МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

И. В. Шафранская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

В двух частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
в сфере высшего образования Республики Беларусь
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений образования, обеспечивающих
получение общего высшего образования по специальности
6-05-0811-04 Агробизнес*

Горки
Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия
2025

УДК 330.45(075.8)
ББК 22.18 я73
Ш30

*Одобрено методической комиссией
экономического факультета 27.05.2025 (протокол № 9)
и Научно-методическим советом
Белорусской государственной сельскохозяйственной академии
28.05.2025 (протокол № 10)*

Автор:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*

Рецензенты:
доктор экономических наук, доцент *С. В. Макрак*;
кандидат педагогических наук, доцент *О. Л. Сапун*

Шафранская, И. В.

Ш30 Исследование операций в экономике. Курс лекций : в 2 ч. Ч. 2 : учебно-методическое пособие / И. В. Шафранская. – Горки : Белорус. гос. с.-х. акад., 2025. – 189 с.
ISBN 978-985-882-696-3.

Приведена информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе методов исследования операций осуществляется решение задач по оптимизации управления предприятиями АПК. Издание предназначено для подготовки студентов к проведению научных исследований с применением методов исследования операций и персональных компьютеров.

Для студентов учреждений образования, обеспечивающих получение общего высшего образования по специальности 6-05-0811-04 Агробизнес.

УДК 330.45(075.8)
ББК 22.18 я73

ISBN 978-985-882-696-3 (ч. 2)
ISBN 978-985-882-694-9

5. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

5.1. Понятие теории расписаний. Классификация задач теории расписаний

Теория расписаний возникла на базе оперативно-календарного планирования производства в начале XX в. Ее основоположником считается Генри Лоренс Гант, впервые предложивший оптимизировать планирование с помощью специальных графиков (Гант-карт).

Под *операцией* в теории расписаний понимают какое-либо действие, направленное на достижение цели. Операции могут производиться над деталями, узлами, машинами, работами, которые принято называть *требованиями*.

Операция – это детализированное мероприятие. На производстве с точки зрения технологии часто бывает безразлично, в каком порядке выполняются те или иные операции, но в интересах конкретного исполнителя этот порядок играет важную роль. Это вызвано приоритетностью заказов, затратами, связанными с различным порядком их выполнения на имеющемся оборудовании. Раздел исследования операций, который изучает эффективность выполнения операций в зависимости от порядка их следования, называется *теорией расписания*.

Операции выполняются на машинах или оборудовании, которые принято называть *обслуживающим устройством*.

Под машиной или оборудованием понимают любое обслуживающее устройство, способное выполнять операцию.

Множество машин, которые могут выполнять некоторое множество операций, называются *системой обслуживания*.

Операции назначаются на машины согласно некоторой *дисциплине обслуживания.* Совокупность машин, операций и дисциплин назначения операций на машины называется *процессом обслуживания*.

Для него составляется расписание, т. е. порядок обслуживания требований обслуживающим устройством. *Дисциплина обслуживания*, т. е. система выполнения работ на машинах (требований на обслуживающих устройствах), может быть:

– конвейерной,

– случайной,

– произвольной.

В основном модели, рассматриваемые в теории расписаний, могут быть отнесены к классу детерминированных задач, т. е. наилучшее решение принимается в условиях определенности, когда четко известны операции и все значения неконтролируемых факторов.

В общем случае для задачи упорядочения должны быть известны:

1) подлежащие выполнению операции;

2) количество и типы обслуживающих устройств;

3) трудоемкость или время и порядок выполнения операций;

4) критерий эффективности расписания.

Задачи упорядочения различаются числом выполняемых операций, характером поступления требований в систему обслуживания (одновременно или в некоторые фиксированные моменты времени), количеством и последовательностью участия обслуживающих устройств в выполнении конкретных операций (системы с одним, двумя, тремя и более обслуживающими устройствами).

В настоящее время более глубоко изучены модели простых процессов обслуживания. Процесс называется *простым*, если:

1) каждое обслуживающее устройство может быть назначено в любой момент времени;

2) работы представляют строго упорядоченную последовательность требований. Для заданного (конкретного) требования существует не более одного требования, непосредственно следующего за ним, и не более одного, непосредственно предшествующего ему;

3) каждое требование обслуживается только на одном обслуживающем устройстве;

4) имеется только по одному обслуживающему устройству каждого вида;

5) отсутствует прерывание операций обслуживания;

6) одновременно не может реализоваться более одной операции одной и той же работы;

7) в каждый момент времени обслуживающее устройство может выполнять не более одной операции.

5.2. Системы с одним обслуживающим устройством

На практике выделяют три вида задач оптимального упорядочения систем с одним обслуживающим устройством. Дадим *описание данной системы обслуживания*.

В систему, состоящую из одного обслуживающего устройства, для выполнения поступает конечное множество требований $N = \{1,2, \dots, n\}$. Предполагается, что все эти требования поступают одновременно в нулевой момент времени. Под требованием подразумевается любой объект, например, детали, обрабатываемые на одном станке; сельскохозяйственные операции, выполняемые одним механизмом, работы, выполняемые бригадой строителей и т. д.

Задача состоит в том, чтобы указать расписание обслуживания требований, доставляющее оптимум тому или другому критерию эффективности.

Под *расписанием* понимают такое предписание, по которому в каждый момент времени можно установить, простаивает обслуживающее устройство или нет. Если оно не простаивает, то можно указать, какое из требований оно обслуживает. Таким образом, *расписание* – это последовательность выбора требований на обслуживание, которое обозначается:

$$\pi_n = (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

где i_2 – элемент из множества N, занимающий в последовательности π_n второе место.

Предполагают, что обслуживающее устройство всегда готово для обслуживания требований. И если имеются ожидающие обслуживания требования (т. е. очередь), то обслуживающее устройство не простаивает. Обслуживание каждого последующего требования начинается сразу после окончания обслуживания предыдущего. Если нужна настройка обслуживающего устройства, то ее продолжительность присоединяется к длительности обслуживания требования.

Прерывание процесса обслуживания требования не допускается, т. е. требование, начав обслуживаться, будет занимать обслуживающее устройство до тех пор, пока не будет полностью обслужено. Задачи теории расписаний оцениваются определенным *критерием эффективности.*

I. По определению системы обслуживания все требования поступают в систему одновременно в нулевой момент времени и одно из требований обслуживается, а остальные стоят в очереди, следовательно, *первая задача теории расписаний состоит в том, чтобы минимизировать суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди*.

Очевидно, что суммарная длительность обслуживания всех требований равна сумме обслуживания каждого требования. Но время обслуживания каждого требования заранее известно и, следовательно, суммарная длительность обслуживания всех требований одинакова для всех n! возможных расписаний. Поэтому в качестве критерия эффективности данная величина не пригодна. В качестве критерия нельзя принимать максимальное или минимальное количество требований в системе, так как эти критерии не зависят от порядка обслуживания требований.

Введем условные обозначения:

t_i – продолжительность обслуживания требований вида i;

$\underline{t}_i$ – время начала обслуживания требований вида i;

$\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания требований вида i, $i \in N$.

Пусть α_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени. Тогда суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди, будет зависеть от расписания и для заданного расписания π_n будет вычисляться по формуле:

$$\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i \, .$$

Первая задача состоит в том, чтобы построить такое расписание, при котором критерий эффективности $\Phi_1(\pi_n)$ будет минимальным.

Рассмотрим *алгоритм решения первой задачи*.

Для решения первой задачи, т. е. построения такого расписания, которое минимизирует критерий эффективности –

$$\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i \, ,$$

необходимо для всех требований вычислить отношение –

$$\frac{t_i}{\alpha_i}, \; i \in N$$

и упорядочить требования по возрастанию этих отношений, т. е.:

$$\frac{t_i}{\alpha_i} \le \frac{t_{i+1}}{\alpha_{i+1}}, \; i \in N.$$

Пример. Необходимо построить расписание обслуживания требований одним устройством, минимизирующее суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди для информации, представленной в табл. 5.1, и вычислить величину штрафа.

Т а б л и ц а 5.1. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования						
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Продолжительность обслуживания требования, t_i	5	2	7	10	6	8	4
Штраф за ожидание требования в очереди в течение единицы времени, α_i	10	8	20	2	3	1	20

Для информации задачи, заданной в табл. 5.1, определим:

а) время начала обслуживания требований по формуле:

$$\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i\,,$$

т. е. время начала обслуживания последующего требования равно сумме времени начала обслуживания предыдущего требования и непосредственного времени его обслуживания;

б) пусть требования будут обслуживаться в порядке, установленном в табл. 5.1 (неоптимальном порядке обслуживания). Тогда требование T_1 поступает на обслуживание в нулевой момент времени, а требование T_2 – в момент времени, равный 0 + 5 = 5, а требование T_3 – в момент времени 5 + 2 = 7 и т. д. (табл. 5.2);

в) определяем штраф, связанный с ожиданием каждого требования в очереди при неоптимальном порядке их обслуживания (см. табл. 5.2):

$$\alpha_i \cdot \underline{t}_i\,;$$

г) рассчитаем суммарный штраф:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i\,.$$

В нашем примере он равен:

$$0 + 40 + 140 + 28 + 72 + 30 + 760 = 1070.$$

Таким образом, для расписания:

$$\pi_n = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7)$$

критерий эффективности равен 1070 у. д. е.:

$$\Phi_1(\pi_n) = 1070 \text{ у. д. е.};$$

д) вычислим для каждого требования отношение (см. табл. 5.2):

$$\frac{t_i}{\alpha_i};$$

е) упорядочим требования по возрастанию этих отношений, т. е.:

$$\frac{t_i}{\alpha_i} \le \frac{t_{i+1}}{\alpha_{i+1}}, \, i \in N,$$

и определим оптимальный порядок обслуживания требований (см. табл. 5.2);

Т а б л и ц а 5.2. **Решение первой задачи**

Параметры	Требования						
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Продолжительность обслуживания требования, t_i	5	2	7	10	6	8	4
Штраф за ожидание требования в очереди в течение единицы времени, α_i	10	8	20	2	3	1	20
Неоптимальный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6	7
Время начала обслуживания требования, $\underline{t}_i$	0	5	7	14	24	30	38
Штраф, связанный с ожиданием требования в очереди, $\alpha_i \cdot \underline{t}_i$	0	40	140	28	72	30	760
Отношение $\frac{t_i}{\alpha_i}$	0,5	0,25	0,35	5	2	8	0,2
Оптимальный порядок обслуживания	4	2	3	6	5	7	1
Время начала обслуживания требования, $\underline{t}_i$	13	4	6	24	18	34	0
Штраф, связанный с ожиданием требования в очереди, $\alpha_i \cdot \underline{t}_i$	130	32	120	48	54	34	0

ж) найдем время начала обслуживания требований для оптимального порядка их обслуживания:

$$(\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i)$$

и расчеты внесем в табл. 5.2;

з) рассчитаем штраф, связанный с ожиданием каждого требования в очереди при оптимальном порядке их обслуживания:

$$\alpha_i \cdot \underline{t}_i ;$$

и) определим суммарный штраф:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i .$$

При оптимальном порядке обслуживания требований он равен:

130 + 32 + 120 + 48 + 54 + 34 + 0 = 418 у. д. е.

Следовательно, оптимальным расписанием является расписание –

$$\pi_n = (T_7, T_2, T_3, T_1, T_5, T_4, T_6)$$

и для этого расписания критерий эффективности равен 418 у. д. е.:

$$\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i = 418 \text{ у. д. е.};$$

к) эффект от оптимизации расписания обслуживания требований для первой задачи, в нашем примере, равен:

Э = 1070 – 418 = 652 у. д. е.

II. Рассмотрим *вторую задачу теории расписаний* системы с одним обслуживающим устройством.

Допустим, после завершения обслуживания требование остается в системе и ожидает до тех пор, пока не будет обслужено последнее из множества N, т. е. до момента времени:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot$$

Если γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания, то суммарное количество средств, связываемых всеми требованиями после завершения их обслуживания, будет равно:

$$\Phi_2(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \overline{t_i}) ,$$

где $\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания i-го требования. Оно равно сумме времени начала его обслуживания и времени его непосредственного обслуживания:

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i .$$

Вторая задача состоит в том, чтобы построить расписание, минимизирующее суммарную величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.

Для решения второй задачи необходимо для всех требований вычислить отношение –

$$\frac{t_i}{\gamma_i},\ i \in N,$$

и упорядочить требования по убыванию этих отношений, т. е.:

$$\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}},\ i \in N.$$

Пример. Необходимо построить расписание обслуживания требований одним устройством, минимизирующее величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе до момента завершения обслуживания последнего требования, для данных, представленных в табл. 5.3.

Т а б л и ц а 5.3. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	3	5	4	2	6	8
Количество средств, связываемых требованием в единицу времени после завершения его обслуживания, γ_i	3	2	8	1	2	5

Требуется вычислить величину средств, связываемых требованиями, находящимися в системе после завершения обслуживания.

Допустим, требования будут обслуживаться в том порядке, который задан в табл. 5.3 (неоптимальный порядок обслуживания).

а) определим время окончания обслуживания каждого требования:

$$\overline{t_i} = \underline{t}_i + t_i$$

при неоптимальном порядке их обслуживания (табл. 5.4).

Т а б л и ц а 5.4. **Решение второй задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	3	5	4	2	6	8
Количество средств, связываемых требованием в единицу времени после завершения его обслуживания, γ_i	3	2	8	1	2	5
Неоптимальный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6
Время окончания обслуживания требования, $\overline{t_i}$	3	8	12	14	20	28
Время ожидания требования в системе после его обслуживания, $T - \overline{t_i}$	25	20	16	14	8	0
Количество средств, связываемых требованием после завершения его обслуживания, $\gamma_i(T - \overline{t_i})$	75	40	128	14	16	0
Отношение $\dfrac{t_i}{\gamma_i}$	1	2,5	0,5	2	3	1,6
Оптимальный порядок обслуживания	5	2	6	3	1	4
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	24	11	28	13	6	21
Время ожидания требования в системе после его обслуживания, $T - \bar{t}_i$	4	17	0	15	22	7
Количество средств, связываемых требованием после завершения его обслуживания, $\gamma_i(T - \overline{t_i})$	12	34	0	15	44	35

Например, требование T_1 начинает обслуживаться в нулевой момент времени и обслуживается 3 единицы времени, следовательно, время окончания его обслуживания будет 3 единицы. Требование T_2 начинает обслуживаться в третий момент времени и обслуживается 5 единиц времени, т. е. время окончания его обслуживания будет 3 + 5 = 8 единиц и т. д. (см. табл. 5.4);

б) вычислим время окончания обслуживания всех требований в системе по формуле:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i \ .$$

Для нашего случая:

$$T = 3 + 5 + 4 + 2 + 6 + 8 = 28 \text{ единиц времени;}$$

в) определим время ожидания каждого требования в системе после завершения его обслуживания при неоптимальном порядке обслуживания:

$$T - \bar{t}_i \,.$$

Результаты расчетов заносим в табл. 5.4;

г) найдем количество средств, связываемых каждым требованием после завершения обслуживания при неоптимальном порядке их обслуживания:

$$\gamma_i (T - \bar{t}_i)\,;$$

д) рассчитаем суммарное количество средств, связываемых требованиями после их обслуживания при неоптимальном порядке их обслуживания:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \bar{t}_i)\,.$$

В данном случае критерий эффективности равен:

$$75 + 40 + 128 + 14 + 16 + 0 = 273 \text{ у. д. е.,}$$

т. е. для расписания –

$$\pi_n = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$$

критерий эффективности равен:

$$\Phi_2\,(\pi_n) = 273 \text{ у. д. е.;}$$

е) вычислим для каждого требования отношение (табл. 5.4):

$$\frac{t_i}{\gamma_i}\,;$$

ж) упорядочим требования по убыванию этих отношений, т. е.:

$$\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}}\,,\ i \in N,$$

и установим оптимальный порядок обслуживания требований (табл. 5.4);

з) найдем время ожидания каждого требования в системе после завершения его обслуживания при оптимальном порядке обслуживания требований:

$$(T - \bar{t}_i);$$

и) рассчитаем количество средств, связываемых каждым требованием после завершения обслуживания при условии оптимального порядка их обслуживания:

$$(\gamma_i (T - \bar{t}_i));$$

к) определим суммарное количество средств, связываемых требованиями после их обслуживания при оптимальном порядке обслуживания требований:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \bar{t}_i).$$

В нашем случае для оптимального расписания –

$$\pi_n = (T_5, T_2, T_4, T_6, T_1, T_3),$$

критерий эффективности равен:

$$\Phi_2(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \bar{t}_i) = 12 + 34 + 15 + 44 + 35 = 140 \text{ у. д. е.};$$

л) эффект от оптимизации расписания обслуживания требований для второй задачи, в нашем случае, равен:

$$Э = 273 - 140 = 133 \text{ у. д. е.}$$

III. Рассмотрим *третью задачу оптимального упорядочения*.

Допустим, D_i – директивный срок обслуживания требования вида i, $i \in N$, т. е. это момент времени, к которому желательно завершить процесс обслуживания этого требования. Но не всегда удается построить расписание, при котором обслуживание каждого требования вида i будет завершено не позднее директивного срока D_i.

Тогда величина z_i будет обозначать задержку (т. е. превышение директивного срока окончания обслуживания) в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком:

$$z_i = \max\{0, \bar{t}_i - D_i\}, \ i \in N.$$

Пусть δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени. Тогда критерий эффективности, связанный с задержкой требований, запишем таким образом:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i \ .$$

Он позволяет вычислять величину максимального штрафа, связанного с задержкой обслуживания требований.

Третья задача состоит в том, чтобы построить такое расписание π_n, которое будет доставлять минимум критерию эффективности $\Phi_3(\pi_n)$.

Третья задача построения расписания решается с помощью следующего алгоритма:

1) вычисляем время окончания обслуживания всех требований по формуле:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i \ ;$$

2) среди всех неупорядоченных требований находим такое требование с номером l, для которого будет выполняться условие:

$$\delta_\ell \cdot z_\ell = \min \delta_\ell z'_\ell \ ,$$

где z'_ℓ – задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при допущении, что последним обслуживается рассматриваемое требование.

При этом z'_ℓ определяется по формуле:

$$z'_\ell = \max\{0; T - D_i\} \ ,$$

а минимальное значение произведения $\delta_\ell z'_\ell$ вычисляется только по множеству неупорядоченных требований;

3) найденное требование с номером l ставим выполняться последним среди рассматриваемого множества. Исключаем требование с номером l из рассмотрения, а для оставшихся требований принимаем T равным:

$$T - t_\ell$$

и переходим к шагу 2, в противном случае – найден оптимальный порядок обслуживания требований.

Пример. Требуется построить расписание обслуживания требований одним устройством, оптимальное по критерию:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i z_i ,$$

для данных, представленных в табл. 5.5.

Рассчитаем параметры системы при неоптимальном порядке обслуживания требований:

а) определим время окончания обслуживания каждого требования по формуле:

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$$

при неоптимальном порядке их обслуживания.

Т а б л и ц а 5.5. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	2	4	3	5	1	6
Штраф за задержку обслуживания требования на единицу времени, δ_i	4	3	2	2	5	1
Директивный срок обслуживания требования, D_i	4	7	6	8	4	10

Расчеты заносим в табл. 5.6;

б) вычислим задержку в обслуживании каждого требования по сравнению с его директивным сроком, используя формулу:

$$z_i = \bar{t}_i - D_i .$$

При этом, если:

$$\bar{t}_i < D_i ,$$

то z_i принимаем равным нулю.

Т а б л и ц а 5.6. **Решение третьей задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Продолжительность обслуживания требования, t_i	2	4	3	5	1	6
Штраф за задержку обслуживания требования на единицу времени, δ_i	4	3	2	2	5	1
Директивный срок обслуживания требования, D_i	4	7	6	8	4	10
Неопределенный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	2	6	9	14	15	21
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком, z_i	0	0	3	6	11	11
Штраф за задержку в обслуживании требования, $\delta_i \cdot z_i$	0	0	6	12	55	11
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при $T = 21$)	17	14	15	13	17	11
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	68	42	30	26	85	11
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при $T = 15$)	11	8	9	7	11	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	44	24	18	14	55	–
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при $T = 10$)	6	3	4	–	6	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	24	9	8	–	30	–
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при $T = 7$)	3	0	–	–	3	–

Окончание табл. 5.6

1	2	3	4	5	6	7
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	12	0	–	–	15	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при $T = 3$)	0	–	–	–	0	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	0	–	–	–	0	–
Оптимальный порядок обслуживания	1	3	4	5	2	6
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	2	7	10	15	3	21
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком, z_i	0	0	3	7	0	11
Штраф за задержку в обслуживании требования, $\delta_i \cdot z_i$	0	0	6	14	0	11

Например, для требования T_1 задержка в обслуживании равна (см. табл. 5.6):

$$z_1 = \bar{t}_1 - D_1 = 2 – 4 = 0,$$

а для требования T_3 –

$$z_3 = \bar{t}_3 - D_3 = 9 – 6 = 3;$$

в) определим штраф за задержку в обслуживании каждого требования при неоптимальном порядке обслуживания:

$$\delta_i \cdot z_i;$$

г) найдем значение критерия эффективности задачи при неоптимальном расписании:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i = 55 \text{ у. д. е.};$$

д) оптимизируем порядок обслуживания требований, для этого сначала вычислим время обслуживания всех требований в системе (или время обслуживания последнего требования):

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot$$

В нашем примере:

$T = 2 + 4 + 3 + 5 + 1 + 6 = 21$ единица времени;

е) определим задержку в обслуживании каждого требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что последним обслуживается рассматриваемое требование с номером i. Данную задержку в обслуживании вычисляем по формуле:

$$z_i' = \max\{0;\ T - D_i\}.$$

Например, для требования T_1 данная задержка равна:

$$z_1' = T - D_1 = 21 - 4 = 17 \text{ единиц времени;}$$

ж) рассчитаем штраф за задержку в обслуживании каждого требования при условии, что оно обслуживается последним:

$$\delta_i \cdot z_i';$$

з) найдем требование, для которого произведение $\delta_i \cdot z_i'$ самое минимальное. Это требование T_6, оно будет обслуживаться последним. Исключаем его из рассмотрения;

и) после исключения T_6 осталось множество требований –

$$(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5),$$

для которых расчет повторяем сначала с пункта д) и определяем для них:

$$T = 2 + 4 + 3 + 5 + 1 = 15.$$

Вычисляем z_i'. Например, для требования T_1 задержка в обслуживании будет равна:

$$z_1' = T - D_1 = 15 - 4 = 11 \text{ и т. д.}$$

Для множества требований –

$$(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$$

определяем требование, для которого произведение $\delta_i \cdot z_i'$ будет минимальным. Это требование T_4, оно будет обслуживаться предпоследним. Изымаем его из рассмотрения и расчеты повторяем сначала с пункта д) и т. д. Для требований T_1 и T_5 произведение $\delta_i \cdot z_i'$ равно нулю, поэтому порядок обслуживания этих требований несущественен и любое из них может быть выбрано для обслуживания, как первым, так и вторым.

Таким образом, порядок обслуживания требований, которому соответствует минимальное значение Φ_3, будет следующим:

$$([T_1, T_5], T_2, T_3, T_4, T_6).$$

Запись $[T_1, T_5]$ говорит о том, что порядок обслуживания требований T_1 и T_5 безразличен;

к) используя методику пунктов а), б), в), г), определим значение критерия эффективности задачи при оптимальном расписании:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i = 14 \text{ у. д. е.};$$

л) рассчитаем, для нашего примера, эффект от оптимизации расписания обслуживания требований. Для третьей задачи он равен:

$$\text{Э} = 55 - 14 = 41 \text{ у. д. е.}$$

Для наглядности расписание обслуживания требований в системе с одним обслуживающим устройством можно представить графически.

Для этих целей наиболее часто пользуются графиком Ганта, который представляет собой программу занятости обслуживающего устройства. Каждая операция на графике изображается масштабированным отрезком прямой, соответствующим длительности обслуживания требования. Изобразим оптимальное расписание для информации третьей задачи в виде кусочно-непрерывной функции, т. е. в виде (рис. 5.1).

Кроме графика Ганта для наглядного изображения расписания используются планировочный и ленточный графики. *Планировочный график* позволяет схематически изобразить процесс обслуживания требований. При этом каждому требованию отводится одна строка, в которой проводится линия, соответствующая времени обслуживания требования в выбранном масштабе времени (рис. 5.2).

Ленточный график – это изображение последовательности обслуживания требований, время обслуживания которых на графике изображается последовательно с учетом длительности их обслуживания (рис. 5.3).

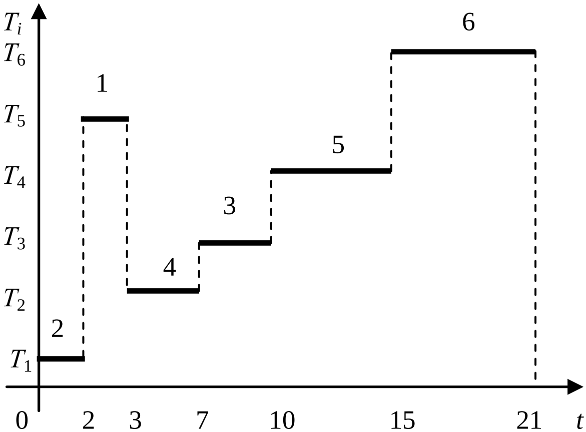


Рис. 5.1. График Ганта

Рис. 5.2. Планировочный график

Рис. 5.3. Ленточный график

5.3. Последовательное обслуживание (Общая задача Джонсона. Задача Джонсона для двух и трех машин)

Общая задача Джонсона. Типичной задачей теории расписаний является проблема составления расписания работы технологической линии, состоящей из m-станков $\left(i=1,\overline{m}\right)$, на которых нужно обработать партии из n-деталей $\left(j=1,\overline{n}\right)$. Критерием эффективности расписания станет минимальное время обработки всех n-деталей, каждая из которых должна последовательно пройти обработку на каждом станке. Исходными данными задачи служит продолжительность обработки на i-м станке j-й детали, т. е. t_{ij}.

Таким образом, необходимо определить порядок обработки n-деталей, минимизирующий общее время их изготовления.

При условиях:

1) обработка каждой детали на i-м станке должна начинаться не ранее чем окончится на станке i–1;

2) на каждом станке одновременно может обрабатываться не более одной детали;

3) начавшаяся операция не прерывается до полного ее завершения.

Такая задача получила название задачи Джонсона. В 1954 г. американский ученый С. М. Джонсон (см. прил. А) сформулировал и решил ее для двух станков.

Задача Джонсона для двух машин.

Пример. Обжарочные и пароварочные камеры являются ведущим оборудованием термического цеха при выработке вареных колбасных изделий, поэтому повышение производительности этих камер позволяет увеличить производство колбасных изделий.

Полуфабрикаты колбасных изделий в термическом цехе, проходят последовательно обработку в обжарочных, а затем в пароварочных камерах, превращаются в готовую продукцию. Длительность обжарки колбас зависит от толщины оболочки, а варки – от диаметра оболочки. В зависимости от вида колбас, имеющих разную толщину и диаметр оболочки, меняется длительность обжарки и варки колбас, что служит причиной простоя пароварочных камер.

Необходимо составить такое расписание загрузки колбасных полуфабрикатов в обжарочную камеру, которое позволит в процессе их обжарки и варки свести простои пароварочной камеры к минимуму.

Длительность обжарки и варки колбасных изделий приведена в табл. 5.7.

Т а б л и ц а 5.7. **Длительность обжарки и варки колбасных изделий, мин**

№ п. п.	Колбаса	Обжарка	Варка
1	«Чайная»	60	50
2	«Докторская»	70	60
3	«Сардельки»	50	30
4	«Любительская»	120	140
5	«Сосиски»	40	20
6	«Столовая»	60	60
7	«Отдельная»	130	150

Определим простои пароварочной камеры, считая, что обжарка и варка колбасных полуфабрикатов происходит в неоптимальном порядке:

$$(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7).$$

Пусть x_i – продолжительность простоя пароварочной камеры, мин.

Вычислим простой пароварочной камеры при обжарке колбасы «Чайная». Пока первый вид колбасных изделий обжаривается, пароварочная камера простаивает, следовательно:

$$x_1 = 60 \text{ мин.}$$

Рассчитаем простой пароварочной камеры при обжарке колбасы «Докторская». При этом необходимо учесть, что пароварочная камера не работает, пока «Чайная» и «Докторская» колбасы обжариваются. Но пароварочная камера простаивает 60 минут, и пока обжаривается колбаса «Докторская», происходит процесс варки колбасы «Чайная», т. е.:

$$x_2 = 60 + 70 - 50 - 60 = 20 \text{ мин.}$$

Аналогичным образом определяем простои пароварочной камеры (если получено отрицательное число, это означает, что простоя нет) (табл. 5.8):

$$x_3 = 60 + 70 + 50 - 50 - 60 - 60 - 20 = 0$$

$$x_4 = 60 + 70 + 50 + 120 - 50 - 60 - 30 - 60 - 20 = 80$$

$$x_5 = 60 + 70 + 50 + 120 + 40 - 50 - 60 - 30 - 140 - 60 - 20 = 0$$

$$x_6 = 60 + 70 + 50 + 120 + 40 + 60 - 50 - 60 - 30 - 140 - 20 - 60 - 20 - 80 = 0$$

$$x_7 = 60 + 70 + 50 + 120 + 40 + 130 - 50 - 60 - 30 - 140 - 20 - 60 - 60 - 20 - 80 = 10.$$

Т а б л и ц а 5.8. **Расчет простоев пароварочной камеры при неоптимальном порядке обслуживания требований**

Требования	Колбаса	Длительность, мин		Простои пароварочной камеры, мин
		обжарки	варки	
T_1	«Чайная»	60	50	60
T_2	«Докторская»	70	60	20
T_3	«Сардельки»	50	30	0
T_4	«Любительская»	120	140	80
T_5	«Сосиски»	40	20	0
T_6	«Столовая»	60	60	0
T_7	«Отдельная»	130	150	10

Таким образом, суммарный простой пароварочной камеры составит 170 мин, в том числе по колбасе «Чайная» – 60, «Докторская» – 20, «Любительская» – 80 и «Отдельная» – 10 мин.

Изобразим с помощью графика Ганта порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обжарки и варки колбасных полуфабрикатов (рис. 5.4).

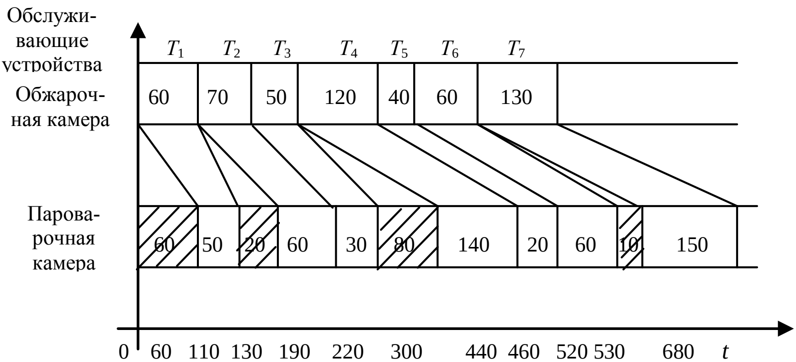


Рис. 5.4. График Ганта для системы с двумя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обслуживания требований

На графике Ганта изображена последовательность обслуживания требований на первом и втором обслуживающих устройствах. При этом время простоя изображено штриховкой.

Если порядок прохождения обжарки и варки полуфабрикатов колбасных изделий поменять, то можно уменьшить суммарный простой пароварочной камеры.

Рассмотрим *алгоритм решения задачи Джонсона для двух обслуживающих устройств*:

1) запишем матрицу размерностью $n \cdot 2$, коэффициенты которой равны времени обслуживания требований t_{ij} первым и вторым устройствами;

2) в матрице $\left\| t_{ij} \right\|$ находим минимальный элемент. Если он стоит в первом столбце, соответствующем первому обслуживающему устройству, то данное требование обслуживается первым, если во втором столбце, то последним;

3) исключаем из рассмотрения выбранное требование и работу продолжаем согласно пункту 2, пока не упорядочим порядок обслуживания требований;

4) если в одном столбце имеется несколько минимальных величин, то выбираем сначала требование с меньшим номером;

5) если и в первом, и во втором столбцах есть несколько одинаковых минимальных величин, то выбираем сначала требования с первого столбца.

Для нашего примера определяем минимальный элемент. Он равен 20, так как он стоит во втором столбце, то требование T_5 будет обслуживаться последним (табл. 5.9).

Т а б л и ц а 5.9. **Определение оптимального порядка обслуживания требований**

Требования	Устройства		Оптимальный порядок обслуживания требований
	1	*2*	
T_1	60	50	5
T_2	70	60	4
T_3	50	30	6
T_4	120	140	2
T_5	40	20	7
T_6	60	60	1
T_7	130	150	3

Мысленно вычеркиваем из рассмотрения требование T_5, выбираем минимальный элемент, равный 30. Он стоит во втором столбце, следовательно, требование T_3 будет обслуживаться предпоследним.

Выбираем минимальный элемент, равный 50. Он стоит во втором столбце, следовательно, требование T_1 обслуживается пятым. Выбираем минимальный элемент, равный 60. Их несколько. Берем в первом столбце, следовательно, требование T_6 будет обслуживаться первым, требование T_2 – четвертым, требование T_4 – вторым, а требование T_7 – третьим.

Рассчитаем простои пароварочной камеры при оптимальном порядке обслуживания требований, т. е. для расписания:

$$\pi_n = (T_6, T_4, T_7, T_2, T_1, T_3, T_5).$$

Расчет простоев приведем в табл. 5.10:

$$x_1 = 60$$

$$x_2 = 60 + 120 – 60 – 60 = 60$$

$$x_3 = 60 + 120 + 130 – 60 – 140 – 60 – 60 = 0$$

$$x_4 = 60 + 120 + 130 + 70 – 60 – 140 – 150 – 60 – 60 = 0$$

$$x_5 = 60 + 120 + 130 + 70 + 60 – 60 – 140 – 150 – 60 – 60 – 60 = 0$$

$$x_6 = 60 + 120 + 130 + 70 + 60 + 50 – 60 – 140 – 150 – 60 – 50 – 60 – – 60 = 0$$

$$x_7 = 60 + 120 + 130 + 70 + 60 + 50 + 40 – 60 – 140 – 150 – 60 – 50 – – 30 – 60 – 60 = 0.$$

Т а б л и ц а 5.10. **Расчет простоев пароварочной камеры при оптимальном порядке обслуживания требований**

Требования	Колбаса	Длительность, мин		Простои пароварочной камеры, мин
		обжарки	варки	
T_6	«Столовая»	60	60	60
T_4	«Любительская»	120	140	60
T_7	«Отдельная»	130	150	0
T_2	«Докторская»	70	60	0
T_1	«Чайная»	60	50	0
T_3	Сардельки	50	30	0
T_5	Сосиски	40	20	0

Суммарный простой составляет 120 мин, т. е. простои пароварочной камеры сокращаются на 50 минут (170–120), или на $\frac{50}{170} = 29,4\,\%$, что позволит при той же мощности оборудования увеличить производство продукции.

Изобразим с помощью графика Ганта оптимальное расписание (рис. 5.5).

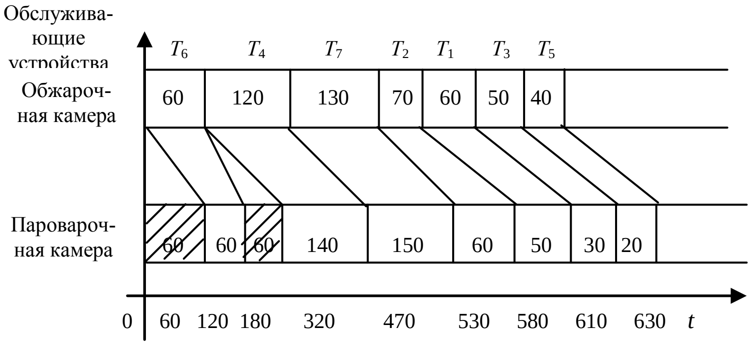


Рис. 5.5. График Ганта для системы с двумя обслуживающими устройствами при оптимальном порядке обслуживания требований

Задача Джонсона для трех машин или трех обслуживающих устройств. При $m \geq 3$ алгоритм Джонсона не пригоден, а простых алгоритмов пока не найдено. При $m = 3$ можно воспользоваться алгоритмом Джонсона для двух обслуживающих устройств, так как оптимальный план задачи Джонсона произвольной размерности достижим на множество планов, в которых последовательность запуска деталей на первом станке совпадает с последовательностью обработки деталей на втором станке, а последовательность обработки деталей на последнем станке – с последовательностью на предпоследнем станке. Отсюда следует, что для трех станков последовательность обработки деталей на всех станках одинакова. Джонсон доказал, что алгоритм двух станков можно применить к трем станкам в случае, если:

$$\min a_j \geq \max b_j \text{ или } \min c_j \geq \max b_j,$$

где a_j – время обработки j-й детали на первом станке;

b_j – время обработки j-й детали на втором станке;

c_j – время обработки j-й детали на третьем станке.

Алгоритм решения задачи:

оптимальный порядок обслуживания требований находят с помощью сумм:

$$a_j + b_j \text{ и } b_j + c_j.$$

К ним применяют алгоритм Джонсона для двух станков.

Пример. Имеется 3 станка, на которых должны пройти обработку 6 деталей. Необходимо составить такое расписание обслуживания требований, т. е. определить такую последовательность обработки деталей на станках, которая позволит минимизировать простои станков. Время обслуживания требований на станках приведено в табл. 5.11.

Таблица 5.11. **Время обработки деталей на трех станках**

Детали (требования)	Станки		
	1	*2*	*3*
T_1	8	5	9
T_2	12	6	15
T_3	9	4	10
T_4	10	6	12
T_5	7	5	8
T_6	11	7	14

Для расписания –

$$\pi_n = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$$

найдем простои второго и третьего станков.

Простои для второго станка определяются из вышеизложенного алгоритма, используемого при решении задачи оптимизации расписания обслуживания требований для двух обслуживающих устройств (табл. 5.12):

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 8 + 12 - 5 - 8 = 7$$

$$x_3 = 8 + 12 + 9 - 5 - 6 - 8 - 7 = 3$$

$$x_4 = 8 + 12 + 9 + 10 - 5 - 6 - 4 - 8 - 7 - 3 = 6$$

$$x_5 = 8 + 12 + 9 + 10 + 7 - 5 - 6 - 4 - 6 - 8 - 7 - 3 - 6 = 1$$

$$x_6 = 8 + 12 + 9 + 10 + 7 + 11 - 5 - 6 - 4 - 6 - 5 - 8 - 7 - 3 - 6 - 1 = 6.$$

Простои второго станка равны:

$$8 + 7 + 3 + 6 + 1 + 6 = 31 \text{ единицу времени.}$$

Т а б л и ц а 5.12. **Расчет простоев второго и третьего обслуживающих устройств при неоптимальном расписании**

Детали (требования)	Станки			Простои станков	
	1	*2*	*3*	*2*	*3*
T_1	8	5	9	8	13
T_2	12	6	15	7	4
T_3	9	4	10	3	0
T_4	10	6	12	6	0
T_5	7	5	8	1	0
T_6	11	7	14	6	0

Рассчитаем простои третьего станка исходя из следующих соображений (см. табл. 5.12). Третий станок стоит, пока первая деталь обрабатывается последовательно на первом и втором станках, следовательно, его простой равен:

$$x_1 = 8 + 5 = 13 \text{ единиц времени.}$$

Далее при расчете значения простоя учитывают время обслуживания на первом станке первой и второй деталей и время обработки второй детали на втором станке без учета времени работы третьего станка при обработке первой детали и времени простоя третьего станка, т. е.:

$$x_2 = 8 + 12 + 6 - 9 - 13 = 4.$$

Рассуждая аналогично, определяем простои третьего станка:

$$x_3 = 8 + 12 + 9 + 4 - 9 - 15 - 13 - 4 = 0$$

$$x_4 = 8 + 12 + 9 + 10 + 6 - 9 - 15 - 10 - 13 - 4 = 0$$

$$x_5 = 8 + 12 + 9 + 10 + 7 + 5 - 9 - 15 - 10 - 12 - 13 - 4 = 0$$

$$x_6 = 8 + 12 + 9 + 10 + 7 + 11 + 7 - 9 - 15 - 10 - 12 - 8 - 13 - 4 = 0.$$

Простои третьего станка равны:

$$13 + 4 = 17 \text{ единиц времени.}$$

Изобразим с помощью графика Ганта порядок обслуживания требований в системе с тремя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обработки деталей на станках (рис. 5.6).

На графике Ганта наглядно изображена последовательность обработки каждой детали сначала на первом, затем на втором и третьем станках.

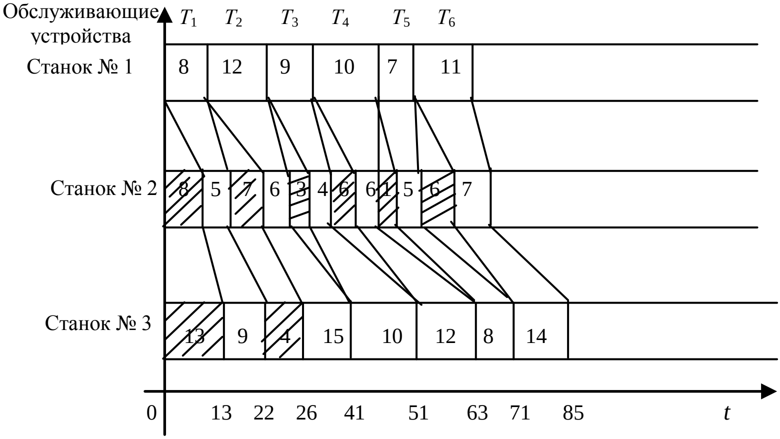


Рис. 5.6. График Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обслуживания требований

С целью оптимизации расписания проверим выполнимость условия:

$$\min a_j \geq \max b_j \text{ или } \min c_j \geq \max b_j.$$

Для этого находим минимальный элемент в первом столбце. Он равен 7, т. е.:

$$\min a_j = 7.$$

Находим наибольшее число во втором столбце:

$$\max b_j = 7.$$

А минимальный элемент в третьем столбце равен 8, т. е.:

$$\min c_j = 8.$$

Так, максимальный элемент второго столбца не больше минимальных элементов, стоящих в первом и втором столбцах. Следовательно, для оптимизации порядка обслуживания требований на трех обслуживающих устройствах можно применить алгоритм решения задачи Джонсона на двух обслуживающих устройствах.

Находим оптимальный порядок обслуживания требований, т. е. ищем минимальный элемент (табл. 5.13).

Он равен 12 и стоит в первом столбце, значит, требование T_5 будет обслуживаться первым, мысленно вычеркиваем его и выбираем следующий минимальный элемент.

Т а б л и ц а 5.13. **Определение оптимального порядка обслуживания требований на трех обслуживающих устройствах**

Требования	$a_j + b_j$	$b_j + c_j$	Оптимальный порядок обслуживания
T_1	13	14	2
T_2	18	21	5
T_3	13	14	3
T_4	16	18	4
T_5	12	13	1
T_6	18	21	6

Он равен 13, таких элементов два, и они стоят в первом столбце, следовательно, вторым и третьим будут обслуживаться соответственно первое и третье требования. Далее на обслуживание поступят требование T_4, затем требования T_2 и T_6.

Рассчитаем простои станков в соответствии с принятым порядком обслуживания требований (табл. 5.14):

а) простои для второго станка –

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 7 + 8 – 5 – 7 = 3$$

$$x_3 = 7 + 8 + 9 – 5 – 5 – 7 – 3 = 4$$

$$x_4 = 7 + 8 + 9 + 10 – 5 – 5 – 4 – 7 – 3 – 4 = 6$$

$$x_5 = 7 + 8 + 9 + 10 + 12 – 5 – 5 – 4 – 6 – 7 – 3 – 4 – 6 = 6$$

$$x_6 = 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 11 – 5 – 5 – 4 – 6 – 6 – 7 – 3 – 4 – 6 – 6 = 5$$

Т а б л и ц а 5.14. **Определение простоев второго и третьего станков при оптимальном расписании**

Оптимальный порядок обслуживания	Станки			Простои станков	
	1	*2*	*3*	№ 2	№ 3
T_5	7	5	8	7	12
T_1	8	5	9	3	0
T_3	9	4	10	4	0
T_4	10	6	12	6	1
T_2	12	6	15	6	0
T_6	11	7	15	5	0

Простои второго станка составят 31 единицу времени;

б) простои для третьего станка –

$$x_1 = 7 + 5 = 12$$

$$x_2 = 7 + 8 + 5 – 8 – 12 = 0$$

$$x_3 = 7 + 8 + 9 + 4 – 8 – 9 – 12 = 0$$

$$x_4 = 7 + 8 + 9 + 10 + 6 – 8 – 9 – 10 – 12 = 1$$

$$x_5 = 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 6 – 8 – 9 – 10 – 12 – 12 –1 = 0$$

$$x_6 = 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 6 – 8 – 9 – 10 – 12 – 15 – 12 – 1 = 0.$$

Простои третьего станка равны 13 единицам времени (см. табл. 5.14).

Изобразим на графике Ганта оптимальный порядок обслуживания деталей на трех станках (рис. 5.7).

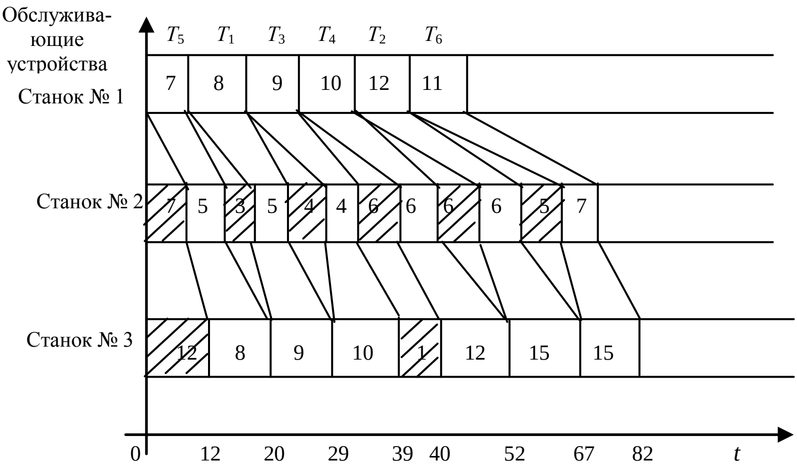


Рис. 5.7. График Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами при оптимальном порядке обслуживания требований

Таким образом, оптимизация расписания позволила сократить простои второго и третьего станков с 48 (31 + 17) до 44 (31 + 13) единиц времени, т. е. простои оборудования сокращены на 8,3 %.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятиям «операция», «требование», «система обслуживания», «процесс обслуживания».

2. Охарактеризуйте простой процесс обслуживания.

3. Дайте определение понятию «расписание».

4. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарного штрафа, связанного с ожиданием всех требований в очереди.

5. Перечислите правила решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарной величины средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.

6. Дайте определение понятию «директивный срок обслуживания требования».

7. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации максимального штрафа за задержку в обслуживании требования.

8. Какими способами можно геометрически изобразить оптимальное расписание обслуживания требований?

9. Сформулируйте общую задачу Джонсона.

10. Как определяются простои второго обслуживающего устройства?

11. Как изображается порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами с помощью графика Ганта?

12. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения для системы с двумя обслуживающими устройствами.

13. Как определить простои третьего обслуживающего устройства?

14. Приведите алгоритм обоснования оптимального расписания для системы с тремя обслуживающими устройствами.

15. Каким образом построить график Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами?

6. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

6.1. Общая характеристика системы массового обслуживания (понятие системы массового обслуживания, ее элементы, классификация систем)

Теория массового обслуживания начала развиваться в начале XX в. В 1907 г. Ф. Ф. Йохансон изложил первые идеи теории очередей. В 1909 г. А. К. Эрланг применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступающих на телефонную станцию вызовов. В 1963 г. советский математик А. Я. Хинчин систематизировал основные положения теории массового обслуживания в монографии «Работы по математической теории массового обслуживания» (см. прил. А).

В последние годы теория массового обслуживания (за рубежом она известна под названием «теория очередей») получила широкое применение в:

– сфере обслуживания (в системах связи, погрузочно-разгрузочных комплексах, автозаправочных станциях, магазинах, билетных кассах и т. д.);

– современных высоких технологиях (компьютерных сетях, базах данных, поточных линиях, военных системах и т. д.);

– финансово-экономической сфере (в банках, страховых организациях, налоговых инспекциях, аудиторских служб и т. д.).

Теория массового обслуживания представляет собой научное направление, изучающее системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение определенных услуг, и происходит удовлетворение этих запросов.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью определения наилучших вариантов управления данными системами.

Эти системы получили название *систем массового обслуживания,* а процессы, возникающие при этом, *называются процессами обслуживания*.

Элементами системы массового обслуживания являются:

– входящий поток заявок;
– очередь;
– поток необслуженных (покинувших очередь) заявок;
– каналы обслуживания;
– выходящий поток обслуженных заявок (рис. 6.1).

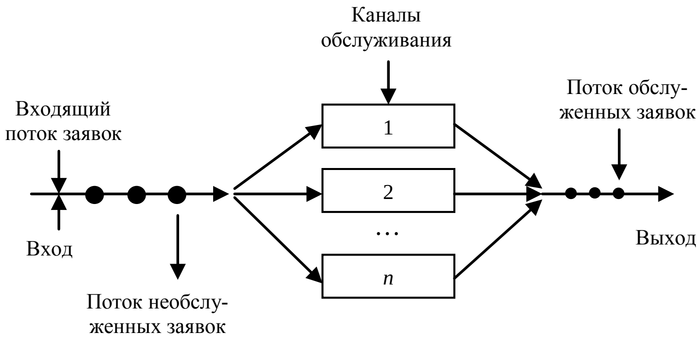


Рис. 6.1. Структура системы массового обслуживания

Обслуживающие устройства системы массового обслуживания (пункты, станции, приборы, устройства, кассовые аппараты, продавцы, телефонные линии связи и т. д.) называются *каналами обслуживания*.

Заявка (требование) – это запрос на выполнение каких-либо услуг или удовлетворение определенной потребности.

Под входящим потоком заявок (требований) понимают последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Если поток событий имеет свойства стационарности, ординарности и отсутствия последствия, то он является *простейшим, или пуассоновским, потоком*.

Если вероятностные характеристики потока событий не зависят от времени, т. е. он имеет постоянную интенсивность, то такой поток называется *стационарным*.

Если события происходят поодиночке, а не два и более сразу, то такой поток событий является *ординарным*.

В *потоке без последствий* события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга, т. е. число событий, попадающих на любой один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, произвольно выбранный промежуток времени.

Под потоком необслуженных заявок понимают заявки, поступившие в систему в тот момент, когда все каналы заняты и заявки получают отказ в обслуживании, покидают систему массового обслуживания и в дальнейшем процессе обслуживания не участвуют.

Заявки, стоящие в очереди, могут обслуживаться любым освободившимся каналом обслуживания. В системах с последовательным расположением каналов каждый канал выступает как отдельная одноканальная система массового обслуживания или фаза обслуживания, т.е. выходной поток обслуженных заявок одним каналом обслуживания является входным потоком для последующего канала.

В зависимости от дисциплины очереди системы массового обслуживания подразделяются на:

– системы *с приоритетами*;

– системы *без приоритетов*.

При этом под *дисциплиной очереди* понимают порядок, который принят при поступлении заявок из очереди в канал обслуживания.

Правило отбора требований на обслуживание может производиться в виде:

– случайного отбора;

– по критерию приоритетности: первый пришел – первый обслужен;

– по критерию приоритетности: последний пришел – первый обслужен.

По количеству этапов обслуживания системы массового обслуживания подразделяются на:

– *однофазные;*

– *многофазные*.

Однофазными называются те системы, которые выполняют одну и ту же операцию обслуживания.

Многофазные системы массового обслуживания имеют неоднородные каналы, выполняющие разные операции обслуживания, осуществляемые с помощью последовательно расположенных каналов обслуживания (рис. 6.2).

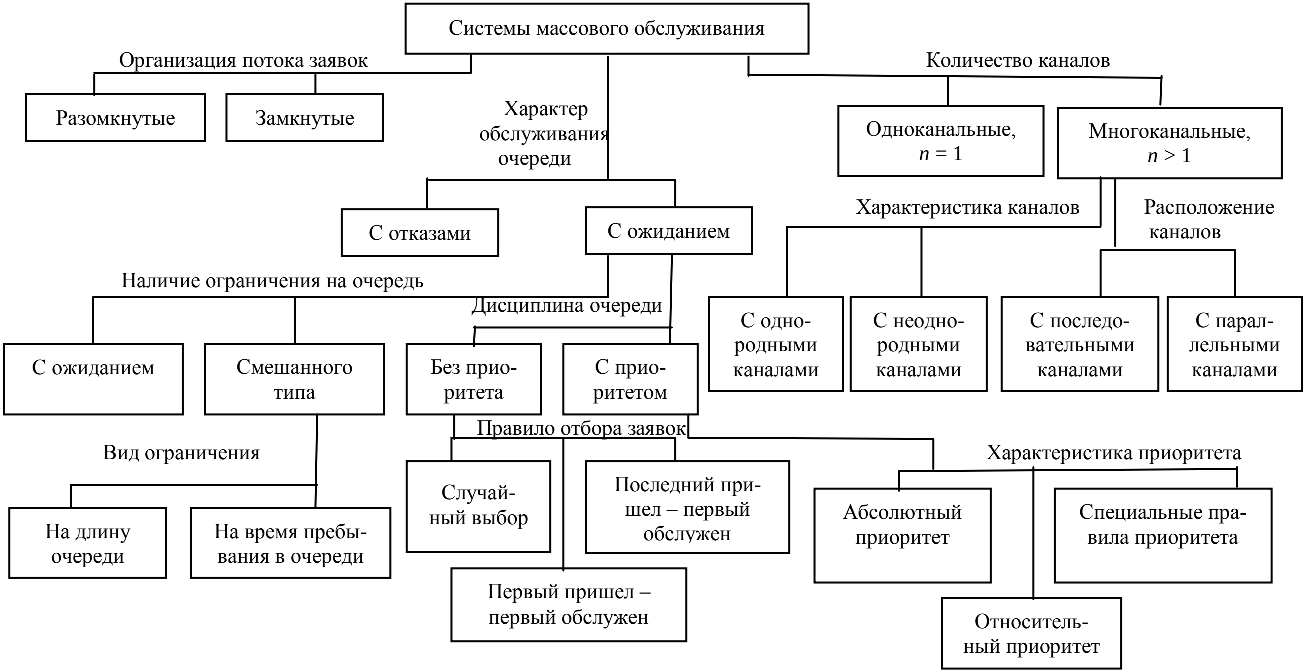


Рис. 6.2. Классификация систем массового обслуживания

6.2. Потоки событий и предельные вероятности состояний системы (уравнения Колмогорова)

Напомним, что *потоком событий* называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Поток характеризуется *интенсивностью* λ, под которой понимают частоту появления событий или среднее число событий, поступающих в систему массового обслуживания в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Простейший (пуассоновский) поток характеризуется:

– стационарностью,

– ординарностью,

– отсутствием последствия (рис. 6.3).

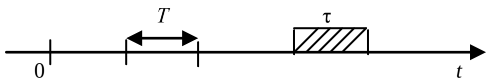


Рис. 6.3. Простейший поток событий

При этом регулярный поток не является простейшим, так как моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы, и он обладает последействием.

Для простейшего потока число m событий, попадающих на произвольный участок времени τ, распределено по закону Пуассона (см. прил. А):

$$P_{m(\tau)} = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии:

$$\alpha = \sigma^2 = \lambda\tau .$$

А вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события ($m = 0$), равна:

$$p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} .$$

Найдем вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий. Она равна:

$$p(T \geq t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность противоположного события, т. е. функция распределения случайной величины T, равна:

$$F(t) = p(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность вероятности случайной величины равна производной ее функции распределения:

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Данное распределение, т. е. интервал времени между двумя соседними произвольными событиями, называется *показательным или экспоненциальным*, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины и обратно по величине интенсивности потока λ:

$$\alpha = \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Важное свойство показательного распределения состоит в том, что для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока любые данные о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части.

Согласно распределению случайной величины T вероятность попадания на элементарный (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна:

$$p_{\Delta t} = p(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t.$$

Рассмотрим процесс работы простейшей системы массового обслуживания (рис. 6.4).

Допустим, система S состоит из двух каналов обслуживания, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт канала, продолжающийся неизвестное случайное время.

Возможны следующие состояния системы:

S_0 – оба канала исправны;

S_1 – первый канал ремонтируется, второй исправен;

S_2 – второй канал ремонтируется, первый исправен;

S_3 – оба канала ремонтируются.

Стрелка, направленная, например:

– из состояния S_0 в S_1 означает переход системы в момент отказа первого канала;

– из S_1 в S_0 – переход в момент окончания ремонта этого канала.

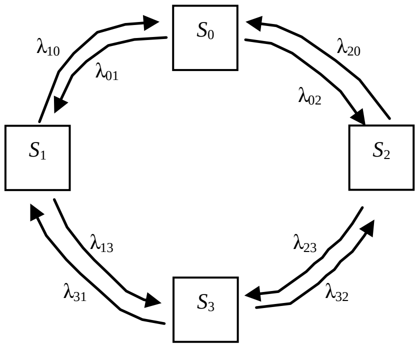


Рис. 6.4. Графическая модель массового обслуживания

Так как каналы независимы друг от друга, то вероятностью одновременного выхода из строя двух каналов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонта двух каналов (переход из S_3 в S_0) пренебрежем.

Предположим, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями –

$$\lambda_{ij} \ (i = \overline{0,3};\ j = \overline{0,3})$$

с вероятностью p_i.

Вероятность i-го состояния есть вероятность $p_i(t)$ того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. При этом сумма вероятностей всех состояний системы для любого момента времени t равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

Зададим малый промежуток Δt и найдем вероятность –

$$p_0(t+\Delta t)$$

того, что система в момент времени –

$$t + \Delta t$$

будет находиться в состоянии S_0.

Рассмотрим данную систему.

1. Система в момент времени t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0 и за время Δt не вышла из него. Вывести систему из состояния S_0 можно суммарным простейшим потоком интенсивностью –

$$(\lambda_{01}+\lambda_{02})$$

с вероятностью, приближенно равной:

$$(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t .$$

А вероятность того, что система останется в состоянии S_0, равна:

$$[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t] .$$

Применяя теорему умножения вероятностей, получим:

$$p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t] .$$

2. Система в момент времени t с вероятностями $p_1(t)$ или $p_2(t)$ находилась в состояниях S_1 и S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0. Система может перейти в состояние S_0 в результате действия потока интенсивностью λ_{10} или λ_{20} с вероятностью:

$$\approx \lambda_{10}\Delta t \text{ или } \lambda_{20}\Delta t .$$

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0, равна:

$$p_1(t)\lambda_{10}\Delta t \text{ или } p_2(t)\lambda_{20}\Delta t .$$

Применяя теорему сложения вероятностей, получим:

$$p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t] .$$

Отсюда найдем:

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=p_1(t)\lambda_{10}+p_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\,p_0(t)\,.$$

При $\Delta t\to 0$, переходя к пределу, получим в левой части уравнения производную $p_0'(t)$. Обозначим ее как p_0':

$$p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\,p_0\,.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее и неизвестную функцию, и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогичным образом для других состояний системы S, получим *систему дифференциальных уравнений Колмогорова* (см. прил. А) для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\,p_0, \\ p_1'=\lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})\,p_1, \\ p_2'=\lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})\,p_2, \\ p_3'=\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})\,p_3. \end{cases}$$

Уравнения Колмогорова составлены по следующему правилу: в левой части каждого уравнения стоит производная вероятности i-го состояния, в правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного состояния вида i.

Для решения данной системы в нее добавляют следующее уравнение:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t)=1\,.$$

Задают начальные условия, например t = 0, тогда система находится в состоянии S_0, т. е.:

$$p_0(0)=1\,;$$

$$p_1(0)=0\,;$$

$$p_2(0) = 0\,;$$

$$p_3(0) = 0\,.$$

Уравнения Колмогорова позволяют найти все вероятности состояний системы как функции времени. В теории случайных процессов доказано, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно за конечное число шагов перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют и они постоянны, поэтому в уравнениях Колмогорова их производные можно заменить на нули:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})\, p_0 = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})\, p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})\, p_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})\, p_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2. \end{cases}$$

Данная система уравнений составлена по следующему правилу: слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

6.3. Процесс гибели и размножения

Используя процесс гибели и размножения, можно изучить множество состояний системы массового обслуживания. Термин «процесс гибели и размножения» связан с решением ряда биологических задач, в которых моделируется изменение численности биологических популяций. Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы S_0, S_1, …, S_n (рис. 6.5).

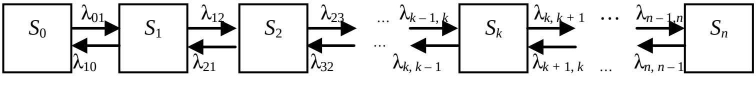


Рис. 6.5. Граф процесса гибели и размножения

Переходы от одного состояния системы в другое могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами.

Допустим, что все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, являются простейшими с интенсивностью λ.

Составим и решим уравнения для предельных вероятностей состояний. Например, для состояния S_0 уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 ,$$

а для состояния S_1 –

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2 ,$$

подставив в него уравнение –

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$$

и преобразовав, получим:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 .$$

Аналогично рассуждая, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,k}\ p_{k-1} = \lambda_{k,k+1}\ p_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n}\ p_{n-1} = \lambda_{n,n+1}\ p_n. \end{cases}$$

Добавим к системе нормировочное уравнение:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots + p_n = 1 .$$

Решая систему уравнений, получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1} ,$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 ,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 ,$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 .$$

Из формулы расчета p_1, p_2, …, p_n видно, что коэффициенты при p_0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле расчета p_0. Числители этих коэффициентов равны произведению всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния, а знаменатели – произведению всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до данного состояния.

6.4. Показатели эффективности работы системы массового обслуживания

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению систем массового обслуживания, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования систем.

В качестве характеристик эффективности работы систем массового обслуживания чаще всего используют следующие группы показателей.

1. *Показатели эффективности использования системы*:

– абсолютная пропускная способность системы, т. е. среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени;

– относительная пропускная способность системы, т. е. отношение среднего числа заявок, обслуживаемых в системе массового обслуживания в единицу времени, к среднему числу поступивших заявок за это же время;

– средняя продолжительность периода занятости системы массового обслуживания;

– коэффициент использования системы массового обслуживания, т. е. средняя доля времени, в течение которого система занята обслуживанием заявок.

2. *Показатели качества обслуживания заявок*:

– среднее время ожидания заявки в очереди;

– среднее время пребывания заявки в системе массового обслуживания;

– вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания;

– вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;

– закон распределения времени ожидания заявки в очереди;

– закон распределения времени пребывания заявки в системе массового обслуживания;

– среднее число заявок, находящихся в очереди;

– среднее число заявок, находящихся в системе массового обслуживания.

3. *Показатели эффективности функционирования пары «система массового обслуживания – потребитель»*, где под «потребителем» понимают всю совокупность заявок или их источник:

– средний доход, приносимый системе массового обслуживания в единицу времени;

– затраты на обслуживание системы массового обслуживания;

– доход, приносимый системе массового обслуживания.

6.5. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением длительностей интервалов между поступлением заявок и их обслуживанием.

Допустим, в систему массового обслуживания поступает простейший поток требований с заданной интенсивностью λ. Время обслуживания требований для одного канала экспоненциальное. Если требование поступает в систему в момент, когда канал занят, оно получает отказ и покидает систему обслуживания. Если же канал свободен, то требование принимается к обслуживанию и обслуживается с интенсивностью μ.

Представим данную систему графически (рис. 6.6).

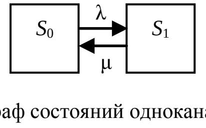


Рис. 6.6. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с отказами

Система имеет два состояния:

S_0 – канал свободен,

S_1 – канал занят, т. е. идет обслуживание заявки.

Пусть p_0 – вероятность состояния S_0, а p_1 – вероятность состояния S_1.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ p_1' = -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{cases}$$

Введем в систему нормировочное уравнение:

$$p_0 + p_1 = 1$$

и найдем значение вероятностей состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

$$p_1 = 1 - p_0.$$

Для одноканальной системы с отказами вероятность p_0 есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q, так как для конкретного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших равно вероятности p_0 того, что в момент времени t канал свободен и заявка будет обслужена:

$$q = p_0.$$

При $t \to \infty$ достигается стационарный (установившийся) режим и:

$$q = p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Зная относительную пропускную способность, можно найти абсолютную, т. е. среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности p_1:

$$p_{\text{отк}} = p_1 = 1 - p_0 = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 1{,}5$ вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\overline{t}_{\text{об}} = 2$ мин. Вызов-звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, – получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ звонка в мин;}$$

2) вычислим q – относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}5}{1{,}5 + 0{,}5} = 0{,}25.$$

Будет обслужено 25 % звонков-заказов;

3) найдем A – абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q = 1{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375.$$

Система в среднем осуществляет 0,375 обслуживания в минуту.

4) определим $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа:

$$p_{\text{отк}} = 1 - q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Из 100 звонков-заказов в среднем 75 получают отказ в обслуживании;

5) вычислим $A_{\text{ном}}$ – номинальную пропускную способность системы:

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ вызова в мин;}$$

$$\frac{A_{\text{ном}}}{A} = \frac{0,5}{0,375} = 1,33\,.$$

Номинальная пропускная способность системы в 1,33 раза больше, чем ее фактическая пропускная способность;

6) рассчитаем $\overline{t}_{\text{пр}}$ – среднее время простоя канала:

$$\overline{t}_{\text{пр}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1,5} = 0,67 \text{ мин;}$$

Канал обслуживания в среднем простаивает 0,67 мин;

7) вычислим p_0 – вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = \frac{\overline{t}_{\text{пр}}}{\overline{t}_{\text{об}} + \overline{t}_{\text{пр}}} = \frac{0,67}{2 + 0,67} = 0,25\,;$$

Вероятность того, что канал свободен, составляет 0,25;

8) рассчитаем p_1 – вероятность того, что канал занят:

а) $p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0,25 = 0,75$;

б) $p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} = \dfrac{1,5}{1,5 + 0,5} = 0,75$;

Вероятность того, что канал занят $p_1 = 0,75$, больше вероятности того, что канал свободен $p_0 = 0,25$ ($p_1 > p_0$). Это следовало ожидать, так как интенсивность входящего потока $\lambda = 1,5$ больше интенсивности производительности канала $\mu = 0,5$ ($\lambda > \mu$). Следовательно, телефонная линия банка работает не эффективно. Для улучшения ее работы целесообразно увеличить интенсивность производительности канала обслуживания путем добавления канала обслуживания.

6.6. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением очереди

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание является простейшим потоком с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ. Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживание. Очередь плюс обслуженные заявки не превышают n заявок, а требования, не попавшие в очередь, покидают систему.

Граф состояний данной системы массового обслуживания имеет вид, изображенный на рис. 6.7.

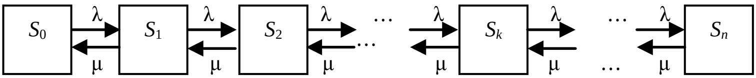


Рис. 6.7. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием (схема гибели и размножения)

Система имеет следующие состояния:

S_0 – канал свободен;

S_1 – канал занят и очереди нет;

S_2 – канал занят и одна заявка стоит в очереди;

…

S_k – канал занят и k заявок стоят в очереди;

…

S_n – канал занят и $(n – 1)$ заявок стоят в очереди.

Стационарный процесс в такой системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot p_0 + p_1 = 0, \quad i = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -(1-\rho)\, p_n + p_{n+1} + \rho \cdot p_{n-1} = 0, \quad 0 < i < n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -p_n + \rho \cdot p_{n-1} = 0, \quad i = n, \end{cases}$$

где ρ – относительная нагрузка на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Решение системы уравнений имеет такой вид:

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \right) \cdot \rho^n, \quad \rho \neq 1, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \\ \dfrac{1}{(m+2)}, \quad \rho = 1, \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Тогда

$$p_n = \begin{cases} p_0 \cdot \rho^n, \quad \rho \neq 1, \quad i = 0, 1, ..., n, \\ \dfrac{1}{(m+2)}, \quad \rho = 1. \end{cases}$$

Определим характеристики одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длиной очереди m:

1) p_0, p_n – предельные вероятности системы (вероятность свободного состояния (p_0)):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \quad \text{если } \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \quad \text{если } \rho = 1, \end{cases}$$

$$p_n = \rho^n \cdot p_0; n = 1, ..., m+1,$$

где n – состояние системы;

m – максимальное число мест в очереди;

ρ – относительная нагрузка (трафик) на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

2) $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании требования:

$$p_{\text{отк}} = \rho^{m+1} \cdot p_0;$$

3) q – относительная пропускная способность системы обслуживания:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

4) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda \cdot q;$$

5) $\overline{N}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \begin{cases} \dfrac{\rho[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \text{если } \rho \neq 1, \\ \dfrac{m+1}{2}, & \text{если } \rho = 1; \end{cases}$$

6) $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{\lambda(1-p_{m+1})};$$

7) $\overline{T}_{\text{оч}}$ – средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \overline{T}_{\text{сис}} - \frac{1}{\mu};$$

8) $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \lambda \cdot (1-p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{\text{оч}}.$$

Пример. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность λ = 0,6 автомобилей в час. Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,5 часа $(\overline{t}_{\text{об}})$. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем (m = 3). Если все стоянки заняты, т. е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{1,5} = 0,67 \text{ автомобиля в час;}$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,6}{0,67} = 0,90;$$

3) p_0, p_k – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \text{если } \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \text{если } \rho = 1. \end{cases}$$

Так как

$$\rho = 0,90 \neq 1 \text{, то } p_0 = \frac{1-0,9}{1-0,9^{3+2}} = \frac{0,1}{0,4095} = 0,244;$$

$$\text{б) } p_n = \rho^n \cdot p_0; n = 1,..., m+1,$$

$$p_1 = 0,9^1 \cdot 0,244 = 0,220;$$

$$p_2 = 0,9^2 \cdot 0,244 = 0,198;$$

$$p_3 = 0,9^3 \cdot 0,244 = 0,178;$$

$$p_4 = 0,9^4 \cdot 0,244 = 0,160;$$

4) исходя из того, что три автомобиля стоят в очереди и один находится на обслуживании, вычислим $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании требования:

$$p_{\text{отк}} = \rho^{m+1} \cdot p_0 = 0,9^{3+1} \cdot 0,244 = 0,16.$$

Работа поста диагностики считается удовлетворительной, так как он не обслуживает автомобили в среднем в 16 % случаев;

5) рассчитаем q – относительную пропускную способность системы обслуживания:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,16 = 0,84 \text{ автомобиля в час;}$$

6) вычислим A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda \cdot q = 0,6 \cdot 0,84 = 0,504 \text{ автомобиля в час;}$$

7) определим $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в си-

стеме (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, \text{ если } \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, \text{ если } \rho = 1. \end{cases}$$

Так как $\rho = 0,90 \neq 1$, то

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \frac{0,9[1-(3+2)\cdot 0,9^{3+1}+(3+1)\cdot 0,9^{3+2}]}{(1-0,9)\cdot(1-0,9^{3+2})} = 1,79 \text{ автомобиля;}$$

8) найдем $\bar{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{T}_{\text{сис}} = \frac{\bar{N}_{\text{сис}}}{\lambda(1-p_{m+1})} = \frac{1,79}{0,6(1-p_{\text{отк}})} = \frac{1,79}{0,6(1-0,16)} = 3,55 \text{ ч;}$$

9) вычислим $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \bar{T}_{\text{сис}} - \frac{1}{\mu} = 3,55 - \frac{1}{0,67} = 2,06 \text{ ч;}$$

10) определим $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди):

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \lambda\cdot(1-p_{m+1})\cdot\bar{T}_{\text{оч}} = 0,6(1-0,16)\cdot 2,06 = 1,04 \text{ автомобиля.}$$

6.7. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения очереди

Условия функционирования данной системы совпадают с условиями работы одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограничением очереди, кроме ограничения ожидания (т. е. $n\to\infty$). Стационарный режим функционирования этой системы существует при $t\to\infty$ для любого n = 0, 1, 2, … и когда $\lambda < \mu$. Система уравнений в этом случае имеет такой вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, n = 0, \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} - (\lambda + \mu) p_n = 0, n > 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений имеет следующий вид:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, ...,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения на длину очереди имеет следующие характеристики:

1) ρ – трафик системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1;$$

2) p_0, p_n – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - \rho;$$

$$p_n = (1-\rho) \cdot \rho^n; n = 1, 2, ...;$$

3) $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т. е. на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \frac{\rho}{1-\rho};$$

4) $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

а) $\overline{T}_{\text{сис}} = \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{\lambda}$;

б) $\overline{T}_{\text{сис}} = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)}$;

в) $\overline{T}_{\text{сис}} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)}$;

5) $\overline{N}_{\text{оч}}$ – число требований в очереди на обслуживание:

$$\text{а) } \overline{N}_{\text{оч}} = \overline{N}_{\text{сис}} - \frac{\lambda}{\mu};$$

$$\text{б) } \overline{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)};$$

6) $\overline{T}_{\text{оч}}$ – средняя продолжительность пребывания требования в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$\text{а) } \overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$\text{б) } \overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

$$\text{в) } \overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)};$$

7) A – абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q,$$

где q – относительная пропускная способность системы,

$$q = 1,$$

так как каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

Пример. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность λ = 0,8 автомобиля в час. Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,1 часа $(\overline{t}_{\text{об}})$. Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей (т. е. длина очереди) не ограничено.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}909 \text{ автомобиля в час;}$$

2) найдем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}8}{0{,}909} = 0{,}88\,;$$

3) вычислим p_0, p_n – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}88 = 0{,}12\,,$$

т. е. система простаивает в 12 % случаев;

$$p_n = (1-\rho)\cdot\rho^n; n = 1, 2, \ldots;$$

$$p_1 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^1 = 0{,}106\,;$$

$$p_2 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^2 = 0{,}093\,;$$

$$p_3 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^3 = 0{,}082\,;$$

$$p_4 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^4 = 0{,}072\,;$$

$$p_5 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^5 = 0{,}063 \text{ и т. д.;}$$

4) определим $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число требований, находящихся в системе:

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}88}{1-0{,}88} = 7{,}3 \text{ автомобиля;}$$

5) рассчитаем $\bar{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{T}_{\text{сис}} = \frac{\bar{N}_{\text{сис}}}{\lambda} = \frac{7{,}3}{0{,}8} = 9{,}1 \text{ ч;}$$

6) вычислим $\bar{N}_{\text{оч}}$ – число требований в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \bar{N}_{\text{сис}} - \frac{\lambda}{\mu} = 7{,}3 - \frac{0{,}8}{0{,}909} = 6{,}4 \text{ автомобиля;}$$

7) найдем $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднюю продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{6{,}4}{0{,}8} = 8{,}0 \text{ ч};$$

8) рассчитаем A – абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q = 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8 .$$

6.8. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

На практике большинство систем массового обслуживания являются многоканальными. Процесс обслуживания имеет интенсивность входного потока λ, при этом параллельно может обслуживаться не более n заявок на n каналах обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равна $\frac{1}{\mu}$. Входной и выходной потоки являются пуассоновскими. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, а длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования n параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышении по сравнению с одноканальной системой скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно n заявок. Граф состояний данной системы имеет следующий вид (рис. 6.8).

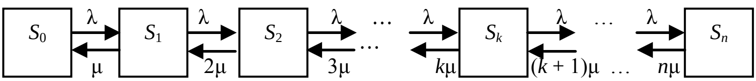


Рис. 6.8. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами

Состояния этой системы имеют следующую интерпретацию:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

…

S_k – занято k каналов, остальные свободны;

…

S_n – занято n каналов, заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda p_0 + \mu p_1; \\ \ldots \\ p_k' = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + \mu(k+1) p_{k+1}, 1 \le k \le n-1; \\ \ldots \\ p_n' = \lambda p_{n-1} - \mu \cdot n \cdot p_n. \end{cases}$$

Начальные условия решения системы:

$$p_0(0) = 1;$$

$$p_1(0) = 0;$$

$$p_2(0) = 0$$

$$\ldots;$$

$$p_k(0) = 0$$

$$\ldots;$$

$$p_n(0) = 0.$$

Стационарное решение системы имеет такой вид:

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot \rho_0, k = 1, 2, \ldots, n, \\ p_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}, k = 0, 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формулы для выполнения вероятностей p_k называются *формулами Эрланга* (см. прил. А).

Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной системы массового обслуживания с отказами в стационарном режиме:

1) p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, k = 0, 1, ..., n;$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, k = 1, ..., n;$$

2) $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_n;$$

3) q – относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}};$$

4) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda q = \lambda(1 - p_{\text{отк}});$$

5) $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \rho(1 - p_{\text{отк}}) = \rho q = \sum_{k=1}^{n} k p_k .$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Торговое предприятие планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этих целей выделено три телефонных аппарата (n = 3). Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составит: 0,7 заказа в минуту (λ). Длительность оформления заказа в среднем равна $\overline{t_{\text{об}}} = 2{,}0$ мин. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефоны заняты, – получает отказ в обслуживании. Поток заказов и поток их оформления являются простейшими.

Используя приведенную информацию:

1) рассчитаем μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ заказа в мин;}$$

2) определим ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,7}{0,5} = 1,4\,;$$

3) найдем p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы, используя формулы Эрланга:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!} + \frac{1,4^2}{2!} + \frac{1,4^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 1,4 + 0,98 + 0,457} = 0,261\,,$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0; k = 1, ..., n,$$

$$p_1 = \frac{1,4^1}{1!} \cdot 0,261 = 0,365\,,$$

$$p_2 = \frac{1,4^2}{2!} \cdot 0,261 = 0,256\,,$$

$$p_3 = \frac{1,4^3}{3!} \cdot 0,261 = 0,118\,;$$

4) определим $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_n = 0,118\,;$$

5) вычислим q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,118 = 0,882\,;$$

6) рассчитаем A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q = 0,7 \cdot 0,882 = 0,617\,;$$

7) найдем $\overline{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = 1,4 \cdot 0,882 = 1,235 .$$

Таким образом, при установившемся режиме работы системы в среднем занято 1,2 телефонных аппарата из трех, остальные 1,8 простаивают, поэтому работа торгового предприятия по приему заказов клиентов по телефону считается неудовлетворительной, так как организация не обслуживает заявки в среднем в 11,8 % случаев ($p_{отк} = 0,118$). Пропускную способность данной системы при искомых λ и μ можно повысить за счет увеличения числа телефонных аппаратов;

8) определим оптимальное число каналов обслуживания, используемых для приема заказов клиентов, в целях сокращения числа необслуженных заявок, поступающих в систему. Для этого используем формулу $p_{отк}$ – определения вероятности отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Расчеты заносим в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1. **Некоторые характеристики системы**

Предельные вероятности состояния системы	n – количество каналов обслуживания					
	1	2	3	4	5	6
p_0 – вероятность свободного состояния системы	0,417	0,296	0,261	0,250	0,247	0,247
$p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки	0,583	0,290	0,118	0,040	0,011	0,002

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!}} = 0,417 \text{, при } n = 1;$$

$$p_{отк} = \frac{1,4^1}{1!} \cdot 0,417 = 0,583 \text{, при } n = 1;$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!} + \frac{1,4^2}{2!}} = 0,296 \text{, при } n = 2;$$

$$p_{отк} = \frac{1,4^2}{2!} \cdot 0,296 = 0,290 \text{, при } n = 2;$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1{,}4^0}{0!} + \frac{1{,}4^1}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} + \frac{1{,}4^3}{3!}} = 0{,}261 \text{, при } n = 3;$$

$$p_{\text{отк}} = \frac{1{,}4^3}{3!} \cdot 0{,}261 = 0{,}118 \text{, при } n = 3;$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1{,}4^0}{0!} + \frac{1{,}4^1}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} + \frac{1{,}4^3}{3!} + \frac{1{,}4^4}{4!}} = 0{,}250 \text{, при } n = 4;$$

$$p_{\text{отк}} = \frac{1{,}4^4}{4!} \cdot 0{,}250 = 0{,}040 \text{, при } n = 4;$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1{,}4^0}{0!} + \frac{1{,}4^1}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} + \frac{1{,}4^3}{3!} + \frac{1{,}4^4}{4!} + \frac{1{,}4^5}{5!}} = 0{,}247 \text{, при } n = 5;$$

$$p_{\text{отк}} = \frac{1{,}4^5}{5!} \cdot 0{,}247 = 0{,}011 \text{, при } n = 5;$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1{,}4^0}{0!} + \frac{1{,}4^1}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} + \frac{1{,}4^3}{3!} + \frac{1{,}4^4}{4!} + \frac{1{,}4^5}{5!} + \frac{1{,}4^6}{6!}} = 0{,}247 \text{, при } n = 6;$$

$$p_{\text{отк}} = \frac{1{,}4^6}{6!} \cdot 0{,}247 = 0{,}002 \text{, при } n = 6.$$

Из табл. 6.1. видно, что расширение количества телефонных аппаратов при данных значений λ и μ до 6 единиц позволит обеспечить удовлетворение заявок на 99,8 %, так как при $n = 6$ вероятность отказа в обслуживании $p_{\text{отк}} = 0{,}002$.

6.9. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Поток заявок, поступающих в систему, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний – интенсивность μ. Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2, …, S_k, …, S_n, …, нумеруемых по числу заявок, находящихся в системе массового обслуживания:

S_0 – в системе заявок нет (все каналы обслуживания свободны);

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

S_2 – заняты два канала, остальные свободны;

…

S_k – занято k каналов, остальные свободны;

…

S_n – заняты все n каналов (очереди нет);

S_{n+1} – заняты все n каналов, в очереди одна заявка;

…

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди;

… (рис. 6.9).

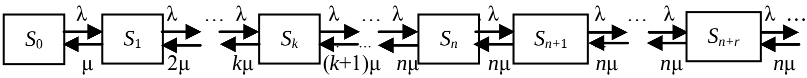


Рис. 6.9. Граф состояний системы массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Интенсивность потока обслуживания данной системы не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в системе от 0 до n повышается от величины μ до n·μ, так как увеличивается число каналов обслуживания (n каналов). При числе заявок в системе больше, чем n, интенсивность потока обслуживания сохраняется равной n·μ.

Используя формулы расчета p_0, p_1, p_2, …, p_n для процесса гибели и размножения, можно получить следующие формулы для предельных вероятностей состояний n-канальной системы с неограниченной очередью:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \ldots .$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 .$$

Найдем другие характеристики данной системы:

1) при $r \to \infty$

$$p_{\text{отк}} = 0;$$

$$q = 1;$$

$$A = \lambda;$$

$$\overline{k} = \rho;$$

2) $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

3) $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \rho ;$$

4) $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda};$$

5) $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}} .$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

На элеватор поступают машины с зерном из сельскохозяйственных предприятий района. Элеватор оборудован четырьмя разгрузочными площадками (n). Поток поступающих автомобилей имеет интенсивность λ = 3 автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,9 часа $\left(\overline{t}_{\text{об}}\right)$.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,9} = 1,11;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1,11} = 2,7,$$

так как

$$\frac{\rho}{n} < 1,$$

то очередь растет не до бесконечности;

3) найдем p_0, p_n – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)})^{-1} = (1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} +$$
$$+ \frac{2,7^4}{4!} + \frac{2,7^5}{4!(4-2,7)})^{-1} = 0,057.$$

В среднем 5,7 % времени разгрузочные площадки будут простаивать.

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, k = 1, ..., n;$$

$$p_1 = \frac{2,7^1}{1!} \cdot 0,057 = 0,154;$$

$$p_2 = \frac{2,7^2}{2!} \cdot 0,057 = 0,208;$$

$$p_3 = \frac{2,7^3}{3!} \cdot 0,057 = 0,187;$$

$$p_4 = \frac{2,7^4}{4!} \cdot 0,057 = 0,126;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0;$$

$$p_5 = \frac{2{,}7^5}{4 \cdot 4!} \cdot 0{,}057 = 0{,}012\ ;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0\ ;$$

$$p_6 = \frac{2{,}7^{4+2}}{4^2 \cdot 4!} \cdot 0{,}057 = 0{,}058\ ;$$

$$p_7 = \frac{2{,}7^{4+3}}{4^3 \cdot 4!} \cdot 0{,}057 = 0{,}039\ ;$$

4) вычислим $p_{\text{оч}}$ – вероятность того, что очередь будет расти:

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{2{,}7^5}{4!(4-2{,}7)} \cdot 0{,}057 = 0{,}262\ ;$$

5) вероятность отказа в обслуживании заявки при $r \to \infty$ равна нулю:

$$p_{\text{отк}} = 0\ ;$$

6) при $r \to \infty$ относительная пропускная способность системы равна 1:

$$q = 1\ ;$$

7) при $r \to \infty$ абсолютная пропускная способность системы равна интенсивности λ:

$$A = \lambda = 3 \text{ автомобиля в час;}$$

8) при $r \to \infty$ среднее число занятых обслуживанием каналов равно:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 2{,}7\ ;$$

9) определим $\bar{\bar{k}}$ – долю каналов, занятых обслуживанием:

$$\bar{\bar{k}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{2{,}7}{4} = 0{,}675\ ;$$

10) рассчитаем $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{0,057 \cdot 2,7^{4+1}}{4 \cdot 4! \left(1 - \frac{2,7}{4}\right)^2} = 0,8 \text{ автомобиля;}$$

11) вычислим $\overline{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \rho = 0,8 + 2,7 = 3,5 \text{ автомобиля;}$$

12) найдем $\overline{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,8}{3} = 0,27 \text{ ч;}$$

13) определим $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}} = 0,27 + 0,9 = 1,17 .$$

6.10. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограниченной очередью

Системы массового обслуживания с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных в подразделе 6.9 тем, что число заявок в очереди ограничено и не может быть более m. Если новая заявка поступает в момент времени, когда все места в очереди заняты, она покидает систему необслуженной. Для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких систем суммируют не бесконечную, а конечную прогрессию.

Предельные вероятности состояния многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной очередью:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right]^{-1},$$

$$p_1=\frac{\rho^1}{1!}p_0,\ldots,\ p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\ldots,\ p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0\,,$$

$$p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0,\ldots,\ p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0,(r=1,\ldots,m)\,.$$

Рассчитаем другие показатели функционирования системы массового обслуживания:

1) $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}}=p_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\cdot p_0;$$

2) q – относительная пропускная способность системы:

$$q=1-p_{\text{отк}}=1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0\,;$$

3) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A=\lambda q=\lambda(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0)\,;$$

4) $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов обслуживания:

$$\bar{k}=\rho\cdot\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0\right)=\rho q;$$

5) $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}}=\frac{p_0\rho^{n+1}\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\cdot\left(m+1-\frac{m\rho}{n}\right)\right]}{n\cdot n!\cdot\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2};$$

6) $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{N}_{\text{сис}}=\bar{N}_{\text{оч}}+\bar{k}\;;$$

7) $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\bar{T}_{\text{оч}}=\frac{\bar{N}_{\text{оч}}}{A}\,;$$

8) $\overline{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{об}}.$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Торговая база по заготовке овощей и картофеля оборудована тремя разгрузочно-сортировочными площадками (n). Прибывающие на разгрузку автомобили могут ожидать своей очереди на площадке, вмещающей не более 6 автомобилей (m). Поток автомобилей имеет интенсивность прибытия $\lambda = 4$ автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,5 часа ($\overline{t}_{\text{об}}$). Если прибывший с грузом автомобиль застает все места для ожидания занятыми, то он отправляется на другую торговую базу.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,5} = 2;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{2} = 2;$$

3) найдем p_0, p_n – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)}{3 \cdot 3!(1 - \frac{2}{3})}\right]^{-1} = 0,114.$$

В среднем 11,4 % времени разгрузочно-сортировочные площадки будут простаивать.

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 ,$$

$$p_1 = \frac{2^1}{1!} \cdot 0{,}114 = 0{,}228 ,$$

$$p_2 = \frac{2^2}{2!} \cdot 0{,}114 = 0{,}228 ,$$

$$p_3 = \frac{2^3}{3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}152 ,$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, (r = 1, ..., m) ,$$

$$p_4 = \frac{2^4}{3^1 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}101,$$

$$p_5 = \frac{2^5}{3^2 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}068 ,$$

$$p_6 = \frac{2^6}{3^3 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}045 ,$$

$$p_7 = \frac{2^7}{3^4 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}030 ,$$

$$p_8 = \frac{2^8}{3^5 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}020 ,$$

$$p_9 = \frac{2^9}{3^6 \cdot 3!} \cdot 0{,}114 = 0{,}013 ;$$

4) определим $p_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m} = 0{,}013 ;$$

5) вычислим q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,013 = 0,987;$$

6) определим A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q = 4 \cdot 0,987 = 3,948;$$

7) найдем $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = p \cdot q = 2 \cdot 0,987 = 1,97;$$

8) рассчитаем $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}\left[1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)\right]}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} =$$

$$= \frac{0,114 \cdot 2^4\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(6 + 1 - \frac{6 \cdot 2}{3}\right)\right]}{3 \cdot 3! \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 0,67;$$

9) вычислим $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \bar{N}_{\text{оч}} + \bar{k} = 0,67 + 1,97 = 2,64;$$

10) найдем $\bar{T}_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \frac{\bar{N}_{\text{оч}}}{A} = \frac{0,67}{3,948} = 0,17 \text{ ч};$$

11) определим $\bar{T}_{\text{сис}}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{T}_{\text{сис}} = \bar{T}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} = 0,17 + 0,5 = 0,67 \text{ ч}.$$

6.11. Замкнутая система массового обслуживания

В замкнутых системах массового обслуживания, или системах Энгесета, источник требований находится внутри системы, и интенсивность потока заявок зависит от состояния самой системы. Чаще всего потоком требований в такой системе является поток неисправностей от некоторой группы работающих устройств. Пусть имеется m работающих устройств, которые могут выходить из строя за счет неисправностей. Имеется n каналов обслуживания этих требований. Обычно $n < m$ (рис. 6.10).

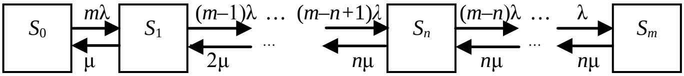


Рис. 6.10. Граф состояний замкнутой системы массового обслуживания

Система может находиться в одном из состояний:

S_0 – все устройства работают и каналы обслуживания свободны;

S_1 – одно устройство вышло из строя и обслуживается одним каналом;

…

S_n – n устройств не работают и все n каналов обслуживания заняты;

…

S_m – все устройства не работают, из них n – обслуживаются, а m–n ожидают обслуживания в очереди.

Вероятности состояний и характеристики замкнутой системы массового обслуживания определяются следующим образом:

1) p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для вариантов ее организации:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{N!}{k!(N-k)!}\rho^k + \sum_{n+1}^{N} \frac{N!}{n^{k-n} \cdot n!(N-k)!}\rho^k\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{N!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!(N-k)!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\rho^k}{n^k (N-k)!}\right)^{-1},$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k p_0}{k!\left(N-k\right)\,!}, 1 \le k \le n, \\ \dfrac{N!\,p^k p_0}{n^{k-n} n!\left(N-k\right)\,!}, n+1 \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок;

2) $\overline{N}_{\text{оч}}$ – среднее число требований в очереди на обслуживание (для вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{\text{оч}} = \sum_{n+1}^{N}(k-n)\,p_k;$$

3) $\overline{N}_{сис}$ – среднее число требований в системе (на обслуживании и в очереди) для вариантов организации системы:

$$\overline{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} kp_k;$$

4) $\overline{N}_{\text{пр}}$ – среднее число каналов, простаивающих из-за отсутствия работы (для вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,p_k;$$

5) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = (N - \overline{N}_{\text{сист}})\lambda\ ;$$

6) q – относительная пропускная способность системы:

$$q = 1\ ;$$

7) a_1 – коэффициент простоя требования в очереди (для вариантов организации системы):

$$a_1 = \frac{\overline{N}_{\text{оч}}}{N};$$

8) a_2 – коэффициент использования устройства (для вариантов организации системы):

$$a_2 = 1 - \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{N};$$

9) a_3 – коэффициент простоя обслуживающих каналов (для вариантов организации системы):

$$a_3 = \frac{\overline{N}_{\text{пр}}}{N};$$

10) $\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания требования (для вариантов организации системы):

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu}.$$

Пример. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

На кафедре для обслуживания двенадцати персональных компьютеров выделено два инженера с одинаковой производительностью. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0{,}2$. Время обслуживания компьютера подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного компьютера одним инженером составляет: $\overline{t}_{\text{об}} = 1{,}3$ часа.

Рассматриваются два варианта организации обслуживания персональных компьютеров:

а) создать один компьютерный класс, тогда при отказе компьютера его будет обслуживать один из свободных инженеров ($n = 2$; $N = 12$);

б) создать два компьютерных класса по 6 компьютеров в каждом ($n = 1$; $N = 6$).

Рассмотрим *первый вариант* работы системы.

Используя приведенную информацию:

1) вычислим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}769;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}769} = 0{,}26;$$

3) найдем p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для двух вариантов ее организации:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k p_0}{k!(N-k)!}, 1 \le k \le n, \\[2ex] \dfrac{N!\rho^k p_0}{n^{k-n} n!(N-k)!}, n+1 \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

$$p_1 = \frac{12! \cdot 0,26^1}{1!(12-1)!} \cdot p_0 = 3,2 p_0 = 0,070 \,;$$

$$p_2 = \frac{12! \cdot 0,26^2}{2!(12-2)!} \cdot p_0 = 4,462 p_0 = 0,098 \,;$$

$$p_3 = \frac{12! \cdot 0,26^3}{2! \cdot 2^{3-2}(12-3)!} \cdot p_0 = 5,801 p_0 = 0,127 \,;$$

$$p_4 = \frac{12! \cdot 0,26^4}{2! \cdot 2^{4-2}(12-4)!} \cdot p_0 = 6,786 p_0 = 0,149 \,;$$

$$p_5 = \frac{12! \cdot 0,26^5}{2! \cdot 2^{5-2}(12-5)!} \cdot p_0 = 7,058 p_0 = 0,155 \,;$$

$$p_6 = \frac{12! \cdot 0,26^6}{2! \cdot 2^{6-2}(12-6)!} \cdot p_0 = 6,422 p_0 = 0,141 \,;$$

$$p_7 = \frac{12! \cdot 0,26^7}{2! \cdot 2^{7-2}(12-7)!} \cdot p_0 = 5,009 p_0 = 0,110 \,;$$

$$p_8 = \frac{12! \cdot 0,26^8}{2! \cdot 2^{8-2}(12-8)!} \cdot p_0 = 3,256 p_0 = 0,071 \,;$$

$$p_9 = \frac{12! \cdot 0,26^9}{2! \cdot 2^{9-2}(12-9)!} \cdot p_0 = 1,693 p_0 = 0,037 \,;$$

$$p_{10} = \frac{12! \cdot 0,26^{10}}{2! \cdot 2^{10-2}(12-10)!} \cdot p_0 = 0,660 p_0 = 0,014 \,;$$

$$p_{11} = \frac{12! \cdot 0,26^{11}}{2! \cdot 2^{11-2}(12-11)!} \cdot p_0 = 0,172 p_0 = 0,004 \,;$$

$$p_{12} = \frac{12! \cdot 0,26^{12}}{2! \cdot 2^{12-2}(12-12)!} \cdot p_0 = 0,022 p_0 = 0,0005 \,.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{N} p_k = 1,$$

то найдем p_0:

$$\sum_{k=0}^{N} p_k = p_0(1+3{,}2+4{,}462+5{,}801+6{,}786+7{,}058+6{,}422+$$
$$+5{,}009+3{,}256+1{,}693+0{,}660+0{,}172+0{,}022)=1.$$

Отсюда $p_0 = 0{,}022$, подставив p_0, найдем значения $p_1 - p_{12}$;

4) определим $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \sum_{k=n+1}^{N}(k-n)p_k = (3-2)\cdot 0{,}127+(4-2)\cdot 0{,}149+(5-2)\times$$
$$\times 0{,}155+(6-2)\cdot 0{,}141+(7-2)\cdot 0{,}110+(8-2)\cdot 0{,}071+(9-2)\times$$
$$\times 0{,}037+(10-2)\cdot 0{,}014+(11-2)\cdot 0{,}004+(12-2)\cdot 0{,}0005=2{,}84;$$

5) определим $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} kp_k = 1\cdot 0{,}07+2\cdot 0{,}098+3\cdot 0{,}127+4\cdot 0{,}149+5\cdot 0{,}155+$$
$$+6\cdot 0{,}141+7\cdot 0{,}110+8\cdot 0{,}071+9\cdot 0{,}037+10\cdot 0{,}014+11\cdot 0{,}004+$$
$$+12\cdot 0{,}0005=4{,}72;$$

6) рассчитаем $\bar{N}_{\text{пр}}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$\bar{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = (2-0)\cdot p_0+(2-1)\cdot p_1 =$$
$$=2\cdot 0{,}022+1\cdot 0{,}07=0{,}114;$$

7) найдем a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди:

$$a_1 = \frac{\bar{N}_{\text{оч}}}{N} = \frac{2{,}84}{12} = 0{,}237;$$

8) найдем a_2 – коэффициент использования компьютеров:

$$a_2 = 1 - \frac{\overline{N}_{\text{сис}}}{N} = 1 - \frac{4,72}{12} = 0,606;$$

9) найдем a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров:

$$a_3 = \frac{\overline{N}_{\text{пр}}}{N} = \frac{0,114}{12} = 0,010;$$

10) вычислим $\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера:

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2}\left(\frac{1-0,606}{0,606}\right) - \frac{1}{0,769} = 1,95.$$

Рассчитаем характеристики работы системы для *второго варианта* ее организации:

11) вычислим p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_1 = \frac{6! \cdot 0,26^1}{1! \cdot (6-1)!} \cdot p_0 = 1,560 p_0 = 0,165;$$

$$p_2 = \frac{6! \cdot 0,26^2}{1! \cdot 1^{2-2}(6-1)!} \cdot p_0 = 2,028 p_0 = 0,215;$$

$$p_3 = \frac{6! \cdot 0,26^3}{1! \cdot 1^1 (6-3)!} \cdot p_0 = 2,109 p_0 = 0,224;$$

$$p_4 = \frac{6! \cdot 0,26^4}{(6-4)!} \cdot p_0 = 1,645 p_0 = 0,174;$$

$$p_5 = \frac{6! \cdot 0,26^5}{(6-5)!} \cdot p_0 = 0,855 p_0 = 0,091;$$

$$p_6 = \frac{6! \cdot 0,26^6}{(6-6)!} \cdot p_0 = 0,222 p_0 = 0,024.$$

Найдем

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{N} p_k = 0{,}106 \; ,$$

подставив значение p_0 в вышеизложенные формулы, определим $p_1 - \; p_6$;

12) рассчитаем $\bar{N}_{\text{оч}}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{\text{оч}} = \sum_{k=n}^{N}(k-n)p_k = (6-1)\cdot 0{,}024 + (6-2)\cdot 0{,}091 + (6-3)\cdot 0{,}174 +$$
$$+ (6-4)\cdot 0{,}224 + (6-5)\cdot 0{,}215 = 1{,}666;$$

13) определим $\bar{N}_{\text{сис}}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди):

$$\bar{N}_{\text{сис}} = \sum_{k=1}^{N} kp_k = 1\cdot 0{,}165 + 2\cdot 0{,}215 + 3\cdot 0{,}224 + 4\cdot 0{,}174 +$$
$$+ 5\cdot 0{,}091 + 6\cdot 0{,}024 = 2{,}559;$$

14) рассчитаем $\bar{N}_{\text{пр}}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$\bar{N}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = (1-0)\cdot p_0 = 0{,}106;$$

15) найдем a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди:

$$a_1 = \frac{\bar{N}_{\text{оч}}}{N} = \frac{1{,}666}{6} = 0{,}278;$$

16) вычислим a_2 – коэффициент использования компьютеров:

$$a_2 = 1 - \frac{\bar{N}_{\text{сис}}}{N} = 1 - \frac{2{,}559}{6} = 0{,}574;$$

17) найдем a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров:

$$a_3 = \frac{\bar{N}_{\text{пр}}}{N} = \frac{0{,}106}{6} = 0{,}018;$$

18) рассчитаем $\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера:

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2}\left(\frac{1-0,574}{0,574}\right) - \frac{1}{0,769} = 2,41;$$

19) расчеты занесем в табл. 6.2, проанализируем ее и найдем оптимальное решение задачи.

Т а б л и ц а 6.2. **Некоторые вероятностные характеристики системы**

Вероятностные характеристики	Варианты организации системы	
	1	*2*
a_1 – коэффициент простоя компьютера в очереди	0,237	0,278
a_2 – коэффициент использования компьютеров	0,606	0,574
a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров	0,010	0,018
$\overline{T}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера	1,95	2,41

При первом варианте организации системы персональный компьютер стоит в очереди для ожидания обслуживания 0,237 часа рабочего времени, что меньше, чем при втором варианте организации системы (a_1 = 0,278 часа). Есть вероятность того, что персональный компьютер в любой момент времени будет работать при первом варианте выше, чем при втором варианте организации системы (a_2 = 0,606 > 0,574), следовательно, первый вариант организации работ по обслуживанию персональных компьютеров эффективнее, чем второй.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вопросы можно решить с помощью теории массового обслуживания?

2. Дайте определение понятиям «система массового обслуживания», «процесс обслуживания», «канал обслуживания», «заявка или требование», «точка возобновления заказа».

3. Какими свойствами обладают случайные процессы, протекающие в системе массового обслуживания?

4. Какие системы массового обслуживания являются марковскими?

5. Какими свойствами характеризуются простейшие потоки?

6. Каков закон распределения интервала времени между событиями простейшего потока?

7. Приведите классификацию систем массового обслуживания.

8. Приведите уравнения Колмогорова для расчета предельных вероятностей состояний системы массового обслуживания.

9. Охарактеризуйте процесс гибели и размножения системы массового обслуживания.

10. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с отказами.

11. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с ожиданием.

12. Что такое однофазная система массового обслуживания?

13. Что такое многофазная система массового обслуживания?

14. Что такое замкнутая система массового обслуживания?

15. Что собой представляет размеченный граф состояний системы?

16. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с отказами.

17. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием.

18. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди.

19. Назовите критерии оптимальности одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания.

20.Перечислите характеристики замкнутой системы массового обслуживания.

7. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

7.1. Постановка задачи управления запасами

Основными причинами создания производственных запасов служат необходимость обеспечения бесперебойного снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика к потребителю партиями, а также несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Под запасами понимают все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Запасы подразделяются на:

– запасы средств производства;

– запасы предметов потребления.

Предприятия стремятся уменьшить свои запасы, так как оплачивают их хранение, отвлекают денежные средства на их оплату, несут потери от морального износа и естественной убыли запасов. Но слишком низкий уровень запасов связан с риском возникновения их дефицита, остановкой производства, изменением конъюнктуры, случайными колебаниями спроса, что приводит к увеличению упущенной прибыли.

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты на функционирование системы были бы минимальными. Под *организацией поставок* понимается определение объемов поставок и периодичность заказов.

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф. И. Эджуорта и Ф. У. Харриса, опубликованными в конце XIX – начале XX в., в которых исследовалась простая модель для определения экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта. Ф. У. Харрис в 1913 г. опубликовал статью, в которой предложил модель оптимального размера запасов. В 1934 г. Р. Х. Уилсон проанализировал предложенную Ф. У. Харрисом модель и сформулировал принципиальный вывод о том, что оптимальный размер запасов достигается при балансе между затратами на размещение и издержками на хранение. С того времени данная модель стала носить название «модель Уилсона» (см. прил. А).

Как научная дисциплина теория управления запасами начала формироваться в середине 1950-х гг. В настоящее время в литературе имеется более 300 моделей управления запасами.

Существует четыре основных вида затрат, которые могут оказать влияние на решение задачи по управлению запасами, т. е. суммарные затраты системы управления запасами состоят из:

1) затрат на приобретение запасов;
2) затрат на организацию заказа;
3) затрат на хранение запасов;
4) потерь от дефицита запаса.

Затраты на приобретение запасов характеризуются стоимостью единицы продукции, которая может быть постоянной или переменной. При этом цена единицы продукции может зависеть от величины партии заказа, что выражается в виде оптовых скидок. Таким образом, затраты, которые не зависят от величины и периодичности заказов, при решении задач не учитываются.

К *затратам на организацию заказа* относят постоянные расходы, связанные с размещением заказов: расходы на разъезды и командировки, почтово-телеграфные расходы, транспортные затраты. При размещении более мелких заказов и, следовательно, более частых эти затраты возрастают по сравнению с размещением более крупных, но менее частых заказов.

Затраты на хранение запаса включают затраты на амортизацию и эксплуатацию складов, на содержание и грузопереработку запаса на складах. Они возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием необходимых ресурсов или продукции, и возможные потери из-за утраты доверия покупателей. Эти потери рассматриваются как уменьшение прибыли за счет простоя мощности и обслуживающего персонала предприятия, переналадки производственного процесса, замены дефицитных материалов другими более дорогими, штрафа за нарушение сроков поставки продукции.

Суммарные затраты можно проиллюстрировать графически: по оси абсцисс ($0x$) откладываем уровень запаса, по оси ординат (y) – суммарные затраты (рис. 7.1).

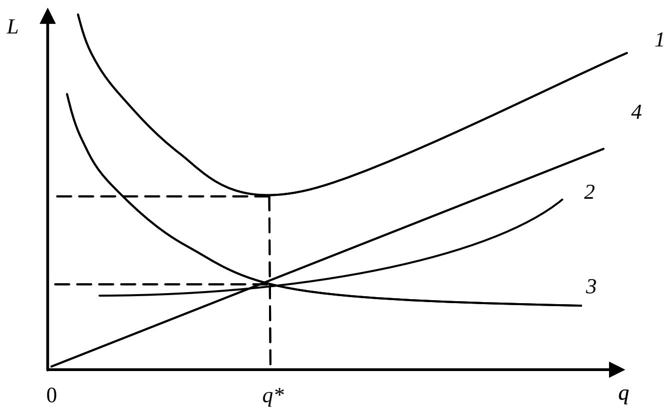


Рис. 7.1. Зависимость суммарных затрат от размера партии поставок:
1 – суммарные затраты; *2* – затраты на приобретение; *3* – затраты на оформление;
4 – затраты на хранение

Классификация моделей управления запасами. Большое разнообразие моделей управления запасами объясняется многообразием реальных ситуаций, характером спроса. Спрос может быть детерминированным (достаточно известным) и вероятностным (случайным).

Детерминированный спрос может быть:

1) статическим, т. е. неизменным во времени, интенсивность потребления постоянна во времени;

2) динамическим, когда спрос изменяется во времени.

Вероятностный спрос может быть:

1) стационарным, т. е. с неизменной во времени плотностью вероятности;

2) нестационарный, т. е. с изменяющейся во времени плотностью вероятности.

На разнообразие форм моделей управления запасами влияют:

1) число видов продукции, т. е. модели могут быть однопродуктовыми (однономенклатурными) и многопродуктовыми (многономенклатурными);

2) число пунктов накопления запасов (один или несколько);

3) период времени (интервал), в течение которого осуществляется регулирование уровня запасов (этот период может быть конечным и бесконечным).

Модели управления запасами различаются по:

1) пополнению запасов (этот процесс может происходить мгновенно или равномерно во времени);

2) запаздыванию поставок, т. е. заказ может быть поставлен немедленно или для его выполнения требуется некоторое время.

Интервалом времени между моментом размещения заказов и его поставкой называется *срок выполнения заказов*. Эта величина может быть детерминированной и случайной.

7.2. Статическая детерминированная однопродуктовая модель

Самая простая модель характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запасов и отсутствием дефицита.

Введем условные обозначения:

v – интенсивность спроса;

K – затраты на организацию поставки;

q – величина заказанной партии;

s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени;

$I(t)$ – уровень запасов в зависимости от времени;

τ – интервал между двумя поставками.

Простая модель оптимальной партии поставки строится при следующих предположениях:

1) спрос в единицу времени – постоянный;

2) заказанная партия доставляется мгновенно;

3) дефицит недопустим;

4) затраты на организацию поставки постоянны и не зависят от величины партии;

5) издержки содержания единицы продукции в течение единицы времени составляют s.

В простой модели уровень запасов уменьшается равномерно от q до 0, после чего подается заказ на доставку новой партии величиной q. Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины q.

В простой модели динамику изменения запасов можно изобразить в виде пилообразной ломаной (рис. 7.2).

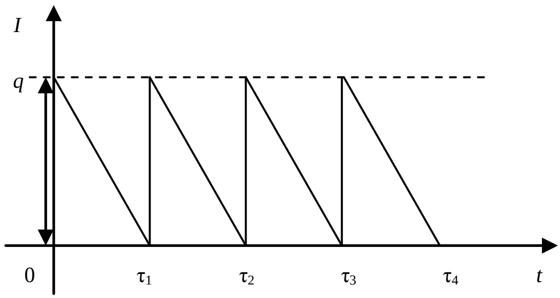


Рис. 7.2. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона

Интервал времени между поставками τ называется *циклом*. Издержки в течение цикла $L_ц$ состоят из стоимости заказа K и затрат на содержание запаса, которые пропорциональны средней величине запаса –

$$I = \frac{q}{2}$$

и длине цикла –

$$\tau = \frac{q}{v},$$

следовательно, издержки в течение цикла вычисляются по формуле:

$$L_{\text{ц}} = K + s\frac{q}{2}\cdot\frac{q}{v}.$$

Разделив это выражение на длину цикла ($\tau = \frac{q}{v}$), получим издержки в единицу времени:

$$\frac{L_{\text{ц}}}{\tau} = L \text{ или } \frac{L_{\text{ц}}}{\tau} = K\frac{v}{q} + s\frac{q}{2}.$$

Чтобы найти точку минимума, продифференцируем выражение по q, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{(Kv)'q - Kv(q)'}{q^2} + \frac{1}{2}\left(sq\right)' = \frac{0\cdot q - Kv\cdot 1}{q^2} + \frac{1}{2}s\cdot 1 = -\frac{Kv}{q^2} + \frac{s}{2},$$

так как

$$-\frac{Kv}{q^2} + \frac{s}{2} = 0,$$

то найдем отсюда оптимальный размер партии заказа (q^*):

$$\frac{Kv}{q^2} = \frac{s}{2} \text{ или } q^2 s = 2Kv, \text{ или } q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}.$$

Эта формула называется формулой Уилсона, или формулой для определения оптимальной величины заказа или размера партии.

Рассчитаем остальные оптимальные параметры системы:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2Kv}{sv^2}} = \sqrt{\frac{2K}{sv}},$$

где τ^* – оптимальная продолжительность цикла потребления или оптимальный интервал между поставками.

Суммарные затраты по формированию оптимального размера партии заказа и содержанию запасов в единицу времени рассчитываются по формуле:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} = sq^*,$$

так как

$$\frac{d^2L}{dq^2} \geq 0 ,$$

то для всех $q > 0$ выражение –

$$L^* = sq^*$$

является минимумом функции затрат.

Пример. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны K = 300 у. д. е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида v = 1500 т в год, стоимость 1 т α = 400 у. д. е. Издержки на хранение изделий составляют (p = 1) 1 % от стоимости хранимой продукции.

Используя приведенную информацию:

1) найдем s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени:

$$s = \alpha p;$$

$$s = 400 \cdot 0{,}1 = 4 \text{ у. д. е.};$$

2) используя модель Уилсона, определим q^* – оптимальный размер партии поставки (запуска):

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} ; \; q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 1500}{4}} = 474{,}34 \text{ т};$$

3) рассчитаем τ^* – оптимальный интервал между поставками (переналадками):

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} ;$$

$$\tau^* = \frac{474{,}34}{1500} = 0{,}316 \text{ года, или 115 дней};$$

4) вычислим L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} ; \; L^* = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 4 \cdot 1500} = 1897{,}4 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, если партия запуска продукции составит 474,34 т, а интервал между переналадками 115 дн., то суммарные затраты работы системы по формированию партии запуска и содержанию переналадок в единицу времени будут минимальными и равны 1897,4 у. д. е.

Пример. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц ($\tau_д$). Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют K = 300 у. д. е. Потребность в соках составляет ν = 1,8 тыс. литров в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня равна s = = 0,1 у. д. е.

Используя приведенную информацию:

1) найдем s – издержки содержания единицы продукции в месяц:

$$s = 0{,}1 \cdot 30 \text{ дней} = 3 \text{ у. д. е. в месяц;}$$

2) используя модель Уилсона, определим q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 1800}{3}} = 600 \text{ л;}$$

3) вычислим τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{600}{1800} = 0{,}33 \text{ месяца, или 10 дней;}$$

4) определим L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 3 \cdot 1800} = 1800 \text{ у. д. е.;}$$

5) рассчитаем $q_д$ – размер партии поставки при действующей системе:

$$q_д = \tau_д \nu\,; \; q_д = 1 \cdot 1800 = 1800 \text{ л;}$$

6) найдем $L_д$ – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L_д = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq}{2}\,;$$

$$L_д = \frac{300 \cdot 1800}{1800} + \frac{3 \cdot 1800}{2} = 3000 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, если в течение 10 дней разливать один сок, то оптимальная партия данного сока составит 600 л вместо 1800 л и затраты в единицу времени в течение цикла уменьшатся с 3000 до 1800 у. д. е., экономия составит 3000 – 1800 = 1200 у. д. е.

7.3. Обоснование точки заказа в модели Уилсона

В статической детерминированной однопродуктовой модели предполагали, что заказы выполняются мгновенно. На практике необходимо учитывать время их доставки. Пусть Θ – время от момента размещения заказа до его появления у потребителя. Заказ должен подаваться заранее, чтобы избежать дефицита наличного ресурса, которого должно быть достаточно для удовлетворения потребности за время реализации заказа. Рассмотрим три случая:

1) $\Theta = \tau^*$, т. е. в момент поступления очередной партии необходимо давать заказ на пополнение запаса. При этом точка заказа равна нулю: $r = 0$. Под *точкой заказа* понимают величину наличного запаса, при котором подается заказ на пополнение запаса. Если $\Theta = \tau^*$, то средний уровень фиктивного запаса равен:

$$\tau^* v + \frac{q^*}{2} = \frac{3}{2} q^* .$$

Под *текущим уровнем фиктивного запаса* понимают сумму наличного запаса и заказанного ресурса или товара в любой момент времени. При $\Theta = \tau^*$ динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса изображена на рис. 7.3 пунктирной линией;

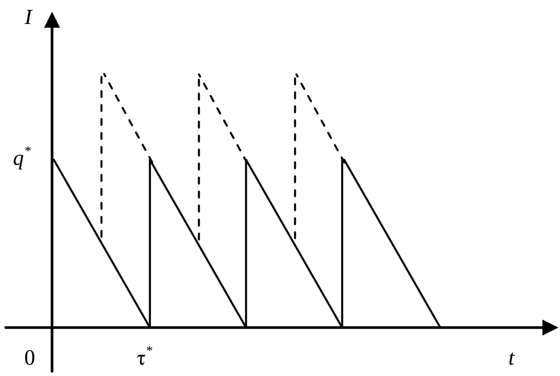


Рис. 7.3. Динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса, если время выполнения заказа равно длительности одного цикла ($\Theta = \tau^*$)

2) если $\Theta < \tau^*$, то точка размещения заказа $r = \Theta v$, а средний уровень фиктивного запаса составляет:

$$\Theta v + \frac{q^*}{2} .$$

Динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса при $\Theta < \tau^*$ отражена пунктиром на рис. 7.4;

3) динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса при $\Theta > \tau^*$ изображена пунктиром на рис. 7.5.

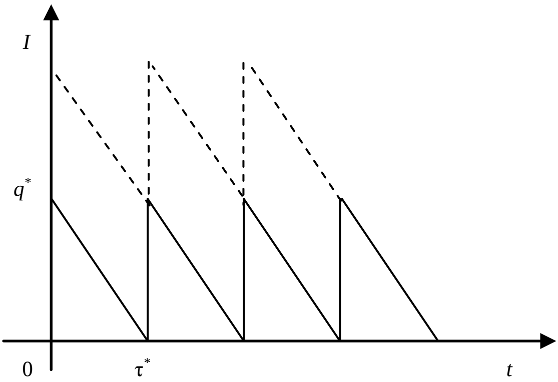


Рис. 7.4. Динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса, если время выполнения заказа меньше длительности одного цикла ($\Theta < \tau^*$)

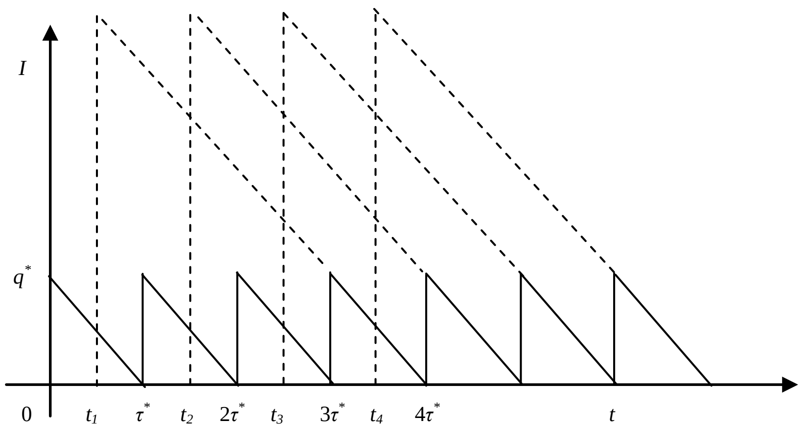


Рис. 7.5. Динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса, если время выполнения заказа больше длительности одного цикла ($\Theta > \tau^*$)

Допустим, если

$$\Theta = 2,5\tau^{*},$$

т. е. $\Theta > \tau^{*}$, то в интервале $[t_k, k\tau^{*}]$ средняя величина заказанного ресурса или товара равна:

$$2,5q^{*} = 2,5\tau^{*}v = \Theta v,$$

а это соответствует величине потребления за время реализации заказа.

Обобщим рассмотренные ситуации. Через $\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]$ обозначим наибольшее целое число, не превышающее $\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]$. Тогда в интервалах $[t_k, k\tau^{*}]$ перед поступлением очередной партии количество товара или ресурса в невыполненных заказах будет равно –

$$\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]q^{*},$$

а в интервалах $(k\tau^{*}, t_{k+1})$ после поступления до момента размещения заказа –

$$\left(\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]+1\right)q^{*}.$$

Если $\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]$ является целым числом, то имеется $\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]$ невыполненных заказов. Отсюда следует, что точка размещения заказа определяется по формуле:

$$r = \Theta v - \left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right]q^{*}.$$

Если $\Theta = \tau^{*}$, то имеем –

$$r = \Theta v - q^{*} = 0,$$

если $\Theta < \tau^{*}$, то –

$$\left[\frac{\Theta}{\tau^{*}}\right] = 0$$

и, следовательно,

$$r = \Theta v \ .$$

Для бесперебойной работы системы необходимо иметь минимальный начальный запас I_0, который можно рассчитать по формуле

$$I_0 = \Theta v \ .$$

Если I – наличный начальный запас, то для бездефицитной работы необходимо, чтобы

$$I \geq \Theta v \ .$$

Тогда отношение $\frac{I}{v}$ определит время потребления запаса I. Чтобы партия прибыла к моменту полного использования начального уровня, ее надо разместить в момент времени t_0:

$$t_0 = \frac{I}{v} - \Theta \ .$$

Остальные заказы следует выполнить в моменты времени t_k:

$$t_k = \frac{I}{v} - \Theta + k\tau^*, k = 0, 1, 2... \ .$$

Пример. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется v = 10 тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа K = 300 у. д. е., содержание одной заготовки s = 2 у. д. е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 30$ дней, или 0,082 года.

Используя приведенную информацию:

1) определим q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 10000}{2}} = 1732 \text{ шт.};$$

2) вычислим τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{1732}{1000} = 0{,}173 \text{, или 63,2 дня;}$$

3) найдем r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta \nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right] q^*, \text{ где} \left[\frac{\Theta}{\tau^*} \right] \text{– целая часть числа} \frac{\Theta}{\tau^*};$$

$$\tau = 0{,}082 \cdot 10000 - \left[\frac{0{,}082}{0{,}173} \right] \cdot 1732 = 820 \text{ шт.};$$

4) рассчитаем I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta \nu = 0{,}082 \cdot 10000 = 820 \text{ шт.};$$

5) определим t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{\nu} - \Theta + k\tau^*, k = 0,1,2,\ldots,$$

где I – фактический начальный запас;

$$t_0 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 0 \cdot 0{,}173 = 0 \text{ года};$$

$$t_1 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 1 \cdot 0{,}173 = 0{,}173 \text{ года, или 63,1 дня};$$

$$t_2 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 2 \cdot 0{,}173 = 0{,}346 \text{ года, или 126,3 дня};$$

6) найдем L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 10000} = 3464{,}1 \text{ у. д. е. в год.}$$

7.4. Учет дискретности спроса в модели Уилсона

В простейшей модели Уилсона предполагали, что спрос является непрерывной величиной. Если же спрос – непрерывная величина, а на размер партии заказа налагается ограничение положительности и целочисленности, тогда зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии изображена на рис. 7.6, для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \Delta L(q) = L(q) - L(q-1) \le 0, \\ \Delta L(q+1) = L(q+1) - L(q) \ge 0. \end{cases}$$

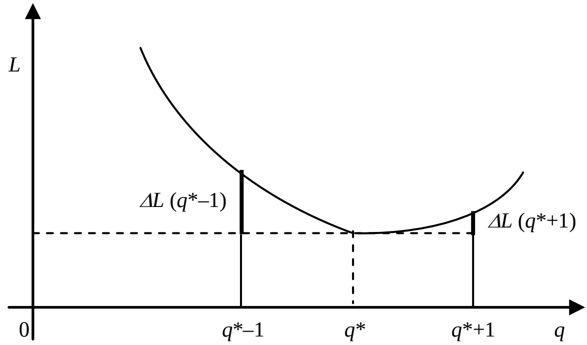


Рис. 7.6. Зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии поставок

Так как

$$L(q) = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2},$$

то найдем q:

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}} \le q \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}},$$

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Обозначим –

$$q_1^* = \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

$$q_2^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

тогда имеем два оптимальных значения:

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*.$$

Оптимальный интервал поставок –

$$\tau^* = \frac{q^*}{v}$$

может быть нецелочисленным, поэтому представим суммарные издержки работы системы как функцию от величины интервала возобновления поставки τ:

$$L(\tau) = \frac{K}{\tau} + \frac{2sv\tau}{2}.$$

Для данной функции выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta L(\tau) = L(\tau) - L(\tau - 1) \le 0, \\ \Delta L(\tau + 1) = L(\tau + 1) - L(\tau) \ge 0. \end{cases}$$

Откуда найдем значение τ:

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}} \le \tau \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}},$$

$$\tau^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right],$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Обозначим:

$$\tau_1^* = \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right],$$

$$\tau_2^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right].$$

Имеем два оптимальных значения:

$$\tau_1^* \le \tau^* \le \tau_2^*.$$

Пример. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Завод по выпуску сельскохозяйственной техники поставляет сельскохозяйственным организациям района тракторы. Средняя потребность в них равна τ = 4 трактора в месяц. Стоимость организации заказа K = 1000 у. д. е., издержки содержания одного трактора в месяц s = 200 у. д. е.

Используя приведенную информацию:

1) вычислим $q^*(q_1^*, q_2^*)$ – оптимальный размер партии поставки (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности):

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}\right],$$

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1000 \cdot 4}{200}}\right] = 6 \text{ тракторов},$$

где $[a]$ – целая часть числа a;

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*;$$

$$\left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}\right] \le q^* \le \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}\right];$$

$$\left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1000 \cdot 4}{200}}\right] \le q^* \le \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1000 \cdot 4}{200}}\right];$$

$$[-0{,}5 + 6{,}3] \le q^* \le [0{,}5 + 6{,}3];$$

$$5 \le q^* \le 6;$$

2) определим $L^*(L_1^*, L_2^*)$ – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \frac{K\nu}{q^*} + \frac{sq^*}{2};$$

$$L_1^* = \frac{1000 \cdot 4}{5} + \frac{200 \cdot 5}{2} = 1300 \text{ у. д. е. при } q^* = 5 \text{ тракторов};$$

$$L_2^* = \frac{1000 \cdot 4}{6} + \frac{200 \cdot 6}{2} = 1266{,}7 \text{ у. д. е. при } q^* = 6 \text{ тракторов};$$

3) рассчитаем $\tau^*(\tau_1^*, \tau_2^*)$ – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v};$$

$$\tau_1^* = \frac{q_1^*}{v} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ месяца, или 37 дней;}$$

$$\tau_2^* = \frac{q_2^*}{v} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \text{ месяца, или 45 дней.}$$

7.5. Модель оптимального размера партии поставки с конечной интенсивностью поступления партии

В модели Уилсона предполагалось, что вся партия поступает заказчику одновременно. На практике часто партия поступает по частям с интенсивностью λ. Например, один цех завода производит детали, которые поступают на склад с определенной интенсивностью и используются другим цехом для производства товара с интенсивностью потребления v. В этом случае система может работать бездефицитно, если $\lambda \geq v$. Динамика изменения запасов в системе изображена на рис. 7.7.

За время τ_1 запас одновременно поступает и расходуется, а в течение времени τ_2 запас только расходуется.

Длина цикла определяется по формуле:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 .$$

Скорость пополнения запасов равна:

$$(\lambda - v) .$$

Величина партии поставки равна q, но максимальный уровень запаса –

$$I_{\max} < q ,$$

так как продукция используется по мере изготовления.

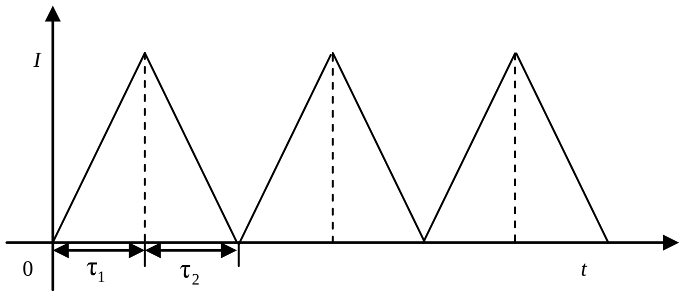


Рис. 7.7. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления заказа

Если производственный цикл длится t единиц времени, то общий объем продукции, произведенной за цикл, равен:

$$q = \lambda t\,.$$

Найдем:

$$t = \frac{q}{\lambda}\,.$$

Тогда максимальный уровень запаса определяется по формуле:

$$I_{\max} = (\lambda - v)t = (\lambda - v)\frac{q}{\lambda} = (1 - \frac{v}{\lambda})q\,.$$

Отсюда следует, что средний уровень запаса равен:

$$\overline{I} = \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right)\frac{q}{2}\,.$$

Тогда издержки системы в единицу времени составят:

$$L = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}(1 - \frac{v}{\lambda})\,.$$

Для определения оптимальных параметров работы системы найдем:

q^* – величину оптимальной партии –

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{s}}}\,;$$

τ^* – оптимальный период возобновления производства –

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{s}}}\,;$$

$\tau_1{}^*$ – время производства –

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda}\,;$$

τ_2^* – время чистого потребления –

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{s}}\ ;$$

L^* – минимальные издержки в единицу времени –

$$L^* = \sqrt{2Ksv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{s}}\ .$$

При определении r – оптимальной точки заказа рассматриваются два случая:

$$\text{а) } r = \Theta v - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^*, \text{ если } \Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*;$$

$$\text{б) } r = \Theta(v - \lambda) + \left(\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{v} - 1\right) q^*, \text{ если } \Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*;$$

при этом t_k – моменты размещения заказа, при $t_0 = 0$ равны –

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1, 2, \ldots\ .$$

Пример. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Консервный завод выпускает партиями 6 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консервов составляет v = 500 тыс. тубов в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов, равны K = 200 у. д. е. Стоимость хранения 1 тыс. тубов консервов на складе s = 30 у. д. е. в год. Производительность завода (интенсивность) λ = 2500 тыс. тубов в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 2$ месяца, или 0,164 года.

Используя приведенную информацию:

1) вычислим q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 500}{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{500}{2500}}} = 91{,}3 \text{ тыс. тубов в год;}$$

2) рассчитаем τ_1^* – время производства:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} = \frac{91,3}{2500} = 0,0365 \text{ года или 13,3 дня;}$$

3) рассчитаем τ_2^* – время чистого потребления:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{30 \cdot 50}} \cdot \sqrt{1 - \frac{500}{2500}} = 0,146 \text{ года или 53,3 дня;}$$

4) определим τ^* – периодичность выпуска партии:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{30 \cdot 500}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{500}{2500}}} = 0,183 \text{ года, или 66,6 дня;}$$

5) найдем r – точку заказа:

$$\Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* = 0,164 - \left[\frac{0,164}{0,183}\right] \cdot 0,183 = 0,164 \text{ .}$$

Так как $0,164 > 0,146$, то

$$r = \Theta(\nu - \lambda) + \left(\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu} - 1\right) q^* = 0,164 \cdot (500 - 2500) +$$

$$+ \left(\left[\frac{0,164}{0,183}\right] + 1\right) \cdot \left(\frac{2500}{500} - 1\right) \cdot 91,3 = 37,2 \text{ тыс. туб.;}$$

6) вычислим t_k – моменты размещения заказа при $t_0 = 0$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1, 2, \ldots ;$$

$$t_0 = 0 ;$$

$$t_1 = 1 \cdot 0,183 = 0,183 \text{ года;}$$

$$t_2 = 2 \cdot 0,183 = 0,366 \text{ года и т. д.;}$$

7) определим $I_{\max}$ – максимальный уровень запасов:

$$I_{\max} = q^*(1 - \frac{\nu}{\lambda}) = 91,3 \cdot (1 - \frac{500}{2500}) = 81,7 \text{ тыс. туб.;}$$

8) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 30 \cdot 500} \cdot \sqrt{1 - \frac{500}{2500}} = 2190{,}9 \text{ у. д. е.}$$

7.6. Модель оптимального размера партии поставки с дефицитом при учете неудовлетворенных требований

В модели Уилсона предполагается, что дефицит недопустим. Однако на практике требования, поступающие в моменты дефицита, ставятся на учет и при поступлении очередной партии в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Изменение запаса показано на рис. 7.8.

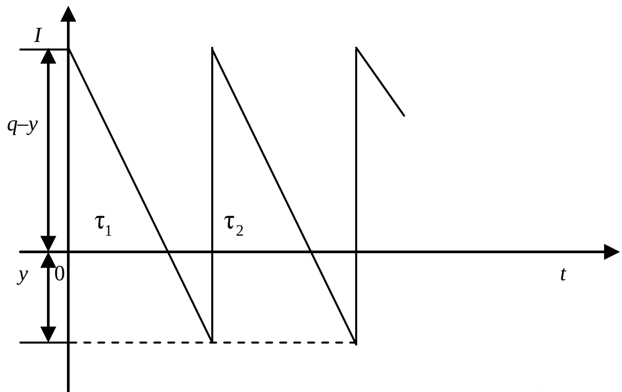


Рис. 7.8. Динамика изменения уровня запаса в модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

На рис. 7.8 видно, что y – максимальная величина задолженного спроса; $q - y$ – максимальная величина наличного запаса; τ_1 и τ_2 – соответственно время существования наличного запаса и время дефицита. Издержки d, вызванные дефицитом единицы запаса в единицу времени, пропорциональны средней величине дефицита и времени его существования.

Тогда издержки цикла, включающие затраты на размещение заказа, содержание запаса и потери от дефицита, будут равны:

$$L_ц = K + \frac{s(q-y)^2}{2v} + \frac{dy^2}{2v}.$$

Разделив издержки цикла на его величину $\tau_1 + \tau_2$, получим средние издержки работы системы в единицу времени:

$$L = \frac{Kv}{q} + \frac{s(q-y)^2}{2q} + \frac{dy^2}{2q}.$$

Отсюда определяем оптимальные параметры системы:

q^* – оптимальный размер партии поставки –

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита) –

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов –

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

τ_1^* – время существования наличного запаса –

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

τ_2^* – время существования дефицита –

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{v} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}};$$

τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла) –

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

r – точку заказа –

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^*,$$

при этом точка заказа может принимать отрицательное значение. Следовательно, заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$;

L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени –

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}}.$$

Пример. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Согласно договорам, сельскохозяйственная организация поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет ν = 4000 т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукцией, s = 50 у. д. е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа K = 600 у. д. е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют d = 100 у. д. е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц, или 0,082 года.

Используя приведенную информацию:

1) найдем q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 4000}{50}} \cdot \sqrt{1 + \frac{50}{100}} = 379{,}5 \text{ т};$$

2) рассчитаем y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{50}{100}\sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 4000}{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{50}{100}}} = 126{,}5 \text{ т};$$

3) определим Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = 379{,}5 - 126{,}5 = 253{,}0 \text{ т};$$

4) вычислим τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{253{,}0}{4000} = 0{,}0633 \text{ года, или 23,1 дня};$$

5) определим τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{126{,}5}{4000} = 0{,}0316 \text{ года, или 11,5 дня};$$

6) вычислим τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}} = \frac{379{,}5}{4000} = 0{,}0949 \text{ года, или 34,6 дня};$$

7) найдем r – точку заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^* = 0{,}082 \cdot 4000 - \left[\frac{0{,}082}{0{,}0949}\right] \cdot 379{,}5 - 126{,}5 = 201{,}5 \text{ т};$$

8) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 600 \cdot 50 \cdot 4000} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{50}{100}}} = 12649{,}2 \text{ у. д. е.}$$

7.7. Обобщенная модель оптимального размера партии поставки с учетом неудовлетворенных требований

В данной модели предполагается, что товар или ресурс поступает на склад непосредственно с производственной линии с постоянной интенсивностью спроса ν и поступления λ в единицу времени. По достижении некоторого уровня запаса производство товара или ресурса прекращается. Возобновление его производства и поставки на склад осуществляется в момент, когда неудовлетворенный спрос достигает некоторого значения (рис. 7.9).

Из рис. 7.9 видно, что запас пополняется и расходуется одновременно в течение интервала τ_1 каждого цикла. Причем в течение τ_1 идет одновременное и пополнение запасов, и их расходование, поэтому абсолютная интенсивность поступления определяется как разность между λ и ν, т. е.: $(\lambda - \nu)$.

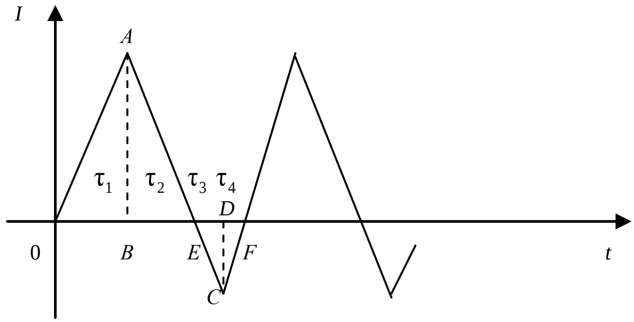


Рис. 7.9. Динамика изменения уровня запаса в обобщенной модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Максимальная величина запаса AB равна:

$$(\lambda - \nu)\tau_1 .$$

Запас, накопленный в интервале τ_1, т. е. $(\lambda - \nu)\tau_1$, полностью расходуется в течение интервала τ_2, поэтому AB равна $\nu\tau_2$. В интервале τ_3 спрос не удовлетворяется, идет рост дефицита со скоростью, равной интенсивности потребления, поэтому CD равна $\nu\tau_3$. Неудовлетворенный спрос покрывается в течение интервала τ_4, интенсивность поступлений равна λ, а интенсивность потребления – ν, следовательно, разность $(\lambda - \nu)$ характеризует скорость ликвидации дефицита и CD равна:

$$(\lambda - v)\tau_4 .$$

Продолжительность цикла равна:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \text{ или } \tau = \frac{q}{v}.$$

Если d – удельные издержки дефицита, а s – удельные издержки содержания, то имеем пропорцию:

$$CD = \frac{d}{s}$$

и следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (\lambda - v)\tau_1 = v\tau_2, \\ v\tau_3 = (\lambda - v)\tau_4, \\ \dfrac{\tau_2}{\tau_3} = \dfrac{d}{s}, \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \dfrac{q}{v}. \end{cases}$$

Решим систему четырех уравнений и найдем значения τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4:

τ_1^* – время возрастания запаса –

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{d}};$$

τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля –

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{v} \cdot \frac{1 - \frac{v}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}};$$

τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов) –

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{v} \cdot \frac{1 - \frac{v}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d}\,.$$

Найдем τ^* – продолжительность цикла:

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{v}{\lambda}}}.$$

Определим $\tau_{\text{пр}}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{\text{пр}}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda}.$$

При формировании издержек будем учитывать: издержки формирования запаса K и содержания запасов, которые пропорциональны величине текущего запаса и времени содержания L_1, издержки дефицита, пропорциональные величине текущего дефицита и времени существования дефицита. Из рис. 7.9 видно, что площадь треугольника OAE определяет среднюю величину запаса в течение цикла, а треугольника ECF – среднюю величину дефицита, поэтому издержки содержания запасов рассчитываются (произведение удельных издержек содержания s на площадь треугольника OAE) следующим образом:

$$L_1 = \frac{s \cdot AB(\tau_1 + \tau_2)}{2} = \frac{sd^2(\lambda - v)q^2}{2}\,.$$

Издержки от дефицита равны величине d, умноженной на площадь треугольника ECF:

$$L_2 = \frac{d \cdot CD(\tau_3 + \tau_4)}{2} = \frac{s^2 d(\lambda - v)q^2}{2}\,.$$

Суммарные издержки работы системы в течение цикла равны:

$$L_{\text{ц}} = K + L_1 + L_2 = K + \frac{s \cdot (1-\frac{v}{\lambda})}{2 \cdot (1+\frac{s}{d})} \cdot \frac{q^2}{v}\,.$$

Разделив общие издержки в течение цикла на τ, получим удельные издержки функционирования системы:

$$L = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq\cdot(1-\frac{\nu}{\lambda})}{2\cdot(1+\frac{s}{d})}.$$

Из уравнения найдем $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ и определим значение оптимального размера партии поставки q^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{\lambda}}}.$$

Найдем другие параметры системы:

y^* – максимальный уровень дефицита –

$$y^* = I_{\min} = \nu\tau_3^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = I_{\max} = \nu\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}}.$$

Пример. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Один из цехов перерабатывающего предприятия производит 8 видов полуфабрикатов колбасных изделий. Производительность λ = 50 ц в сутки. Средний объем потребления каждого вида полуфабрикатов колбасных изделий термического цеха v = 4 ц в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида полуфабрикатов к другому и очистке оборудования составляет K = 30 у. д. е. Стоимость хранения 1 ц полуфабрикатов в холодильнике s = 0,06 в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита d = 0,15 у. д. е. в сутки.

Используя приведенную информацию:

1) вычислим q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{v}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 4}{0,06}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{0,06}{0,15}}{1-\frac{4}{50}}} = 78,0 \text{ ц};$$

2) рассчитаем y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{v}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}} = \frac{0,06}{0,15} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 4}{0,06}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0,06}{0,15}}} = 20,5 \text{ ц};$$

3) определим Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{v}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 4}{0,06}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0,06}{0,15}}} = 51,3 \text{ ц};$$

4) найдем τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} = \frac{78}{50} \cdot \frac{1}{1+\frac{0,06}{0,15}} = 1,1 \text{ суток, или 26,7 часа};$$

5) вычислим τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}{1+\dfrac{s}{d}} = \frac{78}{4} \cdot \frac{1-\dfrac{4}{50}}{1+\dfrac{0,06}{0,15}} = 12,8 \text{ суток, или 307,5 часа;}$$

6) рассчитаем τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}{1+\dfrac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d} = \frac{78}{4} \cdot \frac{1-\dfrac{4}{50}}{1+\dfrac{0,06}{0,15}} \cdot \frac{0,06}{0,15} = 5,1 \text{ суток, или 123,0 часа;}$$

7) определим τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d} = \frac{78}{50} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{0,06}{0,15}} \cdot \frac{0,06}{0,15} = 0,5 \text{ суток, или 10,8 часа;}$$

8) вычислим τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{\frac{1+\dfrac{s}{d}}{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{0,06 \cdot 4}} \cdot \sqrt{\frac{1+\dfrac{0,06}{0,15}}{1-\dfrac{4}{50}}} = 19,5 \text{ суток, или 468,0 часа;}$$

9) найдем $\tau_{пр}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{пр}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = 1,1 + 0,5 = 1,6 \text{ сут;}$$

10) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}{1+\dfrac{s}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 0,06 \cdot 4} \cdot \sqrt{\frac{1-\dfrac{4}{50}}{1+\dfrac{0,06}{0,15}}} = 3,1 \text{ у. д. е. в сутки.}$$

Мощность цеха перерабатывающего предприятия позволяет наладить выпуск продукции партиями восьми видов полуфабрикатов

($\tau_{пр} \cdot 8 = 1{,}6 \cdot 8 = 12{,}8$ суток). Можно расширить ассортимент выпускаемой продукции (24 сут : 1,6 сут = 15) до 15 видов полуфабрикатов колбасных изделий.

7.8. Многопродуктовая модель оптимального размера партии поставки при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов

Складские системы содержат множество видов товаров или ресурсов. Если взаимодействие между запасами различных видов отсутствует, то общие издержки в единицу времени, связанные с размещением заказов и содержанием запасов *n* видов, составляют:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i v_i}{q_i} + \frac{s_i q_i}{2}\right).$$

Найдем частные производные L по q_i, приравняем их к нулю и определим q_i:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, n}.$$

Минимальные издержки в единицу времени составляют:

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i \cdot s_i \cdot v_i}.$$

В данную модель необходимо ввести ограничение на складские помещения, площадь которых составляет f, а на единицу товара или ресурса i-го вида необходимо f_i единиц складской площади. Ограничение на использование площадей склада имеет следующий вид:

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot q_i \le f,$$

где h – нормировочный множитель, характеризующий уровень запасов или их поступление на склад в разное время.

Если $h = 1$, то поставки поступили в одно время и имеется их максимальный уровень, а если $h = \frac{1}{2}$, то поставки прибыли в разное время и на складе имеется средний уровень запаса. Таким образом, считается, что:

$$\frac{1}{2} \le h \le 1 .$$

Применим метод неопределенных множителей Лагранжа (французский математик астроном и механик итальянского происхождения Жозеф Луи Лагранж) к решению задачи:

$$1)\ L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i v_i}{q_i} + \frac{s_i q_i}{2} \right);$$

$$2)\ q_i = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, n};$$

$$3)\ L^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i \cdot s_i \cdot v_i};$$

$$4)\ h\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot q_i \le f .$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i v_i}{q_i} + \frac{s_i q_i}{2} \right) + \lambda (h\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot q_i - f),$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Из уравнений $\frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0$ и $\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0$ найдем:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot q_i = f .$$

Так как

$$s_i \le s_i + 2\lambda h f_i,$$

то размер оптимальной партии уменьшается, растет число партий поставок в плановом периоде и, следовательно, возрастают затраты на содержание запаса, т. е.:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i\cdot(s_i+2\lambda h\cdot f_i)v_i}>\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i s_i v_i}\ .$$

Таким образом, если

$$q_i^*=\sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i+2\lambda^* hf_i}}\ ,$$

то минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади $L(q^*)$ равны:

$$L(q^*)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i\cdot(s_i+2\lambda^* h\cdot f_i)v_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{s_i+2\lambda^* hf_i)}q_i^*\ .$$

При этом λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу. Его значение определяется из следующего уравнения:

$$h\sum_{i=1}^{n}f_i\sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i+2\lambda^* hf_i}}=f\ .$$

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площадь холодильника.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (n). Холодильник имеет площадь f = 300 м^2. Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1. **Характеристики запасов готовой продукции**

Ассортиментные группы продукции	v_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у. д. е.	f_i – расход площади холодильника, м^2/т
1	800	6	5	1
2	2000	4	20	3
3	1200	3	10	2
4	1800	5	25	3
5	1700	2	15	2
6	1400	7	30	1

Используя приведенную информацию:

1) определим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на площадь холодильника:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, n};$$

$$q_1^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 800}{5}} = 43{,}8 \text{ т}; \qquad q_4^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 1800}{25}} = 26{,}8 \text{ т};$$

$$q_2^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 2000}{20}} = 28{,}3 \text{ т}; \qquad q_5^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1700}{15}} = 21{,}3 \text{ т};$$

$$q_3^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 1200}{10}} = 26{,}8 \text{ т}; \qquad q_6^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot 1400}{30}} = 25{,}6 \text{ т};$$

2) проверим, существует ли ограничение на площадь холодильника при максимальном уровне запасов:

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f \ .$$

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 = 1 \cdot 43{,}8 + 3 \cdot 28{,}3 + 2 \cdot 26{,}8 + 3 \cdot 26{,}8 + 2 \cdot 21{,}3 + 1 \cdot 25{,}6 = 330{,}9 \text{ м}^2.$$

Если $h = 1$, то –

$$1 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 > 300 \,,$$

т. е. ограничение на площадь холодильника имеется;

3) вычислим λ^*, используя следующую формулу:

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f \ ;$$

$$1\cdot\left(1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 800}{5+2\lambda^*\cdot 1\cdot 1}}+3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 2000}{20+2\lambda^*\cdot 1\cdot 3}}+2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 1200}{10+2\lambda^*\cdot 1\cdot 2}}+\right.$$

$$\left.+3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 1800}{25+2\lambda^*\cdot 1\cdot 3}}+2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 1700}{15+2\lambda^*\cdot 1\cdot 2}}+1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 7\cdot 1400}{30+2\lambda^*\cdot 1\cdot 1}}\right)=300.$$

С помощью метода дихотомии определим из данного уравнения значение λ^*. Оно равно 0,753;

4) найдем q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на площадь холодильника:

$$q_i^*=\sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i+2\lambda^* h f_i}};$$

$$q_1^*=\sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 800}{5+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 1}}=38{,}4\ \text{т};$$

$$q_4^*=\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 1800}{25+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 3}}=24{,}7\ \text{т};$$

$$q_2^*=\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 2000}{20+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 3}}=25{,}5\ \text{т};$$

$$q_5^*=\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 1700}{15+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 2}}=19{,}4\ \text{т};$$

$$q_3^*=\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 1200}{10+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 2}}=23{,}5\ \text{т};$$

$$q_6^*=\sqrt{\frac{2\cdot 7\cdot 1400}{30+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 1}}=24{,}9\ \text{т};$$

5) рассчитаем $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на площадь холодильника:

$$L(q^0)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i s_i \nu_i}=\sum_{i=1}^{n} s_i q_i^0 = 5\cdot 43{,}8+20\cdot 28{,}3+10\cdot 26{,}8+$$
$$+25\cdot 26{,}8+15\cdot 21{,}3+30\cdot 25{,}6=2810{,}5 \text{ у. д. е.;}$$

6) вычислим $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на площадь холодильника:

$$L(q^*)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i(s_i+2\lambda^* f_i)\nu_i}=\sum_{i=1}^{n}(s_i+2\lambda^* f_i)q_i^*=(5+2\cdot 0{,}753\times$$
$$\times 1\cdot 1)\cdot 38{,}4+(20+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 3)\cdot 25{,}5+(10+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 2)\cdot 23{,}5+$$
$$+(25+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 3)\cdot 24{,}7+(15+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 2)\cdot 19{,}4+(30+2\times$$
$$\times 0{,}753\cdot 1\cdot 1)\cdot 24{,}9=3043{,}8 \text{ у. д. е.;}$$

7) определим эффект от расширения площадей холодильника:

$$L(q^*)-L(q^0)=3043{,}8-2810{,}5=233{,}3 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, недостаток площадей холодильника по шести видам продукции обходится перерабатывающему предприятию в 233,3 у. д. е. в год.

7.9. Многопродуктовая модель оптимального размера партии поставки в случае нескольких ограничений

На практике чаще всего встречаются случаи, когда функционирование системы происходит при ограничениях на складские помещения и на оборотные средства, вложенные в запасы. Для обоснования оптимального решения такой модели определяют размеры партии поставок товаров или ресурсов вида i без учета ограничений, т. е. q_i^0. Их значения подставляют в ограничения и если они не нарушаются, то оптимальное решение задачи найдено. Если же нет, то поочередно в модель вводят ограничения и, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, вычисляют оптимальные параметры системы: q_i^*, $L(q^*)$.

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

На оптовую базу поступают товары n = 6 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере A = 8500 у. д. е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает f = 600 м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере p = 8 % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 7.2.

Т а б л и ц а 7.2. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в месяц, т	K_i – издержки размещения заказа, у. д. е.	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у. д. е.	f_i – расход складской площади на 1 т товара, м^2
1	800	18	22	1,76	1,4
2	1800	15	12	0,96	1,2
3	1400	10	18	1,44	1,5
4	1200	30	10	0,80	1,0
5	2000	25	20	1,60	0,9
6	1600	20	25	2,00	1,6

Используя приведенную информацию:

1) рассчитаем s – издержки содержания единицы продукции в единице времени:

$$s = \alpha \cdot p \text{ (табл. 6.4);}$$

2) определим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i = \overline{1, n};$$

$$q_1^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 18 \cdot 800}{1{,}76}} = 127{,}9 \text{ т;}$$

$$q_4^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 1200}{0{,}80}} = 300{,}0 \text{ т;}$$

$$q_2^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 1800}{0{,}96}} = 237{,}2 \text{ т;}$$

$$q_5^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 2000}{1{,}60}} = 250{,}0 \text{ т;}$$

$$q_3^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1400}{1{,}44}} = 139{,}4 \text{ т};$$

$$q_6^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1600}{2{,}00}} = 178{,}9 \text{ т};$$

3) проверим, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f \;.$$

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 = 1{,}4 \cdot 127{,}9 + 1{,}2 \cdot 237{,}2 + 15 \cdot 139{,}4 + 1{,}0 \cdot 300{,}0 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 250{,}0 + 1{,}6 \cdot 178{,}9 = 1484 \text{ м}^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1484 > 600\,,$$

следовательно, ограничение на складские площади существует;

4) проверим, существует ли ограничение по оборотным средствам (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 \le A\,.$$

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 = 22 \cdot 127{,}9 + 12 \cdot 237{,}2 + 18 \cdot 139{,}4 + 10 \cdot 300{,}0 + 20 \cdot 250{,}0 +$$
$$+ 25 \cdot 178{,}9 = 20641{,}9 \text{ у. д. е.};$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20641{,}9 > 8500\;,$$

т. е. ограничение на оборотные средства имеет место;

5) так как оба ограничения существенны, то определим λ^*, введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i\sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i+2\lambda^* hf_i}}=f \text{ при } h=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1,4\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 800}{1,76+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 1,4}}+1,2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 15\cdot 1800}{0,96+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 1,2}}+\right.$$

$$+1,5\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 1400}{1,44+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 1,5}}+1,0\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 1200}{0,8+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 1,0}}+$$

$$\left.+0,9\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 2000}{1,6+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 0,9}}+1,6\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 1600}{2,0+2\lambda^*\cdot 0,5\cdot 1,6}}\right)=600.$$

Из приведенного выше уравнения найдем значение λ^*. Оно равно:

$$\lambda^* = 0,554;$$

6) вычислим q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$q_i^*=\sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i+2\lambda^* hf_i}};$$

$$q_1^*=\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 800}{1,76+2\cdot 0,554\cdot 0,5\cdot 1,4}}=106,6 \text{ т};$$

$$q_2^*=\sqrt{\frac{2\cdot 15\cdot 1800}{0,96+2\cdot 0,554\cdot 0,5\cdot 1,2}}=182,3 \text{ т};$$

$$q_3^*=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 1400}{1,44+2\cdot 0,554\cdot 0,5\cdot 1,5}}=111,0 \text{ т};$$

$$q_4^*=\sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 1200}{0,8+2\cdot 0,554\cdot 0,5\cdot 1,0}}=230,6 \text{ т};$$

$$q_5^*=\sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 2000}{1,6+2\cdot 0,554\cdot 0,5\cdot 0,9}}=218,3 \text{ т};$$

$$q_6^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1600}{2 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6}} = 148{,}9 \text{ т;}$$

7) проверим, удовлетворяют ли q_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^* < A \text{ при } h = \frac{1}{2}.$$

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^* = 22 \cdot 106{,}6 + 12 \cdot 182{,}3 + 18 \cdot 111{,}0 + 10 \cdot 230{,}6 + 20 \cdot 218{,}3 +$$
$$+ 25 \cdot 148{,}9 = 16925{,}3 \text{ у. д. е.;}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 16925{,}3 < 8500,$$

т. е. требование ограничения на оборотные средства удовлетворяется и q_i^* при $h = \frac{1}{2}$ являются оптимальными;

8) так как вышеизложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае необходимо определить λ^*, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = A, \text{ при } h = \frac{1}{2}.$$

Затем вычислить q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}}$$

и проверить, удовлетворяют ли найденные значения q_i^* требованию ограничения на складские площади;

9) определим $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени без ограничений:

$$L(q^0) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i s_i \nu_i} = \sum_{i=1}^{n} s_i q_i^0 = 1{,}76 \cdot 127{,}9 + 0{,}96 \cdot 237{,}2 + 1{,}44 \times$$
$$\times 139{,}4 + 0{,}80 \cdot 300{,}0 + 1{,}6 \cdot 250{,}0 + 2{,}0 \cdot 178{,}9 = 1651{,}4 \text{ у. д. е.;}$$

10) определим $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i(s_i + 2\lambda^* h f_i)\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} (s_i + 2\lambda^* f_i) q_i^* = (1,76 + 2 \cdot 0,554 \times$$
$$\times 0,5 \cdot 1,4) \cdot 106,6 + (0,96 + 2 \cdot 0,554 \cdot 0,5 \cdot 1,2) \cdot 182,3 + (1,44 + 2 \cdot 0,554 \cdot 0,5 \times$$
$$\times 1,5) \cdot 111,0 + (0,80 + 2 \cdot 0,554 \cdot 0,5 \cdot 1,0) \cdot 230,6 + (1,60 + 2 \cdot 0,554 \cdot 0,5 \cdot 0,9) \times$$
$$\times 218,3 + (2,0 + 2 \cdot 0,554 \cdot 0,5 \cdot 1,6) \cdot 148,9 = 2018,7 \text{ у. д. е.};$$

11) рассчитаем потери, связанные с ограничениями на складские помещения и оборотные средства:

$$L(q^*) - L(q^0) = 2018,7 - 1651,4 = 367,3 \text{ у. д. е.}$$

Таким образом, расширение складских помещений с 600 до 742 м^2 и увеличение оборотных средств, вложенных в запасы, с 8500 до 10321 у. д. е., позволит сэкономить 367,3 у. д. е. суммарных издержек.

7.10. Многопродуктовая модель оптимального размера партии поставки с периодическими проверками при полном совмещении заказов

Рассмотрим многопродуктовую модель со стационарным детерминированным спросом, мгновенным получением заказа и недопущением дефицита. Обозначим через τ период возобновления заказов, который является одинаковым для всех товаров или ресурсов вида i. Издержки размещения заказов K считаем пропорциональными числу заказов:

$$K = g(1 + \gamma \cdot n),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемых товаров или ресурсов и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждому товару или ресурсу;

n – количество товаров или ресурсов.

Используя данные обозначения, запишем L – издержки размещения заказов и содержания запасов в единицу времени:

$$L = \frac{g(1 + \gamma \cdot n)}{\tau} + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \,.$$

Решив уравнение $\frac{\partial L}{\partial \tau} = 0$, получим τ^* – оптимальный период совместного размещения всех n товаров или ресурсов вида i:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2g(1+\gamma \cdot n)}{\sum_{i=1}^{n} s_i v_i}}.$$

Величины оптимальных партий поставок (q_i^*) определяются по формуле:

$$q_i^* = v_i \tau^*, (i = \overline{1,n}).$$

Минимальные затраты работы системы в единицу времени составят L^*:

$$L^* = \sqrt{2g(1+\gamma \cdot n)\sum_{i=1}^{n} s_i v_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{n} s_i v_i.$$

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Предприятие заказывает n = 6 видов товаров с оптовой базы. Складские площади предприятия f = 350 м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать A = 2000 у. д. е. Маркетинговой службой предприятия было выявлено, что издержки заказывания зависят от количества (n) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением:

$$K = 10(1+\frac{n}{5}) \text{ или } K = g(1+\gamma \cdot n).$$

Характеристики запасов товаров приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в год, т	α_i – стоимость i-го товара, у. д. е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в год, у. д. е.	f_i – расход складской площади на 1 т товара, м^2
1	120	10	2,2	1,3
2	140	8	1,6	2,6
3	150	14	1,3	2,0
4	200	16	1,8	3,5
5	160	12	0,9	1,5
6	180	15	1,2	2,5

Используя приведенную информацию:

1) определим τ_0 – оптимальный период возобновления поставок без учета ограничений:

$$\tau^0 = \sqrt{\frac{2g(1+\gamma \cdot n)}{\sum_{i=1}^{n} s_i v_i}}.$$

Рассчитаем:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i v_i = 2{,}2 \cdot 120 + 1{,}6 \cdot 140 + 1{,}3 \cdot 150 + 1{,}8 \cdot 200 + 0{,}9 \cdot 160 + 1{,}2 \cdot 180 = 1403.$$

Тогда:

$$\tau^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\left(1+\frac{6}{5}\right)}{1403}} = 0{,}177 \text{ года, или 64,6 дня;}$$

2) вычислим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = v_i \tau^0, (i = \overline{1, n});$$

$$q_1^0 = 120 \cdot 0{,}177 = 21{,}2 \text{ т;}$$

$$q_4^0 = 200 \cdot 0{,}177 = 35{,}4 \text{ т;}$$

$$q_2^0 = 140 \cdot 0{,}177 = 24{,}8 \text{ т;}$$

$$q_5^0 = 160 \cdot 0{,}177 = 28{,}3 \text{ т;}$$

$$q_3^0 = 150 \cdot 0{,}177 = 26{,}6 \text{ т;}$$

$$q_6^0 = 180 \cdot 0{,}177 = 31{,}9 \text{ т;}$$

3) проверим, существует ли ограничение на складские площади:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f;$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 = 1{,}3 \cdot 21{,}2 + 2{,}6 \cdot 24{,}8 + 2{,}0 \cdot 26{,}6 + 3{,}5 \cdot 35{,}4 +$$

$$+1{,}5 \cdot 28{,}3 + 2{,}5 \cdot 31{,}9 = 391{,}3 \text{ м}^2.$$

Так как 391,3 > 350, то ограничение на складские помещения имеет место;

4) проверим, существует ли ограничение по оборотным средствам:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 \le A;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 = 10 \cdot 21{,}2 + 8 \cdot 24{,}8 + 14 \cdot 26{,}6 + 16 \cdot 35{,}4 +$$

$$+12 \cdot 28{,}3 + 15 \cdot 31{,}9 = 2167{,}3 \text{ у. д. е.}$$

Так как 2167,3 > 2000, то ограничение по оборотным средствам существует;

5) оба ограничения существенны, поэтому определим $\overline{\tau}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на складские помещения:

$$\overline{\tau}^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{n} f_i \nu_i} = \frac{350}{120 \cdot 1{,}3 + 140 \cdot 2{,}6 + 150 \cdot 2 + 200 \cdot 3{,}5 + 160 \cdot 1{,}5 + 180 \cdot 2{,}5} =$$

$$= \frac{350}{2210} = 0{,}158 \text{ года , или 57,8 дня;}$$

6) найдем $\overline{\overline{\tau}}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на оборотные средства:

$$\overline{\overline{\tau}}^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i} = \frac{200}{120 \cdot 10 + 140 \cdot 8 + 150 \cdot 14 + 200 \cdot 16 + 160 \cdot 12 + 180 \cdot 15} =$$

$$= \frac{2000}{12240} = 0{,}163 \text{ года, или 59,6 дня;}$$

7) вычислим τ^* – оптимальный период повторения заказов в случае обоих ограничений:

$$\tau^* = \min\left\{\frac{f}{\sum_{i=1}^{n} f_i \nu_i}; \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i}\right\} \text{ или } \tau^* = \min(\overline{\tau}^*; \overline{\overline{\tau}}^*);$$

$$\tau^* = \min(0{,}158;\;\; 0{,}163) = 0{,}158 \text{ года, или } 57{,}8 \text{ дня;}$$

8) рассчитаем q_i^* – оптимальный поставочный комплект:

$$q_i^* = \nu_i \tau^*, (i = n);$$

$$q_1^* = 120 \cdot 0{,}158 = 19{,}0 \text{ т;}$$

$$q_4^* = 200 \cdot 0{,}158 = 31{,}6 \text{ т;}$$

$$q_2^* = 140 \cdot 0{,}158 = 22{,}1 \text{ т;}$$

$$q_5^* = 160 \cdot 0{,}158 = 25{,}3 \text{ т;}$$

$$q_3^* = 150 \cdot 0{,}158 = 23{,}7 \text{ т;}$$

$$q_6^* = 180 \cdot 0{,}158 = 28{,}4 \text{ т;}$$

9) определим L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений:

$$L^* = \sqrt{2g(1+\gamma \cdot n)\sum_{i=1}^{n} s_i \nu_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{n} s_i \nu_i = 0{,}158 \cdot 1403 = 221{,}7 \text{ у. д. е.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое организация поставок?
2. Какие затраты относят к затратам на организацию заказа и хранение запасов?
3. Что такое потери от дефицита?
4. Выведите самостоятельно формулу Уилсона.
5. Дайте определение точки заказа.
6. Что такое начальный запас, фиктивный уровень текущего запаса?
7. Назовите особенности модели с конечной интенсивностью поступления запаса.

8. Почему максимальный уровень внутрипроизводственного запаса меньше величины партии?

9. Каковы виды моделей планирования дефицита?

10. За счет какого вида затрат происходит снижение общих затрат в случае учета неудовлетворенных требований?

11. Что такое задолженный спрос?

12. Может ли точка заказа в моделях с учетом неудовлетворенных требований быть отрицательной величиной?

13. Постройте графики динамики изменения уровня запаса в однопродуктовой модели без дефицита и с дефицитом при учете неудовлетворенных требований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев, М. Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М.: ИНФРА, 2003. – 444 с.

2. Афанасьев, М. Ю. Прикладные задачи исследования операций: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский, В. М. Матюшонок. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.

3. Бабенышев, С. В. Системный анализ и исследование операций: учеб. пособие / С. В. Бабенышев, Е. Н. Матеров. – Железногорск: ФГБОУ ВО Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, 2022. – 122 с.

4. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.

5. Болотский, А. В. Исследование операций и методы оптимизации / А. В. Болоский, О. А. Кочеткова. – М.: Лань, 2020. – 116 с.

6. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – М.: Юстиция, 2019. – 192 с.

7. Диксит, А. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни: пер. с англ. Н. Яцюк / А. Диксит, Б. Нэлбафф. – 2-е изд. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016. – 457 с.

8. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев: Выща шк., 1979. – 320 с.

9. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках : учеб. для вузов / А. В. Захаров. – 2-е изд., испр. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. – 302 с.

10. Ильченко, А. Н. Экономико-математические методы: учеб. пособие / А. Н. Ильченко. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 288 с.

11. Марзан, С. А. Исследование операций: электронный учеб.-метод. комплекс / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест: БрГУ, 2022. – 430 с.

12. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б.А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 430 с.

13. Каштаева, С. В. Исследование операций: учеб. пособие / С. В. Каштаева. – Пермь: ИПЦ Прокростъ, 2020. – 77 с.

14. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности предприятий АПК: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – Минск: ИВЦ Минфина, 2009. – 264 с.

15. Конюховский, П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.

16. Кораблев, Ю. А. Теория игр : примеры и задачи: учеб. пособие для направления бакалавриата / Ю. А. Кораблев. – М.: КНОРУС, 2020. – 175 с.

17. Косоруков, О. А. Исследование операций: учебник / О. А. Косоруков, А. В. Мищенко; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. Н. П. Тихомирова. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003. – 448 с.

18. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйш. шк., 2008. – 368 с.

19. Костевич, Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений: учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Минск: Новое знание, 2003. – 424 с.

20. Леньков, И. И. Моделирование управленческих решений: практикум / И. И. Леньков; Академия упр. при Президенте Респ. Беларусь. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2020. – 108 с.

21. Ленькова, Р. К. Исследование операций. Методы исследования операций: курс лекций / Р. К. Ленькова. – Горки: БГСХА, 2016. – 48 с.

22. Ловянников, Д. Г. Исследование операций: учеб. пособие / Д. Г. Ловянников, И. Ю. Глазкова. – Ставрополь: Северо-Кавказский Федеральный ун-т (СКФУ), 2017. – 110 с.

23. Мастяева, И. Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / И. Н. Мастяева, Г. Я. Горбовцов, О. Н. Семенихина. – М., 2003. – 113 с.

24. Методы оптимизации. Задачник: учеб. пособие / В. В. Токарев [и др.]. – М.: Юрайт, 2020. – 293 с.

25. Невежин, В. П. Игровые модели для экономических задач: учеб. пособие / В. П. Невежин. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 193 с.

26. Новиков, А. И. Исследование операций в экономике: учеб. / А. И. Новиков. – 3-е изд. – М.: Дашков и К°, 2022. – 352 с.

27. Новицкий, Н. И. Сетевое планирование и управление производством: учеб.-практ. пособие / Н. И. Новицкий. – М.: Новое знание, 2004. – 159 с.

28. Писарук, Н. Н. Исследование операций / Н. Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2015. – 304 с.

29. Сакович, В. А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): справ. пособие / В. А. Сакович. – Минск: Вышэйш. шк., 1984. – 256 с.

30. Сакович, В. А. Оптимальные решения экономических задач / В. А. Сакович. – Минск: Вышэйш. шк., 1982. – 272 с.

31. Таха, Х.А. Исследование операций / Хемди А. Таха. – 10-е изд. – М.: Вильямс, 2019. – 1056 с.

32. Фролькис, В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов / В. А. Фролькис. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

33. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учеб. / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – 7-е изд. – М.: Дашков и К°, 2019. – 398 с.

34. Шафранская, И. В. Исследование операций: курс лекций / И. В. Шафранская. – Горки, 2011. – 364 с.

35. Шафранская, И. В. Исследование операций: практикум: учеб.-метод. пособие / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2019. – 168 с.

36. Шафранская, И. В. Исследование операций: учеб. пособие / И. В. Шафранская; Saarbrücken: Lap Lambert Academic, 2016. – 324 с.

37. Шафранская, И. В. Оптимизация экономических систем: курс лекций / И.В.Шафранская. – Горки: БГСХА, 2014. – 153 с.

38. Шикин, Е. В. Исследование операций: учеб. / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М.: ТК «Велби», Изд-во «Проспект», 2006. – 280 с.

39. Экономико-математическое моделирование: учеб. для студентов вузов / под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004. – 800 с.

40. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.

41. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / Г. О. Читая [и др.]; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск: БГЭУ, 2018. – 511 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П р и л о ж е н и е А

Ученые, которые внесли вклад в становление и развитие научного направления «Исследование операций»

Акофф Рассел Линкольн (12.02.1919–29.10.2009) – американский учёный в области исследования операций, теории систем, стратегического менеджмента.

Основные труды Акоффа в области применения методов системного анализа, исследования операций, интерактивного планирования для решения экономических и производственных задач с учётом психологических, социальных и иных аспектов.

Рассел Аккофф начал свою карьеру в области исследования операций в конце 1940-х гг. Его книга «Введение в исследование операций», написанная в 1957 г. в соавторстве с К. Уэстом Черчменом и Леонардом Арноффом, стала одной из первых публикаций, определивших эту область.

В конце 1970-х гг. работы Акоффа были посвящены исследованиям в области целенаправленных корпоративных систем, в которых на первый план вышли проблемы стратегического планирования; корпорации должны были работать с комплексными системами взаимосвязанных проблем.

Разработки Акоффа в начале 1980-х гг. оформились в новом подходе, получившем название интерактивного планирования, основная цель которого призвана поощрять стремление людей к выработке идеальных проектов и поиску способов их реализации.

В 1980-х гг., и в особенности в 1990-х гг., Акофф заинтересовался проблемой создания циркулярной организации, в которой считается обязательным участие работников организации в принятии непосредственно затрагивающих их интересы решений.

Байес Томас (1702–17.04.1761) – английский математик, член Лондонского королевского общества (1742).

Математические интересы Байеса относились к теории вероятностей. Он сформулировал и решил одну из основных задач этого раздела математики (теорема Байеса). Работа, посвящённая этой задаче, была опубликована в 1763 г., посмертно. Формула Байеса, дающая возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике и теории вероятностей. Другая крупная его работа – «Очерки к решению проблемы доктрины шансов». Используется терминология: байесовская вероятность, байесовская сеть доверия, байесовская оценка решения, байесовское программирование и т. п.

Беллман Ричард Эрнест (26.08.1920–19.03.1984) – американский математик, один из ведущих специалистов в области математики и вычислительной техники. Член Национальной инженерной академии США (1977), Национальной академии наук США (1983).

Основные труды по вычислительной математике и теории оптимального управления. Разработал метод динамического программирования, широко применяемый в различных областях математики и её приложениях. Получил многочисленные результаты, связанные с применением динамического программирования в разных областях математики: вариационное исчисление, автоматическое регулирование, теория аппроксимации, исследование операций и др. В 1979 г. он был награждён медалью почёта IEEE «за вклад в теорию процессов принятия решений и теорию управления системами, особенно за создание и применение динамического программирования».

Бертран Жозеф Луи Франсуа (11.3.1822– 5.4.1900) – французский математик, член Парижской АН (1856), иностранный почетный член Петербугской АН (1896), работавший в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и термодинамики.

В 1845 г. выдвинул гипотезу о существовании, по крайней мере, одного простого числа между числами n и $2n-2$ для любого $n > 3$. Это утверждение, называемое постулатом Бертрана, было доказано П. Л. Чебышёвым в 1850 г.

Им установлены некоторые признаки сходимости числовых рядов. Известны так называемый постулат Бертрана в теории чисел и парадокс Бертрана в теории вероятностей.

Автор руководств по математике для средней и высшей школы.

В экономике им была пересмотрена теория олигополии, в частности, модель конкуренции по Курно. Сформулированная им модель конкуренции показывает, что в условиях ценовой конкуренции выводы Курно не выполняются. Равновесие в данной модели достигается на уровне цены совершенной конкуренции.

Вулф Филип Старр «Фил» (11.08.1927–29.12.2016) – американский математик и одним из основателей теории выпуклой оптимизации и математического программирования.

В 1954 г. работал над обобщениями линейного программирования, такими как квадратичное программирование и общее нелинейное программирование, что привело к созданию алгоритма Франка – Вульфа в совместной работе с Маргерит Франк. В 1957 г. Морис Сион и Вулф опубликовали пример игры с нулевой суммой без минимаксного значения. В 1957 г. Вулф присоединился к RAND Corporation, где работал с Джорджем Данцигом, в результате чего появился ныне известный метод декомпозиции Данцига – Вулфа. В 1992 г. он получил премию Джона фон Неймана по теории совместно с Аланом Хоффманом.

Гант или Гантт Генри Лоренс (20.05.1861– 23.11.1919) – соратник «отца научного менеджмента» Фредерика Тейлора.

С 1900 г. Гант хорошо известен как успешный бизнес-консультант. В этот период- помимо написания теоретических работ и статей, Гант выполнил ряд проектов по внедрению своего варианта «тейлоровской» системы управления производством в разных компаниях. Гант изучал менеджмент и предложил свою диаграмму, состоящую из отрезков (задач) и точек (завершающих задач или вех), как средство для представления длительности и последовательности задач в проекте. Так, благодаря данной диаграмме, можно сразу определить, как реализуются поставленные планы: точно в срок, с отставанием или же опережением.

У Генри Ганта более 150 публикаций, включая три книги: «Труд, заработная плата и доход» (1910), «Промышленное руководство» (1916) и «Организация труда» (1919). Он запатентовал больше десятка изобретений, читал лекции в университетах, оставаясь одним из наиболее успешных консультантов по управлению.

Генри Гант разрабатывал свои оригинальные идеи в области методики премиальной оплаты, составил карты-схемы для производственного планирования (так называемые гант-схемы), а также внёс вклад в разработку теории лидерства.

Гант применил аналитические методы для исследования отдельных производственных операций. Он разработал методы планирования последовательности производственных операций. Эти методы не потеряли своё значение и в современных условиях. Исследование системы человек-машина позволило Ганту связать организационный и мотивационный аспект производства.

Гомори Ральф Эдуард (д.р. 07.05.1929) – американский математик и менеджер. Его вклад позволил открыть новые области прикладной математики, он сконцентрировался на исследовании операций. Среди результатов его исследований выделяется вклад в области целочисленного программирования.

С 1954 по 1957 гг. Гомори, будучи специалистом прикладной математики, сконцентрировался на исследовании операций. Среди результатов его исследований выделяется вклад в области целочисленного программирования, активной области исследований по сей день.

Завершив корпоративную карьеру, Ральф Гомори стал президентом Фонда Альфреда П. Слоана (1989), где он руководил программами, направленными на усовершенствование понимания общественности в трех ключевых областях: экономическом значении науки и исследований; последствии глобализации для Соединенных Штатов и роли технологии в образовании. Гомори много писал о природе развития технологий, конкурентоспособности промышленности, моделях международной торговли и функциях корпораций в современном мире.

В декабре 2007 года, спустя 18 лет руководством Фонда Слоана, Гомори стал почетным президентом. В настоящее время он сосредотачивает свою работу на решении растущих сложностей глобализированной экономики и различных целей стран и компаний. С 1984 по 1992 год он работал в Совете советников в сфере науки и технологий при президенте США, а также с 2001 по 2009 гг.

В настоящее время он в составе Совета Национальной академии по науке, технологиям и экономической политике.

Гомори был удостоен восьми почетных степеней и многих значимых наград: приз Фредерика Ланчестера, 1963; мемориальная премия Гарри Гуда, 1984; теоретическая премия фон Неймана, 1984; медаль IRI, 1985; национальная научная медаль США, 1988; награда IEEE за техническое лидерство, 1988; награда Arthur M. Bueche, 1993; heinz Award, 1998; медаль Джеймса Мэдисона, 1999; премия Sheffield Fellowship Йельского университета, 2000; зал славы IFORS, 2005; премия Гарольда Ларндера, 2006; премия Вэнивара Буша (2021).

Кроме того, три награды были учреждены в честь Гомори. Награда Национальной академии наук в области промышленного применения науки, учрежденная IBM, приз Ральфа Гомори на конференции по истории бизнеса, учрежденная Фондом Слоана, а также награда Ральфа Э. Гомори за качественное онлайн-образование.

Госсет Уильям Сили (13.06.1876–16.10.1937) – британский учёный-статистик, более известный под своим псевдонимом Стьюдент (англ. *student* – студент). Он первым опубликовал работы по исследованию так называемого распределения Стьюдента.

В области статистики он стал первопроходцем в области экспериментального планирования малых выборок. Госсет разработал t-распределение Стьюдента – первоначально называвшееся «z-распределение Стьюдента» – и «критерий статистической значимости Стьюдента».

Госсет разработал новые статистические методы, которые сейчас играют ключевую роль в планировании экспериментов, в правильном использовании проверки значимости при повторных испытаниях, а также в анализе экономической значимости и многом другом. Госсет получил эти знания путём изучения, методом проб и ошибок, сотрудничая с другими учёными и проведя два семестра в 1906–1907 гг. в лаборатории биометрии Карла Пирсона.

Гурвиц Адольф (26.3.1859–18.11.1919) – немецкий математик, еврейского происхождения, доктор наук (1881), профессор (1892). Основные труды – по математическому анализу, теории функций, алгебре и теории чисел.

Гурвиц занимался изучением римановых поверхностей и их приложений к теории алгебраических кривых. Его научные исследования включали также теорию сложных функций, корней функций Бесселя и конечно-разностных уравнений. Ряды Фурье были темой нескольких его статей. С именем немецкого математика связано одно из обобщений дзета-функции Римана – дзета-функция Гурвица. Для анализа линейной стационарной динамической системы Гурвиц предложил алгебраический критерий устойчивости (критерий устойчивости Гурвица). В 1895 г. Гурвиц доказал теорему, позволяющую определить устойчивость многочлена (теорема Рауса – Гурвица).

Данциг Джордж Бернард (08.11.1914–13.5.2005) – американский математик, доктор философии по математике (1946), профессор (1960). В 1970-е гг. – член Национальной академии наук США, Национальной инженерной академии США и Американской академии искусств и наук. Почётный доктор Мэрилендского университета (1976).

Предложил в 1947 г. симплекс-метод. Считается основоположником линейного программирования, наряду Л. В. Канторовичем и Дж. Фон Нейманом.

В 1963 г. книга Данцига «Линейное программирование и его расширения» была опубликована издательством Принстонского университета. Книга быстро стала стандартным учебником по линейному программированию.

В 1973 г. Данциг основал и возглавил лабораторию исследования операций, одновременно, в том же году, возглавил методологическую группу Международного института прикладного системного анализа. Готовил к публикации четрырёхтомное издание по линейному программированию (до 1996).

18 октября 1976 г. президент Джеральд Форд наградил Данцига Национальной медалью науки. Награда была вручена «за изобретение линейного программирования и открытие методов, которые привели к широкому научному и техническому применению для решения важных задач в области логистики, планирования и оптимизации сетей, а также за использование компьютеров для эффективного применения математической теории».

В 1979 г. Общество математического программирования и Общество промышленной и прикладной математики учредили премию Данцига, которую вручают каждые три года, начиная с 1982 г., за оригинальные исследования, внёсшие выдающийся вклад в математическое программирование.

Данцигу были присуждены теоретическая премия Джона фон Неймана (1975), Национальная научная медаль США (1975), премия Харви (Израиль, 1985).

Дейкстра Эдсгер Вибе (11.05.1930–06.08.2002) – нидерландский учёный, труды которого оказали влияние на развитие информатики и информационных технологий; один из разработчиков концепции структурного программирования, исследователь формальной верификации и распределённых вычислений. Тьюринговский лауреат (1972). В 2002 г. получил премию, вручаемую Симпозиумом по принципам распределённых вычислений Ассоциации вычислительной техники «за публикацию, оказавшую наибольшее влияние на область распределённых вычислений»; в знак признания заслуг учёного с 2003 г. эта премия носит название премии Дейкстры.

Известность Дейкстре принесли его работы в области применения математической логики при разработке компьютерных программ. Он активно участвовал в разработке языка программирования Алгол и написал первый компилятор Алгол-60. Будучи одним из авторов концепции структурного программирования, он проповедовал отказ от использования инструкции GOTO.

Во второй половине 1950-х гг. в поисках путей оптимизации разводки плат] разработал алгоритм поиска кратчайшего пути на графе, ставший известным как «алгоритм Дейкстры». Также ему принадлежит идея применения «семафоров» для синхронизации процессов в многозадачных системах и алгоритм нахождения кратчайшего пути на ориентированном графе с неотрицательными весами рёбер, известный как алгоритм Дейкстры. Также предложил алгоритм сортировочной станции – способ разбора математических выражений, представленных в инфиксной нотации.

Демукрон разработал (алгоритм Демукрона) алгоритм решения задачи топологической сортировки, то есть упорядочения вершин графа по их уровням для бесконтурного ориентированного графа. Уровни вершин графа можно рассматривать как длины максимальных путей от входов до этих вершин. Основная идея алгоритма Демукрона состоит в последовательном удалении из графа, начиная со входов, вершин и исходящих из них дуг. Алгоритм Демукрона использует матрицу смежности вершин и основан непосредственно на определении уровня вершины и свойствах матрицы смежности.

Джонсон Саймон М. (д.р. 16.01.1963) –британо-американский экономист, доктор философии по экономике (1989), профессор Массачусетского технологического института. В 2007–2008 гг. главный экономист МВФ и директор его исследовательского департамента.

В 1954 г. американский ученый С.М. Джонсон сформулировал и решил ее для двух станков, т.е. требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным.

В 2024 г. получил Нобелевскую премию по экономике совместно с Дароном Аджемоглу и Джеймсом Робинсоном за исследования причин различий благосостояния наций.

Йохансон Фредерик Фердинанд – датский инженер, директор Копенгагенской телефонной компании. В 1907 г. изложил первые идеи теории очередей в статье «Время ожидания и число вызовов», и таким образом, сформулировал основные предпосылки новой теории – теории массового обслуживания.

Канторович Леонид Витальевич (19.01.1912–07.04.1986) · – советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Лауреат премии по экономике памяти Альфреда Нобеля за 1975 год «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Академик АН СССР (1964), доктор физико-математических наук (1935), профессор.

Первые научные результаты получены в дескриптивной теории функций и множеств и, в частности, в теории проективных множеств. В функциональном анализе ввёл и изучил класс полуупорядоченных пространств (К-пространств). Выдвинул эвристический принцип, состоящий в том, что элементы К-пространств суть обобщённые числа. Этот принцип был обоснован в 1970-е гг. в рамках математической логики. Методами теории неклассических (булевозначных) моделей установлено, что пространства Канторовича представляют новые нестандартные модели вещественной прямой.

Впервые применил функциональный анализ в вычислительной математике.

Развил общую теорию приближённых методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений (в том числе метод наискорейшего спуска и метод Ньютона для таких уравнений).

Положил начало линейному программированию и его обобщениям (1939–1940).

Развил идею оптимальности в экономике. Установил взаимозависимость оптимальных цен и оптимальных производственных и управленческих решений. Каждое оптимальное решение взаимосвязано с оптимальной системой цен.

Кендалл Морис Джордж (06.09.1907–29.03.1983) – английский статистик, специалист в области информатики, экономист. Автор многочисленных трудов по статистике и теории вероятностей. Его имя носит один из коэффициентов ранговой корреляции (общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов).

В 1934 г. был избран членом Королевского статистического общества. С 1961 г. в течение двух лет возглавлял Королевское статистическое общество. В дальнейшем возглавил проект Всемирное обследование рождаемости под патронажем Международного статистического института и Организации Объединённых Наций.

Колмогоров Андрей Николаевич (12(25).04.1903– 20.10.1987) – российский математик, профессор (1931), академик АН СССР (1939) и АПН СССР (1966), Герой Социалистического Труда (1963). Президент Московского математического общества (1964–

1966, 1974–1985), внес значительный вклад в развитие теории марковских процессов с непрерывным временем.

Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного, где получил фундаментальные результаты по тригонометрическим рядам, теории меры, теории множеств, теории интеграла, теории приближения функций. Колмогоров внёс существенный вклад в разработку конструктивной логики, топологии (теория верхних гомологий), механики (теория турбулентности), теории дифференциальных уравнений, функционального анализа.

Основополагающее значение имеют работы Колмогорова в области теории вероятностей, где он совместно с А. Я. Хинчиным с 1925 г. начал применять методы теории функций действительного переменного. Это позволило Колмогорову решить ряд трудных проблем и построить общепринятую систему аксиоматического обоснования теории вероятностей (1933, что связывают с решением 6-й проблемы Гильберта), а также заложить основы теории марковских случайных процессов с непрерывным временем. Дальнейшие исследования Колмогорова связаны со стационарными случайными процессами, процессами с независимыми приращениями, ветвящимися процессами.

Внёс значительный вклад в теорию информации и теоретическую кибернетику. Ему принадлежат исследования по теории стрельбы, статистическим методам контроля качества массовой продукции, применениям математических методов в биологии, математической лингвистике.

Принимал деятельное участие в разработке вопросов математического образования в средней и высшей школе. Инициатор открытия физико-математической школы-интерната при МГУ (1963; с 1989 носит имя Колмогорова).

Колмогоров – член многих зарубежных академий, в том числе Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина», Лондонского королевского общества (1964), Парижской АН (1968). Сталинская премия (2-й степени за 1940), премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1949), Ленинская премия (1965), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1986). В 1994 г. РАН учредила премию имени Колмогорова за достижения в области математики.

Корнаи Янош (21.01.1928–18.10.2021) – венгерский экономист, действительный член Венгерской академии наук (1982), иностранный член РАН (1994), вице-председатель Комиссии Организации Объединённых Наций по планированию развития (1972–1977), президент Международной экономической ассоциации (2002–2005), использовал линейное программирование в планировании. В 1956 г. входил в патронируемую И. Надем группу подготовки программы реформирования венгерской экономики. Совместно с Тамашом Липтаком, венгерским гениальным математиком, разработал оригинальный метод решения задач блочного программирования – метод программирования на двух уровнях.

Я. Корнаи впервые в 1976 г., ввёл в экономическую литературу понятие мягкое бюджетное ограничение, опубликовав в 1979 г. статью «Ресурсо-ограниченная система против спросо-ограниченной системы», где впервые было дано определение «мягкого бюджетного ограничения» – эффекта, при котором экономические агенты при принятии решения, связанные с рисками возникновения неплатёжеспособности, ожидают, что в такой ситуации им будет оказана финансовая помощь извне.

Одновременно Корнаи призывал к пересмотру вальрасианской модели общего экономического равновесия, считая, что присущее экономикам стран Восточной Европы уравновешивание спроса и предложения не посредством ценового механизма, а количественным регулированием отчасти свойственно и западным экономикам.

В конце 1980-х гг. Корнаи стал влиятельным идеологом бескомпромиссных рыночных реформ в Восточной Европе. Через 10 лет Корнаи признал, что проявил в своей радикальности чрезмерный оптимизм и не сумел предвидеть глубины́ трансформационного спада.

Кофман Арнольд (18.08.1911–15.06.1994) – французский инженер, выдающийся математик, профессор. Один из признанных отцов нечеткой логики. Основатель Международной Ассоциации Управления проектами (IPMA). Академик-корреспондент от Франции в Académie royale européenne des docteurs (Барселона).

Он известен тем, что написал первую книгу о нечетких множествах и является соучредителем Международной ассоциации управления проектами, призванной объединить специалистов из разных частей мира в области управления проектами.

Кун Гарольд Уильям – (29.07.1925–02.07.2014) – американский математик, специалист по теории игр, Лауреат премии Джона фон Неймана за 1980 год совместно с Альбертом Таккером и Дэвидом Гэйлом. Заслуженный профессор математики в Принстонском университете, известен как автор теоремы Куна, покера Куна, а также как соавтор условия Куна-Таккера. Дал описание венгерского алгоритма для решения задачи о назначениях. Некоторое время назад, впрочем, было обнаружено, что венгерский алгоритм впервые сформулирован ещё Карлом Густавом Якоби и опубликован посмертно на латинском языке среди прочих его бумаг в 1890 г.

Купманс Тьяллинг Чарлз – (28.08.1910–26.02.1985) –американский экономист и математик голландского происхождения, лауреат премии по экономике памяти Альфреда Нобеля за 1975 г. «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов» (совместно с Л.В. Канторовичем). Президент Эконометрического общества в 1950 г., президент Американской экономической ассоциации в 1978 г. Член Национальной академии наук США (1969).

Работы Купманса посвящены распределению ресурсов в условиях конкурентных рынков, методу линейного программирования в применении к микроэкономической теории, критерию оптимального роста, программированию развития. Автор концепции «анализа видов деятельности».

Купманс был удостоен Нобелевской премии (совместно с Леонидом Канторовичем) за вклад в область распределения ресурсов, в частности за теорию оптимального использования ресурсов. Работа, за которую была присуждена премия, была посвящена анализу деятельности, изучению взаимодействия между входными и выходными данными производства и их связи с экономической эффективностью и ценами.

В 1942 г. для нужд военных ведомств США разработал метод оптимального распределения ограниченных ресурсов между конкурирующими потребителями (т. н. задача о маршрутах).

Наконец, важность статьи Купманса (1942), в которой было выведено распределение коэффициента последовательной корреляции, была признана Джоном фон Нейманом, и позже она повлияла на оптимальные тесты на единичный корень, предложенные Джоном Денисом Сарганом и Алоком Бхаргавой (1983).

Курно Антуан Огюстен (28.8.1801–31.3.1877) – французский экономист, философ и математик. Родоначальник математического направления в политической экономии.

Впервые построил и аналитически выразил функцию спроса, применил её при решении задачи максимизации дохода на рынке неограниченной конкуренции (1838). Введя понятие «кривых реакции», создал модель взаимодействия двух участников на рынке одного товара, получившую название дуополия Курно. Оказал влияние на формирование русского экономиста-математика В. К. Дмитриева.

Автор работ по теории шансов и вероятностей, теории функций, философии истории. Отталкиваясь от философии И. Канта, развивал мысль о том, что понятия науки имеют в большей или меньшей степени вероятностный характер. Разработанная Курно концепция случайности как результата совместного действия многих, независимых друг от друга причин была воспринята российской статистической школой (А. А. Чупров, А. А. Марков, Е. Е. Слуцкий, Н. С. Четвериков и др.).

Кэрел К. В 1963 г. Литтл, Мурти, Суини и Кэрел использовали общую схему метода для решения задачи о коммивояжере и назвали его методом ветвей и границ. Термин прижился и в настоящее время является общепринятым.

Специфика метода ветвей и границ состоит в представлении множества вариантов решения задачи в виде специального графа, называемого деревом, и последующей организации направленного сокращенного перебора вариантов решений на этом графе для выявления оптимального.

Лагранж Жозеф Луи (25.01.1736 –10.04.1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Член Прусской академии наук (1766–1787; иностранный член в период 1756–1766 и с 1787 г.), Парижской академии наук (с 1787 г., в период 1772–1787 – иностранный член), Петербургской академии наук (1776, иностранный почётный член), Лондонского королевского общества (1791).

Наряду с Эйлером – крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала. Внёс огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, в теорию вероятностей и численные методы, создал вариационное исчисление)

Труды Лагранжа относятся к вариационному исчислению, аналитической и теоретической механике. Опираясь на результаты, полученные Л. Эйлером, разработал основные понятия вариационного исчисления и предложил общий аналитический метод (метод вариаций) для решения вариационных задач. В работе «Аналитическая механика» (1788) Лагранж при изложении статики использовал общий подход, являющийся по существу принципом возможных перемещений, а при изложении динамики – сочетание принципа возможных перемещений с принципом Д’Аламбера (принцип Д'Аламбера – Лагранжа). Лагранж ввёл обобщённые координаты и придал уравнениям движения форму, названную его именем (уравнения Лагранжа). Получил в частном случае решение задачи трёх тел (1772). Предложил метод поиска условного экстремума (метод множителей Лагранжа, 1797).

Лагранжу принадлежат также исследования по различным вопросам математического анализа (остаточный член в формуле Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов), теории чисел, алгебры (теория и приложения непрерывных дробей), по дифференциальным уравнениям (метод вариации постоянных), по интерполированию, математической картографии, астрономии и прочее. В 1790-х гг. Лагранж вместе с П. Лапласом, Г. Монжем и другими участвовал в разработке метрической системы мер.

Лаплас Пьер-Симон (23.03.1749 – 05.03.1827) – французский математик, механик, физик и астроном, член Парижской АН (1785), член Французской академии (1816), почётный член Петербургской АН (1802), член Лондонского королевского общества (1789). Известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

Лаплас внёс существенный вклад в разработку математических методов астрономии и физики, в теорию рядов и теорию дифференциальных уравнений, ввёл шаровые функции в математический аппарат решения специальных проблем теории тяготения. Полученное Лапласом дифференциальное уравнение с частными производными (уравнение Лапласа) применяется в теории потенциала, для описания явлений теплопроводности, в электростатике и гидродинамике. Именем Лапласа назван линейный дифференциальный оператор (оператор Лапласа). Внёс существенный вклад в развитие теории вероятностей: доказал простейший вариант центральной предельной теоремы (т. н. теорема Муавра – Лапласа), получил двойное экспоненциальное непрерывное распределение случайной величины (распределение Лапласа), развил теорию ошибок и метод наименьших квадратов, ввёл преобразование, переводящее функцию действительного переменного в функцию комплексного переменного (преобразование Лапласа). Классический труд Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» издавался трижды при его жизни – в 1812 г., 1814 г. и 1820 г.

Ленг Серж (19.05.1927–12.09.2005) – американский математик, член знаменитой группы «Николя Бурбаки», членНациональной академии наук США (1985).

Работал в основном в области алгебры, теории чисел и алгебраической геометрии. Также известен как выдающийся педагог – в особенности известен учебник «Алгебра» (1-е издание 1965 г., русский перевод 1968 г.). В 1999 г. за свои многочисленные книги по математике был награждён премией Стила.

Литтл Джон Даттон Конант (д.р. 01.02.1928) – профессор института в Массачусетском технологическом институте, наиболее известен своими результатами в исследование операций.

Его ранние исследования в исследование операций включали регулирование светофора и прославили его, когда он сформировал Закон Литтла в 1961 г. В нем говорится: «Среднее количество клиентов в системе (в течение некоторого интервала) равно их средней скорости поступления, умноженной на их среднее время в системе». Было добавлено следствие: «Среднее время в системе равно среднему времени нахождения в очереди плюс среднее время, необходимое для получения обслуживания». Литтл считается основателем маркетинга науки, проведя фундаментальные исследования моделей поведения индивидуального выбора, адаптивного управления рекламными расходами и моделей комплекса маркетинга для упакованных потребительских товаров.

Премия Джона Д. К. Литтла присуждается ежегодно.

Марковиц Гарри Макс (д.р. 24.8.1927) – американский экономист, профессор (1963), создатель современной портфельной теории. Его подход заключался в том, чтобы рассматривать инвестиционный портфель как целостную систему, где ключевым элементом является баланс между риском (стандартное отклонение служит мерой риска) и ожидаемой доходностью (математическое ожидание является аналогом ожидаемой доходности). Эти идеи были впервые опубликованы в его статье «Выбор портфеля» в 1952 г. В этой работе Г. Марковиц ввел концепцию эффективного фронта – кривой, которая показывает оптимальное соотношение между риском и доходностью для различных комбинаций активов.

Работы Марковица посвящены также исследованию проблем инвестиций, оптимизации, линейного и нелинейного программирования, методу квадратичного программирования при анализе портфельных инвестиций. Марковиц участвовал в разработке техники разреженных матриц – в рамках работы над созданием многоотраслевых моделей анализа промышленной деятельности, сложность которых превышала возможности вычислительной техники того времени и потребовала поиска новых технических приёмов. Создатель языка программирования «Симскрипт» для компьютерного анализа экономических моделей.

Совместно с М. Миллером и У. Шарпом в 1990 г. получил Нобелевскую премию.

Моргенштерн Оскар (24.1.1902 – 26.7.1977) – американский математик и экономист немецкого происхождения, доктор наук (1925), профессор (1935), был советником Национального банка Австрии. Директор Австрийского института по изучению экономических циклов (1931–1938).

Был уволен после аншлюса и принял предложение Дж. фон Неймана работать в Институте перспективных исследований в Принстоне, где нашли пристанище А. Эйнштейн, К. Гёдель и другие эмигранты из Европы периода нацистской экспансии. Вместе с Нейманом опубликовал книгу «Теория игр и экономическое поведение» (1944), оказавшую мощное влияние на развитие математического аппарата микроэкономики (работы К. Дж. Эрроу, Дж. Дебрё, Дж. Ф. Нэша и др.). В 1950–1970-х гг. как математик-экономист активно участвовал в осуществлении военных и космических программ США. Занимался разработкой различных аспектов экономического прогнозирования.

Кутта Мартин Вильгельм (03.11.1867–25.12.1944) – немецкий математик, профессор (1911).

Является соавтором известного семейства методов приближённого интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (методов Рунге – Кутты).

В 1901 г. разработал известное семейство методов приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Нейман Джон фон – (28.12.1903–08.2.1957), американский математик и физик, сделавший важный вклад в квантовую физику, квантовую логику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки.

Нейман внёс существенный вклад в развитие многих областей математики. Ему принадлежат исследования по аксиоматической теории множеств, математической логике и теории топологических групп. Основные труды по функциональному анализу – изучал, в частности, алгебры операторов в гильбертовом пространстве, вопросы, связанные с эргодической теорией, и применения функционального анализа в квантовой механике.

Интересы Неймана были связаны также с теорией игр; в 1928 г. он установил теорему о минимаксе, ставшую основой этой теории. В последние годы жизни интересы Неймана были связаны главным образом с теорией автоматов и теоретическими основами разработки ЭВМ. В 1945 г. Нейман сформулировал основные принципы построения и функционирования (архитектуру) ЭВМ (т. н. принципы фон Неймана): ЭВМ должна работать в двоичной системе счисления и быть электронной; состоять из арифметического устройства и устройства управления (современный процессор), устройств ввода-вывода и памяти; машинная программа вместе с обрабатываемыми данными должна храниться в запоминающем устройстве (памяти), поскольку это позволит изменять программу в ходе её выполнения.

Немчинов Василий Сергеевич – (02.[14]01.1894–05.11.1964) – советский экономист, статистик, один из основоположников экономико-математического направления советской экономической науки. Лауреат Сталинской и Ленинской премий. Академик АН СССР (30.11.1946), академик ВАСХНИЛ (1948), академик АН Белорусской ССР (1940). Доктор экономических наук (1935), профессор (1928).

Работы в области теории и практики статистики (вопросы социальной и экономической структуры общества, вопросы теории статистического наблюдения, разработка методов объективного измерения и анализа массовых хозяйственных явлений), проблем развития производственных сил и структуры общественного производства, методологии изучения производительности труда, разработки моделей планового хозяйства, экономической оценки.

Первые теоретические работы касались изучения классовой структуры советской деревни в 20-х гг. В работе «Структура хлебного производства» (1928) были построены хлебофуражные балансы для предреволюционного времени и исчислены размеры внедеревенского товарного хлеба для 1926–1927 гг., рассматривались причины недостатка товарного зерна в стране.

В 1927 и 1928 гг. классификация хозяйств В.С. Немчинова была положена в основу двух специальных, им же организованных, гнездовых динамических переписей сельского хозяйства. Под его руководством в 1929–1931 гг. были произведены первые сплошные обследования совхозов и колхозов. Автор метода инструментального измерения урожайности путём небольшого числа выборочных проб – «метровок» (площадью в 1 м²), сменившего приёмы субъективной оценки урожайности.

Автор схемы Немчинова – Перегудова в математической статистике, развивавшей идею ортогональных полиномов Чебышёва.

Как председатель Совета по изучению производительных сил разработал вопросы строительства промышленных, угольно-металлургических, баз и гидроузлов в верховье Енисея, в бассейне Амура, рассматривая их как центры будущих крупных общехозяйственных комплексов.

Параллельно серии экспедиционных обследований возникает ряд принципиально новых теоретических работ: о развитии производительных сил сельского хозяйства при социализме (1953), о критериях размещения культур и отраслей животноводства (1947) и экономических вопросах развития животноводства (1955), о специализации производства при перспективном размещении сельского хозяйства (1957), о перспективах развития производительных сил Сибири и Урала (1956, 1958); «Теоретические вопросы рационального размещения производительных сил» (1961).

Один из основоположников экономико-математического направления отечественной экономической науки. Один из первых поставил и решил теоретические вопросы экономической кибернетики, эконометрии, применения методов математического моделирования и вычислительной техники в экономических исследованиях (монография «Экономико-математические методы и модели»), разработал модели расширенного воспроизводства, статистическую модель общественного разделения труда.

В конце 1957 г. организовал первую в стране Лабораторию по применению статистических и математических методов в экономических исследованиях и планировании в Сибирском отделении АН СССР, которая впоследствии была переведена в Москву. В 1958 г. участвовал в совещании Академии наук СССР для координации исследований. На первом Всесоюзном совещании о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании выступил (апрель 1960) с программным пленарным выступлением, а также с докладом «Теоретические вопросы межотраслевого и межрегионального баланса производства и распределения продукции народного хозяйства» в одной из секций.

Возглавил Научный совет по применению математических методов и электронной вычислительной техники в экономических исследованиях и планировании, несколько позже – секцию экономической кибернетики Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика», а в ноябре 1961 г. – Научный совет по комплексной проблеме «Научные основы планирования и организации общественного производства» АН СССР.

В 1962–1963 гг. второй из названных советов стал руководить работой восьми других научных советов Академии наук СССР: по эффективности капитальных вложений, по проблемам ценообразования, по размещению производительных сил, по экономическим проблемам химизации народного хозяйства и др. В 1963 г. разросшаяся лаборатория В. С. Немчинова после присоединения к ней трёх других аналогичных лабораторий АН СССР и Госплана СССР, была преобразована в Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) Академии наук СССР.

Под его руководством были возобновлены прерванные с 1920-х гг. работы по межотраслевому балансу. Работы Немчинова оказали влияние на развитие концепции планового ценообразования.

Новожилов Виктор Валентинович (15[27].10.1892–15.08.1970) – советский экономист, один из лидеров экономико-математического направления. Доктор экономических наук (1943), профессор (1937). Заслуженный деятель науки РСФСР (1957), лауреат Ленинской премии (1965).

Исследовал проблемы теории и методологии расчетов экономической эффективности в народном хозяйстве. Применял на практике свои знания для решения задачи нахождения общего максимума эффекта от капиталовложений социалистического хозяйства.

Основной проблемой экономических исследований В. В. Новожилов считал проблему измерения затрат и их результатов. Учёный внёс значимый вклад в разработку концепции экономической реформы.

В. В. Новожилов разработал теорию оценки хозяйственной деятельности, обосновал подход к ценообразованию, исследовал эффективность инвестиций в новую технику, обогатил теорию экономической кибернетики.

Основные труды Новожилова относятся к области статистики, экономики, промышленности, оптимального планирования и связаны с соизмерением затрат и результатов в народном хозяйстве. В своих работах Новожилов, применяя экономико-математические методы, доказывал необходимость при расчёте народно-хозяйственных издержек учитывать затраты и по обратным связям, используя для этого нормативы эффективности ресурсов. Им была разработана модель оптимального использования всех ресурсов производства и рассмотрена проблема определения оптимального соотношения капиталовложений и потребления, при котором достигается максимальный темп роста производительности труда.

Нэш (младший) Джон Форбс (13.6.1928–23.5.2015) – американский математик, доктор философии (1950), работавший в области теории игр, дифференциальной геометрии и изучения уравнений в частных производных. Его теории широко используются в экономике.

Проанализировал динамику угроз и действий среди конкурентов, характеристику ситуации, возникающей при реализации всеми участниками игры идеальной стратегии, что приводит к созданию устойчивого равновесия («равновесие Нэша»). Теория Нэша широко применяется в бизнес-стратегиях и во многих экономических ситуациях. Признание заслуг Нэша связано, прежде всего, с его разработками в теории игр.

Ему также принадлежит идея использовать в криптографии теорию сложности вычислений.

С 1951 г. Нэш работал занимался алгебраической геометрией и теорией римановых многообразий. В 1950–1954 гг. изучал вопросы применения теории игр к военной и дипломатической стратегии.

Получил Нобелевскую премию (1994; совместно с Р. Зельтеном и Дж. Харсани), премию Дж. фон Неймана (1978).

Парето Вильфредо Федерико Дамасо (15.07.1848–19.08.1923) – итальянский инженер, экономист и социолог. Один из основоположников элитистской социологии. Критик демократии и марксизма. В рамках теории вероятностей разработал впоследствии названную его именем теорию Парето-распределения, в рамках экономики – понятие эффективности по Парето (состояние системы, при котором ни один показатель не может быть улучшен без ухудшения другого), в рамках социологии – концепцию циркуляции элит.

Понятие эффективности по Парето применяется не только в маржиналистской экономике, но и в инженерном деле и исследованиях биологических процессов. Парето-распределение – это двухпараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений, являющихся степенными. Сам мыслитель применял это распределение для анализа благосостояния – в частности, для обоснования правила, согласно которому 20 % популяции владеет 80 % богатства (1964). Помимо экономики, оно также используется в лингвистике, где известно как закон Ципфа – закономерность распределения частотности слов естественного языка.

Экономические идеи Парето стали продолжением «марджиналистской революции», начатой Л. Вальрасом, К. Менгером и У. Джевонсом. Концепции Парето-распределения и эффективности по Парето не утратили актуальности и активно применяются в теоретической экономике.

Пуассон Симеон Дени (21.06.1781–25.04.1840) – французский физик и математик, профессор (1806), член Парижской академии наук (1812), иностранный член Лондонского королевского общества (1818), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1826).

Его имя увековечено в названиях многих научных терминов: коэффициент Пуассона, уравнение Пуассона, интеграл Пуассона, формула суммирования Пуассона, теорема Пуассона, распределение Пуассона и многих других. Число научных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики. Пуассону принадлежат важные результаты в области дифференциального и интегрального исчисления, теории вероятности.

Рабин Михаэль Озёр (д. р. 01.09.1931) – израильский учёный в области теории вычислительных систем, математик. Совместно с Дана Скоттом ввел понятие недетерминированных конечных автоматов, которые являются ключевым понятием в теории сложности вычислений.

В 1969 г. Рабин обобщил теорему Бюхи на случай более одной функции следования, чем показал разрешимость соответствующей теории второго порядка. В ходе ведения доказательства он доказал детерминированность игр на чётность.

В 1975 г. Гари Миллерразработал новый тест простоты, который был модифицирован Рабином в 1980 г. Тест Миллера – Рабина – вероятностный полиномиальный алгоритм, способный очень эффективно, но с ненулевой вероятностью ошибки, проверить число на простоту. Четыре года спустя, Майкл Рабин разработал первую асимметричную криптосистему, сложность взлома которой сравнима с проблемой факторизации целых чисел.

В 1981 г. Рабин изобрёл протокол передачи данных с забыванием – надёжную технику передачи информации, при которой отправитель не получает подтверждения того, дошло ли сообщение до получателя. В 1987 г., вместе с Ричардом Карпом, Рабин разработал знаменитый алгоритм поиска образца (подстроки) в строке.

Саати Томас Лори (18.07.1926–14.08.2017) – американский математик, член Национальной инженерной академии США (2005), автор «Метода анализа иерархий» – технологии принятия решений на основе математических расчётов и использования метода попарных сравнений. Основные труды относятся к теории графов, теории массового обслуживания, оптимизации и приложениям математики к специальным вопросам.

Он является изобретателем, архитектором и главным теоретиком процесса аналитической иерархии (ПАИ) – системы принятия решений, используемой для крупномасштабного, многостороннего, многокритериального анализа решений, а также процесса аналитической сети (ПАС) – его обобщения для решений с зависимостью и обратной связью. Позже он обобщил математику ПАС до процесса нейронной сети (ПНС) с применением к нейронному возбуждению и синтезу, но ни один из них не стал таким популярным, как ПАИ.

Он внёс вклад в области исследования операций (параметрическое линейное программирование, эпидемии и распространение биологических агентов, теория массового обслуживания и поведенческая математика в связи с операциями), контроля над вооружениями и разоружения, а также городского планирования.

В соответствии со своим давним интересом к миру и разрешению конфликтов в 1983 г. Саати предложил создать Международный центр по разрешению конфликтов, у которого были бы филиалы во многих странах и в котором работали бы дипломаты на пенсии, переговорщики и конфликтологи.

Спирмен Чарльз Эдвард (10.9.1863–17.9.1945) – английский психолог и статистик. Разработчик многочисленных методик математической статистики. Создатель двухфакторной теории интеллекта и техники факторного анализа, выделив общий фактор интеллекта, лежащий в основе любых умственных действий, и ряд специфических факторов, нужных для какого-либо одного умственного действия (например, решения задач в отдельных областях).

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена был разработан в 1904 г. британским психологом и статистиком Чарльзом Спирменом как непараметрический аналог коэффициента Пирсона. Метод был создан для измерения силы и направления монотонной связи между двумя переменными, когда измерения не соответствуют требованиям параметрической статистики. Автор работы по истории психологии.

Сэвидж Леонард Джимми (20.11.1917–01.11.1971) – американский математик и статистик.

Внёс вклад в развитие идеи Луи Башелье использования стохастических моделей для оценки стоимости опционов. В 1951 г. предложил минимаксный критерий в теории принятия решений – критерий Сэвиджа. Закон 0-1 Хьюита-Сэвиджа в теории вероятностей также носит его имя. Самый известный труд Сэвиджа «Основания статистики» (1954), в котором он предложил теорию субъективной ожидаемой полезности, используемую в байесовской статистике и приложениях теории игр.

Уилсон Робин Джеймс (д.р. 05.12.1943) – английский математик, почётным профессор кафедры математики Открытого университета, ранее был заведующим кафедрой чистой математики и деканом факультета, президент Британского общества истории математики. Профессор Уилсон – сын бывшего премьер-министра Великобритании Гарольда Уилсона и его жены Мэри.

Научные интересы Уилсона лежат в области теории графов, в частности в раскраске графов, например, четырёхцветной задаче, а также в алгебраических свойствах графов. Он также исследует историю математики, в частности британскую математику и математику XVII века, а также период с 1860 по 1940 гг., историю теории графов и комбинаторики.

В 1974 г. он получил премию Лестера Р. Форда от Математической ассоциации Америки за свою научно-популярную статью «Введение в теорию матроидов». Благодаря сотрудничеству в 1977 г. с венгерским математиком Полом Эрдёшем Уилсон имеет число Эрдёша, равное 1.

В июле 2008 г. он опубликовал исследование математических работ Льюиса Кэрролла, создателя «Алисы в Стране чудес» и «Зазеркалья», – «Льюис Кэрролл в Стране чисел: его фантастическая математическая логическая жизнь».

Федоренко Николай Прокофьевич – (11.05.1917–01.04.2006) – учёный-экономист, организатор экономической науки, академик АН СССР (1964, членкор 1962), один из основателей и первый директор ЦЭМИ АН СССР (1963–1985). В 1970 награждён Государственной премией СССР за вклад в дело химизации страны.

Доктор экономических наук (1955); профессор (1956); член Президиума АН СССР (с 1967); академик-секретарь Отделения экономики АН СССР (1971–1986), советник Президиума АН СССР – РАН (1987–2006).

В 1946 г. выполнил оригинальную разработку, связанную с экономическими расчётами комбинированных производств. В 1949 г. создал методику определения затрат и оценки эффективности продуктов, получаемых в комплексных химических процессах. В начале 1950-х гг. на базе серии расчётов сделал вклад в практическую реализацию идеи учёта затрат в сопряжённых с химией отраслях.

С 1963 г. возглавил Центральный экономико-математический институт РАН. Один из теоретиков и организатор исследований системы оптимального функционирования социалистической экономики (СОФЭ). В его работах была создана научная база комплексной системы разработки перспективных народнохозяйственных планов, в которой сочетались программно-целевое, отраслевое и территориальное планирование.

Фишер Роналд Эйлмер (17.02.1890–29.07.1962) – английский ученый в области статистики. Член Лондонского королевского общества (1929) и Королевского статистического общества, почётный член многих академий и научных обществ; почётный доктор наук и доктор права многих университетов.

В математической статистике Фишер является виднейшим продолжателем классических работ и методов Карла Пирсона; в частности, Фишер, наряду с Ежи Нейманом, разработал фундамент теории оценок параметров, статистических решений, планирования эксперимента и проверки гипотез. Большинство методов Фишера имеют общий характер и применяются в естественных науках, в экономике и в других областях деятельности.

Флойд Роберт (08.06.1936–2509.2001) – американский учёный в области теории вычислительных систем, профессор (1969). Примечательно, что в отличие от большинства коллег, Флойд не имел титула PhD (доктора философии).

Алгоритм Флойда является примером динамического программирования. Был опубликован в своей ныне признанной форме Робертом Флойдом в 1962 г.

К знаменитым достижениям Флойда относятся эффективный алгоритм поиска кратчайшего пути в ориентированных графах (Алгоритм Флойда-Уоршелла) и алгоритм дизеринга (Алгоритм Флойда-Стейнберга). Кроме того, Флойд работал над проблемой формальной верификации программ, сделав тем самым большой вклад в логику Хоара, которую иногда называют логикой Флойда-Хоара.

Лауреат премии Тьюринга (1978) «за его несомненное влияние на методологию создания эффективного и надёжного программного обеспечения и за его помощь в становлении таких областей компьютерных наук как теория парсинга, семантика языков программирования, автоматическая верификация программ, автоматический синтез программ, и анализ алгоритмов». В 1991 г. награжден медалью «Пионер компьютерной техники» за первые компиляторы

Форд (младший) Лестер Рэндольф (23.09.1927–26.02.2017) – американский математик, доктор математических наук, специализировавшийся на проблемах потоков в сети. Сын математика Лестера Рэндольфа Форда старшего.

Совместные исследования Форда и Фалкерсона проблемы максимального потока и алгоритм Форда-Фалкерсона для её решения, опубликованы как технический доклад в 1954 г. и утверждены как теорема Форда-Фалкерсона. Также вместе с Ричардом Беллманом Форд разработал алгоритм Беллмана-Форда для нахождения кратчайшего пути в графе с ребрами с отрицательным весом.

Харрис Форд Уитмен (08.08.1877–27.10.1962) – американский инженер-технолог, первый президент Ассоциации интеллектуальной собственности Лос-Анджелеса (1934–1935).

Харрис вывел формулу квадратного корня для определения размера заказа, известную сейчас как экономичный размер заказа, которая за последние 100 лет появлялась в бесчисленных научных статьях и текстах. Харрис в 1913 г. опубликовал в журнале «Factory. The Magazine of Management» (переименованном позже в «Business Week») статью, в которой предложил модель оптимального размера запасов. Несмотря на публикацию в таком солидном издательстве, статья Ф. У. Харриса осталась практически незамеченной в академической среде и не принесла известности автору. Лишь в 1934 г. Р. Х. Уилсон, профессор Гарвардской школы бизнеса, опубликовал статью «Научная процедура контроля запасов», в которой проанализировал предложенную Ф. У. Харрисом модель и сформулировал принципиальный вывод о том, что оптимальный размер запасов достигается при балансе между затратами на размещение и издержками на хранение. С того времени данная модель стала носить название «модель Уилсона».

Хартнанис Юрис (05.07.1928–29.07.2022) – учёный в области теории вычислительных систем, латвийского происхождения член Национальной инженерной академии США (1989), Национальной академии наук США (2013).

Внес вклад в исследования теории сложности вычислений. Вместе с Ричардом Стирнсом в 1993 г. был награждён премией Тьюринга за труд «On the computational complexity of algorithms», в котором было представлено множество классов сложности DTIME и доказана теорема об иерархии по времени.

Стернс Ричард Эдвин (д.р. 05.07.1936) – американский учёный в области теории вычислительных систем, математик.

Внес вклад в исследования теории сложности вычислений. В 1993 г. награждён премией Тьюринга вместе с Юрисом Хартманисом «в дань их основополагающим работам, обеспечившим базу теории сложности вычислений». В 1995 г. награждён премией Фредерика У. Ланчестера, т. е. премией Института исследования операций и управленческих наук за лучший вклад в исследование операций и управленческие науки, опубликованный на английском языке.

Стернс в настоящее время является почётным профессором компьютерных наук в Университете Олбани, который входит в состав Университета штата Нью-Йорк.

Хинчин Александр Яковлевич (07(19).07.1884–18.11.1959) – российский математик, член-корреспондент АН СССР (1939), один из основателей и член АПН РСФСР (1944).

Получил основополагающие результаты в теории функций действительного переменного, теории вероятностей, теории чисел и статистической физике. Ранние результаты Хинчина, который был учеником Н. Н. Лузина, относятся к математическому анализу и теории функций. Одновременно и независимо от А. Данжуа предложил понятие интеграла (т. н. интеграл Данжуа–Хинчина). В теории вероятностей Хинчин применял методы метрической теории функций. Один из создателей советской школы теории вероятностей.

Совместно с А. Н. Колмогоровым положил начало теории случайных процессов, дал определение стационарного случайного процесса и заложил основы их теории, открыл закон повторного логарифма, получил фундаментальные результаты в предельных теоремах. Применял теорию вероятностей в качестве аппарата статистической физики, занимался вопросами теории информации, эргодической теорией и теорией массового обслуживания. В 1963 г. Хинчин систематизировал основные положения теории массового обслуживания в монографии «Работы по математической теории массового обслуживания».

Получил Государственную премию СССР (1941).

Цермело Эрнст Фридрих Фердинанд (27.7.1871–21.05.1953) – немецкий математик, внёсший значительный вклад в теорию множеств и создание аксиоматических оснований математики. Основные труды по аксиоматической теории множеств. Разработал общую аксиоматику и доказал (1904–1908), что каждое множество может быть вполне упорядочено. При доказательстве использовал аксиому выбора (аксиому Цермело). Занимался также вариационным исчислением, вопросами теории вероятностей и математической статистики.

Черчмен Чарльз Уэст (29.08.1913–21.03.2004) – американский философ и системный аналитик. Известен благодаря новаторской работе в области исследования операций, системного анализа и этики.

Внес значительный вклад в области науки управления, исследования операций и теории систем. В течение всей своей карьеры, длившейся шесть десятилетий, Чарльз Уэст Черчман исследовал широкий спектр тем, таких как бухгалтерский учет, управление научными исследованиями и разработками, городское планирование, образование, психическое здоровье, исследование космоса и изучение мира и конфликтологии.[

Чарльз Уэст Черчман получил международное признание благодаря своей Радикальной концепции включения этических ценностей в операционные системы.

Шарп Уильям Форсайт (д.р. 16.06.1934) – американский экономист, доктор наук (1961), профессор (1968). У. Шарп был одним из создателей модели ценообразования активов. Наставником Шарпа во время подготовки докторской диссертации был Г. Марковиц, чью неоклассическую модель инвестиционного портфеля Шарп усовершенствовал в 1964 г. Он также создал коэффициент Шарпа – показатель эффективности инвестиционного портфеля (актива), который вычисляется как отношение средней премии за риск к среднему отклонению портфеля. Шарп внес вклад в разработку биномиальной модели оценивания опционов, градиентного метода для оптимизации распределения активов). Совместно с М. Миллером и Г. Марковицем в 1990 г. получил Нобелевскую премию.

Эджуорт Фрэнсис Исидор (08.02.1845–13.2.1926) – английский экономист истатистик. Был сторонником идеи прогрессивного налогообложения, мотивируя его убывающей предельной полезностью доходов. В честь него названы ящик Эджуорта и налоговый парадокс Эджуорта.

Один из основателей неоклассического направления. Отстаивал применение математических методов в теории предельной полезности. Первым выразил полезность как функцию количества не одного, а нескольких (в простейшем случае – двух) благ (которые могут быть взаимозаменяемыми либо взаимодополняемыми), сформулировал закон убывающей предельной производительности переменного фактора производства, ввёл графики кривой безразличия и контрактной кривой как геометрического места точек касания кривых безразличия разных индивидов. Обосновал понятие «ядра» меновой экономики в модели совершенной конкуренции, получившее развитие в неовальрасианстве и в теории игр.

Эрланг Агнер Краруп (01.01.1878–03.02.1929) – датский математик, статистик и инженер, сотрудник Копенгагенской телефонной компании, основатель научного направления по изучению трафика в телекоммуникационных системах и теории массового обслуживания.

Эрлангом была получена формула для расчета доли вызовов, получающих обслуживание на сельской телефонной станции и кому придётся ожидать пока делаются внешние вызовы. В 1909 г. он опубликовал свою первую работу: «Теория вероятностей и телефонные разговоры». Эта работа была признана во всем мире и его формула была принята для использования в крупнейшей почтовой службе мира – Главном почтамте Великобритании. Его формулы до сих пор используются при расчётах пропускной способности современных телекоммуникационных сетей.

Юдин Давид Беркович (Борисович) (21.05.1919–08.02.2006) – советский и российский математик, профессор (1962), специалист по математическому программированию, теории управления, теории принятия решений, теории надёжности, математическим методам в экономике.

Д. Б. Юдин – один из авторов метода эллипсоидов (1976). В ряде публикаций он применял этот метод для решения задач нелинейного программирования. Позднее на основе этого метода Л. Г. Хачиян разработал метод решения задачи линейного программирования, имеющий полиномиальную сложность.

В 1982 г. Международным обществом по математическому программированию и Американским математическим обществом А. С. Немировскому, Л. Г. Хачияну и Д. Б. Юдину присвоена премия Фалкерсона по дискретной математике. В 1993 г. Д. Б. Юдину было присвоено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР». В 1994 г. Д. Б. Юдин был избран действительным членом Нью-Йоркской академии наук.

П р и л о ж е н и е В

Критические значения коэффициентов ранговой корреляции

Т а б л и ц а В1. **Критические значения коэффициентов корреляции ρ-Спирмена**

n, объем выборки	Уровень значимости, α			
	0,1	0,05	0,01	0,001
5	0,805	0,878	0,959	0,991
6	0,729	0,811	0,917	0,974
7	0,669	0,754	0,875	0,951
8	0,621	0,707	0,834	0,925
9	0,582	0,666	0,798	0,898
10	0,549	0,632	0,765	0,872
11	0,521	0,602	0,735	0,847
12	0,497	0,576	0,708	0,823
13	0,476	0,553	0,684	0,801
14	0,458	0,532	0,661	0,780
15	0,441	0,514	0,641	0,760
16	0,426	0,497	0,623	0,742
17	0,412	0,482	0,606	0,725
18	0,400	0,468	0,590	0,708
19	0,389	0,456	0,575	0,693
20	0,378	0,444	0,561	0,679
21	0,369	0,433	0,549	0,665
22	0,360	0,423	0,537	0,652
23	0,352	0,413	0,526	0,640
24	0,344	0,404	0,515	0,629
25	0,337	0,396	0,505	0,618
26	0,330	0,388	0,496	0,607
27	0,323	0,381	0,487	0,597
28	0,317	0,374	0,479	0,588
29	0,311	0,367	0,471	0,579
30	0,306	0,361	0,463	0,570
31	0,301	0355	0,456	0,562
32	0,296	0,349	0,449	0,554
33	0,291	0,344	0,442	0,547
34	0,287	0,339	0,436	0,539
35	0,283	0,334	0,430	0,532
36	0,279	0,329	0,424	0,525
37	0,275	0,325	0,418	0,519
38	0,271	0,320	0,413	0,513
39	0,267	0,316	0,408	0,507
40	0,264	0,312	0,403	0,501
41	0,260	0,308	0,398	0,495
42	0,257	0,304	0,393	0,490
43	0,254	0,301	0,389	0,484
44	0,251	0,297	0,384	0,479
45	0,248	0,294	0,380	0474
46	0,246	0,291	0,376	0,469
47	0,243	0,288	0,372	0,465
48	0,240	0,285	0,368	0,460
49	0,238	0,282	0,365	0,456
50	0,235	0,279	0,361	0,451

Приложение С

Критические точки распределения

Таблица С1. **Критические точки распределения, χ^2**

Число степеней свободы *R*	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,1	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение D

Теория матриц в формировании экономико-математических задач

Содержание экономико-математической задачи определяет матрица.

Совокупность упорядоченных взаимосвязанных чисел, расположенных в m-строках и n-столбцах, называется *матрицей* размером $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \; \dots \; \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|_{m \cdot n}.$$

Матрица, состоящая из одной строки $i = 1$ и n столбцов, называется *матрицей-строкой*.

Матрица, состоящая из одного столбца $j = 1$ и m строк, называется *матрицей-столбцом*.

Если количество строк не равно количеству столбцов ($m \neq n$), то имеем прямоугольную матрицу.

Если количество строк матрицы равно количеству столбцов ($m = n$), то имеет квадратную матрицу.

Диагональная матрица – это такая квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

Скалярная матрица – это нулевая матрица, у которой все элементы равны нулю.

Треугольная матрица – это матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Разобьем матрицу A на клетки, каждая из которой будет некоторой матрицей более низких размеров, получим блочную матрицу. Особый интерес представляют блочные матрицы, имеющие квадратные диагональные клетки.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Квазидиагональные матрицы – это блочные матрицы, у которых все клетки, кроме клеток, стоящих на главной диагонали, являются нуль-матрицами.

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если элемент a_{ij} матрицы A^T равен элементу a_{ji} матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Понятие «невырожденная матрица» связано с понятием ее ранга.

Рангом матрицы называется максимальный порядок отличных от нуля миноров или наибольшее число линейно-независимых строк или столбцов матрицы.

Для того чтобы система ограничений экономико-математической задачи была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Расширенная матрица получается из матрицы A путем добавления в нее столбца свободных членов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & A_2 \\ \dots. & \dots \; \dots \; \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & A_n \end{pmatrix}.$$

Матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной, если определитель равен нулю.

Экономико-математическая задача, имеющая вырожденную матрицу, решений не имеет. Для матриц определены операции сложения (вычитания) и умножения.

Суммой (разностью) двух матриц А и В называется такая матрица *С*, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц-слагаемых.

Сложение (вычитание) двух матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ возможно тогда, когда они имеют одинаковую размерность:

$$\|c_{ij}\|_{m\cdot n} = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m\cdot n}.$$

Произведением матрицы А на матрицу В называется такая матрица *С*, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов строки матрицы *А* на соответствующие элементы столбца матрицы *В*. Из определения следует, что произведение *А·В* имеет смысл, если матрица *А* имеет столько же столбцов, сколько матрица *В* строк:

$$\|c_{ij}\|_{m\cdot k} = \|a_{ij}\|_{m\cdot n} \cdot \|b_{ij}\|_{n\cdot k}.$$

Обратная матрица к матрице *А* – это такая матрица A^{-1}, элементы которой равны частному от деления алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы *А* на определитель системы с последующим транспонированием:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det} & \frac{A_{21}}{\det} & \dots & \frac{A_{m1}}{\det} \\ \frac{A_{12}}{\det} & \frac{A_{22}}{\det} & \dots & \frac{A_{m2}}{\det} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det} & \frac{A_{2n}}{\det} & \dots & \frac{A_{mn}}{\det} \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы по отношению к матрице *А* является невырожденность матрицы *А*.

Пример. Имеем матрицу *А*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица *А* – невырожденная, так как $det = 23 \neq 0$, следовательно, можно найти обратную матрицу к матрице *А*:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{23} & \frac{-16}{23} & \frac{13}{23} \\ \frac{8}{23} & \frac{13}{23} & \frac{-12}{23} \\ \frac{-6}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{9}{23} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} = -1$; $A_{12} = 8$; $A_{13} = -6$; $A_{21} = -16$; $A_{22} = 13$; $A_{23} = -4$; $A_{31} = 13$; $A_{32} = -12$; $A_{33} = 9$.

Обратная матрица используется при решении экономико-математической задачи. Если найти матрицу A^{-1} и умножить ее на столбец свободных членов, то получим значение неизвестных величин задачи:

$$X_{n\cdot 1} = A^{-1}_{n\cdot n} \cdot Y_{n\cdot 1}.$$

Приложение Е

Теория определителей в формировании экономико-математических задач

Из математики известно, что значение переменных экономико-математической задачи можно найти, используя формулы Крамера (швейцарский математик Габриель Крамер), т. е.:

$$x_j = \frac{\det_{xj}}{\det},$$

только в том случае, если определитель (детерминант) системы не равен нулю (de $\neq 0$), и хотя бы один из определителей переменных не равен нулю ($\det_{xj} \neq 0$).

Определитель переменной $\det_{xj}$ получают из определителя системы заменой коэффициентов столбца, соответствующего определенной переменной x_j, коэффициентами столбца свободных членов:

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\det_{xj} = \begin{vmatrix} A_1 & a_{12} & a_{13} \\ A_2 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Определитель n-го порядка, состоящий из n^2 элементов, равен алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых включает по одному и только по одному элементу с каждой строки или столбца. При этом знак определителя выражается как $(-1)^t$,
где t – число инверсий перестановок вторых индексов элементов членов, записанных в порядке возрастания их первых индексов:

$$\det = \sum_{n!} (-1)^t a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}.$$

Число инверсий перестановки определяется суммированием общего числа нарушений перед каждым значением.

Следовательно, необходимо определить, в каких случаях конструкция экономико-математической задачи предполагает равенство нулю определителя системы, чтобы избежать таких ситуаций при конструировании модели.

Рассмотрим *свойства определителей*.

1. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) экономико-математической модели равны нулю, то и определитель равен нулю.

Доказательство вытекает из определения: так как в любой член определителя входит элемент из каждой строки или каждого столбца, состоящего из нулей, то все члены определителя (в силу того, что они являются произведением элементов) равны нулю, а следовательно, и их сумма равна нулю.

2. Если среди строк (или столбцов) экономико-математической модели имеется две одинаковых строки (или столбца), то определитель равен нулю.

Доказательство: так как по условию две строки (или два столбца) одинаковы, то их перестановка не меняет величины определителя. Но, с другой стороны, происходит инверсия (т. е., если число инверсий перестановок было четным, то оно поменяется на нечетное, и наоборот), следовательно, знак определителя изменится на противоположный, получим:

$$\det = -\det;$$

$$2\det = 0;$$

$$\det = 0.$$

Такая ситуация при конструировании экономико-математической модели создается тогда, когда в модель, например, вводят два вида переменных, обозначающих зерновые культуры или группы различных половозрастных групп животных одного вида с близкой технологией выращивания, следовательно, технико-экономические коэффициенты при неизвестных в этом случае могут совпадать и определитель системы будет равен нулю. Чтобы избежать такой ситуации необходимо объединять отрасли с совпадающими параметрами.

3. Если поменять местами две строки (или два столбца), то знак определителя изменится на противоположный, а абсолютная величина останется прежней.

Доказательство: при перестановке двух строк (или столбцов) число инверсий перестановок изменяется из четного на нечетное или из нечетного на четное, следовательно, знак определителя изменится на противоположный, т. е., если был «+», станет «–» и наоборот. Но величина определителя не изменится, так как не изменятся величины элементов определителя. Таким образом, если при составлении экономико-математической задачи пропустили одно или несколько ограничений или переменных, то их можно записать на другое место в модели, что не повлияет на значение переменных задачи, так как:

$$x_j = \frac{\det_{xj}}{\det} \text{ и } x_j = \frac{-\det_{xj}}{-\det}.$$

4. Если все элементы строки (или столбца) экономико-математической модели содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Доказательство: известно, что

$$x_j = \frac{\det_{xj}}{\det}.$$

В этом случае общий множитель на значение переменных экономико-математической модели не влияет. Это свойство применяется в ограничениях модели с большими числами, например: в модели оптимизации специализации и сочетания отраслей сельскохозяйственной организации, в ограничении по формированию основных производственных фондов. Если технико-экономические коэффициенты данного ограничения имеют единицу измерения руб., то можно общий коэффициент, равный 1000, вынести за знак системы ограничений экономико-математической модели, т. е. это равносильно записи ограничения с единицей измерения тыс. руб.

5. Определитель с двумя пропорциональными (т. е. полученными в результате линейного преобразования) строками или столбцами равен нулю. Смысл линейного преобразования состоит в том, что технико-экономические коэффициенты новой строки или столбца получены в результате умножения технико-экономического коэффициента уже имеющейся в экономико-математической задаче строки или столбца.

Доказательство: вытекает из четвертого свойства, т. е. необходимо общий множитель k строки или столбца вынести за знак определителя. Получим две одинаковые строки или два одинаковых столбца, т. е. строка или столбец, полученные в результате линейного преобразования, ничего нового в определение особенностей и функционирования исследуемой системы не вносит, поэтому таких ограничений в экономико-математической модели быть не должно.

6. Если все элементы строки (столбца) являются суммами из одинакового числа слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементами этой строки (столбца) служат отдельные слагаемые:

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1}+b_{z1} & a_{22}+b_{z2} & \ldots & a_{zn}+b_{zn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1} & a_{z2} & \ldots & a_{zn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{z1} & b_{z2} & \ldots & b_{zn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя разложением по элементам некоторой строки или столбца можно упростить, если предварительно его преобразовать.

Изложенная методика определения значения переменных требует большого объема вычислений, так как с увеличением порядка определителя число его элементов быстро растет, следовательно, необходимо изучить свойства определителей, позволяющих упростить их вычисления.

7. Сумма произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения равна определителю.

A_{ij} – алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма номеров строки и столбца, которым принадлежит этот элемент, есть число четное, и со знаком «–», если это число нечетное:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

M_{ij} – минором элемента a_{ij} называется новый определитель более низкого порядка, полученный в результате вычеркивания строки *i* и столбца ***j***.

8. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на один и тот же множитель.

Например, требуется вычислить определитель:

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

К первой строке почленно прибавив третью и четвертую строки, получим:

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель путем разложения по второму столбцу:

$$\det = 1^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель, используя седьмое свойство:

$$\det = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = -(-9-4) - 4(-18-8) -$$
$$-2(12-12) = 117.$$

П р и л о ж е н и е F

Векторное пространство

Конкретная экономико-математическая задача определяется матрицей, а теория векторов позволяет представить матрицу размерностью $m \times n$ как $m \times n$-вектор.

Вместе с тем матрицу экономико-математическая задачи можно рассматривать, если нам это нужно, и как совокупность векторов-строк, и как совокупность векторов-столбцов. При этом каждый вектор выражает какую-то закономерность моделируемой системы.

Векторы a_1, a_2, …, a_n n-мерного пространства называются *линейно-независимыми*, если выполняется равенство:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$$

только в том случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \cdot$$

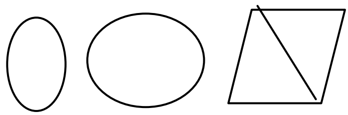
Если данное равенство выполняется и при ненулевом значении хотя бы одного значения a_n, т. е.

$$\alpha_n \neq 0,$$

то векторы a_1, a_2, …, a_n называются *линейно-зависимыми*. Линейная зависимость векторов означает, что такие векторы не выражают новой закономерности изучаемой системы.

В n-мерном пространстве всегда может быть n линейно-независимых векторов, но всякий n + 1 вектор будет линейно-зависимым, т. е. будет являться линейной комбинацией n-векторов. Следовательно, вектор n + 1 можно выразить через компоненты n-векторов с помощью чисел $\alpha_n \neq 0$. Векторы можно представить геометрически.

Если размерность вектора, который представляем геометрически, больше двух, то получим тело:



Отличительной особенностью выпуклых тел является то, что они содержат в себе как крайние точки отрезка, так и сам отрезок. Невыпуклые тела таким свойством не обладают. Выпуклое тело имеет крайние угловые точки, которые получены путем пересечения граней или плоскостей. Крайними угловыми точками называются точки, которые не являются внутренними ни для какого-нибудь отрезка, целиком принадлежащего телу или множеству точек. У выпуклого многогранника крайней угловой точкой являются его вершины (их всегда конечное множество). У невыпуклого многогранника не каждая вершина является крайней угловой точкой.

Матрица экономико-математическая задачи в n-мерном пространстве определяет многогранник, который имеет конечное число вершин. Решить задачу – значит найти параметры крайней угловой точки и затем, двигаясь от вершины к вершине, найти координаты крайней угловой точки, которые придадут целевой функции экстремальное значение. Таким образом, выпуклые тела являются геометрическим представлением экономико-математическая задачи, процесс решения которой связан с оценкой и перебором крайних угловых точек. Процесс перебора вершин, или перемещение от одной вершины к другой, осуществляется с помощью выпуклой линейной комбинации.

Любая точка замкнутого выпуклого множества может быть представлена выпуклой линейной комбинацией его крайних угловых точек. Причем параметры этой точки будут характеризоваться выражением:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$$

при условиях, что

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \alpha_n = 1.$$

Выпуклая линейная комбинация является аппаратом, позволяющим осуществить перебор и оценку параметров крайней угловой точки в соответствии с требованиями, предъявляемыми к экономико-математическая задаче.

Если мы имеем систему линейных неравенств с n-неизвестными и $n + 1$ ограничениями вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots \geq A_1, \\ a_{n+1,1}x_1 + \ldots + a_{n+1,n}x_n \geq A_{n+1}, \end{cases}$$

то общий многогранник решений, или симплекс, будет в том случае, если –

$$\det \neq 0, A_{iAi} \neq 0$$

и алгебраические дополнения столбца свободных членов (A_{iAi}) имеют одинаковые знаки.

П р и л о ж е н и е G

Графический метод решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования с двумя переменными (x_1, x_2) используется графический метод, который состоит из следующих этапов:

а) отображение области допустимых решений на основе составленных ограничений;

б) построение линии целевой функции;

в) определение и вычисление координат точки максимума (при решении задачи на максимум) или минимума (при решении задачи на минимум);

г) расчет значения целевой функции в найденной точке.

При решении задач линейного программирования могут возникать следующие случаи (рис. G1):

1) оптимальное решение единственно;

2) оптимальных решений бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону области допустимых решений;

3) целевая функция не ограничена, т. е. сколько бы не перемещали линию уровня, она не может занять разрешающее положение;

4) область допустимых решений состоит из точки, в которой целевая функция одновременно имеет и максимальное, и минимальное значения;

5) задача решений не имеет, так как система ограничений несовместна.

В общем случае линейный характер целевой функции и выпуклость области допустимых значений позволяют сделать следующий вывод:

оптимальному решению соответствует, по крайней мере, одна из вершин многогранника, описывающего область допустимых решений.

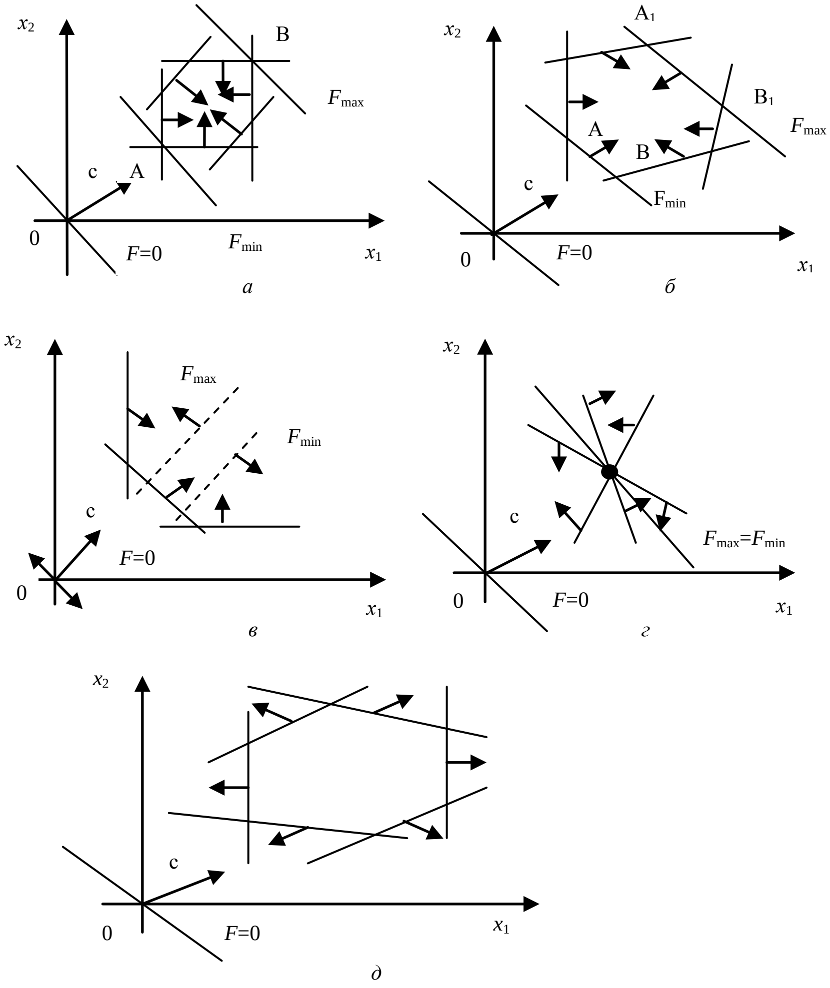


Рис. G1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Алгоритм симплексного метода

Универсальным методом решения задач линейного программирования является симплексный метод, основанный на принципе последовательного улучшения. Его идея состоит в отыскании какой-либо вершины многогранника допустимых решений, проверке ее координат на оптимальность. Если решение неоптимально, то осуществляя переход к другой вершине многогранника, вновь проверяют его на оптимальность. Причем при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (при решении задачи на минимум) или возрастает (в задаче на максимум). Так как выпуклый многогранник имеет конечное число вершин (вследствие конечности числа ограничений задачи), то за определенное количество «шагов» точка оптимума будет найдена.

Пусть дана задача линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.$$

$$F_{\max} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \cdot$$

Представим ее в канонической форме:

$$\begin{cases} y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = A_1, \\ y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = A_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.$$

$$F_{\max} = y \cdot 0 + p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \cdot$$

Для этого в ограничения и целевую функцию модели вводят дополнительные переменные y_i. С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид меньше либо равно (≤), или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения типа больше либо равно (≥).

Решают задачу относительно дополнительных переменных y_i, которые в этом случае образуют базис и называются базисными, а основные переменные x_j являются небазисными. Все расчеты проводят в симплексных таблицах (табл. Н1).

Таблица Н1. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	…	x_n
y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
y_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$F_{\max}$	0	$-p_1$	$-p_2$	…	$-p_n$

Коэффициенты симплексных таблиц имеют определенный экономический смысл. Так, в первой симплексной таблице коэффициенты, стоящие в столбцах небазисных переменных, показывают, на сколько единиц уменьшится при знаке «плюс» или увеличится при знаке «минус» объем ресурсов, если небазисная переменная войдет в план в размере единицы.

Дальнейшая реализация задачи включает поиск допустимого (или опорного) и оптимального решений.

Признаком опорного решения является отсутствие в столбце свободных членов отрицательных коэффициентов и нулей среди базисных переменных.

Изучим различные варианты отсутствия опорного решения. Допустим, в столбце базисных переменных стоит «0». Такая ситуация возникает в случае записи условия задачи в виде ограничения, представленного в виде уравнения. Пусть, например, $y_5 = 0$. Тогда при поиске опорного решения пользуемся следующей методикой:

1. Находим в нулевой строке, т. е. строке, содержащей в базисных переменных «0» (если она есть), любой положительный элемент.

2. Проводя деление коэффициентов столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца с выбранным положительным элементом, находим наименьшее положительное значение, которое укажет на разрешающий коэффициент. Он показывает, какие переменные среди базисных и небазисных меняются местами. Таким образом, «0» из базисных перейдет в небазисные переменные. Такая замена предполагает изменение коэффициентов симплексной таблицы, которые определяются следующим образом.

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий коэффициент. При этом новыми будем называть коэффициенты следующей симплексной таблицы по отношению к предыдущей:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}},$$

где a_{rk} – разрешающий элемент, стоящий в строке r и столбце k, при $r \in i$, $k \in j$;

i – номер строки, $i = 1, \ldots, m$;

j – номер столбца, $j = 1, \ldots, n$;

a'_{rk} – новый коэффициент вместо разрешающего.

2. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента (a'_{rj}) равны предыдущим (a_{rj}), деленным на разрешающий:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}.$$

При $j \neq k$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

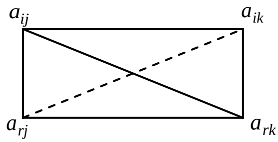
3. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента (a'_{ik}) равны предыдущим, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{-a_{rk}}.$$

При $i \neq r$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента (a'_{ij}), равны частному от деления разности произведения коэффициентов главной и побочной диагоналей на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}.$$



При $i \neq r,\ j \neq k$ это правило не распространяется на коэффициенты строки и столбца разрешающего элемента. При этом коэффициенты прямоугольника с учетом разрешающего элемента относятся к главной диагонали.

Допустим, в новой симплексной таблице «0» из базисных переменных переместился в небазисные. Далее в ней вычеркиваем все коэффициенты нулевого столбца и продолжаем поиск опорного решения.

Итерационная процедура симплекс-метода сводится к последовательному преобразованию симплекс-таблиц, что соответствует целенаправленному переходу от одной вершины симплекса к другой. Поэтому методика поиска опорного решения заключается в том, что среди отрицательных свободных членов выбираем любой. Затем в строке взятого отрицательного свободного члена находим первый отрицательный коэффициент. Делим свободные члены на соответствующие коэффициенты столбца, из которого взяли отрицательный элемент.

Коэффициенты *F*-строки в расчетах по поиску разрешающего элемента не участвуют.

С экономической точки зрения данные положительные симплексные отношения показывают, сколько единиц небазисной переменной можно ввести в базис, если ограниченным является один ресурс.

В случае, если частное от деления на выбранный нами отрицательный элемент получится наименьшим положительным по сравнению с другими положительными частными, то этот отрицательный коэффициент станет разрешающим элементом.

С экономической точки зрения введение x в число базисных переменных означает, что переменная вошла в план, т. е. получила ненулевое значение. В некоторых случаях может получиться, что частное от деления на отрицательный элемент не будет иметь наименьшее значение. Тогда поступаем следующим образом.

В строке отрицательного свободного члена, если это возможно, находим следующий отрицательный элемент и делим свободные члены на соответствующие коэффициенты этого столбца, т.е. столбца с новым отрицательным элементом. Если частное от деления на новый отрицательный коэффициент будет меньшим положительным по сравнению с другими, то этот коэффициент возьмем за разрешающий (разрешающий элемент в симплексной таблице обводим рамкой). Если частное не является наименьшим положительным, то ищем следующий отрицательный коэффициент в строке отрицательного свободного члена и производим те же вычисления до тех пор, пока не найдем разрешающий элемент.

П р и м е ч а н и е 1. Если в строке с отрицательным свободным членом нет ни одного отрицательного коэффициента, то это означает, что система ограничений несовместна, а задача решения не имеет (см. рис. G1, *д*).

Используя вышеизложенные правила, определяем новые коэффициенты второй симплексной таблицы, предварительно меняя местами базисные и небазисные переменные, соответствующие разрешающему коэффициенту.

Преобразования по вышеизложенному алгоритму продолжаются до тех пор, пока не будет найдено опорное решение.

Приступаем к поиску оптимального решения. Опорное решение будет оптимальным, если коэффициенты целевой функции (F-строки) будут отрицательными (или один, несколько нулей) при решении задачи на минимум и положительными (или один, несколько нулей) – при решении на максимум. Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимума функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимума функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим наименьшее положительное частное.

По вышеизложенным правилам определяют коэффициенты новой симплексной таблицы. Рассмотрим их экономическое содержание:

1. Новый коэффициент вместо разрешающего показывает, сколько единиц вводимой в базис небазисной переменной можно иметь за счет единицы ограниченного ресурса.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки показывают, на сколько единиц возрастет при знаке «минус» или уменьшится при знаке «плюс» введенная в базис переменная, если в план ввести небазисную переменную в размере единицы.

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца показывают расход ресурса при знаке «плюс» или поступление ресурса при знаке «минус», если объем ограниченного ресурса уменьшится на единицу.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в разрешающей строке и разрешающем столбце показывают расход ресурса при знаке «плюс» или поступление ресурса при знаке «минус» на единицу небазисной переменной и на величину изменения ранее введенной в план переменной.

П р и м е ч а н и е 2. Если при решении задачи на максимум в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент, а в разрешающем столбце нет ни одного положительного коэффициента, то это говорит о неограниченности функции. Если при решении задачи на минимум в строке целевой функции имеется положительный коэффициент, а в разрешающем столбце все коэффициенты отрицательные, то это приводит к подобному результату. На практике такая ситуация возникает, если при составлении задачи упущено одно или несколько ограничений (см. рис. G1, *в*). Расчеты по изложенной методике выполняем до тех пор, пока не получим оптимальное решение

П р и м е ч а н и е 3. Если в последней симплексной таблице получен оптимальный план, а в строке целевой функции стоит один или несколько нулей, это свидетельствует о множественности решений задачи при одинаковом значении целевой функции. С геометрической точки зрения это означает, что линия уровня проходит через ребро симплекса (см. рис. G1, *б*). Если получен оптимальный план и в строке целевой функции отсутствуют нули, то получено единственное решение задачи. С геометрической точки зрения это означает, что линия уровня прошла через вершину многогранника допустимых решений (см. рис. G1, *а*).

Улучшить характеристики портфеля позволяет комбинация безрисковых ценных бумаг с эффективным рисковым портфелем (рис. I1).

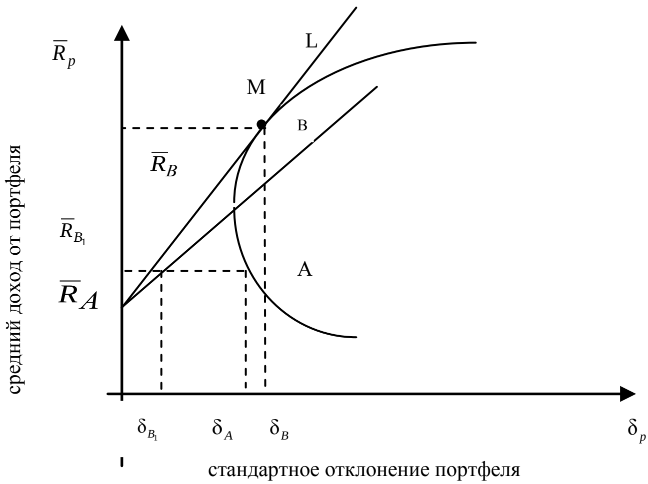


Рис. I1. Рыночные портфели и линия рынка капитала

Обозначим доходность безрисковых ценных бумаг через R_f, вариация безрисковых ценных бумаг равна нулю. Точка B_1 соответствует комбинации эффективного портфеля B с безрисковым активом. Доходность этой комбинации такая же, как у портфеля A, $\overline{R}_{B_1} = \overline{R}_A$, а риск меньше, $\delta_{B1} < \delta_A$.

Комбинированные портфели соответствуют точкам прямой R_fM, которую называют линией рынка капитала (CML – *Capital Market Line*).

Для точек прямой CML выполняется равенство:

$$\overline{R}_p = \alpha R_f + (1-\alpha)\overline{R}_m;$$

$$\delta_p = (1-\alpha)\delta_m,$$

где α – доля капитал инвестора, вкладываемая в безрисковые ценные бумаги.

Если $\alpha > 0$, то инвестор дает взаймы государству, вкладывая долю капитала α в государственные облигации. Точки, соответствующие таким портфелям, лежат на отрезке R_fM (рис. I1). Если $\alpha < 0$, то инвестор занимает под безрисковый процент R_f такую же сумму и инвестирует ее в рыночный портфель M. Точки, соответствующие этим портфелям, лежат на луче ML. $(1 - \alpha)$ – доля капитала, инвестируемого в рыночный портфель. Доля капитала α, вкладываемая инвестором в безрисковые ценные бумаги, зависит от его склонности к риску.

Выразив α из уравнения –

$$\delta_p = (1-\alpha)\delta_m,$$

и подставив в уравнение –

$$\overline{R}_p = \alpha R_f + (1-\alpha)\overline{R}_m,$$

получим:

$$\overline{R}_p = R_f + \frac{\overline{R}_m - R_f}{\delta_m} \cdot \delta_p,$$

где $\overline{R}_p$ – ожидаемая доходность комбинированного портфеля;

δ_p – риск комбинированного портфеля;

$\overline{R}_m$ – ожидаемая доходность рыночного портфеля;

δ_m – риск рыночного портфеля.

Под рыночным портфелем на практике понимают всю совокупность ценных бумаг, представленных на рынке.

Уравнение

$$\overline{R}_p = R_f + \frac{\overline{R}_m - R_f}{\delta_m} \cdot \delta_p$$

является уравнением линии рынка капитала (*CML*).

П р и л о ж е н и е J

Методика обоснования двойственных оценок

Значения двойственных оценок получают в результате решения двойственной задачи, которая составляется на базе прямой задачи.

Рассмотрим прямую задачу.

Допустим, в сельскохозяйственной организации имеются ресурсы $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Их планируется использовать для получения продукции от различных сельскохозяйственных отраслей, размер которых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо определить. При этом общая стоимость продукции должна быть максимальной:

$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

При условиях, что расход ресурсов не должен превышать их наличия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m, \end{cases}$$

где c_j – оценочный коэффициент (стоимость продукции от единицы отрасли вида j);

a_{ij} – расход ресурса вида i на единицу отрасли вида j;

A_i – объем ресурса вида i;

x_j – размер отрасли вида j.

Все неизвестные задачи по своему экономическому смыслу неотрицательны:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.$$

Предположим, что перерабатывающее предприятие решило приобрести все ресурсы, которыми располагает организация, для развития собственного сельхозпроизводства. Необходимо установить объективно обусловленные оценки, т. е.:

$$u_1, u_2, \ldots, u_m,$$

исходя из следующих условий:

1. Стоимость всех ресурсов покупающая сторона стремится минимизировать, т. е.

$$F_{\min} = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_m u_m .$$

2. За ресурсы перерабатывающее предприятие должно заплатить сельскохозяйственной организации не менее той суммы, которую она может получить, организовав собственное производство. Значит, на единицу первой отрасли расходуется a_{11} единиц первого ресурса ценой u_1, a_{21} единиц второго ресурса ценой u_2 и т. д. Следовательно, стоимость всех ресурсов, идущих на производство продукции с единицы первой отрасли, равна:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m$$

и должна быть не менее стоимости продукции, получаемой с единицы первой отрасли:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1.$$

Рассуждая аналогично для второй, третьей и других отраслей, получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n. \end{cases}$$

Таким образом, на базе информации исходной задачи построена новая задача (одна из них является прямой, другая – двойственной).

Сформулируем вышеизложенные задачи в общем виде:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных);

a_{ij} – коэффициент строки i столбца j;

A_i – наличие ресурсов строки i;

c_j – оценочный коэффициент в столбце j.

Прямая задача имеет такой вид:

найти x_j при условии –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \leq A_i, i \in I_0;$$

$$x_j \geq 0;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j .$$

Двойственная задача имеет следующий вид:

найти u_i при условии –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \geq c_j, \; j \in J_0;$$

$$u_i \geq 0;$$

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Следовательно, двойственная задача по отношению к прямой строится по следующей схеме:

а) коэффициенты столбцов прямой задачи являются коэффициентами строк двойственной задачи;

б) знаки ограничений прямой задачи противоположны знакам ограничений двойственной задачи;

в) коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами двойственной задачи;

г) если целевая функция одной из задач максимизируется, то целевая функция другой задачи минимизируется.

Приложение К

Решение прямой задачи линейного программирования симплексным методом

Дана следующая задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \leq 1800, \\ 50x_4 \leq 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808, \\ x_1 \leq 36, \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Решим задачу, используя методику расчетов, приведенную в прил. Н (табл. К1–К4).

Таблица К1. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1800	6	26	2	25
y_3	808	–12	–15	–25	$\boxed{50}$
y_4	36	1	0	0	0
$F_{\max}$	0	–50	–20	0	–70

Т а б л и ц а К2. **Вторая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	y_3
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1396	12	33,5	14,5	–0,5
x_4	16,16	–0,24	–0,3	–0,5	0,02
y_4	36	$\boxed{1}$	0	0	0
F_{max}	1131,2	–66,8	–41,0	–35	1,4

Т а б л и ц а К3. **Третья симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	x_2	x_3	y_3
y_1	24	–1	$\boxed{1}$	1	0
y_2	964	–12	33,5	14,5	–0,5
x_4	24,8	0,24	–0,3	–0,5	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	3536	66,8	–41,0	–35	1,4

Т а б л и ц а К4. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	y_1	x_3	y_3
x_2	24	–1	1	1	0
y_2	160	21,5	–33,5	–19	–0,5
x_4	32	–0,06	0,3	–0,2	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	4520	25,8	41,0	6,0	1,4

П р и л о ж е н и е L

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе LPX.88

F	SOLUTION IS OPTIMAL	DATE	02-05-2025	TIME	12:17:05		
	ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ	*ДАТА*		*ВРЕМЯ*			
MAXIMUM	ENTERS:	BASIS X:	3	VARIABLES:	4		
				ПЕРЕМЕННЫЕ			
PIVOTS: 3	LEAVES:	BASIS S:	1	SLACKS:	4		
ИТЕРАЦИИ			*ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ*				
LAST INV: 0	DELTA 0	RETURN	4520	CONSTRAINTS:	4		
		КРИТЕРИЙ		*ОГРАНИЧЕНИЯ*			

BASIS *БАЗИС*	X.2	S.2	X.4	X.1
PRIMAL *ПРЯМАЯ*	24	160	32	36
DUAL *ДВОЙСТВЕННАЯ*	41	0	1.4	25.8

F_1 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-05-2025
PRIMAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННЫЕ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	VALUE/UNIT *ВЛИЯНИЕ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	NET RETURN *ИЗМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ*
X.1	BASIS (*БАЗИС*)	36	50	50	0
X.2	BASIS	24	20	20	0
X.3	NONBASIS (*НЕБАЗИС*)	0	0	6	-6
X.4	BASIS	32	70	70	0
S.1	NONBASIS	0	0	41	-41
S.2	BASIS	160	0	0	0
S.3	NONBASIS	0	0	1.4	-1.4
S.4	NONBASIS	0	0	25.8	-25.8

F_2 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-05-2025
DUAL PROBLEM SOLUTION *КРИТЕРИЙ* TIME 12:17:11
РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	USAGE *РАСХОД*	SLACK *ОСТАТОК*
Y.1	BINDING (*ДЕФИЦИТ*)	41	60	60	0
Y.2	NONBINDING (*НЕДИФИЦИТ*)	0	1800	1640	160
Y.3	BINDING	1.4	808	808	0
Y.4	BINDING	25.8	36	36	0

F_3 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-05-2025
OBJECTIVE ROW RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:27
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КРИТЕРИЮ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННАЯ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
X.1	BASIS	36	50	24.2	NONE
X.2	BASIS	24	20	14	45.8
X.3	NONBASIS	0	0	NONE	6
X.4	BASIS	32	70	0	100

F_4 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-05-2025
RIGHT HAND SIDE RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:28
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО РЕСУРСАМ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
Y.1	BINDING	41	60	36	64.77612
Y.2	NONBINDING	0	1800	1640	NONE
Y.3	BINDING	1.4	808	-792	1128
Y.4	BINDING	25.8	36	28.55814	60

F_5 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-05-2025
INVERSE COEFFICIENTS *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:29
ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

	RETURN	X.2	S.2	X.4	X.1
X.1	0	0	0	0	1
X.2	0	1	0	0	-1
X.4	0	.3	0	.02	-.06
S.2	0	-33.5	1	-5	21.5

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе Excel «Поиск решения»

Пусть имеем прямую задачу:

1. $x_1 + x_2 + x_3 \le 60$,
2. $6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800$,
3. $50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808$,
4. $x_1 \le 36$,

$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4$.

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде (рис. М1).

Изначально ячейки, значения которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо установить табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка G8 (прибыль), выполнить команду «Сервис → Поиск решения…». Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. М2).

В поле «Изменяя ячейки»: указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. М3), щелкнув по кнопке «Добавить».

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	60
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=6*B3	=26*C3	=2*D3	=25*E4	=СУММ(B5:E5)	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	=12*B3	=15*C3	=25*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+808
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Прибыль, у.д.е.	=50*B3	=20*C3		=70*E4	=B8+C8+E8	=F8
9							

Рис. М1. Информация экономико-математической задачи на рабочем листе Excel

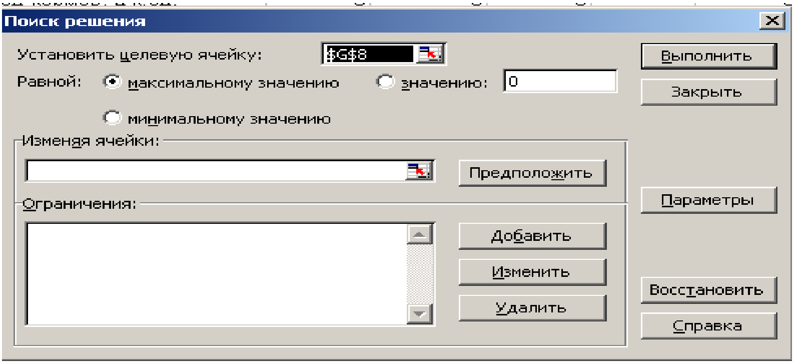


Рис. М2. Диалоговое окно «Поиск решения»

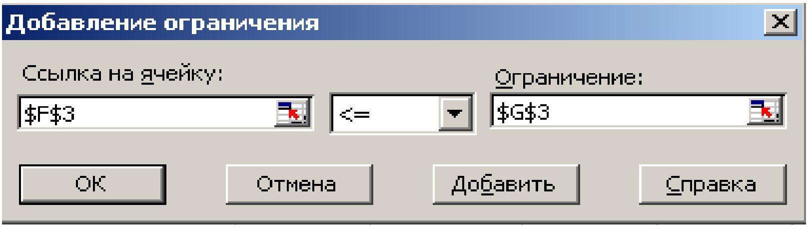


Рис. М3. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения:

Ограничение	Описание
B3:D3≥0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3≤G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5≤G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
E4≥0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7≤G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выход этих кормов с отрасли растениеводства
B3≤36	Площадь посева зерновых культур не может быть больше 40 % от площади пашни (36 га)

После ввода последнего ограничения, щелкнув по кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. М4).

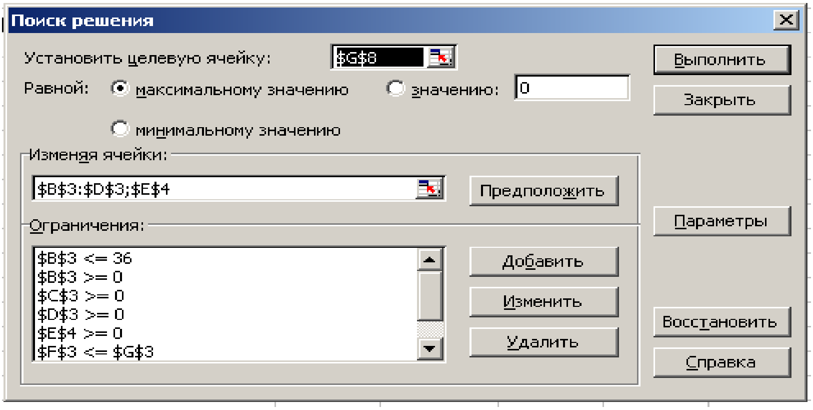


Рис. М4. Диалоговое окно «Поиск решения»

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение задачи (рис. М5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	36	24	0		60	60
4	Поголовье, гол.				32		
5	Затраты труда, чел.-дн.	216	624	0	800	1640	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	432	360	0		792	1600
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				1600	1600	
8	Прибыль, у.д.е.	1800	480		2240	4520	4520
9							

Рис. М5. Результаты решения задачи

Из рис. К5 видны значения неизвестных величин задачи:

$x_1 = 36 \qquad y_1 = 0$

$x_2 = 24 \qquad y_2 = 160$

$x_3 = 0 \qquad y_3 = 0$

$x_4 = 32 \qquad y_4 = 0$

$F_{max} = 4520.$

В диалоговом окне «Результаты поиска решения» (рис. М6) указывают тип отчета.

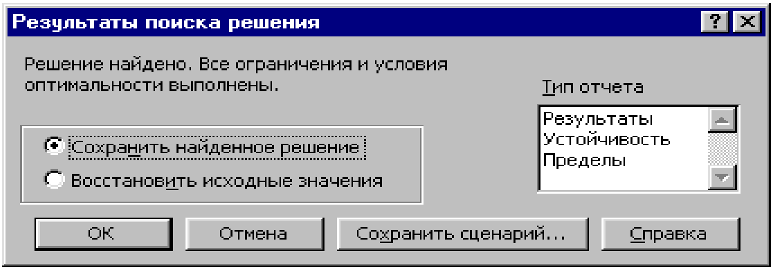


Рис. М6. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Результаты.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

Устойчивость.

Используется для создания отчета, содержащего сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений (рис. М7). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Свете5.xls]Лист1
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B3	Площадь, га Зерновые	36	25,8
C3	Площадь, га Картофель	24	0
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	-6
E4	Поголовье, гол.	32	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F3	Итого	60	41
F5	Затраты труда, чел.-дн. Итого	1640	0
F7	Потребность в кормах, ц к.ед. Итого	1600	1,4

Рис. М7. Отчет по устойчивости

Пределы.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ (рис. М8). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно верхним пределом называется наибольшее значение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Свете5.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Ячейка	Целевое Имя	Значение
G8	Прибыль, у.д.е. Имеется	4520

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
B3	Площадь, га Зерновые	36	36	4520	36	4520
C3	Площадь, га Картофель	24	24	4520	24	4520
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	0	4520	0	4520
E4	Поголовье, гол.	32	0	2280	32	4520

Рис. М8. Отчет по пределам

П р и л о ж е н и е N

Метод ветвей и границ

Пример. Для реконструкции перерабатывающего предприятия было разработано три проекта, каждый из которых характеризуется показателями (табл. N1).

Т а б л и ц а N1. **Характеристика проектов по реконструкции предприятия**

Показатели	Проекты			Ресурсы
	1	2	3	
Затраты труда, чел.-ч	100	120	130	250
Материально-денежные затраты, тыс. у. д. е.	80	60	100	180
Прибыль, тыс. у.д.е.	80	85	90	–

Требуется обосновать выбор проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия с целью максимизации прибыли.

Задача № 1.

Введем неизвестные величины задачи: x_1, x_2 и x_3 – соответственно первый, второй и третий проекты.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3.$$

При условиях:
по использованию труда –

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \leq 250;$$

по использованию материально-денежных средств –

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \leq 180;$$

по неотрицательности переменных –

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;$$

по целочисленности переменных –

$$x_1, x_2, x_3 \text{ – целые числа.}$$

Отбросив условие целочисленности, запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. N2).

Т а б л и ц а N2. **Первая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	$\boxed{100}$
F_{max}	0	–80	–85	–90

Решим задачу симплексным методом (табл. N3–N5).

Т а б л и ц а N3. **Вторая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N4. **Третья симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	$\boxed{0,857}$	–0,014	0,029
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Т а б л и ц а N5. **Четвертая симплексная таблица задачи № 1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_2
x_2	0,555	0,111	0,022	–0,028
x_1	1,833	1,667	–0,016	0,034
F_{max}	193,889	12,779	0,559	0,311

В табл. N5 получено оптимальное решение задачи:

$$x_1 = 1{,}8;$$

$$x_2 = 0{,}6;$$

$$F_{max} = 183{,}06 \text{ тыс. у. д. е.}$$

Значение переменных x_1 и x_2 – дробное. Так как

$$x_2 = 0{,}555,$$

то из области решения исключим полосу, содержащую дробное оптимальное значение x_2, и разобьем задачу на две задачи, добавив в каждую по дополнительному ограничению.

Задача № 2.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \leq 250$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \leq 180$$

$$x_2 \leq 0.$$

Задача № 3.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \leq 250$$

$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \leq 180$$

$$x_2 \geq 1.$$

Поочередно включим дополнительные ограничения во вторую симплексную таблицу (см. табл. N3) и решим задачи № 2 (табл. N6–N9) и №3 (табл. N10–N13).

Т а б л и ц а N6. **Первая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	0	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N7. **Вторая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_3	–0,381	0,095	$\boxed{-0{,}024}$	0,031
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Т а б л и ц а N8. **Третья симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_3	1,793	$\boxed{0{,}802}$	–0,583	0,011
y_1	15,875	–3,958	–41,667	–1,292
F_{max}	162,094	–8,031	30,750	0,893

Т а б л и ц а N9. **Четвертая симплексная таблица задачи № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_1	2,25	1,247	–0,727	0,014
y_1	24,724	4,935	–44,544	–1,238
F_{max}	180	10	25	1

Т а б л и ц а N10. **Первая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N11. **Вторая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_4	–0,619	–0,095	0,024	$\boxed{-0{,}031}$
F_{max}	173,81	–10,952	0,738	–0,06

Т а б л и ц а N12. **Третья симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	$\boxed{0,768}$	0,0085	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а N13. **Четвертая симплексная таблица задачи № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_1	1,3	1,302	0,011	1,217
y_2	16	–3,991	70,774	–35,989
F_{max}	189,0	14	0,8	11

В табл. N9 и N13 получены оптимальные решения задач № 2 и № 3. Сравниваем значения их целевых функций. Так как

$$F_{2max} < F_{3max},$$

то для дальнейших расчетов выбираем задачу № 3 и по переменной x_1 с дробным ее значением снова строим два дополнительных ограничения и разбиваем задачу № 3 еще на две новые задачи.

Задача № 4.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \le 250$$
$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \le 180$$
$$x_1 \le 1.$$

Задача № 5.

$$F_{max} = 80x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

при условиях:

$$100x_1 + 120x_2 + 130x_3 \le 250$$
$$80x_1 + 60x_2 + 100x_3 \le 180$$
$$x_1 \ge 2.$$

Поочередно включаем дополнительные ограничения в табл. N11 и решаем задачи № 4 (табл. N14–N16) и № 5 (табл. N17–N18).

Т а б л и ц а N14. **Первая симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а N15. **Вторая симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,224	–0,768	0,009	$\boxed{0,935}$
y_2	16,903	3,065	0,774	–32,258
x_1	1	1	0	0
F_{max}	185,776	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а N16. **Третья симплексная таблица задачи № 4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	x_3
x_2	1,25	0	0	1,07
y_4	0,24	–0,82	0,01	1,07
y_2	24,63	–3,065	0,77	34,5
x_1	1	1	0	0
F_{max}	186,25	9,17	0,708	2,083

Т а б л и ц а N17. **Первая симплексная таблица задачи № 5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_6	–2	$\boxed{–1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а N18. **Вторая симплексная таблица задачи № 5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	–0,544	0,768	0,009	0,935
y_2	13,838	3,065	0,774	–32,258
x_1	2	–1	0	0
F_{max}	196,544	10,768	0,692	–1,935

Допустимого решения задачи № 5 найти нельзя, так как система ограничений задачи несовместна. Проанализируем оптимальное решение задачи № 4:

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = 1{,}25;$$

$$x_3 = 0,$$

следовательно, в табл. N6 необходимо поочередно ввести ограничения, позволяющие исключить дробную часть значения переменной x_2, т. е.:

$$x_2 \leq 1,$$

$$x_2 \geq 2,$$

и решить задачи № 6 (табл. N19–N22) и № 7 (табл. N23–N27).

Т а б л и ц а N19. **Первая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	$\boxed{–1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N20. **Вторая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	$\boxed{–1,3}$
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	193	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N21. **Третья симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_1
y_2	20	3,077	–32,308	–0,769
x_3	1	0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	175	–10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а N22. **Четвертая симплексная таблица задачи № 6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_4	y_1
y_2	16,923	–3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,231	–0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
x_1	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	185,769	10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а N23. **Первая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_4	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–2	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N24. **Вторая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	–1,3
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–1	0	$\boxed{-1}$	0
F_{max}	131	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N25. **Третья симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_2
y_1	–68	–4	42	$\boxed{-1{,}3}$
x_3	0,6	0,8	0,6	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а N26. **Четвертая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_1
y_2	52,308	3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,077	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	1	0
F_{max}	114,923	–10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а N27. **Пятая симплексная таблица задачи № 7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_7	y_1
y_2	52,0	–4	–36	–0,8
x_1	0,1	1,3	1,2	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	0,9	–1,3	–1,2	–0,01
y_4	1	0	1	0
F_{max}	178	14	11	0,8

В табл. N22 и N27 получены оптимальные решения задач № 6 и № 7. Сравниваем значения их целевых функций. Так как:

$$F_{6max} > F_{7max},$$

то для дальнейших расчетов выбираем задачу № 6 и по переменной x_3 строим два дополнительных ограничения, позволяющих исключить дробную часть значения переменной x_3, т. е. в табл. N2 вводим ранее введенные ограничения и ограничения:

$$x_3 \le 0,$$

$$x_3 \ge 1,$$

получаем две новые задачи: № 8 (табл. N28–N32) и № 9 (табл. N33–N37).

Т а б л и ц а N28. **Первая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	0	0	0	1
F_{max}	0	–80	–85	–90

Т а б л и ц а N29. **Вторая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	0	0	0	$\boxed{1}$
F_{max}	85	–80	–85	–90

Т а б л и ц а N30. **Третья симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
y_1	130	100	120	–130
y_2	120	80	60	–100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	$\boxed{1}$	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	–85	90

Т а б л и ц а N31. **Четвертая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_5	y_6
y_1	130	100	–120	–130
y_2	120	80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
y_4	1	$\boxed{1}$	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	85	90

Т а б л и ц а N32. **Пятая симплексная таблица задачи № 8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_4	y_5	y_6
y_1	30	–100	–120	–130
y_2	40	–80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
x_1	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	165	80	85	90

Задача № 8 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. N32):

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = 1;$$

$$x_3 = 0;$$

$$F_{max} = 165.$$

Т а б л и ц а N33. **Первая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	–1	0	0	–1
F_{max}	0	–80	–85	–90

Т а б л и ц а N34. **Вторая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	–1	0	0	$\boxed{-1}$
F_{max}	85	–80	–85	–90

Т а б л и ц а N35. **Третья симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
y_1	0	100	120	$\boxed{130}$
y_2	20	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0	0	–1
F_{max}	175	–80	–85	–90

Т а б л и ц а N36. **Четвертая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_1
y_6	0	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
y_2	20	80	60	–0,769
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0,769	0,923	0,008
F_{max}	175	–10,769	–1,923	0,692

Т а б л и ц а N37. **Пятая симплексная таблица задачи № 9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_3	y_1
x_1	0	1,30	1,20	0,01
y_2	20	–104,031	–36,021	–1,601
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	–1,30	–1,20	–0,01
y_5	0	0	1	0
x_3	1	–1	0	0
$F_{\max}$	175	14	11	0,8

Задача № 9 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. N37):

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 1;$$

$$x_3 = 1;$$

$$F_{\max} = 175.$$

Сравниваем значения целевых функций задач № 8 и № 9. Так как:

$$F_{9max} > F_{8max},$$

то решением задачи является выбор второго и третьего проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия, позволяющий получить максимальную прибыль, равную 175 тыс. у. д. е.

П р и л о ж е н и е О

Теория графов

Основы теории графов были заложены Л. Эйлером (Леонард Эйлер – швейцарский, прусский и российский математик и механик) в 1736 г. 20-летний Эйлер решил задачу, называемую проблемой Кенигсбергских мостов. Город Кенигсберг (Калининград) был расположен на берегах и двух островах реки Преголи, т. е. схематично это можно изобразить следующим образом (рис. О1).

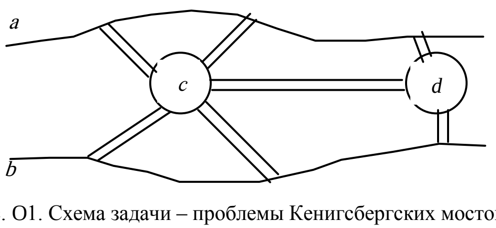


Рис. О1. Схема задачи – проблемы Кенигсбергских мостов

Острова с берегами и между собой были связаны семью мостами. Проблема состояла в том, чтобы совершить прогулку таким образом, чтобы выйдя из любого места города, можно было бы вернуться в него, пройдя только один раз по каждому мосту. Для решения этой задачи Эйлер обозначил каждую часть пути точкой *a, b, c, d*, а каждый мост – линией (т. е. ребром), соединяющей точки (т. е. вершины). Получилась следующая схема, которая называется графом (рис. О2).

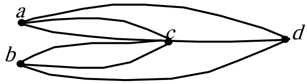


Рис. О2. Граф, схематично изображающий проблему Кенигсбергских мостов

Л. Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Данная задача решается положительно, если каждая из вершин графа связана с четным числом ребер. Число задач, решаемых с помощью графов, росло. Сейчас, например, в торговле и материально-техническом снабжении вершинами графа можно считать поставщиков и потребителей, а ребра или дуги обозначают связи между ними.

П р и л о ж е н и е Р

Матрицы смежности вершин, дуг (ребер) графа

Рассмотрим *матрицу смежности вершин*. Пусть даны следующие графы (рис. Р1–Р2).

Если в орграфе обозначить через a_{ij} число дуг, идущих из вершины E_i в вершину E_j, то матрица $\|a_{ij}\|$ с n строками и n столбцами будет матрицей смежности вершин графа. Для орграфа матрица смежности несимметрична (табл. Р1).

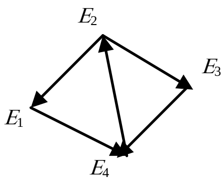


Рис. Р1. Ориентированный граф

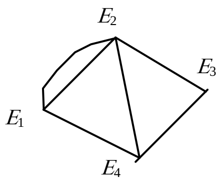


Рис. Р2. Неориентированный граф

Т а б л и ц а Р1. **Матрица смежности вершин орграфа**

E_i	E_j			
	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0	1	0	1
E_2	1	0	1	0
E_3	0	0	0	1
E_4	0	1	0	0

Для неориентированного графа – матрицей смежности вершин симметричная, так как из $(E_i, E_j) \in G$ следует $(E_j, E_i) \in G$ (табл. Р2).

Т а б л и ц а Р2. **Матрица смежности вершин неориентированного графа**

E_i	E_j			
	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0	2	0	1
E_2	2	0	1	1
E_3	0	1	0	1
E_4	1	1	1	0

Обозначим через $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ ребра или дуги графа и построим матрицу смежности ребер или дуг.

Матрицей смежности ребер графа называется матрица:

$$B = \left\| b_{ij} \right\|, \overline{i, j} = \overline{1, m},$$

где m – число ребер графа, причем –

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{e}_i \text{ и } \vec{e}_j \text{ имеют общий конец или общую вершину;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей смежности дуг графа называется квадратная матрица $\left\| b_{ij} \right\|$, где –

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } \vec{e}_i \text{ непосредственно предшествует дуге } \vec{e}_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Построим матрицы смежности дуг (табл. Р3) и ребер (табл. Р4) для орграфа (рис. Р3) и неориентированного графа (рис. Р4).

Т а б л и ц а Р3. **Матрица смежности дуг**

$\vec{e}_i$	$\vec{e}_j$					
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
$\vec{e}_1$	0	1	1	0	0	0
$\vec{e}_2$	1	0	0	0	1	0
$\vec{e}_3$	0	0	0	1	0	0
$\vec{e}_4$	0	0	0	0	0	1
$\vec{e}_5$	0	0	0	0	0	1
$\vec{e}_6$	0	1	1	0	0	0

Т а б л и ц а Р4. **Матрица смежности ребер**

$\vec{e}_i$	$\vec{e}_j$					
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
$\vec{e}_1$	0	1	1	0	1	1
$\vec{e}_2$	1	0	1	0	1	1
$\vec{e}_3$	1	1	0	1	0	1
$\vec{e}_4$	0	0	1	0	1	1
$\vec{e}_5$	1	1	0	1	0	1
$\vec{e}_6$	1	1	1	1	1	0

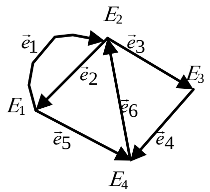


Рис. Р3. Орграф

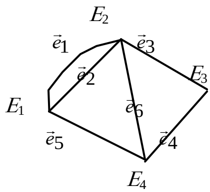


Рис. Р4. Неориентированный орграф

П р и л о ж е н и е Q

Матрица инциденций для дуг (ребер) графа

Построим *матрицу инциденций* для дуг, ребер графа.

Пусть

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_m$$

– дуги, а

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$$

– вершины орграфа, причем граф не имеет петель.

Тогда матрица

$$\left\| c_{ij} \right\| \text{ размером } m \cdot n$$

называется *матрицей инциденций для дуг* орграфа, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \vec{e}_j \text{ выходит из } E_i; \\ -1, \text{если } \vec{e}_j \text{ входит в } E_i; \\ 0, \text{если } \vec{e}_j \text{ не инцидентна } E_i. \end{cases}$$

Если имеем неориентированный граф, то матрица

$$\left\| d_{ij} \right\| \text{ размером } m \cdot n$$

называется матрицей инциденций для ребер графа, где

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } E_i (i = \overline{1,n}) \text{ инцидентна } \vec{e}_j (j = \overline{1,m}); \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для орграфа (см. рис. N3) и неориентированного графа (см. рис. N4) приведем матрицы инциденций для дуг и ребер графа (табл. Q1, Q2).

Т а б л и ц а Q1. **Матрица инциденций для дуг орграфа**

E_i	$\vec{e}_j$					
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
E_1	1	–1	0	0	1	0
E_2	–1	1	1	0	0	–1
E_3	0	0	–1	1	0	0
E_4	0	0	0	–1	–1	1

Т а б л и ц а Q2. **Матрица инциденций для ребер неориентированного графа**

E_i	$\vec{e}_j$					
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
E_1	1	1	0	0	1	0
E_2	1	1	1	0	0	1
E_3	0	0	1	1	0	0
E_4	0	0	0	1	1	1

П р и л о ж е н и е R

Упорядочение вершин графа с помощью матрицы смежности вершин

Рассмотрим упорядочение на матрице смежности вершин связного орграфа без контуров. Обозначим векторы-строки матрицы смежности через:

$$V_{Ei} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), \; i = \overline{1,n} .$$

Найдем компоненты вектора:

$$V_1 = V_{E1} + V_{E2} + ... + V_{En} .$$

Поместим вектор в (n + 1)-строку матрицы. Так как

$$a_{ij} \in \{0,1\},$$

принимает значения 0 и 1, то компоненты вектора V_1 неотрицательны.

Вектор V_1 должен содержать хотя бы одну компоненту, равную нулю. В противном случае граф содержит контур. Компоненты, равные нулю, обозначают вершины, в которые не входит ни одна дуга. Эти вершины относят к первому слою (рангу).

Пусть это будет вершина E_k. Вычисляют компоненты вектора:

$$V_2 = V_1 - V_{E_k} .$$

Он содержит компоненты, равные нулю, поэтому соответствующие вершины относят ко второму слою и т. д. Расчеты продолжают до тех пор, пока не получат вектор-строку, компоненты которой равны нулю. Упорядочив вершины графа по рангам, нумеруют их и строят граф, изоморфный первоначальному. Номера рангов располагают по возрастающей слева направо. Дуги графа располагаются слева направо. Построим матрицу смежности вершин графа, изображенного на рис. R1.

Т а б л и ц а R1. **Упорядочение вершин графа с помощью матрицы смежности вершин**

E_i	E_j							Номер ранга
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	
E_1	0	1	0	1	1	0	0	I
E_2	0	0	1	0	0	0	0	II
E_3	0	0	0	0	0	1	0	III
E_4	0	0	0	0	0	0	1	II
E_5	0	0	1	0	0	1	1	II
E_6	0	0	0	0	0	0	1	IV
E_7	0	0	0	0	0	0	0	IV
V_1	0	1	2	1	1	2	3	
V_2	*	0	2	0	0	2	3	
V_3	*	*	0	*	*	1	1	
V_4	*	*	*	*	*	0	1	
V_5	*	*	*	*	*	*	0	

Находим компоненты вектора:

$$V_1 = (0, 1, 2, 1, 1, 2, 3).$$

Так как $a_{11} = 0$, то вершина x_1 относится к первому рангу (табл. Р1).

Рассчитываем компоненты вектора:

$$V_2 = V_1 - V_{E1} = (0, 1, 2, 1, 1, 2, 3) - (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) = (*, 0, 2, 0, 0, 2, 3).$$

Пронумеруем вершины графа. Изобразим изоморфный граф с упорядоченными по рангам вершинами (рис. R1).

Так как $a_{22} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{25} = 0$, то вершины E_2, E_4, E_5 относим ко второму рангу.

Рассчитаем компоненты вектора:

$$V_3 = V_2 - V_{E2} - V_{E4} - V_{E5} = (*0, 2, 0, 0, 2, 3) - (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) - (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) -$$
$$- (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1) = (*, *, 0, *, *, 1, 1).$$

Так как $a_{33} = 0$, то вершина E_3 относится к третьему рангу.

Определяем компоненты вектора:

$$V_4 = V_3 - V_{x3} = (*, *, 0, *, *, 1, 1) - (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = (*, *, *, *, *, 0, 1).$$

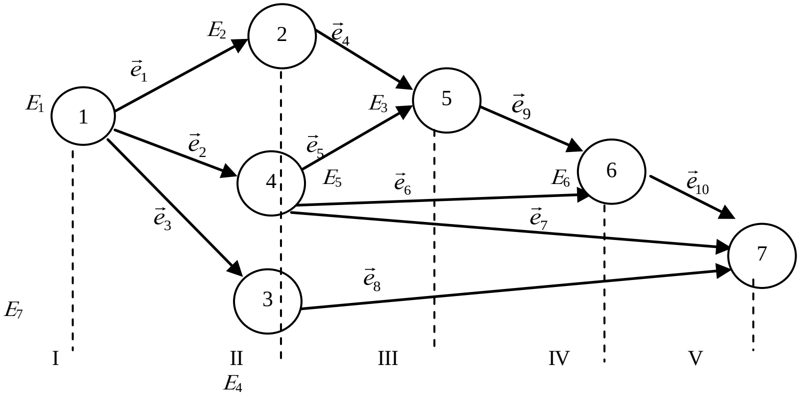


Рис. R1. Граф с упорядоченными по рангам вершинами

Так как $a_{46} = 0$, то вершина E_6 относится к четвертому рангу.

Определяем компоненты вектора:

$$V_5 = V_4 - V_{E6} = (*, *, *, *, *, 0, 1) - (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = (*, *, *, *, *, *, 0),$$

т. е. вершину E_7 относим к пятому рангу.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шафранская Ирина Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
В ЭКОНОМИКЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

В двух частях

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. П. Савчиц*
Технический редактор *Н. Л. Якубовская*

Подписано в печать 22.07.2025. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 9,62.
Тираж 60 экз. Заказ .

Белорусская государственная сельскохозяйственная академия.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в Белорусской государственной сельскохозяйственной академии.
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.