Математическая статистика позволяет экспериментатору в четкой и сжатой форме излагать результаты своих исследований, предостерегая его от недооценки или, что обычно бывает чаще, переоценки полученных результатов, помогая глубже осмыслить и правильно интерпретировать данные в процессе анализа результатов опыта.

Эксперимент, результаты которого не подвергались математической обработке, нельзя считать законченным, более того, только пользуясь методами математической статистики, можно правильно наметить план предстоящего эксперимента, особенно в тех случаях, когда необходимо обеспечить заданную точность результатов.

В процессе изучения дисциплины необходимо ознакомиться с основными методами статистического, корреляционно-регрессионного и дисперсионного анализов и статистическими методами проверки гипотез.

1. ВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Необходимость вычисления статистических характеристик в агрономических исследованиях связана с постоянной изменчивостью признаков и свойств изучаемых растений и условий их выращивания. Исследования, как правило, ведутся выборочным методом, который дает приблизительные параметры изучаемых величин. Статистические методы позволяют по выборочным данным определить границы предельных значений интересующих исследователя показателей.

Распределение результатов измерений, полученных при изучении выборки, подчиняется определенным статистическим закономерностям.

Наиболее распространенным среди них является закон нормального распределения, на основании которого может быть определено положение любой случайной изменчивости.

Характер изменчивости индивидуальных значений в выборочной совокупности также подчиняется закону нормального распределения. Вероятность появления изменчивой величины X в данной области может быть рассчитана по формуле

$$X = \bar{x} \pm tS,$$

где $\bar{x}$ – средняя арифметическая;

t – критерий распределения;

S – среднее квадратическое отклонение.

Фактически анализ любой выборочной совокупности начинается с определения двух указанных в формуле основных характеристик ($\bar{x}$ и s).

Рассмотрим вычисление основных статистических характеристик на следующем примере. Пусть требуется определить среднее число коробочек на растениях льна-долгунца изучаемого сорта, среднюю длину технической части стебля и поражение стеблей ржавчиной.

Для этого на участке размножения сорта, проходя по диагонали, в 25 местах случайно, без выбора, берем по одному растению. Каждое растение анализируем по трем признакам. Данные анализа записываем в сводку наблюдений (табл. 1).

Исходя из сводки наблюдений, можно заметить, что все величины варьируются, причем характер варьирования по признакам разный. Объекты счета (коробочки) имеют естественные границы и варьируются дискретно, в то время как объекты измерений (длина) таких границ не имеют и варьируются непрерывно в зависимости от точности

измерения. Объекты, отличающиеся присутствием или отсутствием признака (болезни), варьируются качественно. В зависимости от характера варьирования статистическая обработка данных ведется различными способами.

Таблица 1. Сводка наблюдений льна-долгунца

Номер растения	Признаки и свойства		
	Число коробочек, шт.	Длина стебля, см	Болезни (+, –)
1	2	78	+
2	3	92	–
3	4	96	–
4	1	83	+
5	4	95	–
6	4	98	–
7	2	88	+
8	3	96	–
9	4	95	–
10	3	92	–
11	5	105	–
12	2	86	+
13	5	103	–
14	3	90	+
15	5	102	–
16	3	89	–
17	4	100	–
18	3	88	–
19	1	83	+
20	3	91	–
21	3	94	–
22	2	90	+
23	3	91	–
24	1	75	+
25	2	82	+

При дискретном варьировании простейшее упорядочение данных можно провести ранжированием величин в порядке возрастания или убывания:

1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5.

Из ранжированного ряда видно, что различные варианты в выборке встречаются неодинаково часто. Эту информацию можно свернуть и показать в виде таблицы, где с одной стороны показаны варьирующие величины X в порядке возрастания или убывания через определен-

ный интервал, а с другой стороны – их частота f . Такая таблица чисел называется вариационным рядом.

X	1	2	3	4	5
f	3	5	9	5	3

При непрерывной изменчивости построить таким образом вариационный ряд невозможно. Непрерывный ряд чисел нужно искусственно разделить на группы или классы через определенный интервал, а затем подсчитать частоты. Работу выполняют в такой последовательности:

1) определяют объем выборки:

$$n = 25;$$

2) устанавливают число групп или классов:

$$k \approx \sqrt{n} = 5;$$

3) находят максимальное значение в выборке:

$$X_{\max} = 105;$$

4) находят минимальное значение в выборке:

$$X_{\min} = 75;$$

5) вычисляют размах варьирования:

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 105 - 75 = 30 \text{ см};$$

6) устанавливают межклассовый интервал:

$$i = \frac{R}{k} = \frac{30}{5} = 6 \text{ см};$$

7) составляют вариационный ряд:

Классы X	Частоты f	
75–80	///	2
81–86	////	4
87–92	////////	9
93–98	////	6
99–105	////	4

За начало первого класса X_n обычно берут $X_{\min} = 75$. Начало второго и последующих классов берут через интервал $i = 6$. Концы классов запи-

сывают на условную единицу меньше, чем начало следующего класса. Заканчивают последний класс $X_{\max} = 105$.

Частоты по классам разносят в виде точек или штрихов, отмечая условным обозначением взятые варианты. После частоты суммируют и проставляют цифрами. Общая сумма частот должна быть равна объему выборки ($\sum f = n = 25$).

Вариационный ряд качественной изменчивости состоит из двух показателей: числа признаков X и частоты f . В нашем примере растения подразделяются на здоровые (16 шт.) и больные (9 шт.).

X	Здоровые	Больные	Всего
f	16	9	25

Кроме цифровых показателей характер распределения частот в вариационных рядах может быть выражен в виде графиков, гистограмм, диаграмм и формул. При дискретном варьировании характер распределения лучше всего представлять в виде графика вариационной кривой (рис. 1).

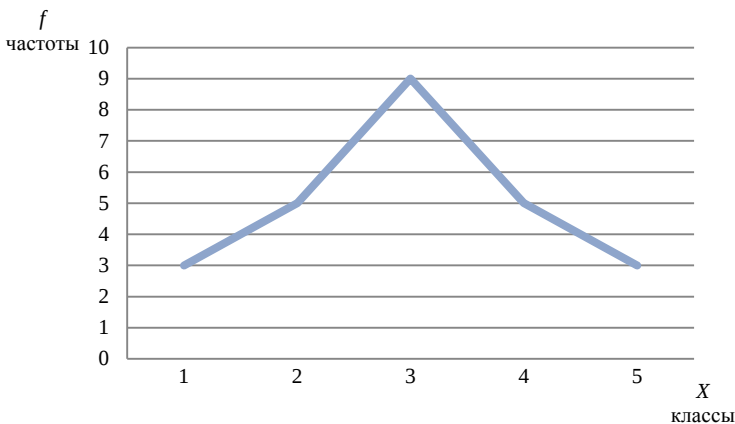


Рис. 1. Пример построения графика при дискретном варьировании

При непрерывной изменчивости характер распределения удобнее представлять в виде столбиков гистограммы (рис. 2). Распределение частот при качественной изменчивости обычно показывают диаграммой в виде сектора круга (рис. 3).

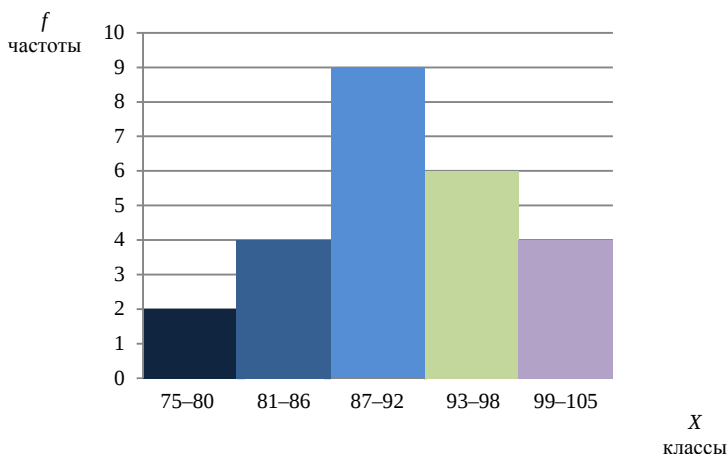


Рис. 2. Пример построения графика при непрерывной изменчивости

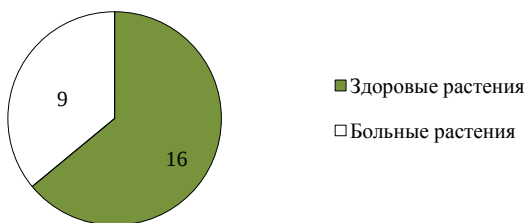


Рис. 3. Пример построения графика при качественной изменчивости

Вычисление статистических характеристик вариационных рядов производят по соответствующим формулам прямым или косвенным методом. К статистическим характеристикам количественной изменчивости относятся: *средняя арифметическая $\bar{x}$, дисперсия S^2 , среднее квадратическое отклонение S , коэффициент вариации V , ошибка средней арифметической $S_{\bar{x}}$ и относительная ошибка $S_{\bar{x}\%}$.*

Выборочная средняя арифметическая является абстрактной математически вычисленной величиной, характеризующей всю совокупность в целом. В простейшем виде она находится путем сложения всех изменчивых величин выборки и деления на их число:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X}{n}.$$

Как обобщающая характеристика средняя арифметическая обладает рядом свойств:

1. С увеличением или уменьшением индивидуальных значений выборки на или во сколько-то раз средняя величина изменяется на или в такое же число раз.

2. На числовой оси средняя арифметическая является центром колебания индивидуальных значений выборочной совокупности.

3. Сумма всех отклонений от их средней арифметической всегда равна нулю:

$$\sum(X - \bar{x}) = 0.$$

4. Сумма квадратов отклонений от средней всегда меньше суммы отклонений индивидуальных значений от любого произвольного числа A , не равного средней:

$$\sum(X - \bar{x})^2 < \sum(X - A)^2.$$

5. Средняя арифметическая не показывает индивидуальных колебаний изучаемых признаков. Поэтому для всесторонней характеристики совокупность нуждается в дополнительных показателях. К таким показателям относятся дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Дисперсия является мерой рассеяния индивидуальных значений совокупности около центра, которым является средняя арифметическая.

Дисперсия обладает рядом присущих ей свойств:

1. Дисперсия показывает возможную площадь рассеяния индивидуальных признаков от среднего значения.

2. Будучи показателем четной степени, она позволяет избавиться от отрицательных значений замеров отклонений от средней, приводящих результаты сложения к нулю.

3. Положительные значения замеров отклонений дают возможность найти средний показатель отклонения по совокупности в целом:

$$S^2 = \frac{\sum(X - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

4. Результаты учетов даются в квадратной степени, что не всегда является удобным для использования.

Для перевода меры рассеяния на площади к линейным мерам используют характеристику, которая называется средним квадратиче-

ским отклонением и находится путем извлечения квадратного корня из дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Если выборочные данные сведены в вариационный ряд, то вычисление средней арифметической и дисперсии проводят в специальных таблицах с учетом групповых значений и их частот f :

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{n};$$

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Результаты расчетов по первой выборке (число коробочек льна на растении, шт.) приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Вычисление статистических характеристик прямым способом**

X	f	fX	$X - \bar{x}$	$f(X - \bar{x})$	$f(X - \bar{x})^2$
1	3	3	-2	-6	12
2	5	10	-1	-5	5
3	9	27	0	0	0
4	5	20	1	5	5
5	3	15	2	6	12
$\sum f = n = 25$		$\sum fX = 75$	$\sum (X - \bar{x}) = 0$	$\sum f(X - \bar{x}) = 0$	$\sum (X - \bar{x})^2 = 34$

Средняя арифметическая составляет 3 коробочки:

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{75}{25} = 3.$$

Дисперсия равна 1,4 коробочки²:

$$S^2 = \frac{\sum f(X - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{34}{24} \approx 1,4.$$

Среднее квадратическое отклонение равно 1,2 коробочки:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1,4} \approx 1,2.$$

Статистические характеристики вариационных рядов непрерывной изменчивости удобнее вычислять косвенным способом от произвольного числа A , опираясь на 4-е свойство средней арифметической (табл. 3).

Таблица 3. **Вычисление статистических характеристик косвенным способом (от $A = 90$)**

Классы X	Частоты f	Середина класса X_1	$\alpha = \frac{(X_1 - A)}{i}$	$f\alpha$	$f\alpha^2$
75–80	2	78	-2	-4	8
81–86	4	84	-1	-4	4
87–92	9	$A = 90$	0	0	0
93–98	6	96	1	6	6
99–105	4	102	2	8	16
Суммы	$\Sigma f = 25$	–	–	$\Sigma f\alpha = 6$	$\Sigma f\alpha^2 = 34$

Для этого многочленные показатели классов X преобразуют в средние однозначные классы:

$$X_1 = \frac{X_{\text{нач}} + X_{\text{кон}}}{2}.$$

В качестве центра колебания берут не $\bar{x}$, а произвольное число A , близкое к середине ряда, или модальный класс. Отклонения $X - \bar{x}$ заменяют отклонением α :

$$\alpha = \frac{(X_1 - A)}{i};$$

$$\alpha_1 = (78 - 90) : 6 = -2;$$

$$\alpha_2 = (84 - 90) : 6 = -1 \text{ и т. д.}$$

Среднюю арифметическую вычисляют по формуле

$$\bar{x} = A + i \frac{\Sigma f\alpha}{n}.$$

$$\bar{x} = 90 + 6 \cdot \frac{6}{25} = 90 + 1,44 = 91,44 \text{ см.}$$

Соответственно дисперсию находят по формуле

$$S^2 = i^2 \frac{\Sigma f\alpha^2 - (\Sigma f\alpha)^2 : n}{n - 1}.$$

$$S^2 = 36 \cdot \frac{34 - 6^2 : 25}{25 - 1} = 36 \cdot \frac{34 - 1,44}{24} = 36 \cdot 1,36 = 48,96 \text{ см}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение определяют по формуле

$$S = \sqrt{S^2}.$$

$$S = \sqrt{48,96} \approx 7,2 \text{ см.}$$

Среднее квадратическое отклонение обладает следующими свойствами:

1. Если генеральная совокупность, из которой взята выборка, подчиняется закону нормального распределения, то и выборочное среднее квадратическое отклонение также подчиняется этому закону.

2. В среднем 68 % индивидуальных значений выборки находятся в пределах $\bar{x} \pm 1S$, 95 % – в пределах $\bar{x} \pm 2S$ и 99 % – в пределах $\bar{x} \pm 3S$. Риск (значимость) выйти за эти пределы составляет соответственно 32; 5 и 1 %.

3. В селекционно-семеноводческой практике наиболее эффективными следует считать отборы растений для производства элитных семян при сортообновлениях в пределах от $\bar{x} \pm 2S$ до $\bar{x} \pm 3S$ как выходящие за пределы средних показателей, а для создания новых сортов методом отбора следует выделять растения, выходящие за пределы $\bar{x} \pm 3S$ как выходящие за пределы данной совокупности.

Среднее квадратическое отклонение выражается в тех же именованных величинах, что и среднее арифметическое. Поэтому сравнить между собой две выборки при различных величинах средних и разных наименований становится невозможным. В нашем примере признак числа коробочек на растении ($3 \pm 1,2$) коробочки нельзя сравнить с длиной технической части стеблей ($91,4 \pm 7,2$) см. Такие сравнения можно сделать в процентах.

Стандартное отклонение, выраженное в процентах к средней арифметической данной совокупности, называется коэффициентом вариации (V). Коэффициент вариации является относительным показателем изменчивости:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} 100.$$

Изменчивость принято считать слабой, если коэффициент вариации не превышает 10 %, средней – если коэффициент выше 10 %, но меньше 20 %, и сильной – если коэффициент вариации больше 20 %. В нашем примере коэффициент изменчивости числа коробочек у растений льна-долгунца

$$V_k = \frac{1,2 \text{ коробочки}}{3 \text{ коробочки}} \cdot 100 \% = 40 \%,$$

а технической части стебля

$$V_{\text{ст}} = \frac{7,2 \text{ см}}{91,4 \text{ см}} \cdot 100 \% = 7,9 \%$$

Следовательно, у льна-долгунца данного сорта число коробочек на растениях варьируется сильно, а длина технической части стебля изменяется слабо.

Характеристика, обратная коэффициенту вариации, называется коэффициентом выравненности B и определяется по равенству

$$B = 100 - V.$$

Для числа коробочек она равна 60 %:

$$100 - 40 = 60,$$

а для технической части стебля – 92,1 %:

$$100 - 7,9 = 92,1.$$

Вычисление основных статистических характеристик выборочным методом всегда связано с неизбежными ошибками. Ошибка выборочной средней является мерой отклонения выборочной средней от средней генеральной совокупности. Она прямо пропорциональна стандартному отклонению и обратно пропорциональна квадратному корню из объема выборки, т. е.

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Ошибка средней арифметической обладает рядом свойств, которые могут быть использованы в практической работе.

1. Ошибка средней арифметической подчиняется закону нормального распределения. Это свойство дает возможность определить параметры генеральной средней μ с заданной надежностью:

$$\mu = \bar{x} \pm tS_{\bar{x}}.$$

Вероятность нахождения генеральной средней в пределах $\bar{x} \pm 1S$ составляет 68 %, в пределах $\bar{x} \pm 2S$ – соответственно 95 % и в пределах $\bar{x} \pm 3S$ – 99 % и более.

2. Ошибка средней арифметической позволяет определить критерии существенности разности между выборочной средней и генеральной средней. Из формулы $\mu = \bar{x} \pm tS_{\bar{x}}$ в общем виде

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}.$$

3. Ошибку средней арифметической можно регулировать, изменяя объем выборки. Для каждой величины ошибки объем выборки определяют по соотношению

$$n = \left(\frac{S}{S_{\bar{x}}} \right)^2.$$

4. Ошибка средней арифметической выражается в тех же единицах, что и сама средняя. Поэтому сравнить между собой ошибочность определения средних разных признаков одной и той же совокупности бывает затруднительно или даже невозможно. Такое сравнение можно провести, если ошибку выразить в процентах. Ошибка выборки, выраженная в процентах от соответствующей средней, называется относительной ошибкой выборочной средней:

$$S_{\bar{x}}\% = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100.$$

Относительная ошибка средней прямо пропорциональна абсолютной ошибке и обратно пропорциональна средней арифметической. В нашем примере относительная ошибка по числу коробочек на растениях льна-долгунца составляет 8 %:

$$S_{\bar{x}}\% = \frac{0,24}{3} \cdot 100 = 8,$$

а по длине технической части стебля – 1,5 %:

$$S_{\bar{x}}\% = \frac{1,4}{91} \cdot 100 = 1,5.$$

Отсюда можно сделать вывод, что исследование по признаку числа коробочек проведено с большей ошибочностью, чем по признаку технической длины стебля.

Задание 1.

В соответствии с выданным заданием сгруппируйте данные вариационного ряда, определите его статистические показатели, постройте кривую распределения и сделайте выводы по выполненному анализу (табл. 4–10).

Таблица 4. **Высота растений межсортовых гибридов озимой пшеницы, см**

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	100	103	101	88	102	112	93	102	118	105	99	102	106
2	112	90	103	92	97	104	100	96	111	107	102	96	101
3	94	102	105	90	103	106	103	110	102	98	86	97	105
4	109	102	104	100	101	101	103	96	112	109	99	101	105
5	101	103	109	88	103	108	102	96	101	104	106	103	104
6	108	106	102	92	103	104	100	109	109	102	105	98	105
7	107	109	110	76	112	110	108	102	107	103	105	96	108
8	99	95	105	80	106	100	105	94	106	108	111	96	106
9	96	104	104	98	98	99	113	92	108	106	106	110	99
10	94	94	103	100	102	110	106	95	103	95	105	108	99
11	115	97	95	83	107	100	106	95	104	105	101	108	104
12	99	106	102	93	108	101	111	109	112	105	97	102	104
13	85	99	104	89	101	104	115	107	104	108	92	108	101
14	102	105	87	102	102	101	108	97	107	105	100	111	97
15	106	108	104	90	103	103	108	96	101	107	95	104	103
16	96	107	103	91	102	112	99	101	95	104	103	118	102
17	91	105	103	98	103	116	111	92	100	117	104	110	106
18	92	102	100	96	102	103	108	100	90	110	111	99	100
19	96	100	104	90	101	103	104	98	102	108	108	112	97
20	97	106	102	96	98	94	91	90	105	102	108	114	96
21	106	97	102	86	110	103	107	104	107	106	99	96	112
22	102	101	105	95	110	111	108	102	102	106	94	107	102
23	94	103	104	90	98	93	100	109	96	109	93	103	101
24	98	100	112	105	108	94	105	112	106	108	101	109	94
25	89	98	108	97	113	110	100	116	102	108	103	105	96

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	101	110	92	100	92	90	101	94	104	93	102	104	100
2	109	98	93	92	100	97	95	98	97	107	102	98	99
3	105	112	95	99	112	104	105	96	99	95	101	106	100
4	102	106	96	101	113	92	100	107	102	108	106	98	104
5	97	101	99	94	104	92	103	106	94	104	106	105	98
6	96	102	86	97	96	86	101	163	98	99	100	109	100
7	106	108	85	91	101	92	101	102	98	108	99	105	99
8	104	118	90	97	104	84	96	103	105	92	100	102	102
9	97	112	94	103	98	82	96	100	102	94	95	105	92
10	96	108	87	105	103	90	103	102	105	96	101	107	92
11	97	101	94	101	111	89	93	100	110	103	105	100	100
12	107	113	83	101	95	87	94	97	97	108	104	99	104
13	103	111	93	96	98	90	94	97	104	108	98	110	103
14	99	120	92	96	110	90	102	98	105	98	100	103	105
15	100	116	91	107	110	94	98	100	105	106	98	88	95
16	109	96	94	98	105	86	100	106	108	96	101	100	88
17	96	106	96	94	101	91	102	105	104	102	100	108	94
18	99	107	90	107	106	86	104	106	97	92	98	107	103
19	105	108	92	101	102	91	103	103	96	96	102	100	102
20	104	113	96	100	99	94	101	97	92	93	99	103	105
21	91	101	81	101	106	88	112	104	98	101	104	102	102
22	100	108	93	100	97	90	104	105	103	93	104	109	100
23	101	100	87	92	100	94	101	111	105	97	103	105	98
24	100	110	91	100	109	96	105	107	100	93	98	108	98
25	92	109	91	95	104	86	104	103	98	104	100	94	97

Таблица 5. Длина колосьев межсортовых гибридов озимой пшеницы, см

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10,0	11,0	10,4	9,3	12,3	12,1	10,1	11,4	12,0	12,2	12,0	11,8	10,2
2	10,4	10,0	10,3	9,8	11,0	13,0	10,6	10,4	10,5	11,1	11,3	10,7	9,4
3	7,9	10,8	9,9	9,8	10,0	11,0	10,2	10,0	10,8	10,8	10,5	9,7	10,3
4	10,3	10,2	10,6	9,6	11,8	10,0	11,2	12,6	12,3	10,4	11,2	10,1	10,8
5	11,6	9,4	11,2	9,6	11,3	11,7	10,3	13,0	10,8	9,4	12,2	10,5	10,0
6	10,1	10,5	10,6	9,0	11,9	11,4	9,5	11,0	11,3	10,8	10,1	11,8	10,1
7	11,3	11,5	10,9	9,0	11,9	10,8	10,8	11,2	11,6	10,6	10,4	9,5	10,8
8	9,5	8,0	10,2	8,6	11,0	10,1	12,0	9,7	11,0	10,2	10,3	11,2	10,8
9	9,4	9,0	10,7	10,6	11,2	10,8	10,5	12,3	11,2	12,7	11,3	10,4	10,3
10	9,0	10,4	10,5	10,3	10,4	12,5	10,9	11,2	10,0	10,4	10,2	11,6	10,5
11	10,1	9,1	10,8	8,8	10,8	9,7	10,5	10,6	11,7	12,0	10,3	10,0	10,2
12	9,9	10,1	10,3	10,6	11,3	10,5	9,8	12,2	10,5	11,1	11,1	9,5	11,2
13	10,3	12,0	10,4	9,6	9,7	11,2	10,8	11,0	11,0	12,2	11,4	9,9	11,8
14	10,6	9,5	11,5	11,0	9,4	12,4	10,5	11,0	10,3	11,6	10,8	10,5	9,7
15	9,5	10,8	10,8	10,4	11,0	11,7	10,7	10,0	9,4	11,3	9,3	11,0	10,5
16	8,5	9,5	10,8	10,4	10,7	11,1	11,5	10,9	10,7	10,8	10,3	10,4	10,8
17	9,5	9,7	10,8	11,5	9,1	11,5	10,5	10,6	7,8	11,8	10,6	11,2	10,0
18	9,5	9,8	10,1	10,5	10,8	11,1	11,8	11,0	10,8	10,5	11,3	9,8	10,3
19	9,0	9,7	11,0	9,7	12,3	10,5	10,8	10,1	9,6	12,6	10,9	11,2	11,2
20	9,7	9,8	10,3	10,5	10,5	10,4	8,8	10,7	11,2	11,0	10,8	11,9	11,3
21	11,5	10,6	10,4	8,5	10,6	11,2	11,1	11,5	11,8	11,5	10,8	10,7	11,9
22	10,2	10,5	11,0	10,0	11,5	11,7	10,5	10,7	10,3	11,3	10,0	10,4	10,9
23	9,4	9,8	11,3	10,3	11,1	11,4	10,0	11,1	12,3	12,0	9,4	10,5	10,4
24	10,5	9,6	11,2	10,6	9,8	11,2	11,2	12,4	11,7	11,0	10,8	9,9	9,5
25	9,8	10,5	10,5	10,3	11,2	12,0	12,1	11,0	10,1	10,5	11,2	10,1	11,4

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	11,8	11,8	11,3	9,9	10,1	10,0	10,8	9,4	10,5	9,9	9,8	11,2	10,2
2	12,5	10,0	11,8	8,6	11,3	11,2	9,9	10,4	10,0	12,1	10,2	10,0	10,5
3	11,0	12,6	10,9	12,5	10,8	11,2	10,6	10,2	9,8	11,2	9,1	10,6	9,3
4	10,6	10,3	11,8	12,1	10,7	9,9	10,1	10,8	10,3	11,6	10,8	10,4	11,2
5	11,2	12,1	11,3	10,5	9,6	10,6	10,4	11,8	9,4	10,1	10,4	10,3	11,0
6	11,1	11,4	10,1	10,7	11,7	10,6	10,6	10,4	10,6	10,8	10,7	10,0	10,1
7	11,4	10,9	10,4	11,1	10,7	9,7	9,5	10,8	9,1	11,1	11,6	10,6	11,1
8	10,6	10,8	10,6	10,5	10,4	10,1	9,8	10,5	10,7	11,2	11,6	10,6	9,9
9	12,3	10,7	11,3	12,0	10,7	9,3	10,0	10,5	10,4	10,7	10,6	11,3	10,2
10	10,4	11,2	11,0	12,0	10,4	10,6	10,7	10,5	9,8	8,5	9,9	10,6	10,1
11	10,5	9,8	10,7	12,5	10,8	9,6	9,8	12,2	10,5	10,9	10,6	10,0	10,3
12	10,8	11,8	10,4	9,3	10,0	9,9	10,8	10,9	10,9	11,7	10,8	9,7	10,3
13	12,0	11,4	11,3	11,4	10,7	10,7	10,2	10,5	10,4	10,5	10,8	10,3	10,9
14	10,6	10,3	10,3	12,7	11,0	10,5	9,8	10,2	11,4	9,9	11,2	10,5	10,2
15	11,7	11,2	9,8	12,7	11,1	12,1	10,2	9,3	11,4	10,2	10,2	9,7	10,4
16	11,7	10,7	11,7	10,2	10,4	10,9	10,3	10,3	10,4	10,5	9,7	10,1	9,5
17	12,2	11,8	10,2	11,7	10,3	9,6	9,6	10,6	10,9	10,5	11,0	11,0	11,2
18	11,8	10,2	10,8	11,2	11,3	9,6	11,5	11,0	10,0	9,2	11,2	10,5	10,2
19	12,3	10,7	9,6	11,4	10,6	10,1	9,7	10,6	11,1	11,3	10,0	10,4	10,2
20	13,1	11,5	11,1	10,8	9,9	10,6	10,5	9,6	10,0	9,9	11,2	9,0	10,1
21	10,2	11,7	10,2	10,6	9,7	10,8	9,8	9,6	9,9	11,1	11,3	10,1	9,6
22	10,8	11,2	11,2	13,0	10,4	9,4	9,7	10,6	11,0	10,4	11,2	11,3	11,3
23	11,8	10,5	10,7	10,3	10,2	9,6	9,6	11,4	10,4	10,5	10,2	10,5	10,2
24	11,2	10,5	10,3	12,1	10,4	10,6	11,0	10,5	10,8	8,8	11,1	10,0	10,2
25	10,4	10,8	12,3	10,8	9,7	8,8	10,2	11,2	10,5	11,9	9,9	9,8	9,7

Таблица 6. Число колосков на главном колосе гибридов озимой пшеницы, шт.

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	17	20	19	18	22	22	17	20	22	20	20	20	19
2	17	16	19	18	20	23	19	20	20	19	20	19	19
3	16	18	17	19	19	20	19	18	22	20	20	19	18
4	18	20	18	18	20	18	19	20	21	19	21	17	20
5	21	17	18	17	21	20	19	20	20	16	19	19	18
6	19	19	19	17	20	20	20	18	21	22	17	20	20
7	19	19	19	17	22	19	18	20	21	19	18	16	19
8	17	15	19	17	20	21	21	18	21	22	17	20	20
9	17	17	19	20	21	21	18	19	21	22	19	19	19
10	19	19	20	19	17	22	20	22	19	19	20	20	19
11	19	17	19	18	19	20	20	20	20	20	20	19	21
12	19	17	19	17	19	16	20	19	21	21	19	20	19
13	19	19	19	17	18	21	20	21	21	22	19	19	22
14	18	17	19	20	18	21	20	19	20	21	20	19	18
15	18	18	20	17	19	21	21	17	18	22	19	21	19
16	17	19	19	17	20	20	19	19	19	19	19	20	20
17	19	18	18	20	17	20	20	19	20	22	21	21	18
18	17	19	18	18	19	22	21	19	19	22	21	19	19
19	17	19	19	18	20	18	20	18	18	21	20	20	20
20	18	18	20	20	18	19	17	18	20	21	20	21	19
21	19	20	18	16	20	20	21	20	22	22	19	20	19
22	16	20	19	18	19	20	20	19	20	20	19	21	18
23	17	18	20	19	20	21	18	20	20	22	20	21	19
24	19	19	20	20	19	20	21	21	20	22	19	19	17
25	18	19	20	18	21	19	22	20	19	21	20	21	19

Окончание табл. 6

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	21	20	19	16	21	19	19	20	19	18	19	20	18
2	22	19	19	19	20	19	18	19	19	20	18	19	19
3	21	20	19	21	20	18	19	19	20	19	19	19	16
4	20	12	20	21	20	18	20	20	19	19	18	20	20
5	21	20	19	18	19	19	20	20	18	19	18	19	20
6	20	18	17	19	19	19	20	19	20	19	18	18	19
7	21	19	17	20	19	17	18	20	19	19	19	19	20
8	20	18	20	20	19	19	18	19	20	20	20	19	19
9	21	21	20	21	19	18	20	20	20	19	19	19	18
10	20	20	19	19	18	19	19	20	20	17	18	19	18
11	19	20	19	21	19	19	19	19	19	19	19	19	20
12	20	22	18	18	18	18	19	19	20	20	19	19	21
13	21	20	19	21	19	19	18	18	18	21	19	19	20
14	20	21	18	21	19	20	19	19	21	18	18	19	19
15	22	20	19	22	20	20	18	19	20	19	17	18	19
16	21	19	19	19	20	19	17	19	18	20	18	20	18
17	22	21	18	21	19	18	17	20	21	19	18	18	20
18	20	18	18	21	19	18	19	20	19	17	20	18	19
19	20	18	18	22	19	19	17	19	20	19	17	19	18
20	20	20	18	19	19	18	18	18	17	17	18	17	19
21	18	21	17	17	20	19	20	19	19	20	20	17	17
22	21	20	18	20	19	20	18	19	20	19	18	18	21
23	20	20	18	19	20	20	19	20	20	17	18	19	19
24	21	21	19	21	20	19	19	19	20	19	19	18	18
25	20	19	20	20	19	18	18	20	19	20	18	18	19

Таблица 7. Число зерен на главном колосе гибридов озимой пшеницы, шт.

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	35	43	36	42	53	56	31	54	59	49	52	47	43
2	41	37	41	49	36	62	41	49	32	52	50	41	35
3	37	43	35	41	44	40	40	43	45	51	51	43	33
4	36	36	39	40	38	38	48	44	54	54	42	43	37
5	47	36	50	46	45	48	42	58	52	36	49	49	42
6	39	43	40	44	46	46	40	40	59	45	56	43	43
7	59	42	36	48	43	46	42	53	51	62	47	45	42
8	36	37	38	36	39	41	49	34	47	41	43	49	44
9	37	38	42	44	45	38	48	42	55	51	53	45	41
10	35	34	43	50	38	54	35	58	58	43	45	81	39
11	40	26	39	33	41	40	40	52	47	52	32	45	40
12	40	30	48	43	44	36	50	51	44	46	40	37	41
13	37	36	31	41	38	44	45	39	52	59	36	49	44
14	48	40	32	31	37	48	42	51	42	48	41	44	31
15	26	37	42	51	38	43	48	39	42	51	39	41	37
16	35	33	44	51	40	47	45	48	43	42	40	42	38
17	33	38	37	51	29	53	43	43	58	59	52	47	41
18	36	36	36	48	53	63	51	51	48	47	44	39	40
19	39	36	46	18	48	33	41	36	42	57	44	51	45
20	39	42	40	44	34	41	26	49	53	52	48	54	48
21	46	35	40	38	43	52	46	60	54	52	39	47	51
22	43	35	44	43	46	44	40	42	41	44	43	43	45
23	42	35	48	40	52	45	40	43	56	51	40	41	52
24	45	38	48	48	43	55	47	58	52	45	46	42	36
25	38	39	41	38	37	50	47	38	46	54	41	45	48

Окончание табл. 7

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	50	48	54	34	57	44	38	34	53	31	38	47	43
2	60	39	67	34	43	49	38	44	48	43	37	42	41
3	46	47	50	59	47	48	47	43	40	36	34	44	39
4	53	46	61	49	45	37	41	50	55	48	43	41	44
5	49	59	56	41	42	47	40	55	42	37	38	38	43
6	39	46	55	51	54	47	48	47	42	32	42	45	48
7	46	43	48	57	44	43	41	44	31	45	51	32	77
8	40	49	52	44	49	44	43	45	50	29	48	38	52
9	54	35	55	54	40	38	43	56	45	35	38	49	38
10	46	44	43	42	40	49	48	51	40	36	36	40	49
11	50	37	54	51	48	46	38	44	52	48	37	35	51
12	51	45	40	39	49	38	39	46	48	40	46	34	47
13	49	46	49	52	48	48	43	38	50	43	38	40	46
14	39	41	36	53	43	40	44	43	46	32	46	38	51
15	51	38	41	57	47	57	35	33	48	32	35	37	47
16	45	46	54	44	45	44	46	47	41	36	39	37	32
17	55	44	46	51	42	39	50	51	55	39	40	41	45
18	43	36	53	41	45	46	41	37	43	31	38	42	47
19	47	43	41	43	42	47	39	39	58	40	38	36	37
20	49	37	44	47	46	37	53	36	39	35	47	28	41
21	35	42	42	41	47	51	46	50	47	47	43	39	41
22	44	40	63	52	45	37	42	42	48	41	36	52	43
23	46	45	48	34	42	39	47	46	39	29	36	39	40
24	46	45	49	57	43	37	58	55	46	32	38	40	24
25	40	39	58	63	45	42	44	42	37	44	38	41	37

Таблица 8. Число зерен на растении гибридов озимой пшеницы, шт.

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	121	145	120	65	209	209	121	203	234	146	193	126	178
2	266	124	138	165	141	246	178	181	260	211	250	185	134
3	195	118	127	101	132	118	229	121	183	154	169	132	126
4	107	224	139	109	72	107	184	70	345	132	189	164	194
5	183	112	210	88	75	171	74	125	149	96	140	136	156
6	129	249	147	44	178	127	95	114	345	112	143	148	109
7	332	237	153	176	106	136	147	232	149	272	91	160	111
8	108	75	163	74	88	80	454	59	245	221	137	92	181
9	120	137	149	109	142	248	170	92	204	288	200	192	194
10	75	62	113	133	134	258	149	303	151	107	119	220	103
11	63	56	77	82	89	93	85	254	214	266	121	154	177
12	79	105	111	190	101	191	125	155	130	170	130	116	145
13	70	110	128	96	61	131	227	197	120	148	76	106	230
14	348	140	111	85	95	326	91	161	250	104	87	79	132
15	102	187	189	179	131	133	211	99	68	187	97	111	180
16	55	72	114	160	135	163	253	108	228	145	200	163	228
17	92	61	100	129	53	157	123	159	248	396	143	209	208
18	114	85	82	48	148	63	116	357	101	184	105	152	95
19	63	94	146	59	222	121	148	96	86	209	108	197	122
20	66	125	119	79	59	75	51	185	190	221	163	220	193
21	202	110	68	122	112	141	109	290	266	178	163	239	238
22	101	117	229	120	157	194	60	116	162	139	99	196	196
23	167	141	269	66	226	231	49	104	302	264	136	180	346
24	214	75	174	119	142	161	234	214	175	100	176	222	229
25	146	161	111	151	143	188	81	160	172	120	180	117	282

Окончание табл. 8

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	158	242	188	88	233	207	126	111	194	71	181	83	138
2	328	69	241	58	84	198	112	132	86	175	139	63	104
3	330	138	279	225	175	174	126	116	73	99	105	167	107
4	251	84	221	239	127	62	172	193	124	279	207	142	190
5	141	163	215	229	61	114	111	188	232	145	99	113	210
6	122	118	263	233	212	198	138	154	180	82	131	87	94
7	128	111	251	162	112	229	73	107	89	115	117	111	163
8	198	182	239	99	154	283	102	74	168	80	139	77	193
9	272	201	300	223	83	97	749	128	137	99	121	207	98
10	75	176	297	142	70	206	183	194	138	96	77	80	116
11	87	89	214	95	113	176	117	242	227	278	155	73	243
12	219	185	92	116	159	236	86	74	146	179	118	52	244
13	204	144	254	103	95	182	147	124	171	126	137	117	177
14	125	98	103	185	97	118	105	107	181	78	207	63	201
15	144	217	183	290	150	246	117	125	116	90	86	114	111
16	117	81	272	124	114	247	90	138	140	105	95	117	80
17	296	143	170	201	70	149	122	122	273	106	149	113	157
18	211	97	155	273	197	109	144	68	145	104	155	148	146
19	137	185	144	180	198	293	62	211	225	68	115	89	180
20	139	162	161	124	185	175	274	111	164	92	154	70	139
21	71	245	124	138	205	180	73	119	207	191	181	138	93
22	59	228	252	263	196	170	162	150	276	78	132	206	147
23	108	109	134	114	173	122	147	157	125	95	122	85	108
24	150	142	298	230	183	113	173	156	179	101	197	98	99
25	143	103	174	211	99	58	168	192	121	116	135	176	112

Таблица 9. Масса зерна в главном колосе гибридов озимой пшеницы, г

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1,90	1,91	1,72	2,02	3,15	3,25	1,50	2,94	3,19	2,56	2,87	2,58	2,48
2	1,97	1,67	1,91	2,53	1,75	3,40	2,15	2,68	2,60	2,54	2,51	1,96	1,68
3	1,78	1,91	1,70	2,25	2,33	2,15	2,00	2,39	2,18	1,70	2,69	2,90	1,89
4	2,01	1,91	2,00	2,08	1,69	1,55	2,12	2,67	2,51	2,77	2,00	2,50	2,10
5	2,20	1,78	2,58	2,25	2,39	2,60	1,78	3,00	2,51	1,82	2,89	2,56	2,25
6	2,04	2,68	2,12	2,15	2,56	2,36	1,80	2,30	3,30	2,33	2,36	2,80	1,80
7	3,23	2,46	2,21	1,70	2,45	2,22	1,98	2,79	2,50	3,13	1,69	2,39	2,05
8	1,91	1,76	1,71	0,93	1,85	2,71	2,57	1,65	2,26	1,46	2,08	2,55	2,21
9	1,65	1,70	1,98	2,61	2,56	2,02	2,33	2,08	2,80	1,93	2,81	2,22	2,15
10	1,83	1,81	2,00	3,51	2,11	3,20	1,35	3,39	3,04	1,99	2,43	3,07	1,99
11	2,00	1,39	1,38	1,66	2,45	2,18	1,70	2,60	2,35	2,84	2,61	2,63	2,08
12	1,99	1,91	1,91	2,58	2,53	1,99	2,11	2,87	2,05	2,43	2,09	1,90	2,22
13	1,76	2,02	1,50	2,21	2,02	2,32	2,51	1,38	2,35	2,78	1,63	2,51	2,12
14	2,85	2,08	1,42	1,81	1,87	2,79	2,01	2,68	1,85	2,61	1,95	2,41	1,48
15	1,50	2,00	2,26	1,05	1,96	2,00	2,12	2,21	1,93	2,68	1,89	2,25	1,88
16	1,65	1,65	2,20	2,79	2,05	2,21	2,89	2,40	2,18	2,29	1,92	2,33	2,08
17	1,55	1,65	1,79	2,96	1,40	2,67	1,61	2,16	2,95	3,86	2,39	2,59	2,02
18	1,89	1,72	1,79	2,38	2,83	2,65	2,59	2,74	2,28	2,32	2,22	1,84	2,09
19	1,79	1,79	2,37	0,85	3,00	1,77	2,15	1,59	2,15	2,90	1,49	2,95	2,45
20	1,88	2,11	2,11	2,19	1,70	1,80	1,07	2,83	2,79	2,46	2,31	2,75	2,39
21	2,35	1,86	1,92	1,72	2,06	2,30	2,31	3,42	2,98	3,00	1,91	2,15	3,08
22	2,33	1,82	2,19	2,22	2,81	2,52	2,00	2,31	1,89	2,10	1,99	2,05	2,48
23	2,08	1,74	2,31	2,09	2,65	2,60	2,02	2,35	3,50	2,92	2,72	2,30	2,90
24	2,50	1,77	2,55	2,58	2,12	3,00	2,19	3,18	2,87	2,00	2,35	2,23	2,15
25	1,77	1,89	1,96	1,96	2,04	2,85	2,01	2,18	2,55	2,80	2,02	2,18	2,97

Окончание табл. 9

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	3,40	2,88	3,03	1,64	2,75	2,19	2,17	1,76	2,57	1,71	2,26	2,47	2,10
2	3,05	1,55	2,84	1,00	1,75	2,43	1,69	1,86	2,33	2,82	1,79	2,00	1,41
3	2,30	2,59	2,49	3,72	2,35	2,44	2,27	1,95	1,82	2,21	1,65	2,23	2,10
4	2,73	2,58	3,10	2,38	2,21	2,05	1,80	2,22	2,69	2,84	2,30	2,41	2,22
5	2,57	3,25	3,41	2,71	1,67	2,68	1,93	2,51	2,00	2,27	1,98	1,73	2,31
6	2,79	2,71	2,99	2,92	2,88	2,45	2,13	2,20	2,09	1,83	2,14	2,00	2,09
7	2,52	2,56	2,38	3,16	2,21	2,10	2,06	1,90	1,74	1,01	2,39	1,68	3,11
8	2,38	2,20	2,52	2,17	2,45	2,28	1,93	1,97	2,40	1,67	2,57	1,67	2,79
9	3,23	2,22	2,86	2,71	1,91	1,76	1,99	2,14	2,02	1,81	2,05	1,98	1,84
10	2,49	2,21	3,03	2,68	2,05	2,49	2,00	2,59	2,04	1,84	1,75	2,03	2,45
11	2,40	1,70	2,81	2,71	2,47	2,00	1,69	2,45	2,49	2,98	1,97	1,57	2,82
12	2,23	2,33	1,84	2,30	2,25	1,73	1,60	2,00	2,37	2,31	2,03	1,85	2,63
13	2,88	2,77	2,46	3,15	2,05	2,78	2,14	1,55	2,81	2,11	1,91	1,92	2,59
14	2,10	1,87	2,02	3,33	2,08	2,04	1,76	2,08	2,44	1,98	2,26	2,07	2,51
15	2,99	1,80	2,30	3,51	2,38	2,51	1,80	1,34	2,52	1,82	1,67	1,40	2,35
16	2,56	2,29	2,65	2,12	2,18	2,40	2,33	2,42	2,40	1,87	2,14	1,75	1,54
17	2,77	2,39	2,09	2,31	2,00	2,02	2,35	2,37	2,79	2,18	2,07	2,52	2,29
18	3,45	1,92	2,78	2,40	2,59	1,98	2,00	1,28	1,89	2,26	2,00	2,46	2,52
19	2,68	1,75	1,81	2,53	2,32	2,81	1,83	2,00	2,80	1,34	2,00	2,30	1,95
20	3,00	2,48	2,12	2,40	2,11	1,93	2,06	1,74	2,04	1,61	2,58	1,34	2,29
21	1,80	2,55	1,74	2,70	2,21	2,62	2,27	2,64	2,21	2,71	2,09	2,19	2,02
22	2,56	1,81	3,73	2,99	2,50	1,78	2,08	1,97	2,16	2,14	1,68	2,49	2,12
23	2,57	2,52	2,15	1,65	2,22	1,77	2,50	2,08	2,10	1,99	1,80	2,12	1,85
24	2,59	2,11	2,43	3,21	2,11	1,53	3,21	2,50	2,30	1,67	2,20	1,87	1,40
25	1,92	2,51	3,30	3,55	2,30	2,22	2,11	2,03	2,68	2,31	1,84	2,03	1,94

Таблица 10. Масса зерна с растений гибридов озимой пшеницы, г

Номер колоса	Варианты												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	5,7	5,7	6,1	3,0	10,0	9,4	5,4	10,7	1,5	7,3	10,0	5,8	9,3
2	12,3	4,4	5,9	7,0	5,7	11,2	7,7	9,4	10,2	9,3	11,8	8,3	5,7
3	9,1	4,7	5,8	4,6	6,6	5,9	11,5	6,2	7,6	5,3	8,5	7,1	6,3
4	5,1	5,5	5,9	4,9	3,0	4,0	8,2	3,6	19,2	6,3	8,8	8,9	9,0
5	8,1	4,4	7,5	3,8	3,9	8,9	3,3	5,5	6,7	4,7	6,4	6,5	7,5
6	5,7	13,3	6,0	2,2	7,0	5,8	4,2	5,3	17,1	6,5	6,0	9,8	4,7
7	15,3	12,2	9,5	7,3	5,7	5,8	5,9	9,1	6,7	12,7	3,4	8,0	5,2
8	5,2	2,8	6,9	7,0	3,9	3,2	12,9	2,7	11,2	9,1	5,8	4,7	8,8
9	5,2	6,2	6,4	5,6	4,3	12,7	8,1	4,3	9,4	12,5	9,9	9,8	9,5
10	3,1	2,8	5,4	3,5	6,9	9,7	5,8	15,6	7,0	4,4	5,7	9,9	5,3
11	3,0	2,6	2,2	2,3	5,4	4,2	3,7	7,6	9,8	13,9	5,6	9,0	8,4
12	3,7	5,9	4,8	9,6	4,8	9,7	4,8	8,5	5,4	8,1	5,2	6,0	7,0
13	3,2	4,9	5,0	4,4	3,0	6,6	10,1	8,5	5,1	6,7	2,9	4,7	10,7
14	21,5	5,5	4,1	3,9	4,9	15,9	4,2	7,6	9,1	5,0	3,0	4,3	5,5
15	4,7	8,5	8,3	5,8	6,4	6,7	8,7	4,9	3,0	9,5	4,5	5,5	8,2
16	2,4	3,4	3,9	6,1	6,0	7,5	14,4	4,6	10,9	6,8	8,6	8,3	10,7
17	4,1	2,4	4,1	6,7	2,6	6,4	5,1	6,7	12,0	19,3	5,4	10,6	9,9
18	5,6	3,9	3,8	2,4	8,4	2,6	5,4	18,4	4,5	8,6	5,0	6,7	4,4
19	2,8	3,5	7,1	2,4	9,5	6,0	7,2	4,5	4,1	9,1	4,5	9,7	5,2
20	3,1	5,7	6,0	4,3	2,5	3,2	2,2	9,3	9,0	10,3	6,7	10,3	9,3
21	8,9	5,0	3,1	5,2	5,5	6,6	4,8	14,9	3,0	8,6	7,4	11,7	13,2
22	5,1	5,4	9,5	6,3	8,1	9,4	2,7	6,0	6,9	6,1	4,3	7,1	9,9
23	8,9	4,1	12,1	3,1	9,7	9,9	2,8	5,3	15,4	12,8	5,4	8,9	18,5
24	10,7	2,8	8,6	5,7	6,2	7,7	10,5	10,6	7,8	4,4	7,6	9,5	7,0
25	6,5	6,7	4,0	6,9	7,4	9,2	3,4	7,8	8,6	6,2	5,8	5,4	16,7

Номер колоса	Варианты												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	7,0	13,2	9,0	4,2	11,2	9,5	6,0	3,8	9,1	3,4	7,6	4,2	6,8
2	16,8	2,7	12,0	2,4	3,5	10,0	4,5	5,4	3,9	9,0	6,1	3,2	4,4
3	15,3	13,0	13,5	13,0	8,0	8,1	5,8	5,3	3,4	4,5	5,0	7,8	5,1
4	12,9	3,9	12,0	2,6	6,4	3,0	7,4	8,6	5,6	13,3	9,8	7,5	9,3
5	7,3	8,2	10,4	7,0	2,4	5,8	5,4	8,5	7,3	7,0	4,8	5,0	11,0
6	5,6	5,3	13,2	11,1	8,4	9,3	6,2	7,0	8,0	3,4	6,3	4,0	4,0
7	7,2	5,8	11,0	9,0	5,4	9,3	3,0	3,6	4,4	5,6	5,0	5,2	9,6
8	10,0	7,6	10,9	4,8	7,4	12,5	4,7	3,2	8,1	3,0	6,6	3,5	10,2
9	13,4	7,5	15,9	10,3	3,7	4,4	6,2	5,3	6,0	4,8	5,9	9,0	4,3
10	3,9	8,4	15,9	6,3	3,4	9,3	7,7	7,9	6,6	4,6	3,3	3,8	5,7
11	4,0	4,1	10,7	5,0	7,6	7,3	4,9	12,1	10,8	14,0	7,7	2,9	13,8
12	11,6	9,4	4,0	6,0	6,4	7,4	3,8	3,4	6,4	9,0	5,2	2,5	13,5
13	11,9	6,7	11,2	3,7	8,2	8,8	6,3	5,2	8,2	6,2	6,4	5,8	8,8
14	6,0	4,1	5,0	10,7	4,4	6,0	3,5	4,7	8,0	4,2	9,7	3,2	10,9
15	8,0	9,3	9,0	16,0	7,4	11,7	5,7	5,2	4,4	4,9	4,1	5,0	5,2
16	6,3	3,7	12,2	5,4	5,2	11,4	4,6	7,0	6,7	4,9	4,8	5,5	3,8
17	14,0	6,8	7,5	9,0	3,2	6,7	5,4	6,0	13,3	5,3	7,3	6,7	7,5
18	10,9	4,7	7,0	14,4	10,5	4,5	6,6	3,7	5,8	5,3	7,2	9,2	7,5
19	6,4	9,9	6,2	9,7	10,0	13,9	2,7	11,4	10,4	2,7	5,8	5,0	8,6
20	7,8	7,2	7,4	6,0	8,6	8,7	14,0	5,0	7,6	4,0	7,0	3,6	6,5
21	3,3	12,6	5,4	8,3	8,5	8,6	3,1	6,3	8,7	8,5	8,3	6,7	4,5
22	3,0	11,4	12,0	14,0	9,8	5,7	6,9	6,9	11,7	3,6	5,3	10,6	6,8
23	5,5	4,5	6,2	5,3	8,0	5,4	6,5	8,0	5,8	5,0	5,4	4,0	4,6
24	7,3	7,3	14,5	12,0	8,6	5,1	8,5	7,3	7,9	4,3	9,8	4,9	4,9
25	6,4	6,4	9,3	9,0	4,7	2,9	8,0	8,5	5,8	5,3	7,6	9,3	5,4

Как было отмечено ранее, под качественной изменчивостью понимается такая изменчивость, при которой различия между вариантами определены показателями качества, не имеющими числового выражения (в нашем примере – «больные – здоровые растения»).

Качественную изменчивость характеризуют следующие статистические характеристики: доля наличия признака (p), доля отсутствия признака (q), показатель изменчивости качественного признака (S), ошибка выборочной доли (S_p), коэффициент вариации (V , %).

Общий объем выборки обозначают буквой N , а число объектов с данным признаком – n .

Доля наличия признака – отношение числа объектов с данным признаком к общему числу объектов, т. е. к объему выборки, – рассчитывается по формуле

$$p = \frac{n}{N}.$$

Она может быть выражена в частях единицы или в процентах, т. е. доля признака показывает вероятность появления данного признака в данной совокупности.

В нашем примере в выборке из 25 растений льна-долгунца 9 растений поражены ржавчиной ($n_1 = 9$), а 16 растений являются здоровыми ($n_2 = 16$). Объем выборки

$$N = n_1 + n_2 = 9 + 16 = 25.$$

$$p = \frac{n}{N} = \frac{9}{25} = 0,36 \text{ или } 36 \, \%.$$

Доля отсутствия признака – разность между целым, т. е. единицей, и долей наличия признака – рассчитывается по формуле

$$q = 1 - p.$$

$$q = 1 - 0,36 = 0,64 \text{ или } q = 100 - 36 = 64 \, \%.$$

Показатель изменчивости качественного признака для альтернативной изменчивости, как в нашем случае, когда изучаемый объект имеет две градации (пораженные и не пораженные ржавчиной растения льна), рассчитывают по формуле

$$S = \sqrt{pq}.$$

$$S = \sqrt{0,36 \cdot 0,64} = 0,48 \text{ или } 48 \, \%.$$

Максимальная изменчивость, как видно из формулы, наблюдается при $p = q = 0,5$. При этом показателе изменчивости S также равна 0,5:

$$S_{\max} = \sqrt{0,5 \cdot 0,5} = 0,5.$$

При трех градациях признак равен 0,333 (33,3 %), четырех – 0,25 (0,25 %), пяти – 0,200 (20 %), шести – 0,167 (16,7 %) и т. д.

Если изучаемый объект имеет более двух градаций, то показатель изменчивости вычисляется по формуле

$$S = \sqrt[k]{p_1 p_2 p_3 \dots p_k},$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ – доли признака от общего объема выборки;

k – число градаций признака.

Ошибка выборочной доли – это мера отклонения от доли наличия признака, которую для альтернативной изменчивости вычисляют по формуле

$$S_p = \sqrt{\frac{pq}{N}}.$$

В нашем случае она составляет:

$$S_p = \sqrt{\frac{0,48}{25}} = 0,14.$$

Интервальную оценку доли дают по формуле $p = \pm 2S_p$ на уровне доверительной вероятности $P_{0,95}$ и по формуле $p = \pm 3S_p$ на уровне доверительной вероятности $P_{0,99}$. Интервал при $P_{0,95}$ составляет: $0,36 \pm 2 \cdot 0,14$; $0,36 \pm 0,28$; $0,08 : 0,64$. Таким образом, нижняя граница интервала составит 0,08, а верхняя – 0,64.

Если градаций более двух, то ошибку выборочной доли вычисляют по формуле

$$S_p = \frac{S}{\sqrt{N}},$$

где S – показатель изменчивости;

N – объем выборки.

Коэффициент вариации – отношение показателя изменчивости к его максимальному значению, выраженное в процентах, – вычисляют по формуле

$$V_p = \frac{S}{S_p}.$$

Коэффициент вариации в примере составит:

$$V_p = \frac{0,48}{0,5} \cdot 100 \, \%.$$

Коэффициент вариации характеризует относительную изменчивость изучаемых признаков и широко используется для сравнительной оценки выравненности различных совокупностей.

Задание 2.

В соответствии с выданным вариантом рассчитайте статистические показатели качественной изменчивости, постройте диаграмму и сделайте выводы. Исходные данные приведены в табл. 11–13.

Таблица 11. Пораженность паршой плодов груши (в каждой выборке по 150 шт.)

Вариант	Задание									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Белорусская поздняя	55	56	63	58	38	67	45	56	67	50
Лагодная	44	45	46	48	35	37	30	36	50	35
Мраморная	21	30	16	20	19	24	16	26	20	22
Дюшес летний	72	80	83	79	77	84	90	68	65	60

Таблица 12. Окраска плодов томата в поколении F₂

Вариант	Окраска плодов томата в F ₂									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Красная	136	115	193	178	175	150	150	220	228	135
Оранжевая	75	135	56	114	120	97	88	115	106	112
Желтая	56	80	89	78	65	45	75	125	136	115
Бурая	14	45	57	53	60	53	58	45	41	72

Таблица 13. Окраска зерен овса, шт.

Вариант	Задание									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Белая	236	215	293	278	275	250	250	200	326	220
Желтая	96	75	106	115	112	120	136	115	196	178
Коричневая	150	100	120	112	75	96	54	47	65	75
Серая	52	56	89	68	80	75	65	89	78	35

2. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Между различными признаками в природе существуют определенные взаимосвязи. Знание этих связей, зависимости одного признака от другого важно и для агрономической практики. Выращивание сельскохозяйственных культур предполагает знание связей между продуктивностью и обеспеченностью растений элементами питания, теплом и т. п.

Для описания связей между переменными величинами (признаками) применяют понятие функции f , которая ставит в соответствие каждому определенному значению независимой переменной X определенное значение зависимой переменной Y . Такие однозначные связи называются функциональными ($Y = f(x)$). Но в природе они встречаются не всегда.

В биологических, сельскохозяйственных науках чаще встречаются такие соотношения между переменными, когда каждому значению признака X соответствует не одно, а множество значений Y . Например, колосья пшеницы одной и той же длины могут содержать различное число зерен. Причиной такого варьирования является тот факт, что каждый биологический признак представляет собой функцию многих переменных: на него влияют и генетические, и средовые факторы. Поэтому зависимость между такими признаками имеет не функциональный, а стохастический характер. Эти связи обнаруживаются при массовом изучении признаков и называются корреляционными или корреляцией.

Так как при корреляции разным значениям одной переменной соответствуют различные распределения другой переменной, то форма стохастической связи может быть описана не как зависимость отдельных значений Y от величины X , а как зависимость частных средних $\bar{Y}_x$ от значений X . Изменение функций в зависимости от определенного изменения значений одного или нескольких аргументов называется регрессией. Для описания корреляционных связей применяют корреляционно-регрессионный анализ.

Корреляции подразделяют по направлению, форме и числу связей.

По числу связей корреляция бывает простой (зависимость между двумя признаками) и множественной (три и более признака), по форме – прямолинейной и криволинейной, по направлению – прямой и обратной.

Под прямолинейной корреляцией понимают такую зависимость, которая носит линейный характер и выражается уравнением прямой линии $Y = a + bX$. Когда при одинаковых приращениях аргумента функция имеет неодинаковые изменения, корреляция называется криволинейной. Если при увеличении аргумента функция возрастает, то корреляция

называется положительной или прямой, а если убывает – отрицательной или обратной.

В качестве числового показателя простой линейной корреляции, отражающего тесноту (силу) и направление связи, используют отвлеченное безразмерное число, называемое коэффициентом корреляции и обозначаемое буквой r .

Для анализа линейной корреляции между X и Y проводят n независимых парных наблюдений, исходом каждого из которых является пара чисел $(X_1; Y_1)$, $(X_2; Y_2)$, ..., $(X_n; Y_n)$. Технику вычисления коэффициента корреляции рассмотрим на примере (табл. 14).

Коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$r = \frac{\sum(X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{x})^2 \sum(Y - \bar{y})^2}} = \frac{5,61}{\sqrt{0,3778 \cdot 136}} = \frac{5,61}{\sqrt{51,3808}} = 0,783,$$

или, минуя вычисления отклонений и квадратов отклонений, – по формуле

$$r = \frac{\sum XY - (\sum X \sum Y)n}{\sqrt{(\sum X^2 - (\sum X)^2 : n) (\sum Y^2 - (\sum Y)^2 : n)}},$$

или через средние квадратические отклонения:

$$r = \frac{\sum(X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{n S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}},$$

$$\text{где } S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{x})^2}{n - 1}}, \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{y})^2}{n - 1}},$$

здесь $(X - \bar{x})$ и $(Y - \bar{y})$ – отклонения значений X и Y от своих средних значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в n сопоставимых парах.

Значения коэффициента корреляции могут находиться в пределах от +1 при прямой функциональной связи до –1 при обратной функциональной связи. При полном отсутствии корреляции $r = 0$, при $r < \pm 0,3$ корреляционная зависимость слабая, при $r = \pm(0,3 \div 0,7)$ – средняя, а при $r > \pm 0,7$ – сильная.

Знак при коэффициенте корреляции указывает направление связи: «+» – прямая зависимость; «–» – связь обратная.

Таблица 14. Вычисление коэффициента корреляции между продуктивностью растений озимой ржи сорта Белая вежа (Y) и числом зерен в колосе (X)

Номер растения	Значение признаков		Отклонение от средней		Квадраты отклонений		Произведения отклонений
	Продуктивность растений Y , г/раст.	Число зерен в колосе X , шт.	$Y - \bar{y}$	$X - \bar{x}$	$(Y - \bar{y})^2$	$(X - \bar{x})^2$	$(Y - \bar{y})(X - \bar{x})$
1	1,74	38	-0,13	-3	0,0169	9	0,39
2	2,06	46	0,19	5	0,0361	25	0,95
3	1,75	38	-0,12	-3	0,0144	9	0,36
4	2,00	42	0,13	1	0,0169	1	0,13
5	1,53	38	-0,34	-3	0,1156	9	1,02
6	1,78	44	-0,09	-3	0,0081	9	-0,27
7	1,77	38	-0,10	-3	0,0100	9	0,30
8	1,80	37	-0,07	-4	0,0049	16	0,28
9	2,22	48	0,35	7	0,1225	49	2,45
10	2,05	41	0,18	0	0,0324	0	0
Сумма	$\Sigma Y = 18,70$	$\Sigma X = 410$	$\Sigma(Y - \bar{y}) = 0$	$\Sigma(X - \bar{x}) = 0$	$\Sigma(Y - \bar{y})^2 = 0,3778$	$\Sigma(X - \bar{x})^2 = 136$	$\Sigma(Y - \bar{y}) \times \Sigma(X - \bar{x}) = 5,61$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{18,7}{10} = 1,87 \\
 \bar{x} &= \frac{\Sigma X}{n} = \frac{410}{10} = 41
 \end{aligned}$$

Таким образом, связь между продуктивностью растений озимой ржи сорта Белая вежа и числом зерен в их колосьях сильная ($r = 0,783$).

Степень связи между признаками более точно измеряется коэффициентом детерминации d_{yx} , равным квадрату коэффициента корреляции: $d_{yx} = r^2$. Он показывает долю (%) тех изменений, которые зависят от изучаемого фактора. В нашем примере $d_{yx} = 0,7832 = 0,613$ и только 69,9 % изменчивости признака Y обусловлено действием факториального признака X (числом зерен в колосе), остальная часть корреляционной связи ($1 - 0,613 = 0,387$) обусловлена другими факторами.

Коэффициент корреляции выборочных наблюдений подвержен случайным колебаниям, которые зависят от объема выборки и точности проведения наблюдений. Поэтому для оценки надежности выборочного коэффициента корреляции вычисляют его ошибку и критерий существенности.

Стандартную ошибку коэффициента корреляции определяют по формуле

$$S_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,783^2}{10 - 2}} = \pm 0,220,$$

где S_r – ошибка коэффициента корреляции;

r – коэффициент корреляции;

n – число пар значений выборки.

Чем больше число наблюдений, тем меньше будет ошибка коэффициента корреляции. Значение коэффициента корреляции обычно записывается вместе с его ошибкой:

$$r \pm S_r = 0,783 \pm 0,220.$$

Критерий существенности коэффициента корреляции вычисляют по формуле

$$t_r = \frac{r}{S_r} = \frac{0,783}{0,220} = 3,56.$$

Сопоставляя фактические и теоретически рассчитанные значения t_r при числе степеней свободы, равном $n - 2$, оценивают существенность корреляционной связи. Если $t_{r_{\text{факт}}} \geq t_{r_{\text{теор}}}$, то корреляция существенна.

При $t_{r_{\text{факт}}} < t_{r_{\text{теор}}}$, корреляция несущественна.

Теоретическое значение критерия находят по таблице Стьюдента (прил. 1), принимая 5%-ные или 1%-ные уровни значимости. В нашем

примере (при $n - 2 = 8$ степенях свободы и 5%-ном уровне значимости) $t_{05} = 2,45$. Значит, коэффициент корреляции в нашем случае существен. При малых выборках и значениях r , близких к единице, распределение выборочных коэффициентов корреляции заведомо отличается от нормального и оценка существенности коэффициента корреляции по критерию Стьюдента становится ненадежной. Р. Фишер в этих случаях предлагает преобразовывать коэффициент корреляции в величину z , используя специальные таблицы. Тогда

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}};$$

$$t_r = \frac{z}{S_z};$$

$$z \pm tS_z.$$

Определив коэффициент корреляции, выясняем направление и степень сопряженности в изменчивости признаков. Однако он не позволяет узнать, как количественно изменяется результативный признак при изменении факториального на единицу изменения. Это решается с помощью регрессионного анализа. Его основная задача – определить формулу корреляционной зависимости. Различают регрессию простую и множественную, а по форме – прямо- и криволинейную. Сущность регрессионного анализа состоит в том, чтобы построить линию, которая наиболее точно выражала бы зависимость одного признака от другого.

Зависимость между признаками может быть выражена коэффициентом регрессии, показывающим, в каком направлении и на какую величину изменяется в среднем один признак Y (функция) при изменении другого X (аргумент) на единицу изменения. Коэффициентов регрессии столько, сколько и признаков, они имеют знак коэффициента корреляции и вычисляются по следующим формулам:

$$b_{yx} = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sum (X - \bar{x})^2} = \frac{5,61}{136} = 0,04125;$$

$$b_{xy} = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sum (Y - \bar{y})^2} = \frac{5,61}{0,3778} = 14,8491.$$

Их можно вычислить и через средние квадратические отклонения:

$$b_{yx} = r \frac{S_{\bar{y}}}{S_{\bar{x}}};$$

$$b_{xy} = r \frac{S_{\bar{x}}}{S_{\bar{y}}}.$$

Произведение коэффициентов регрессии равно квадрату коэффициента корреляции:

$$b_{yx}b_{xy} = r^2.$$

$$r = \sqrt{0,04125 \cdot 14,8491} = \sqrt{0,6125} = 0,783.$$

Ошибку коэффициентов регрессии вычисляют по формулам:

$$S_{b_{yx}} = S_t \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{y})^2}{\sum (X - \bar{x})^2}} = 0,220 \cdot \sqrt{\frac{0,3778}{136}} = 0,220 \cdot 0,0527 = 0,0116;$$

$$S_{b_{xy}} = S_t \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{x})^2}{\sum (Y - \bar{y})^2}} = 0,220 \cdot \sqrt{\frac{136}{0,3778}} = 0,220 \cdot 18,97 = 4,1741.$$

Критерий существенности коэффициента регрессии определяется по формуле

$$t_{b_{xy}} = \frac{b_{xy}}{S_{b_{xy}}}.$$

$$t_{b_{xy}} = \frac{0,04125}{0,0116} = 3,56.$$

Критерий существенности коэффициентов регрессии равен критерию существенности коэффициента корреляции: $t_{b_{yx}} = t_r$.

В зависимости от того, между какими признаками рассматривается связь, не всегда имеет смысл вычислять все коэффициенты регрессии.

Корреляция может быть изображена графически в виде линии регрессии. Линию регрессии можно построить двумя способами – графическим и аналитическим.

При графическом способе по оси абсцисс откладывают значения признака X , по оси ординат – значения признака Y . Каждое наблюдение под двумя переменными отличается точкой с координатами $(X; Y)$. Такой график называют точечной диаграммой или корреляционным полем.

На точечной диаграмме при помощи прозрачной линейки проводят линию на глаз так, чтобы она располагалась как можно ближе ко всем точкам и сумма расстояний этой линии от эмпирических точек была

наименьшей. Данный способ приближителен, так как дает возможность выявить лишь общую тенденцию, поэтому лучше пользоваться аналитическим способом.

При аналитическом способе используют уравнение прямой линии (для линейной регрессии):

$$Y = a + bx.$$

По исходным наблюдениям вычисляют $\bar{x}$, $\bar{y}$, и b_{yx} и подставляют в уравнение линейной регрессии:

$$a = \bar{y} - b_{yx} \bar{x};$$

$$b = b_{yx},$$

имеющее следующий вид:

$$Y = \bar{y} + b_{yx} (X - \bar{x}).$$

$$Y = 1,87 + 0,04125 \cdot (X - \bar{x}) = 1,87 + 0,04125X - 0,04125 \cdot 41.$$

$$Y = 0,17875 + 0,04125X.$$

По уравнению находят теоретически усредненные значения Y для крайних (min и max) значений ряда X . Найденные точки ($X_{\min}$, $Y_{\min}$ и $X_{\max}$, $Y_{\max}$) наносят на график и соединяют прямой. Это и будет теоретическая линия регрессии Y по X .

В нашем случае $X_{\min}$ составляет 37 шт., тогда $Y_{\min}$ составит 1,705 г/раст.:

$$Y_{\min} = 0,17875 + 0,04125 \cdot 37 = 1,705.$$

Если $X_{\max}$ равно 48 шт., то $Y_{\max}$ будет равно 2,159 г/раст.:

$$Y_{\max} = 0,17875 + 0,04125 \cdot 48 = 2,159.$$

Найденные точки (37; 1,705 и 48; 2,159) наносим на график и соединяем прямой. Получаем теоретическую линию регрессии Y и X , которая показывает, что увеличение числа зерен в колосе (на 1 шт.) соответствует увеличению продуктивности растений в среднем на 0,04125 г/раст. Судя по коэффициенту детерминации $d_{yx} = r^2 = (0,783)^2 = 0,613$, примерно 61,3 % изменений продуктивности колоса у ржи обусловлено изменениями озерненности колоса, 38,7 % изменений связано с другими факторами.

На графике целесообразно указать уравнения регрессии, коэффициент регрессии и корреляции, доверительную зону для истинной линии регрессии в совокупности (рис. 4).

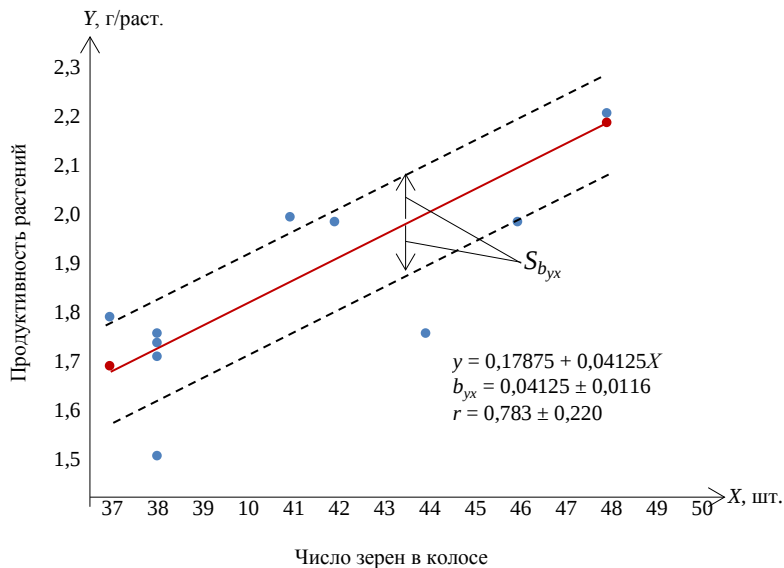


Рис. 4. Точечный график и теоретическая линия регрессии при прямой корреляции между продуктивностью растений и числом зерен в колосе

Для установления доверительной зоны необходимо вверх и вниз от теоретической линии регрессии отложить величину одной (68%-ная зона) или двух (95%-ная зона) ошибок отклонений от регрессии, т. е. $\pm S_{yx}$ или $\pm 2S_{yx}$, и соединить найденные точки пунктирными линиями. Область, заключенная между этими линиями, и называется доверительной зоной регрессии.

Таким образом, корреляция между продуктивностью растений озимой ржи сорта Белая вежа и числом зерен в колосе прямая, сильная. Продуктивность растений на 69,9 % зависит от числа зерен. При увеличении числа зерен в колосе на 1 шт. продуктивность растений увеличивается на 0,0452 г. Данная зависимость выражается уравнением $Y = 0,02 + 0,0452X$.

Задание 3.

В соответствии с выданным заданием вычислите коэффициенты прямолинейной корреляции и регрессии, рассчитайте уравнение регрессии, представьте полученные данные в виде графика и сделайте выводы. Исходные данные приведены в табл. 15–23.

Таблица 15. **Высота растений и урожайность зерна у мягкой пшеницы**

Номер растения	Высота растений X , см	Урожайность зерна Y , ц/га
1	91	32
2	99	36
3	102	48
4	110	51
5	98	33
6	103	40
7	100	42
8	112	55
9	110	54
10	105	49
11	102	40
12	101	43
13	112	47
14	93	33
15	99	39
16	96	35
17	105	40
18	112	43
19	108	52
20	102	58
21	97	35
22	92	33
23	105	48
24	100	41
25	98	53

Таблица 16. **Продуктивная кустистость и урожайность зерна у мягкой пшеницы**

Номер растения	Продуктивная кустистость X , шт.	Урожайность зерна Y , ц/га
1	2	3
1	3	32
2	2	36
3	6	48
4	7	51
5	4	33
6	3	40
7	5	42
8	6	55
9	7	54
10	7	49
11	4	40
12	2	43
13	5	47

1	2	3
14	2	33
15	2	39
16	3	35
17	5	40
18	4	43
19	7	52
20	6	58
21	2	35
22	3	33
23	5	48
24	3	41
25	4	53

Таблица 17. Длина колоса и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Длина колоса X , см	Урожайность зерна Y , ц/га
1	8,5	32
2	9,3	36
3	10,6	48
4	11,7	51
5	8,0	33
6	9,4	40
7	9,0	42
8	12,0	55
9	10,8	54
10	10,7	49
11	9,4	40
12	9,0	43
13	10,7	47
14	8,8	33
15	8,7	39
16	8,5	35
17	10,3	40
18	11,2	43
19	11,7	52
20	11,7	58
21	9,2	35
22	8,7	33
23	10,1	48
24	9,8	41
25	11,3	53

Таблица 18. Число колосков в колосе и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Число колосков в колосе X , шт.	Урожайность зерна Y , ц/га
1	17	32
2	18	36
3	19	48
4	19	51
5	17	33
6	17	40
7	18	42
8	19	55
9	19	54
10	17	49
11	18	40
12	17	43
13	19	47
14	17	33
15	18	39
16	18	35
17	19	40
18	17	43
19	19	52
20	18	58
21	17	35
22	17	33
23	18	48
24	18	41
25	21	53

Таблица 19. Число зерен в колосе и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Число зерен в колосе X , шт.	Урожайность зерна Y , ц/га
1	2	3
1	33	32
2	35	36
3	47	48
4	50	51
5	32	33
6	35	40
7	37	42
8	46	55
9	49	54
10	46	49
11	38	40
12	44	43
13	37	47

Окончание табл. 19

1	2	3
14	33	33
15	37	39
16	35	35
17	46	40
18	49	43
19	47	52
20	54	58
21	32	35
22	33	33
23	36	48
24	39	41
25	40	53

Таблица 20. Число зерен с растения и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Число зерен с растения X , см	Урожайность зерна Y , ц/га
1	67	32
2	69	36
3	75	48
4	83	51
5	73	33
6	69	40
7	90	42
8	85	55
9	76	54
10	74	49
11	75	40
12	83	43
13	96	47
14	80	33
15	77	39
16	72	35
17	89	40
18	92	43
19	108	52
20	117	58
21	63	35
22	87	33
23	92	48
24	85	41
25	112	53

Таблица 21. Масса 1000 семян и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Масса 1000 семян X , шт.	Урожайность зерна Y , ц/га
1	32	32
2	40	36
3	43	48
4	50	51
5	36	33
6	40	40
7	38	42
8	52	55
9	49	54
10	46	49
11	46	40
12	37	43
13	34	47
14	36	33
15	43	39
16	40	35
17	47	40
18	44	43
19	50	52
20	53	58
21	38	35
22	33	33
23	47	48
24	43	41
25	50	53

Таблица 22. Продуктивность растений и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Продуктивность растений X , шт.	Урожайность зерна Y , ц/га
1	2	3
1	1,90	32
2	1,97	36
3	2,30	48
4	2,63	51
5	1,88	33
6	2,05	40
7	2,12	42
8	2,77	55
9	2,83	54
10	2,65	49
11	1,99	40
12	2,07	43
13	2,53	47

Окончание табл. 22

1	2	3
14	1,80	33
15	1,88	39
16	1,73	35
17	2,12	40
18	2,49	43
19	2,69	52
20	2,80	58
21	1,87	35
22	1,92	33
23	2,12	48
24	2,00	41
25	2,68	53

Таблица 23. Густота стеблестоя и урожайность зерна у мягкой пшеницы

Номер растения	Густота стеблестоя X , см	Урожайность зерна Y , ц/га
1	402	32
2	431	36
3	456	48
4	520	51
5	411	33
6	438	40
7	426	42
8	451	55
9	480	54
10	465	49
11	431	40
12	463	43
13	472	47
14	428	33
15	433	39
16	418	35
17	453	40
18	460	43
19	489	52
20	493	58
21	427	35
22	465	33
23	483	48
24	470	41
25	112	53

3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Наряду с относительно простыми способами сравнения одной выборки с другой (например, с помощью t -критерия) встречаются и более сложные задачи, когда необходимо сравнить несколько выборок, объединяемых в статистический комплекс.

Попарное сравнение в таких случаях оказывается обременительным и требует большой вычислительной работы. С учетом этого Р. Фишером был предложен метод комплексной оценки сравниваемых средних, получивший название *дисперсионный анализ*.

Метод дисперсионного анализа основан на разложении общей дисперсии статистического комплекса на составляющие ее компоненты, сравнивая которые друг с другом посредством F -критерия можно определить, какую долю общей вариации учитываемого (результативного) признака обуславливает действие на него как регулируемых, так и не регулируемых в опыте факторов.

Регулируемые факторы, т. е. те, которые могут регулироваться в опыте экспериментатором (дозы удобрений, различные агротехнические приемы, сорта и т. д.), выступают в опыте в качестве вариантов. В зависимости от того, сколько факторов регулируется, опыты могут быть однофакторными и многофакторными.

В полевом опыте общая изменчивость результативного (изучаемого) признака образуется под влиянием пестроты почвенного плодородия, изучаемых вариантов и случайных ошибок.

Пестрота почвенного плодородия бывает внутри повторений и между повторениями. Изменчивость плодородия почвы внутри повторений менее значительна, чем между повторениями, поэтому она дисперсионным анализом не выделяется и относится к случайным ошибкам.

В общем виде изменчивость полевого опыта представляют следующим выражением:

$$C_y = C_p + C_v + C_z,$$

где C_y – общая изменчивость;

C_p – изменчивость по повторениям;

C_v – изменчивость по вариантам;

C_z – изменчивость, обусловленная случайными ошибками.

В агрономических опытах возникает необходимость отдельно учитывать влияние такого нерегулируемого фактора, как почвенное пло-

дорогие. Для этого полевые опыты проводятся в нескольких повторениях.

В настоящее время дисперсионный анализ является наиболее распространенным из статистических методов, используемых в сельскохозяйственном опытно-деловом деле. Это обусловлено в первую очередь тем, что с разработкой метода дисперсионного анализа стало возможно статистическое планирование опыта в соответствии с требованиями анализа, а соответственно, и более эффективная интерпретация полученных экспериментальных данных.

Методом дисперсионного анализа можно обрабатывать данные простых и сложных, однолетних и многолетних, однофакторных и многофакторных опытов.

Техника дисперсионного анализа однофакторных полевых опытов сводится главным образом к расчету показателей варьирования, которыми в области дисперсионного анализа служат средний квадрат отклонений, или дисперсии. Отношение дисперсии межгрупповой, или факториальной (S_v^2), к дисперсии внутригрупповой (S_z^2), или остаточной (неучтенного варьирования условной среды и самих растений), служит критерием оценки влияния на признак (фактор), регулируемый (изучаемый) в опыте.

$$\frac{S_v^2}{S_z^2} = F.$$

В честь автора дисперсионного анализа критерий обозначили первой буквой его фамилии F (критерий Фишера).

Критерий Фишера F устанавливает только факт наличия существенных различий между средними, если $F_{\text{факт}} > F_{\text{теор}}$, но не указывает, между какими средними имеются эти различия. Если же $F_{\text{факт}} \leq F_{\text{теор}}$, то между всеми выборочными средними нет существенных различий, т. е. все различия между любыми парами данных находятся в пределах ошибки опыта.

3.1. Дисперсионный анализ однофакторного опыта

С помощью дисперсионного анализа необходимо установить достоверность различий урожайности желтого люпина в зависимости от норм высева семян и выяснить степень влияния изучаемого фактора на общую изменчивость урожайности.

Данные, полученные от наблюдений, представлены в виде табл. 24.

**Таблица 24. Сводка наблюдений за урожайностью желтого люпина
в зависимости от норм высева семян, ц/га**

Вариант	Повторения			
	1	2	3	4
0,8 млн	24,8	23,7	24,4	23,5
1,0 млн	25,7	26,3	25,1	24,9
1,2 млн	28,5	29,0	30,4	29,3
1,4 млн	20,3	21,0	19,2	21,7

Дисперсионный анализ начинается с вычисления показателей, представленных в табл. 25.

**Таблица 25. Урожайность желтого люпина
в зависимости от норм высева семян, ц/га**

Вариант	Повторения x				Сумма по вариантам V	Среднее по вариантам $\bar{x}$
	1	2	3	4		
0,8 млн	24,8	23,7	24,4	23,5	96,4	24,1
1,0 млн	25,7	26,3	25,1	24,9	102,0	25,5
1,2 млн	28,5	29,0	30,4	29,3	117,2	29,3
1,4 млн	20,1	21,0	19,2	21,7	82,0	20,5
Сумма по повторениям P	99,1	100,0	99,1	99,4	$\chi = 397,6$	$x_0 = 24,9$

Суммы по вариантам V находят сложением урожайных данных всех четырех повторений каждого варианта (каждой строки):

$$24,8 + 23,7 + 24,4 + 23,5 = 96,4 \text{ и т. д.}$$

Суммы по повторениям P находят сложением урожайных данных каждой повторности по всем вариантам (по каждой колонке):

$$24,8 + 25,7 + 28,5 + 20,1 = 99,1 \text{ и т. д.}$$

Среднее арифметическое $\bar{x}$ по каждому варианту находят делением сумм по вариантам на число повторений:

$$\bar{x} = \sum V : n;$$

$$\bar{x}_1 = 96,4 : 4 = 24,1.$$

Правильность расчетов устанавливают по равенству:

$$\sum P = \sum V = \sum X;$$

$$397,6 = 397,6 = 397,6.$$

Для нахождения средней урожайности по всему полевому опыту $\bar{x}_0$ делят сумму всех урожайностей $\sum X$ на общее число делянок в опыте N (число наблюдений):

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum X}{N} = \frac{397,6}{16} = 24,9.$$

Для облегчения дальнейших расчетов исходные данные целесообразно преобразовать по соотношению

$$X_1 = X - A,$$

приняв за A число 25, близкое к $\bar{x}_0$. Преобразованные данные записывают в табл. 26.

Таблица 26. Таблица преобразованных данных

Вариант	$X_1 = X - 25$				Сумма по вариантам V_1
	1	2	3	4	
0,8 млн	-0,2	-1,3	-0,6	-1,5	-3,6
1,0 млн	0,7	1,3	0,1	-0,1	2,0
1,2 млн	3,5	4,0	5,4	4,3	17,2
1,4 млн	-4,9	-4,0	-5,8	-3,3	-18,0
Сумма по повторениям P_1	-0,9	0	-0,9	-0,6	$\sum X_1 = -2,4$

Правильность расчетов проверяют по равенству

$$\sum P_1 = \sum V_1 = \sum X_1;$$

$$-2,4 = -2,4 = -2,4.$$

Данные табл. 26 возводят в квадрат и заполняют табл. 27.

Таблица 27. Таблица квадратов

Вариант	X_1^2				V_1^2
	1	2	3	4	
0,8 млн	0,04	1,69	0,36	2,25	12,96
1,0 млн	0,49	1,69	0,01	0,01	4,00
1,2 млн	12,25	16,00	29,16	18,49	295,84
1,4 млн	24,01	16,00	33,64	10,89	324,00
Сумма по повторениям P_1	0,81	0,0	0,81	0,36	$(\sum X_1)^2 = 5,76$

Для дальнейших расчетов путем сложения находят соответствующие суммы:

$$\sum X_1^2 = 0,04 + 1,69 + \dots + 10,89 = 166,98;$$

$$\sum V_1^2 = 12,96 + 4,00 + 295,84 + 324,00 = 636,8;$$

$$\sum P_1^2 = 0,81 + 0,81 + 0,36 = 1,98.$$

Общее число наблюдений N (общее число делянок) в полевом опыте определяется умножением числа вариантов l на число повторений n :

$$l = 4;$$

$$n = 4;$$

$$N = ln = 4 \cdot 4 = 16.$$

Затем определяется корректирующий фактор C :

$$C = (\sum X_1)^2 : N = 5,76 : 16 = 0,36.$$

Сумму квадратов отклонений рассчитывают по следующим формулам:

– для общего варьирования

$$C_Y = \sum X_1^2 - C = 166,98 - 0,36 = 166,32;$$

– для варьирования повторений

$$C_p = \sum P_1^2 : l - C = 1,98 : 4 - 0,36 = 0,14;$$

– для варьирования вариантов

$$C_V = \sum V_1^2 : n - C = 636,8 : 4 - 0,36 = 158,84;$$

– для варьирования ошибки (остатка)

$$C_Z = C_Y - C_p - C_V = 166,32 - 0,14 - 158,84 = 7,34.$$

Для выяснения достоверностей различий между вариантами данные сводят в табл. 28.

Число степеней свободы для общего варьирования определяется общим числом наблюдений за минусом единицы:

$$N - 1 = 16 - 1 = 15.$$

Так же определяют степени свободы для повторений и вариантов:

$$n - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$l - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Число степеней свободы для остаточного варьирования определяют умножением чисел степеней свободы вариантов и повторений:

$$(n - 1)(l - 1) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Таблица 28. Результаты дисперсионного анализа

Вид варьирования	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия S^2	Критерий Фишера	
				F_{ϕ}	F_{05}
Варьирование общее C_Y	166,32	15	—	—	—
Варьирование повторений C_P	0,14	3	—	—	—
Варьирование вариантов C_V	158,84	3	52,95	64,57	3,86
Варьирование ошибки (остатка) C_Z	7,34	9	0,82	—	—

Дисперсию для различных видов варьирования находят делением суммы квадратов вида варьирования на число степеней свободы:

– для вариантов

$$S_V^2 = 158,84 : 3 = 52,95;$$

– для ошибки (остатка)

$$S_Z^2 = 7,34 : 9 = 0,82.$$

Критерий Фишера $F_{\text{факт}}$ находят делением дисперсии вариантов на дисперсию ошибок:

$$F_{\text{факт}} = \frac{S_V^2}{S_Z^2} = \frac{52,95}{0,82} = 64,57.$$

Значения критерия F_{05} определяют по прил. 2. Данный критерий находят для доверительной вероятности 95 % (соответственно уровень значимости 5 %). По горизонтали находят колонку с числом, соответствующим числу степеней свободы вариантов (числитель), а по вертикали – строку, соответствующую числу степеней свободы дисперсии ошибки (знаменатель). На пересечении находят число, показывающее табличное отношение дисперсий.

В рассматриваемом примере F_{05} равен 3,86.

Сравнивая теоретическое и фактическое значения критерия F , подтверждают или отвергают нулевую гипотезу $H_0 : d = 0$. В случае если $F_{\text{факт}} \geq F_{\text{теор}}$, нулевая гипотеза $H_0 : d = 0$ отвергается. Следовательно, между изучаемыми вариантами есть существенные различия. Если

$F_{\text{факт}} < F_{\text{теор}}$, нулевая гипотеза $H_0 : d = 0$ подтверждается и между вариантами существенных различий нет. Различия находятся в пределах ошибки опыта. В последнем случае дисперсионный анализ заканчивается и вычисляется только ошибка опыта $S_{\bar{x}}$.

В нашем примере $F_{\text{факт}} = 64,57 > F_{05} = 3,86$, значит, нулевая гипотеза отвергается, между изучаемыми нормами посева есть существенные различия по урожайности.

Таким образом, результат дисперсионного анализа показал, что есть существенные различия между вариантами опыта, однако неизвестно, какие именно варианты различаются. Поэтому проводят попарные сравнения средних значений. Простейшим из них является оценка значимости разности между средними по наименьшей существенной разности (НСР).

Для того чтобы оценить существенность частных различий, вычисляют:

– ошибку опыта:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{0,82}{4}} = 0,45 \text{ ц/га};$$

– ошибку разности средних:

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,82}{4}} = 0,64 \text{ ц/га};$$

– наименьшую существенную разность для 5%-ного (или 1%-ного) уровня значимости в абсолютных или относительных показателях:

$$\text{НСР}_{05} = t_{05} S_d = 2,26 \cdot 0,64 = 1,45 \text{ ц};$$

$$\text{НСР}_{05} = \frac{t_{05} S_d}{x_0} 100 = \frac{1,45}{24,9} \cdot 100 = 5,82 \text{ \%}.$$

Значение критерия t_{05} берут из прил. 1 для степеней свободы дисперсии остатка (ошибки). В рассматриваемом примере она равняется 9, следовательно, $t_{05} = 2,26$. Итоги результатов опыта и статистической обработки данных записывают в табл. 29.

В колонку «Урожайность» переносят среднее значение по вариантам из табл. 25. Отклонения от контроля находят, отнимая от средней урожайности по вариантам среднюю урожайность контроля. Если в опыте отсутствует стандарт (контроль), то среднюю урожайность

опытных вариантов сравнивают со средней урожайностью в опыте. Затем сравнивают полученные значения с величиной НСР. В том случае, если величина отклонения от контроля имеет положительный знак и больше величины НСР, делают вывод о том, что данный вариант существенно превышает контроль, и его относят к группе I.

Таблица 29. Результаты анализа

Норма высева, млн шт.	Урожайность, ц/га	Отклонение от контроля		Группа
		ц/га	%	
0,8 St	24,1	—	—	II
1,0	25,5	1,40	5,81	II
1,2	29,3	5,20	21,58	I
1,4	20,5	−3,60	−14,94	III
НСР ₀₅		±1,45	5,82	

Если отклонение от контроля является величиной отрицательной и больше НСР, значит, данный вариант существенно хуже контроля, и его относят к группе III.

Варианты, у которых отклонения с положительным или отрицательным знаком не выходят за пределы НСР, несущественно отличаются от контроля, и они относятся к группе II.

Таким образом, при возделывании люпина наивысшая урожайность получена в варианте с нормой высева 1,2 млн всхожих зерен. Этот вариант существенно превышает другие изучаемые варианты опыта. Увеличение нормы высева до 1,4 млн всхожих зерен существенно снизило урожайность люпина. Различия в урожайности между контролем и вариантом с нормой высева 1 млн всхожих зерен несущественны.

Дисперсионный анализ дает возможность получить представление о степени или доле выяснения того или иного фактора в общей дисперсии (изменчивости) признака. Это можно определить по следующим формулам:

– влияние варианта (норм высева)

$$\eta_v^2 = \frac{C_v}{C_y};$$

– влияние повторений

$$\eta_p^2 = \frac{C_p}{C_y};$$

– влияние случайных факторов

$$\eta_Z^2 = \frac{C_Z}{C_Y};$$

– влияние всех факторов

$$\eta_Y^2 = \eta_V^2 + \eta_P^2 + \eta_Z^2 = 1,0 \text{ (или 100 \%)}.$$

В рассматриваемом примере получим следующие результаты:

– влияние норм высева

$$\eta_V^2 = \frac{C_V}{C_Y} = \frac{158,84}{166,32} = 0,955 \text{ (95,5 \%)};$$

– влияние повторений (пестрота почвенного участка по уровню плодородия)

$$\eta_P^2 = \frac{C_P}{C_Y} = \frac{0,14}{166,32} = 0,001 \text{ (0,1 \%)};$$

– влияние случайных факторов

$$\eta_Z^2 = \frac{C_Z}{C_Y} = \frac{7,34}{166,32} = 0,044 \text{ (4,4 \%)}.$$

Задание 4.

Проведите дисперсионный анализ, сделайте заключение о достоверности различий между вариантами, найдите НСР.

Варианты заданий приведены в табл. 30, а исходные данные по урожайности различных сортов сельскохозяйственных растений – в табл. 31–33.

Таблица 30. **Варианты заданий для обработки экспериментальных данных методом дисперсионного анализа**

Номер варианта	Порядковый номер сорта
1	2, 4, 16, 18
2	1, 6, 11, 16, 17
3	13, 16, 19
4	2, 8, 10, 13, 17
5	1, 3, 17, 19
6	3, 5, 8, 12, 20
7	9, 11, 13, 15
8	4, 11, 12, 13, 14
9	5, 6, 7, 8, 10
10	1, 4, 7, 10

Номер варианта	Порядковый номер сорта
11	2, 5, 8, 11, 19
12	2, 4, 7, 11, 13
13	4, 9, 14, 19
14	14, 17, 20
15	1, 15, 16, 17, 18
16	3, 9, 10, 14, 19
17	6, 12, 13, 17
18	2, 6, 10, 14
19	1, 3, 5, 7, 11, 18
20	2, 17, 18, 19, 20
21	2, 4, 7, 10, 13, 17
22	1, 4, 10, 11, 15
23	2, 7, 12, 17, 19
24	3, 6, 9, 12, 14, 15
25	7, 8, 9, 10, 13

Таблица 31. Урожайность сортов ячменя

№ п/п	Сорт	Урожайность зерна по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	Стратус	49,4	47,6	51,0	49,2
2	Сильфид	48,6	48,9	46,5	47,4
3	Бровар	41,3	38,4	39,3	42,2
4	Серваль	54,3	56,6	52,2	55,1
5	Зубр	52,2	51,4	50,2	52,4
6	Батка	60,8	59,1	61,2	60,1
7	Ксанаду	58,5	57,4	56,9	58,2
8	Ладны	51,1	50,3	51,4	49,0
9	Водар	50,4	47,6	49,5	50,5
10	Толар	56,7	57,3	56,1	55,1
11	Магутны	39,1	37,9	40,0	40,2
12	Кангу	57,2	55,3	58,0	57,3
13	Марта	36,6	34,4	34,2	35,0
14	Корморан	35,9	33,1	34,8	33,2
15	Фэст	44,0	41,0	42,4	43,4
16	Скарб	42,7	41,7	40,5	41,1
17	Дача	38,3	39,3	37,1	38,1
18	Жана	51,4	50,5	52,0	53,1
19	Суверен	41,2	40,3	39,5	39,2
20	Добры	35,3	36,4	33,1	34,0

Таблица 32. Урожайность сортов картофеля

№ п/п	Сорт	Урожайность клубней по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	Скарб	211	205	198	202
2	Лазурит	246	237	251	232
3	Архидея	187	174	182	197
4	Одиссей	295	271	285	291
5	Каприз	306	320	313	303
6	Журавинка	216	205	218	211
7	Блажит	283	295	274	280
8	Снегирь	391	403	398	400
9	Бриз	307	295	304	310
10	Чародей	204	214	192	182
11	Лилея	280	273	270	291
12	Ред Скарлет	257	232	248	243
13	Бард	194	182	201	191
14	Уладар	187	180	164	171
15	Фальварак	240	231	260	243
16	Беллароза	364	402	386	370
17	Зорачка	308	310	291	283
18	Вега	333	303	315	321
19	Таисия	170	164	186	172
20	Манифест	233	251	240	230

Таблица 33. Урожайность сортов озимого рапса

№ п/п	Сорт	Урожайность маслосемян по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	2	3	4	5	6
1	Лидер	34,8	31,2	33,6	32,0
2	Элла	36,3	37,9	35,0	35,4
3	Добродей	38,6	37,0	40,1	37,9
4	Прогресс	36,1	34,2	33,6	36,3
5	Зорный	29,8	27,4	26,8	26,0
6	Вектар	39,5	40,4	39,7	39,0
7	Арсенал	28,1	27,6	29,4	28,1
8	Капитал	24,4	22,1	21,3	24,8
9	Мартын	21,8	18,6	19,4	18,2
10	Маяк	25,8	26,3	24,9	25,0
11	Боян	24,7	24,0	25,0	23,1
12	Нельсон	28,9	27,6	29,2	30,3
13	Геркулес	40,2	39,6	39,8	38,0
14	Днепр	43,9	44,5	44,3	42,3
15	Финесса	48,7	47,6	50,1	48,2
16	Прометей	37,5	36,4	37,2	38,5
17	Абакус	44,7	44,0	43,9	42,0
18	Румба	27,2	28,0	26,9	27,2

1	2	3	4	5	6
19	Сакс	23,5	22,1	23,8	22,2
20	Марафон	33,8	33,2	31,8	35,6

3.2. Дисперсионный анализ многофакторного опыта

Дисперсионный анализ многофакторного полевого опыта позволяет статистически оценить действие и взаимодействие изучаемых факторов на изменчивость результативного признака.

В полевом опыте эффект от совместного применения изучаемых факторов может быть больше (синергизм) или меньше (антагонизм) суммы эффектов от раздельного применения каждого из них. В первом случае такое взаимодействие является положительным, во втором – отрицательным. Когда факторы не взаимодействуют, то прибавка от совместного применения равна сумме прибавок от раздельного воздействия (аддитивизм).

Поэтому задачей многофакторного полевого опыта является изучение влияния факторов в отдельности и их взаимодействия на результативный признак.

Таким образом, общую изменчивость в многофакторном опыте можно представить в следующем виде:

– для двухфакторного опыта

$$C_y = (C_A + C_B + C_{AB}) + C_p + C_Z;$$

– для трехфакторного опыта

$$C_y = (C_A + C_B + C_C + C_{AB} + C_{AC} + C_{BC} + C_{ABC}) + C_p + C_Z.$$

Рассмотрим пример статистической обработки урожайных данных полевого двухфакторного опыта, поставленного в четырехкратной повторности ($n = 4$), где фактор A – сорта ($l_A = 3$), фактор B – дозы удобрений ($l_B = 4$).

Исходные данные занесем в табл. 34 и определим суммы и средние. Проверим правильность вычислений по соотношению

$$\sum P = \sum V = \sum X.$$

Определим суммы квадратов отклонений, для чего вначале все цифры табл. 34, за исключением средних, необходимо возвести в квадрат и занести в соответствующие графы табл. 35.

Таблица 34. Влияние различных доз азотных удобрений на урожайность сортов озимой пшеницы

А	В	Повторение				Суммы V	Средние
		I	II	III	IV		
Гирлянда (контроль)	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	32	29	25	21	107	26,8
	Фон + N ₆₀	48	46	44	42	177	44,3
	Фон + N ₉₀	58	54	52	50	214	53,5
	Фон + N ₁₂₀	61	55	58	52	226	56,5
Актер	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	30	31	27	21	109	27,3
	Фон + N ₆₀	46	50	47	36	179	44,8
	Фон + N ₉₀	60	62	55	49	226	56,5
	Фон + N ₁₂₀	68	70	64	50	252	63,0
Августина	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	36	30	28	22	116	29,0
	Фон + N ₆₀	50	46	45	34	175	43,8
	Фон + N ₉₀	52	50	47	42	191	47,8
	Фон + N ₁₂₀	64	60	57	50	231	57,8
Суммы P		605	583	546	469	2203 = $\sum X$	$\bar{x}_0 = 45,9$

Таблица 35. Таблица квадратов

А	В	Повторность				Суммы V ²
		I	II	III	IV	
Гирлянда (контроль)	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	1024	841	625	441	11 449
	Фон + N ₆₀	2 304	2 116	1 681	1 764	31 329
	Фон + N ₉₀	3 364	2 916	2 704	2 500	45 796
	Фон + N ₁₂₀	3 721	3 025	3 364	2 704	51 076
Актер	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	900	961	729	441	11 881
	Фон + N ₆₀	2 116	2 500	2 209	1 296	32 041
	Фон + N ₉₀	3 600	3 844	3 025	2 401	51 076
	Фон + N ₁₂₀	4 624	4 900	4 096	2 500	63 504
Августина	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	1 296	900	784	484	13 456
	Фон + N ₆₀	2 500	2 116	2 025	1 156	30 625
	Фон + N ₉₀	2 704	2 500	2 209	1 764	36 481
	Фон + N ₁₂₀	4 096	3 600	3 249	2 500	53 361
Суммы P ²		366 025	339 889	298 116	219 961	4 853 209 = $(\sum X)^2$

Число наблюдений составит:

$$N = l_A l_B n = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48.$$

Корректирующий фактор находим по формуле

$$C = (\sum X)^2 : N = 4\,853\,209 : 48 = 101\,108,5.$$

Суммы квадратов будут равны:

$$C_y = \sum X^2 - C = (1024 + 841 + \dots + 2\,500) - 101\,108 = \\ = 109\,119 - 101\,108,5 = 8\,010,5;$$

$$C_p = \sum P^2 : l_A l_B - C = (366\,025 + 339\,889 + 298\,116 + 219\,961) : (3 \cdot 4) - \\ - 101\,108,5 = 1\,223\,991,0 : 12 - 101\,108,5 = 890,8;$$

$$C_v = \sum V^2 : n - C = (11\,449 + 31\,329 + \dots + 53\,361) : 4 - 101\,108,5 = \\ = 432\,075 : 4 - 101\,108,5 = 6\,910,3;$$

$$C_z = C_y - C_p - C_v = 8\,010,5 - 890,8 - 6\,910,3 = 209,4.$$

Следующим этапом дисперсионного анализа многофакторного опыта является определение сумм квадратов для факторов A , B и их взаимодействия AB . Для этого составляем вспомогательную таблицу 3×4 , в которую заносим результаты суммы урожаев по вариантам из табл. 35 и находим необходимые для расчета главных эффектов суммы A и B (табл. 36).

Таблица 36. Определение главных эффектов и взаимодействия

Сорт (фактор A)	Удобрения (фактор B)				Суммы A
	Без удобрений (Фон Р ₆₀ К ₉₀)	Фон + N ₆₀	Фон + N ₉₀	Фон + N ₁₂₀	
Гирлянда (контроль)	107	177	214	226	724
Актер	109	179	226	252	766
Августина	116	175	191	231	713
Суммы B	332	531	631	709	$\sum X = 2\,203$

$$C_A = \sum A^2 : (l_b n) - C = (724^2 + 766^2 + 713^2) : (4 \cdot 4) - 101\,108,5 = \\ = 1\,619\,301 : 16 - 101\,108,5 = 97,8$$

при $(l_A - 1) = (3 - 1) = 2$ степенях свободы;

$$C_B = \sum B^2 : (l_A n) - C = (332^2 + 531^2 + 631^2 + 709^2) : (3 \cdot 4) - \\ - 101\,108,5 = 293\,027 : 12 - 101\,108,5 = 6\,643,8$$

при $(l_B - 1) = (4 - 1) = 3$ степенях свободы;

$$C_{AB} = C_V - C_A - C_B = 6910,3 - 97,8 - 6643,8 = 168,7$$

при $(l_A - 1)(l_B - 1) = (3 - 1) \cdot (4 - 1) = 6$ степенях свободы.

Затем составляем таблицу дисперсионного анализа и определяем значимость действия и взаимодействия изучаемых факторов по критерию Фишера (табл. 37).

Таблица 37. Результаты дисперсионного анализа двухфакторного опыта

Дисперсия	Суммы квадратов	Доля вариации, %	Степени свободы	Средний квадрат S^2	Критерий F	
					факт.	теор.
Общая C_V	8 010,5	100	$N - 1 = 47$	—	—	—
Повторений C_p	890,8	11,1	$n - 1 = 3$	—	—	—
Фактор C_A	97,8	1,2	$l_A - 1 = 2$	49,35	7,77	4,17
Фактор C_B	6 643,8	82,9	$l_B - 1 = 3$	2 214,6	348,76	3,32
Взаимодействия C_{AB}	168,7	2,1	$(l_A - 1) \times (l_B - 1) = 6$	28,1	4,43	2,53
Остаток (ошибка) C_Z	209,4	2,7	33	6,35	—	—

Таким образом, разложение межгрупповой дисперсии на составляющие позволяет определить доли влияния на результативный показатель каждого из факторов и их взаимодействия в отдельности.

Значение F_{05} находим по прил. 2, исходя из степеней свободы для дисперсии главных эффектов A , B и взаимодействия AB (числитель) и 33 степеней свободы дисперсии остатка (знаменатель). Так как $F_\phi > F_{05}$, эффект и их взаимодействия значимы на 5%-ном уровне.

Для оценки существенности частных различий определяем:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{6,35}{4}} = 1,26 \text{ ц/га};$$

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{n}} = 1,78 \text{ ц/га};$$

$$HCP_{05} = t_{05} S_d = 2,04 \cdot 1,78 = 3,63 \text{ ц/га}.$$

Определяем оценку существенности главных эффектов и взаимодействия по HCP_{05} , при этом частные средние опираются на $n = 4$, а средние для главного эффекта A — на $nl_B = 4 \cdot 4 = 16$ и средние для главного эффекта B — на $nl_A = 4 \cdot 3 = 12$ наблюдений. Вычисляем S_d и HCP_{05} для главных эффектов:

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{nl_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35}{4 \cdot 4}} = 0,89 \text{ ц/га};$$

$$HCP_{05(A)} = t_{05} S_d = 2,04 \cdot 0,89 = 1,82 \text{ ц/га}.$$

Для фактора B и взаимодействия AB

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{nl_A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35}{4 \cdot 3}} = 1,03 \text{ ц/га};$$

$$HCP_{05(B)} = t_{05} \cdot S_d = 2,04 \cdot 1,03 = 2,1 \text{ ц/га}.$$

Затем составляем итоговую таблицу (табл. 38).

Таблица 38. **Итоговая таблица дисперсионного анализа**

Фактор A (сорт)	Фактор B (удобрения)	Средняя урожайность, ц/га	Разность по факторам		HCP ₀₅
			A	B	
Гирдянда (контроль)	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	26,8	–	–	3,63
	Фон + N ₆₀	44,3	–	17,5	
	Фон + N ₉₀	53,5	–	26,7	
	Фон + N ₁₂₀	56,5	–	29,7	
Актер	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	27,3	0,5	–	
	Фон + N ₆₀	44,8	0,5	17,5	
	Фон + N ₉₀	56,5	3,0	29,2	
	Фон + N ₁₂₀	63,0	6,5	35,7	
Августина	Без удобрений (Фон P ₆₀ K ₉₀)	29,0	2,2	–	
	Фон + N ₆₀	43,8	0,5	14,8	
	Фон + N ₉₀	47,8	–5,7	18,8	
	Фон + N ₁₂₀	57,8	1,3	28,8	
HCP ₀₅			1,82	2,10	

В табл. 38 показываем три значения HCP₀₅: одно – для оценки существенности частных различий между средними (HCP₀₅ = 3,63 ц/га), а два других – для оценки существенности разности средних по фактору A (HCP₀₅ = 1,82 ц/га) и фактору B (HCP₀₅ = 2,10 ц/га).

Итоговые данные можно представить графически (рис. 5).

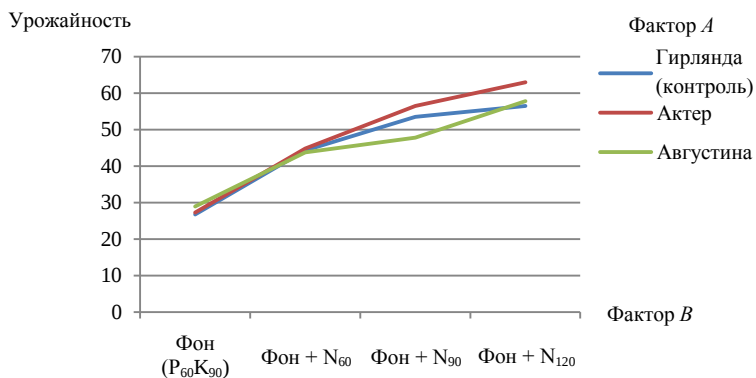


Рис. 5. Урожайность сортов озимой пшеницы в зависимости от доз азотных удобрений

Таким образом, поскольку фактические критерии Фишера F_A и F_B составляют соответственно 7,77 и 348,76, что значительно больше теоретических критериев (4,17 и 3,32), то влияние сорта и удобрений достоверно. Критерий Фишера для взаимодействия факторов F_{AB} составляет 4,43, что также больше теоретического значения (2,53), следовательно, взаимодействие сорта и удобрений существенно.

Достоверная прибавка от применения удобрений (B) получена по всем дозам. Сорт Актер (фактор A) достоверно увеличивал урожайность при дозах N_{90} и N_{120} , по сравнению с другими сортами, где эти различия были недостоверны или существенно уступали.

Задание 5.

Выполните дисперсионный анализ двухфакторного полевого опыта по изучению влияния известкования и доз фосфорных удобрений на урожайность сена злаково-бобовых трав, а также изучению влияния густоты посадки и удобрений на выход семенной фракции картофеля.

Исходные данные приведены в табл. 39–40.

Таблица 39. Влияние известкования и доз фосфорных удобрений на урожайность сена злаково-бобовых трав, ц/га

Известкование <i>A</i>	Дозы фосфорных удобрений <i>B</i>	Повторение <i>x</i>			
		I	II	III	IV
0	B_0	23	21	25	27
	B_1	27	24	27	30
	B_2	30	29	32	32
	B_3	32	36	31	32
1	B_0	27	24	30	26
	B_1	30	31	34	30
	B_2	31	33	36	38
	B_3	36	38	39	34

Таблица 40. Влияние густоты посадки и удобрений на выход семенной фракции картофеля, т/га

Густота посадки, фактор <i>A</i>	Система удобрений	Повторение <i>x</i>			
		I	II	III	IV
70 тыс. кл./га	Минеральные удобрения B_1	18,4	20,0	21,2	17,9
	Органические удобрения B_2	16,9	19,6	20,2	20,7
	Минеральные + органические B_3	22,5	21,4	20,7	22,1
60 тыс. кл./га	B_1	19,6	20,2	22,1	19,2
	B_2	15,2	14,3	14,0	14,2
	B_3	20,2	18,9	20,4	16,5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Глуховцев, В. В. Практикум по основам научных исследований в агрономии / В. В. Глуховцев, В. Г. Кириченко, С. Н. Зудилин. – М. : Колос 2006. – 240 с.
2. Доспехов, Б. А. Методика полевого опыта / Б. А. Доспехов. – М. : Агропромиздат, 1985. – 351 с.
3. Основы научных исследований в агрономии / В. Ф. Моисейченко, М. Ф. Трифонова, А. Х. Заверюха, В. Е. Ещенко. – М. : Колос, 1996. – 336 с.
4. Кирюшин Б. Д. Основы научных исследований в агрономии / Б. Д. Кирюшин, Р. Р. Усманов, И. П. Васильев. – М. : КолосС, 2009. – 398 с.
5. Равков, Е. В. Основы научных исследований и УИРС. Статистические методы обработки экспериментальных данных / Е. В. Равков, Г. И. Витко, М. Н. Авраменко. – Горки : БГСХА, 2018. – 76 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значение критерия t на 5%-ном и 1%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Уровень значимости	
	0,05	0,01
1	12,71	63,66
2	4,30	9,93
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,37	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
11	2,20	3,11
12	2,18	3,06
13	2,16	3,01
14	2,15	2,98
15	2,13	2,95
16	2,12	2,92
17	2,11	2,90
18	2,10	2,88
19	2,09	2,86
20	2,09	2,85
21	2,08	2,83
22	2,07	2,82
23	2,07	2,81
24	2,06	2,80
25	2,06	2,79
26	2,06	2,78
27	2,05	2,77
28	2,05	2,76
29	2,05	2,76
30	2,04	2,75
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Значения критерия F на 5%-ном уровне значимости (вероятность 95 %)

Степени свободы для меньшей дисперсии (знаменателя)	Степени свободы для большей дисперсии (числителя)													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	24	50	100
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	249	252	253
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,45	19,47	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,64	8,58	8,56
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,77	5,70	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,53	4,44	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,27	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,84	3,75	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,12	3,03	2,98
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,90	2,80	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,79	2,64	2,59
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,61	2,50	2,45
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,50	2,40	2,35
13	4,64	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,42	2,32	2,26
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,35	2,24	2,19
15	4,54	3,70	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,29	2,18	2,12
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,24	2,13	2,07
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,19	2,08	2,02
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,15	2,04	1,98
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,11	2,00	1,94
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,08	1,96	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,05	1,93	1,87

22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,03	1,91	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,20	2,00	1,88	1,82
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,18	1,98	1,86	1,80
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,25	2,24	2,16	1,96	1,84	1,77
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	1,95	1,82	1,76
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	1,91	1,78	1,72
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,12	2,09	1,89	1,76	1,69
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,79	1,66	1,59
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,95	1,74	1,60	1,52
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,63	1,48	1,39

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Вариационный анализ	4
2. Корреляционно-регрессионный анализ.....	32
3. Дисперсионный анализ.....	46
3.1. Дисперсионный анализ однофакторного опыта.....	47
3.2. Дисперсионный анализ многофакторного опыта.....	57
Библиографический список	64
Приложения	65