

МОДЕЛЬ КАЧЕНИЯ КОЛЕСА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В. И. ВАСИЛЕВСКИЙ

ОАО «Могилевоблавтотранс»,
г. Могилев, Республика Беларусь, 212013, e-mail: abltrans@bru.mogilev.by

(Поступила в редакцию 03.01.2018)

В работе изложена математическая модель качения колеса по наклонной плоскости, позволяющая обосновать приемы и средства, улучшающие эксплуатационные показатели крутосклонных тракторов в условиях горного земледелия. Разработаны новые уравнения кинематических связей качения колеса на наклонной плоскости, позволившие установить функциональную связь между продольными и боковыми реакциями опорной поверхности колеса. Получена формула, позволяющая определить потерю мощности при возникновении бокового увода колеса при качении по наклонной плоскости, основанная на том, что боковая реакция опорной поверхности колеса всегда направлена перпендикулярно к плоскости обода колеса. Получены динамические уравнения качения колеса и уравнения его кинематических связей, позволяющие решение прямых и обратных задач динамики – определение кинематических параметров качения колеса по наклонной плоскости и определение динамических реакций в контакте колеса с опорной поверхностью.

Ключевые слова: обобщенные координаты, коэффициент сцепления, устойчивость, кинематическая связь, дифференциальные уравнения.

The paper presents a mathematical model of wheel rolling along an inclined plane, which allows us to substantiate techniques and tools that improve operational performance of steep-slope tractors in conditions of mountain agriculture. New equations of kinematic relations of the rolling of a wheel on an inclined plane have been developed, which made it possible to establish a functional relationship between the longitudinal and lateral reactions of the supporting surface of the wheel. A formula has been obtained that allows one to determine the loss of power in the event of a lateral displacement of the wheel when rolling along an inclined plane, based on the fact that the lateral reaction of supporting surface of the wheel is always directed perpendicular to the plane of the rim of the wheel. Dynamic equations of wheel rolling and equations of its kinematic relations have been obtained, which allow solving direct and inverse problems of dynamics – determination of kinematic parameters of wheel rolling along an inclined plane and determination of dynamic reactions during the contact of the wheel with a supporting surface.

Key words: generalized coordinates, coefficient of cohesion, stability, kinematic relation, differential equations.

Введение

Одной из особенностей качения колес крутосклонного трактора является то, что на склоне его ведущие колеса, расположенные ниже по склону, имеют большие нормальные реакции, чем колеса, находящиеся выше по склону. Поэтому ведущие колеса, находящиеся ниже по склону могут реализовать большие касательные силы тяги. Для повышения поперечной устойчивости и тягово-сцепных свойств крутосклонного трактора устанавливают дополнительные пневматические (сдвоенные) или решетчатые металлические колеса на крутосклонный трактор.

Оснащение трактора дополнительными решетчатыми колесами особенно целесообразно при работе на рыхлых и влажных почвах, имеющих пониженную несущую способность. Применяемые решетчатые колеса обычно шире основных пневматических колес и имеют несколько меньший диаметр. Это позволяет не снимать дополнительные колеса при движении по дорогам с горизонтальным профилем, а при работе в поле уменьшить давление ходовой системы трактора на почву в 2 раза и более, увеличить площадь сцепления, снизить буксование (в отдельных случаях до 70 %) и повысить устойчивость трактора даже на склонах до 26° [1,2].

Работа крутосклонного трактора поперек склона вызывает боковой крен корпуса и возникновение боковых реакций опорной поверхности колес. Боковые реакции в свою очередь вызывают боковой увод колес, приводящих к нарушению устойчивости курсового движения, трактора при движении по склону. При этом тракторист, чтобы сохранить заданное направление движения должен непрерывно корректировать движение трактора в сторону подъема. Постоянная коррекция направления движения трактора приводит к его «вилянию», что в итоге снижает силу тяги на ведущих колесах и вызывает утомляемость оператора.

Так как нормальные реакции опорной поверхности ведущих колес определяют тяговую силу и силу, удерживающую колесо на склоне, рассмотрим статическое равновесие колеса на наклонной поверхности (рис. 1).

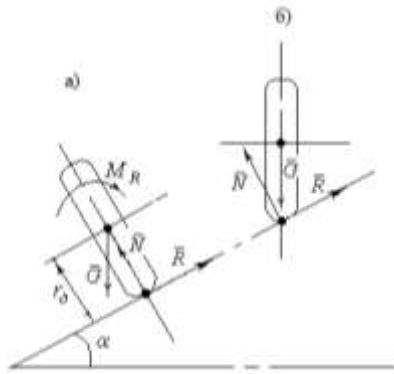


Рис. 1. Силы и моменты, действующие на колесо в положении его статического равновесия на наклонной плоскости

Определим опорные реакции колес на наклонной плоскости при двух положениях колеса. В первом положении плоскость обода перпендикулярна наклонной плоскости (рис.1а). Во втором положении плоскость обода колеса перпендикулярна горизонтальной поверхности (рис.1б).

Для первого положения колеса:

$$R = G \cdot \sin \alpha, N = G \cdot \cos \alpha, M_R = G \cdot r_0 \cdot \sin \alpha, \quad (1)$$

где M_R – реактивный момент, необходимый для удержания колеса на наклонной плоскости; r_0 – динамический радиус качения колеса.

Для второго положения:

$$R = G \cdot \sin \alpha, N = G \cdot \cos \alpha, M_R = 0. \quad (2)$$

Из уравнений статического равновесия первого варианта отличаются от второго только наличием реактивного момента M_R , который необходимо приложить к колесу для обеспечения его статического равновесия. Поэтому второй вариант расположения колеса на наклонной плоскости более предпочтителен для обеспечения условия статического равновесия. В отношении реакции связей можно отметить, что они не зависят от ориентации плоскости обода колеса на склоне.

Допустим, что коэффициенты сцеплений в боковом и в продольном направлении плоскости колеса имеют равные значения. Тогда максимальные значения боковой и продольной реакции для двух положений колес равны:

$$R_{\max} = \varphi_{cy}^{\delta} \cdot N = \varphi_{cy}^{\delta} \cdot G \cdot \cos \alpha; \quad T_{\max} = \varphi_{cy}^{\tau} \cdot N = \varphi_{cy}^{\tau} \cdot G \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Для обеспечения статического равновесия необходимо выполнение следующего условия:

$$\varphi_{cy}^{\delta} \cdot G \cdot \cos \alpha = G \cdot \sin \alpha, \quad (4)$$

откуда:

$$\varphi_{cy}^{\delta} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Для обеспечения статического равновесия продольная реакция, вызванная приложением момента к колесу, должна удовлетворять условию:

$$T_{\max} = \varphi_{cy}^{\tau} \cdot N = \varphi_{cy}^{\tau} \cdot G \cdot \cos \alpha = \frac{M_{\delta}}{r_0}, \quad (6)$$

откуда:

$$\varphi_{cy}^{\tau} = \frac{M_{\delta}}{r_0 \cdot G \cdot \cos \alpha}. \quad (7)$$

Момент M_{δ} , подводимый к колесу, может быть реализован колесом при выполнении условия (7). В то же время известно, что между боковыми и продольными реакциями колеса существует определенная закономерность, которая может быть проиллюстрирована диаграммой изменения коэффициентов сцепления от величины скольжения пятна контакта (рис. 2) [1].

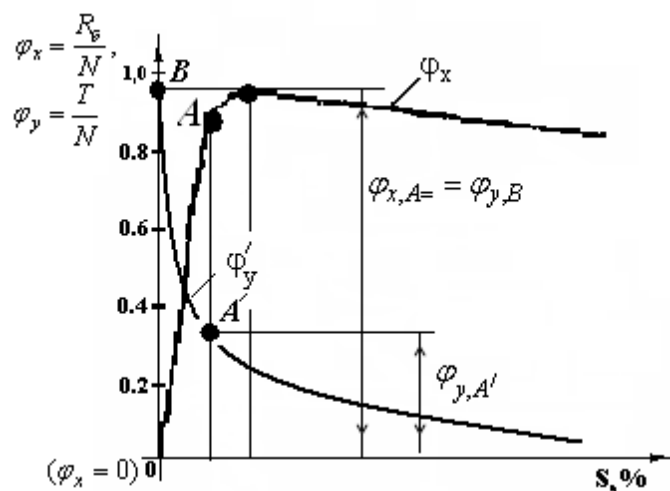


Рис. 2. Диаграмма изменения коэффициентов сцеплений в зависимости от относительного скольжения пятна контакта колеса (тормозной, тяговый режимы)

Отметим, что представленная диаграмма изменения коэффициента сцепления в тяговом и тормозном режимах качения колеса имеют идентичный характер.

Из рис. 2 видно, что с увеличением коэффициента сцепления в продольном направлении колеса φ_x , коэффициент сцепления в боковом направлении φ_y уменьшается. Коэффициенты сцеплений в боковом и в продольном направлениях колеса пропорциональны силам в его контакте с опорной поверхностью, а их изменения характеризуют изменение сил в боковом и в продольном направлениях. Максимальный момент, приложенный к колесу, может быть реализован только при условии, что $\varphi_x = 0$. Наличие боковой реакции колеса на наклонной плоскости, вызванное весом колеса, не позволяет реализовать максимальный момента по условиям сцепления колеса с плоскостью, что приводит к ухудшению тягово-скоростных свойствах трактора при работе на склоне. Функциональную связь между продольной и боковой реакциями колеса сложно представить из диаграммы (рис.2), поэтому из изменения представим в виде эллиптической зависимости, которая подтверждена многими исследователями [3,5 и др.]:

$$T = \frac{T_{max}}{R_{max}} \sqrt{R_{max}^2 - R^2}, \quad (8)$$

где T – текущее значение продольной реакции колеса; R – текущее значение боковой реакции. T_{max}, R_{max} – определяются уравнениями (3).

Из уравнения (8) видно, что при отсутствии боковой реакции ($R = 0$) продольная реакция колеса T принимает максимальное значение. С учетом уравнений (3) уравнение (8) формула изменения касательной силы в зависимости от угла наклона α опорной поверхности можно представить в виде:

$$T = \frac{\varphi_{cy}^{\tau}}{\varphi_{cy}^{\delta}} G \sqrt{(\varphi_{cy}^{\delta} \cdot \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2}. \quad (9)$$

Уравнение (9) позволяет определить максимальную продольную реакцию (касательная сила тяги) при работе колеса на склоне. Максимальная продольная реакция колеса T равна при условии, что:

$$\cos \alpha = 1; \quad \sin \alpha = 0, \quad (10)$$

т.е. при условии $\alpha = 0$:

$$T_{max} = \varphi_{cy}^{\tau} \cdot G. \quad (11)$$

Колесо не может реализовать продольную реакцию T при условии, что:

$$\varphi_{cy}^{\delta} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (12)$$

т. е. формула (9) удовлетворяет частному случаю, представленной формулой (5).

При выполнении условия (12), какие бы моменты M_{∂} не были приложены к колесу:

$$T = 0. \quad (13)$$

Формулу (8) можно представить и в другой форме:

$$R = \frac{R_{max}}{T_{max}} \sqrt{T_{max}^2 - T^2}.$$

Из данной формулы следует, что при увеличении касательной силы T путем увеличения передающего к колесу момента M_{∂} , величина боковой реакции уменьшается, что приведет к более раннему боковому скольжению колеса на склоне.

Рассмотренные условия равновесия относятся к условиям статического равновесия. Для определения динамического режима качения колеса требуется составление динамических уравнений его качения. Для составления динамической модели качения колеса на склоне рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 3.

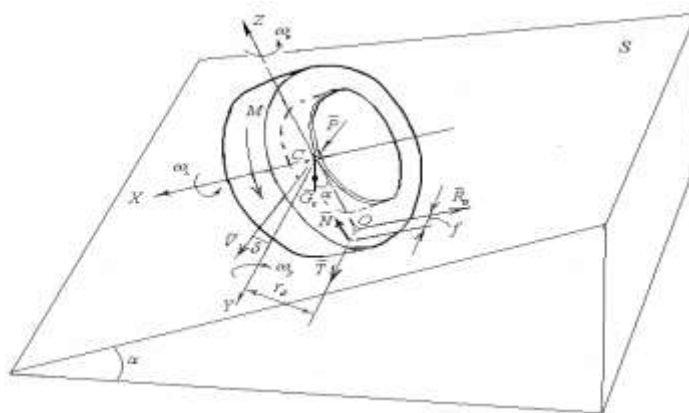


Рис. 3. Расчетная схема качения колеса на склоне

Особенностью математической модели качения колеса трактора является то, что колесный трактор (любая колесная машина) относится к классу неголономных систем, имеющих неинтегрируемые кинематические связи качения колес (неголономные кинематические связи) и не могут быть описаны методами классической механики. Поэтому для описания качения колеса используют методы механики неголономных систем [4,6 и др.].

Дадим краткое пояснение о необходимости использования методов механики неголономных систем при разработке математической модели качения колеса на склоне, который является основой теоретических исследований курсового движения трактора на склоне. Дело в том, что в классической механике для исследования динамики движения твердого тела задаются силами или законом его движения (обычно задаются уравнения в параметрической форме, включающее время). По заданным силам определяют закон движения тела, траекторию, скорость движения и т.д. При условии, что заданы параметрические уравнения движения тела, решают задачу определения сил, действующих на тело. При исследовании динамики движения трактора решают одновременно две задачи – определение закона движения трактора (траектория, скорость) и определение сил, действующих в контакте колес трактора с опорной поверхностью. Следовательно, для решения задачи в данной постановке необходимы дополнительные условия, каковыми являются уравнения кинематических связей качения колеса с опорной поверхностью. Уравнения кинематических связей качения колеса представляют собой определенные условия, которые исследуют качение колеса, в зависимости от постановки задач исследований, для определения кинематических параметров движения корпуса трактора и сил, действующих в контакте колеса с опорной поверхностью.

На рис. 3 представлены: \bar{N} – реакция опорной поверхности колеса, направленная перпендикулярно наклонной плоскости S и смещенная от геометрического центра на величину f_k ;

f_k – коэффициент сопротивления качению, измеряемая в единицах длины; \bar{P} – сила, приложенная к центру масс колеса C_k , проходящая вдоль оси Y ; \bar{R}_σ – боковая реакция опорной поверхности колеса, перпендикулярная плоскости жесткого обода колеса; M – тяговый момент на ведущем колесе, передаваемый от двигателя; r_δ – динамический радиус качения колеса; α – угол наклона плоскости качения колеса; \bar{V} – скорость центра масс колеса; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости вращения колеса относительно осей координат X, Y и Z .

На рис. 3 не представлены упругие элементы, характеризующие упругие свойства колеса, а их наличие будем неявно подразумевать при составлении динамических уравнений качения колеса на наклонной плоскости.

При исследовании динамического режима качения колеса возникает необходимость решения прямых и обратных задач механики – это определение закона движения колеса и определение сил в контакте колес с опорной поверхностью. Для решения прямых и обратных задач механики составим уравнения кинематических связей колеса с наклонной плоскостью из условий отсутствия бокового и продольного скольжения его пятна контакта [4–6].

Условие отсутствия бокового скольжения пятна контакта колеса, можно записать в виде:

$$\dot{X}_c^2 \sin^2 \delta + \dot{Y}_c^2 \cdot \cos^2 \delta - \dot{\phi}_x^2 \cdot r_\delta^2 \cdot \sin^2 \delta = 0. \quad (14)$$

Условие отсутствия продольного скольжения пятна контакта колеса, запишется в виде:

$$\dot{X}_c^2 \cos^2 \delta + \dot{Y}_c^2 \cdot \sin^2 \delta - \dot{\phi}_x^2 \cdot r_\delta^2 \cdot \cos^2 \delta = 0. \quad (15)$$

Условием чистого качения колеса на наклонной плоскости является:

$$\dot{\phi}_x^2 \cdot r_\delta^2 \cdot \cos \alpha - \dot{X}_c^2 - \dot{Y}_c^2 = 0. \quad (16)$$

Полученные уравнения представляют собой нелинейные уравнения кинематических связей колеса с опорной поверхностью. Отметим, что боковая реакция колеса связана с углом увода следующим соотношением:

$$R_\sigma = k_y \cdot \delta, \quad (17)$$

где k_y – коэффициент сопротивления боковому уводу, зависящий от свойств пневматической шины.

Динамические уравнения качения колеса запишем с помощью уравнения Лагранжа 1-го рода с неопределенными множителями Лагранжа λ_i – суть реакции связей колеса с опорной поверхностью, где i – число уравнений кинематических связей колеса. В нашем случае имеем три уравнения кинематических связей качения колеса по наклонной плоскости.

Уравнение Лагранжа первого рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_i} + Q_{qi}, \quad (18)$$

где T – кинетическая энергия колеса; Π – потенциальная энергия катящегося колеса; Φ – диссипативная функция, характеризующая рассеивание энергии; λ_i – неопределенные множители Лагранжа [4]; q_i – обобщенные координаты, характеризующие кинематические параметры движения колеса при его качении; \dot{q}_i – обобщенные скорости, характеризующие кинематические параметры движения колеса при его качении; Q_{qi} – обобщенные силы.

Для рассматриваемого случая качения колеса число обобщенных координат равно трем – X, Y и угол поворота колеса φ .

Для исследования динамики качения колеса с кинематическими связями составим динамические уравнения движения. Для этого определим кинетическую энергию катящегося колеса по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_{\kappa} \dot{X}_c + \dot{\xi}_x \right)^2 + m_{\kappa} \left(\dot{Y}_c + \dot{\xi}_y \right)^2 + m_{\kappa} \dot{\xi}_z^2 + J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2, \quad (19)$$

где J_{κ} – момент инерции колеса относительно его оси вращения; \dot{X}_{κ} , \dot{Y}_{κ} – обобщенные скорости.

Потенциальная энергия деформируемого колеса равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[c_x \xi_x^2 + c_y \xi_y^2 + c_z \xi_z^2 \right], \quad (20)$$

где ξ_x , ξ_y , ξ_z – деформации пневматика вдоль осей координат X, Y, Z.

Диссипативная функция (диссипация энергии от вязкого сопротивления в слоях корда шины):

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[c_x \dot{\xi}_x^2 + c_y \dot{\xi}_y^2 + c_z \dot{\xi}_z^2 \right]. \quad (21)$$

Обобщенные силы, входящие в уравнение Лагранжа (18) по перечисленным обобщенным координатам, равны [4–6]:

$$Q_x = G \cdot (\sin \alpha + f_{\kappa} \cdot \cos \alpha), \quad Q_y = G \cdot \varphi_{cy} \cdot \cos \alpha, \quad Q_z = G \cdot \cos \alpha. \quad (22)$$

Определим компоненты уравнения Лагранжа первого рода:

– по координате X:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_{\kappa}} = m_{\kappa} (\dot{X}_{\kappa} + \dot{\xi}_x), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_{\kappa}} \right) = m_{\kappa} (\ddot{X}_{\kappa} + \ddot{\xi}_x), \quad \frac{\partial T}{\partial X_{\kappa}} = 0; \quad (23)$$

– по координате Y:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}_c} = m_{\kappa} (\dot{Y}_c + \dot{\xi}_y), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}_c} \right) = m_{\kappa} (\ddot{Y}_c + \ddot{\xi}_y), \quad \frac{\partial T}{\partial Y_{\kappa}} = 0; \quad (24)$$

– по координате ξ_z :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_z} = m_{\kappa} \dot{\xi}_z, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_z} \right) = m_{\kappa} \cdot \ddot{\xi}_z, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_z} = 0; \quad (25)$$

– по относительной координате ξ_x :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_x} = m_{\kappa} (\dot{Y}_c + \dot{\xi}_x), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_x} \right) = m_{\kappa} (\ddot{Y}_c + \ddot{\xi}_x), \quad \frac{\partial T}{\partial Y_c} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_x} = c_x \xi_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\xi}_x} = \alpha_x \dot{\xi}_x;$$

– по относительной координате ξ_y :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_y} = m_{\kappa} (\dot{Y}_c + \dot{\xi}_y), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_y} \right) = m_{\kappa} (\ddot{Y}_c + \ddot{\xi}_y), \quad \frac{\partial T}{\partial Y_c} = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_y} = c_y \xi_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\xi}_y} = \alpha_y \dot{\xi}_y;$$

– по угловой координате φ_x :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} = J_x \dot{\omega}_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} \right) = J_x \ddot{\omega}_x, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = 0;$$

– по угловой координате φ_y :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} = J_y \omega_y, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} \right) = J_y \dot{\omega}_y, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_y} = 0;$$

– по угловой координате φ_z :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_z} = J_z \omega_z, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_z} \right) = J_z \dot{\omega}_z, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_z} = 0.$$

Система динамических уравнений качения колеса имеет вид:

- 1) $m_k \ddot{X}_c + m \ddot{\xi}_x = 2\lambda_1 \cdot \dot{X}_c \cos^2 \delta + G \cdot (\sin \alpha + f_k \cdot \cos \alpha) - 2\lambda_2 \cdot \dot{X}_c^2;$
- 2) $m_k \ddot{Y}_c + m_k \ddot{\xi}_y = 2\lambda_1 \cdot \dot{Y}_c \sin^2 \delta + 2\lambda_2 \cdot \dot{Y}_c \cdot \cos^2 \delta - 2\lambda_3 \cdot \dot{Y}_c^2 + G \cdot \varphi_{cy} \cdot \cos \alpha;$
- 3) $m_k \cdot \ddot{\xi}_z = -c_x \xi_x - \alpha_x \dot{\xi}_x;$
- 4) $m_k \cdot \ddot{Y}_k + m_k \cdot \ddot{\xi}_x = -c_x \xi_x - \alpha_x \dot{\xi}_x;$
- 5) $m_k \ddot{Y}_c + m_k \cdot \ddot{\xi}_y = -c_y \xi_y - \alpha_y \dot{\xi}_y;$
- 6) $J_x \dot{\omega}_x = M_\partial - T;$
- 7) $J_y \dot{\omega}_y = -M_y;$
- 8) $J_z \dot{\omega}_z = -M_z.$

(28)

Совокупность полученной системы уравнений (28) и уравнений кинематических связей (14–16) позволяют решение прямых и обратных задач динамики качения колеса по наклонной плоскости.

Наличие постоянной боковой реакции колеса \bar{R}_σ на склоне вызывает возникновение угла увода колеса δ , оказывающей влияние на траекторию движения центра масс колеса, точки «С_к» и потери мощности при качении. Потеря мощности из-за возникновения угла увода можно определить по формуле:

$$N_\delta = R_\sigma \cdot V \cdot \sin \delta = R_\sigma \sqrt{\dot{X}_{c_k}^2 + \dot{Y}_{c_k}^2} \sin \delta. \quad (29)$$

Мощность, затрачиваемая на преодоление сопротивления качению колеса:

$$N_{f_k} = N \cdot f_k \cdot \omega_x. \quad (30)$$

Мощность, затрачиваемая на преодоление сопротивления поступательному движению центра масс колеса:

$$N_f = G \cdot f_k \cdot V. \quad (31)$$

Мощность, затрачиваемая на преодоление стабилизирующего момента во вращательном движении вокруг оси Z:

$$N_z = M_z \cdot \dot{\varphi}_z.$$

Для исключения опрокидывающего момента колеса, возникающего за счет возникновения статического момента M_R (см. формулу (1)) и создания комфортного условия для тракториста необходима стабилизация колеса на склоне. Под стабилизацией колеса на склоне понимается принудительное его перемещение в поперечной плоскости, до установки остова трактора в вертикальное положение по отношению к горизонтальной плоскости.

Заключение

1. Получена функциональная зависимость между силой тяги ведущего колеса и боковой реакцией его опорной поверхности, которая может быть представлена в форме эллипса.

2. Получена формула, позволяющая определить потерю мощности при возникновении бокового увода колеса при качении по наклонной плоскости, основанная на том, что боковая реакция опорной поверхности колеса всегда направлена перпендикулярно к плоскости обода колеса.

3. Получены динамические уравнения качения колеса и уравнения его кинематических связей, которые позволяют решение прямых и обратных задач динамики – определение кинематических параметров качения колеса по наклонной плоскости и определение динамических реакций в контакте колеса с опорной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесные тракторы для работы на склонах / П. А. Амельченко [и др.]. – М.: Машиностроение, 1978. – 248 с.
2. Взаимодействие стабилизируемого колеса с наклонной опорной поверхностью / В. В. Гуськов [и др.] // Тракторы и сельхозмашины. – 1974. – №5. – С.8 – 11.
3. Вонг, Дж. Теория наземных транспортных средств / Дж. Вонг. – М.: Машиностроение, 1982. – 282 с.
4. Неймарк, Ю.Н. Динамика неголономных систем / Ю. Н. Неймарк, Н. А. Фуфаев. - М.: Наука, 1967. - 520 с.
5. Эллис, Д.Р. Управляемость автомобиля / Д. Р. Эллис. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
6. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.